УДК 517.962

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2025-5(46)-1469-1482

Євсєєва Наталія Олексіївна кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автомобілів, теплових двигунів та гібридних енергетичних установок, Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, тел.: (061) 769-84-12, https://orcid.org/0000-0002-3398-6537

Сухонос Роман Федорович магістр, старший викладач кафедри автомобілів, теплових двигунів та гібридних енергетичних установок, Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, тел.: (061) 769-82-41, https://orcid.org/0000-0001-9683-3389

Рябошапка Наталя Євгеніївна старший викладач кафедри автомобілів, теплових двигунів та гібридних енергетичних установок, Національний університет «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, тел.: (061) 769-82-41, https://orcid.org/0000-0003-0334-8363

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОКРЕМИХ ТЕПЛОВИХ ЗАДАЧ В МАШИНОБУДУВАННІ ТА МЕТАЛУРГІЇ

Анотація. Сучасний розвиток машинобудування, металургії та інших галузей промисловості неможливий без точної оцінки теплових процесів під час виготовлення та експлуатації матеріалів і конструкцій. Ефективність виробничих процесів, зменшення енергетичних витрат та дотримання екологічних стандартів значною мірою залежать від можливості прогнозувати та контролювати теплофізичні процеси в різних технологічних галузях.

Теплофізичні процеси є складними і багатофакторними, які включають не лише теплові явища (теплопровідність, конвекцію, випромінювання), але й термонапруження, хімічні реакції, фазові переходи, зміни структури матеріалів та інші взаємодії, які суттєво впливають на надійність та довговічність технічних систем, що значно ускладнює їх аналіз та моделювання. Варто зазначити, що такі теплофізичні задачі широко застосовуються в багатьох реальних та виробничих процесах, починаючи з моделювання температурних полів у конструктивних елементах та матеріалах, до визначення теплових режимів складних технологічних систем.

У зв'язку з цим актуальним стає створення та дослідження ефективного математичного моделювання, придатного для опису поведінки об'єктів за умов теплового навантаження. Аналіз та розв'язання теплових задач відіграє важливу роль в проектуванні та удосконалення технологічних процесів та

забезпечення надійної та тривалої роботи промислового обладнання. Подібні задачі часто містять складну геометрію об’єктів, нестаціонарний режим функціонування та нелінійний характер теплофізичних властивостей матеріалів, що вимагає застосування чисельних методів, які дозволяють отримати не тільки наближенні, але й достатньо точні результати.

Одним з найбільш поширених є метод кінцевих різниць (МКР), який дозволяє вирішувати рівняння теплопровідності в різних координатно-часових умовах.

Таким чином, дослідження та удосконалення чисельних методів, які використовуються для розв’язання теплофізичних задач, має важливе наукове та практичне значення. Це дозволяє підвищити якість та точність інженерних рішень, оптимізувати технологічні процеси та забезпечити ефективність, стабільність та працездатність сучасних технічних систем.

Ключові слова: теплофізичні процеси, метод кінцевих різниць, апроксимація, диференційний оператор, температурне поле, теплопровідність.

Yevsyeyeva Natalya Oleksivna PhD, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Automobiles, Heat Engines and Hybrid Power Plants, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, tel.: (061) 769-84-12, https://orcid.org/0000-0002-3398-6537

Sukhonos Roman Fedorovych MSc, Senior lecturer of the Department of Automobiles, Heat Engines and Hybrid Power Plants, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, tel.: (061) 769-82-41, https://orcid.org/0000-0001-9683-3389

Ryaboshapka Natalya Evgenivna, Senior lecturer of the Department of Automobiles, Heat Engines and Hybrid Power Plants, National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, Zaporizhzhia, tel.: (061) 769-82-41, https://orcid.org/0000-0003-0334-8363

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING SPECIFIC HEAT TRANSFER PROBLEMS IN MECHANICAL ENGINEERING AND METALLURGY

Abstract. The modern development of mechanical engineering, metallurgy, and other industries is impossible without accurate assessment of thermal processes during the manufacture and operation of materials and structures.

The efficiency of production processes, reduction of energy costs, and compliance with environmental standards largely depend on the ability to predict and control thermophysical processes in various technological industries.

Thermophysical processes are complex and multifactorial, including not only thermal phenomena (thermal conductivity, convection, radiation), but also thermal stresses, chemical reactions, phase transitions, changes in the structure of materials, and other interactions that significantly affect the reliability and durability of technical systems, which significantly complicates their analysis and modeling.

It is worth noting that such thermophysical problems are widely used in many real and production processes, ranging from modeling temperature fields in structural elements and materials to determining thermal regimes of complex technological systems.

In this regard, the creation and study of effective mathematical modeling, capable of describing the behavior of objects under thermal load conditions, becomes relevant. Analysis and solution of thermal problems plays an important role in the design and improvement of technological processes and ensuring reliable and long-term operation of industrial equipment.

Such problems often involve complex geometry of objects, non-stationary operating modes, and nonlinear nature of thermophysical properties of materials, which requires the use of numerical methods that allow obtaining not only approximate, but also sufficiently accurate results.

One of the most common is the finite difference method (FDM), which allows solving heat conduction equations in different coordinate-time conditions.

Thus, the study and improvement of numerical methods used to solve thermophysical problems is of great scientific and practical importance. It allows to improve the quality and accuracy of engineering solutions, optimize technological processes and ensure the efficiency, stability and operability of modern technical systems.

Keywords: thermophysical processes, finite difference method, approximation, differential operator, temperature field, thermal conductivity.

Постановка проблеми. У багатьох інженерних задачах, що стосуються аналізу міцності та деформацій конструкцій, виникає необхідність у чисельному розв’язанні математичних моделей, які описують фізичні властивості і поведінку матеріалів та окремих елементів конструкцій під впливом різних теплових режимів та навантажень. Таке моделювання та чисельне вирішення задач може вимагати значних зусиль для їх розв’язання, особливо у випадках коли передбачає підвищену складність, особливо коли присутні складні граничні умови або зміна режимів навантаження.

У зв’язку з цим набули значного поширення чисельні методи, які дозволяють отримати наближені, але досить точні результати. Серед найбільш доступних та ефективних методів для розв’язання таких задач вирізняється метод кінцевих різниць (МКР), який забезпечує можливість перетворення диференціальних рівнянь, що описують фізичні процеси, на систему алгебраїчних рівнянь, зручних для реалізації на комп'ютері. Метод кінцевих різниць доцільний для застосування в задачах з простою геометрією, наприклад, для тіл у вигляді пластин, брусів або циліндрів, а також для задач, у яких можливо побудувати регулярну сітку.

Простота реалізації цього методу, його універсальність та гнучкість у застосуванні роблять його невід'ємним інструментом у машинобудуванні, металургії та інших технічних галузях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Огляд останніх досліджень і публікацій в Україні, присвячених чисельному вирішенню теплових задач, зокрема методом кінцевих різниць та іншими підходами. Сучасні дослідження часто поєднують МКР з іншими чисельними методами для підвищення ефективності та точності розв'язання поставлених задач в різних областях науки і техніки [1–6].

В системах машинобудування та металургії основними теплофізичними процесами є теплопровідність при певних граничних умовах існування систем. Від розподілу температури залежить багато факторів: механічні та експлуатаційні властивості матеріалів, надійність виробів та конструкцій. Задачі теплопровідності аналітично в реальних умовах вирішити дуже складно або неможливо, тому вони розв'язуються чисельними методами, зокрема, методом кінцевих різниць, (Finite Difference Metod, FDM). На сьогодні метод кінцевих різниць є ефективним засобом, що дозволяє вирішувати нелінійні рівняння теплопровідності з складною геометрією та неоднорідними властивостями матеріалів [1, 7, 8].

Метод кінцевих різниць полягає у тому, що поле дії іскомої функції замінюється на вузли сітки або дискретно розташовані точки, для яких похідні, що входять до диференційного рівняння, замінюються на відповідні наближені різниці відношення цієї функції.

Теплові задачі, які вирішуються в машинобудуванні та металургії охоплюють такі напрямки [6, 9]:

– роботу двигунів та механізмів при високих температурах;

– теплове зношування та деформація інструментів при обробці матеріалів;

– термічну обробку (лиття, гартування, відпускання, нормалізація).

Мета статті – дослідження, оптимізація та удосконалення чисельних методів теплових задач в галузях машинобудування та металургії поданням диференційних операторів у кінцево-різницевій формі

Виклад основного матеріалу. Методика та алгоритм розв'язання теплових задач наведено в фізико-математичної моделі окремих теплофізичних задач. Такий підхід дозволяє з'ясувати особливості та специфіку реальних теплофізичних процесів з урахуванням властивостей матеріалів [9, 10].

Подання диференціальних операторів у кінцево-різницевій формі з відповідним визначенням граничних та початкових умов забезпечує можливість чисельного розв'язання рівнянь теплопровідності. Це дає можливість зробити моделювання теплових процесів у складних геометричних областях з високою точністю. Кінцево-різницевий метод є зручним інструментом для дискретизації (перетворення функцій неперервних змінних у дискретних змінних за якими початкові неперервні функції можуть бути відновлені із заданою точністю) області розв'язання і побудови чисельної схеми, яка може бути реалізована в обчислювальному тепловому режимі [1, 11].

Перша похідна від температури T за період часу τ апроксимується у кінцевих різницях таким рівнянням:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T_{n,m,p}^{k+1} - T_{n,m,p}^{k}}{\Delta \tau}. \qquad (1),$$

де n, m, p – точки координати в просторовій сітці x, y, z; k + 1 – момент часу або наступний часовий крок; k – попередній момент часу, який відстоїть від моменту часу k + 1 на Δτ (крок дискретизації за часом) секунд назад.

Перша похідна від температури за часом є першим порядком точності за часом. Реалізація такого співвідношення проста та потребує меншого обчислювального потенціалу, але має обмеження щодо дотримання умови стійкості, яка в залежності від кроку просторової сітки та коефіцієнта теплопровідності визначає допустимий розмір кроку за часом.

На рисунку 1 наведено схему кінцево-різницевої тривимірної нерівномірної сітки у прямокутній системі координат. Рівномірною називають сітку з однаковими кроками у межах кожної з координат.

Зазначимо переваги використання нерівномірної сітки:

– адаптація сітки до геометрії складних конструкцій та властивостей матеріалів;

– наявність умов ущільнення сітки в зонах з різкими перепадом температури (наявність теплових джерел);

– раціональне та економічне використання обчислювальних ресурсів у зонах де зміни незначні.

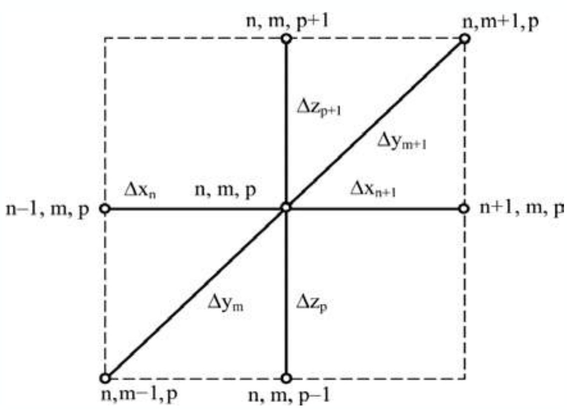

Рисунок 1 – Схема кінцево-різницевої тривимірної нерівномірної сітки у прямокутній системі координат

В теплових задачах (теплопровідності, гідродинаміки та інших) застосовують розклад у ряд Тейлора для апроксимації похідних в частинних диференціальних рівняннях. Це надає можливості перетворити безперервні моделі на дискретні, які відповідають всім вимогам для чисельного розв'язання методом кінцевих різниць [2].

Отримання першої похідної засновано на використанні розкладення функції у ряд Тейлора.

Для точки n – 1, m, p маємо:

$$T_{n-1} = T_n - \Delta x_n T'_n + \frac{\Delta x_n^2}{2!} T''_n - \frac{\Delta x_n^3}{3!} T''' + \frac{\Delta x_n^4}{4!} T_n^{IV} - \ldots \quad (2)$$

Звідси отримано:

$$T'_n = \frac{1}{\Delta x_n}\left(T_n - T_{n-1}\right) + \frac{\Delta x_n}{2!} T''_n - \frac{\Delta x_n^2}{3!} T''' + \frac{\Delta x_n^3}{4!} T_n^{IV} - \ldots \quad (3)$$

Якщо прийняти, що

$$T'_n \cong \frac{1}{\Delta x_n}\left(T_n - T_{n-1}\right), \quad (4)$$

тобто перша похідна апроксимується як різниця «ліворуч», залишковий член буде дорівнювати:

$$R_1\left(\Delta x_n\right) = \frac{\Delta x_n}{2!} T''_n - \frac{\Delta x_n^2}{3!} T''' + \frac{\Delta x_n^3}{4!} T_n^{IV} - \ldots \quad (5)$$

З розкладення у ряд Тейлора функції T_{n+1} для точки n + 1, m, p, отримаємо:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta x_{n+1} T' + \frac{\Delta x_{n+1}^2}{2!} T''_n + \frac{\Delta x_{n+1}^3}{3!} T'''_n + \frac{\Delta x_{n+1}^4}{4!} T_n^{IV} + \ldots \quad (6)$$

Звідси знайдемо:

$$T'_n = \frac{1}{\Delta x_{n+1}}\left(T_{n+1} - T_n\right) + \frac{\Delta x_{n+1}}{2!} T''_n + \frac{\Delta x_{n+1}^2}{3!} T'''_n + \frac{\Delta x_{n+1}^3}{4!} T_n^{IV} + \ldots \quad (7)$$

та

$$T'_n = \frac{1}{\Delta x_{n+1}}\left(T_{n+1} - T_n\right) + R_2\left(\Delta x_{n+1}\right). \quad (8)$$

Існує більш точна формула апроксимації першої похідної від T за x. Для її отримання вираз (3) помножимо на Δx_{n+1}^2, вираз (6) – на Δx_n^2 і перший отриманий вираз віднімемо від другого. Остаточно має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} T'_n = \frac{1}{\Delta x_n \Delta x_{n+1}\left(\Delta x_n + \Delta x_{n+1}\right)} \cdot \Big[\Delta x_n^2 T_{n+1} + \left(\Delta x_{n+1}^2 - \Delta x_n^2\right) T_n - \\ - \Delta x_{n+1}^2 T_{n-1}\Big] + 0\left(\Delta x_n \Delta x_{n+1}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Похибка апроксимації у цьому варіанті пропорційна до добутку кроків сітки $\Delta x_n \cdot \Delta x_{n+1}$.

На рівномірній сітці за умови рівних кроків $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = \Delta x$ з (9) отримаємо:

$$T'_n \cong \frac{1}{2\Delta x}\left[T_{n+1} - T_{n-1}\right]. \qquad (10)$$

У цьому випадку похибка апроксимації пропорційна до квадрата кроку Δx^2 0 (Δx^2).

Вирази (9) та (10) являють собою апроксимацію першої похідної від T за x центральною різницею на нерівномірній та рівномірній сітці відповідно.

Апроксимація першої похідної центральною різницею більш бажана, ніж апроксимація різницею «ліворуч» та «праворуч», оскільки при цьому похибка пропорційна до квадрата кроку Δx^2, а не до першого ступеня Δx, що має місце при апроксимації «ліворуч» та «праворуч» [10].

Зменшення похибки апроксимації першої похідної може бути досягнуто також за рахунок збільшення кількості сусідніх вузлів сітки.

Так, наприклад, триточечна формула апроксимації першої похідної на правомірній сітці має вигляд:

$$T'_n \cong \frac{1}{3\Delta x_{n+1} - \Delta x_{n+2}}\left[-3T_n + 4T_{n+1} - T_{n+2}\right]. \qquad (11)$$

На рівномірній сітці вираз (11) набуде вигляду:

$$T'_n = \frac{1}{2\Delta x}\left[-3T_n + 4T_{n+1} - T_{n+2}\right], \qquad (12)$$

і буде апроксимувати першу похідну на нерівномірній сітці з похибкою, що пропорційна до кроку сітки у квадраті Δx^2.

Аналогічно вираз (11) можна записати:

$$T'_n \cong \frac{1}{3\Delta x_n - \Delta x_{n-1}}\left[3T_n - 4T_{n-1} + T_{n-2}\right], \qquad (13)$$

яке на рівномірній сітці має вигляд:

$$T'_n \cong \frac{1}{2\Delta x}\left[3T_n - 4T_{n-1} + T_{n-2}\right]. \qquad (14)$$

Кінцево-різницева апроксимація другої похідної T та x.

Для цього вираз (2) помножимо на Δx_{n+1}, а вираз (6) – на Δx_n й складемо отримані вирази. Виконавши необхідні перетворення будемо мати:

$$\left.\begin{aligned} T''_n = \frac{2}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}}\left[\frac{1}{\Delta x_{n+1}}T_{n+1} - \left(\frac{1}{\Delta x_n} + \frac{1}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n + \frac{1}{\Delta x_n}T_{n-1}\right] - \\ -\frac{1}{3}\left(\Delta x_{n+1} - \Delta x_n\right)T'_n - \frac{1}{12}\left(\Delta^2_{n+1} - \Delta x_n \Delta x_{n+1} + \Delta x_n^2\right)T_n^{IV} - \dots \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Прийнявши

$$T_n'' \cong \frac{2}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}} \left[\frac{1}{\Delta x_{n+1}} T_{n+1} - \left(\frac{1}{\Delta x_n} + \frac{1}{\Delta x_{n+1}} \right) T_n + \frac{1}{\Delta x_n} T_{n-1} \right]. \quad (16)$$

на рівномірній сітці, тобто при $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = \Delta x$, вираз (15) набуває такого виду:

$$T_n'' = \frac{1}{\Delta x^2} \left[T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1} \right] - \frac{1}{12} \Delta x^2 T_n^{IV} \ldots . \quad (17)$$

Прийнявши

$$T_n'' \cong \frac{1}{\Delta x^2} \left[T_{n+1} - 2T_n + T_{n-1} \right], \quad (18)$$

знайдемо, що залишковий член дорівнює

$$R(\Delta x) = -\frac{1}{12} \Delta x^2 T_n^{IV} \ldots . \quad (19)$$

Тут доречно відмітити, що якщо іскома функція T має похідні третього та більш високих порядків, які дорівнюють нулю, то, як випливає з (15), вираз (16) є точною апроксимацією другої похідної на нерівномірній сітці. На рівномірній сітці співвідношення (18) є точною кінцево-різницевою апроксимацією другої похідної функції T, якщо похідні від цієї функції четвертого і більш високих порядків дорівнюють нулю.

Кінцево-різницева апроксимація диференційного оператора вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (20)$$

де коефіцієнт теплопровідності $\lambda(x)$ є функцією температури, що змінюється за координатою x.

Для диференційного оператора (20) кінцево-різницева апроксимуюча схема на нерівномірній сітці має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cong \frac{2}{\Delta x_n + \Delta x_{n+1}} \left[\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}} T_{n+1} - \left(\frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n} + \frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}} \right) T_n + \frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n} T_{n-1} \right] . \quad (21)$$

На рівномірній сітці при $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = \Delta x$ цей вираз буде виглядати так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cong \frac{1}{\Delta x^2} \left[\bar{\lambda}_{n+1} T_{n+1} - \left(\bar{\lambda}_n + \bar{\lambda}_{n+1} \right) T_n + \bar{\lambda}_n T_{n-1} \right]. \quad (22)$$

У цих співвідношеннях $\bar{\lambda}_n$ та $\bar{\lambda}_{n+1}$ називаються зведеними коефіцієнтами теплопровідності й визначаються за виразами [1]:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{2\lambda_{n-1} \cdot \lambda_n}{\lambda_{n-1} + \lambda_n}, \qquad \bar{\lambda}_{n+1} = \frac{2\lambda_n \cdot \lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}. \quad (23)$$

Кінцево-різницева апроксимація диференційного оператора вигляду

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad (24)$$

який подамо наступним чином

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}. \qquad (25)$$

У виразі (25) підставимо (9) і (16) й виконаємо необхідні перетворення. На нерівномірній сітці отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\cong\frac{2r_n+\Delta r_n}{r_n\Delta r_{n+1}\left(\Delta r_n+\Delta r_{n+1}\right)}T_{n+1}-\frac{2r_n-\Delta r_{n+1}+\Delta r_n}{r_n\Delta r_n\Delta r_{n+1}}T_n+\\+\frac{2r_n-\Delta r_{n+1}}{r_n\Delta r_n\left(\Delta r_n+\Delta r_{n+1}\right)}T_{n-1}.\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Цей вираз на рівномірній сітці спроститься й запишеться так:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\cong\frac{2r_n+\Delta r}{2r_n\Delta r^2}T_{n+1}-\frac{2}{\Delta r^2}T_n+\frac{2r_n-\Delta r}{2r_n\Delta r^2}T_{n-1}. \qquad (27)$$

При достатньо великому r_n, тобто при $r_n\to\infty$, вирази (26) й (27) перетворюються на відповідні вирази для прямокутних координат (16) та (18).

При $r_n = 0$, тобто на осі симетрії формули апроксимації (26) і (27) використовувати неможна, оскільки при цьому отримуємо невизначеність 0/0 для виразу $\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}$ ($\frac{\partial T}{\partial r}=0$ при $r = 0$ з приводу осьової симетрії).

Скориставшись правилом Лопіталя, розкриємо цю невизначеність

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}.$$

Отже, вираз (25) на осі симетрії, тобто при $r = 0$, набуває вигляду:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\cong 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \qquad (28)$$

або у кінцево-різницевій формі з урахуванням виразу (18):

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\cong\frac{2}{\Delta x^2}\left[T_{n+1}-2T_n+T_{n-1}\right]. \qquad (29)$$

Кінцево-різницева апроксимація диференційного оператора вигляду

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right]. \qquad (30)$$

№ 5(46) 2025
Наука і техніка сьогодні
серії: право, економіка, педагогіка, техніка, фізико-математичні науки

Оскільки

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{1}{r}\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}, \tag{31}$$

скориставшись виразами (9) та (27), отримаємо кінцево-різницеву апроксимацію на нерівномірній сітці:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right]\cong\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}+\frac{1}{2r_n}\right)\cdot\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta r_{n+1}}T_{n+1}-\\&-\left[\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}+\frac{1}{2r_n}\right)\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta r_{n+1}}+\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}-\frac{1}{2r_n}\right)\frac{\overline{\lambda}_{n}}{\Delta r_{n}}\right]T_n+\\&+\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}-\frac{1}{2r_n}\right)\cdot\frac{\overline{\lambda}_{n}}{\Delta r_{n}}T_{n-1},\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

де $\overline{\lambda}_n$ і $\overline{\lambda}_{n+1}$ зведені коефіцієнти теплопровідності обчислюються за виразами (23).

У цьому випадку, коли λ є сталою величиною, тобто $\overline{\lambda}_{n+1}=\overline{\lambda}_n=\lambda$, вираз (32) набуває наступного вигляду:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\lambda}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right]\cong\lambda\left\{\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}+\frac{1}{2r_n}\right)\cdot\frac{T_{n+1}}{\Delta r_{n+1}}-\right.\\&-\left[\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}+\frac{1}{2r_n}\right)\frac{1}{\Delta r_{n+1}}+\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}-\frac{1}{2r_n}\right)\frac{1}{\Delta r_{n}}\right]T_n+\\&\left.+\left(\frac{2}{\Delta r_n+\Delta r_{n+1}}-\frac{1}{2r_n}\right)\cdot\frac{T_{n-1}}{\Delta r_{n}}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Вираз (32) на рівномірній сітці запишемо так:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[r\cdot\lambda(r)\frac{\partial T}{\partial r}\right]\cong\frac{2r_n+\Delta r}{\Delta r_n\cdot\Delta r^2}\overline{\lambda}_{n+1}T_{n+1}-\\&-\frac{1}{2r_n\Delta r^2}\left[(2r_n+\Delta r)\overline{\lambda}_{n+1}+(2r_n-\Delta r)\overline{\lambda}_{n}\right]T_n+\frac{2r_n-\Delta r}{2r_n\cdot\Delta r^2}\overline{\lambda}_n\cdot T_{n-1}.\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Цей вираз при λ = const набуде вигляду:

$$\frac{1}{r}\cdot\lambda\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]\cong\lambda\left\{\frac{2r_n+\Delta r}{2r_n\cdot\Delta r^2}T_{n+1}-\frac{2}{\Delta r^2}T_n+\frac{2r_n-\Delta r}{2r_n\cdot\Delta r^2}T_{n-1}\right\}. \tag{35}$$

Нелінійне рівняння для нестаціонарного одномірного температурного поля

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right],$$

з урахуванням виразів (1) і (22) подамо у кінцевих різницях у загальному вигляді:

$$\left.\begin{aligned} c\cdot\rho\frac{1}{\Delta\tau}\left(T_n^{k+1}-T_n^k\right)=\frac{2\sigma}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k+1}-\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k+1}+\right.\\ \left.+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n-1}^{k+1}\right]+\frac{2(1-\sigma)}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k}-\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k}+\right.\\ \left.+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n+1}^{k}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

З цього рівняння можна отримати окремі випадки кінцево-різницевого рівняння, прийнявши відповідні значення коефіцієнта σ, який визначає сполучення явної і неявної форми апроксимації.

При σ = 0 отримуємо рівняння, що складено за явною формулою:

$$\left.\begin{aligned} c\cdot\rho\frac{1}{\Delta\tau}\left[T_n^{k+1}-T_n^k\right]=\frac{2}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k}-\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k}+\right.\\ \left.+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n-1}^{k}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Тут вирішення на наступному інтервалі часу T_n^{k+1} одержують через значення на попередньому інтервалі T_n^{k+1} за явними формулами.

З рівняння (36), прийнявши σ = 1, знайдемо кінцево-різницеве рівняння, що складено за явною формулою:

$$\left.\begin{aligned} c\cdot\rho\frac{1}{\Delta\tau}\left[T_n^{k+1}-T_n^k\right]=\frac{2}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k+1}-\left(\frac{\overline{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k+1}+\right.\\ \left.+\frac{\overline{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n+1}^{k+1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

При σ = 1/2 отримаємо рівняння, що складено за шести точковою симетричною формою:

$$\left.\begin{aligned} c\cdot\rho\frac{1}{\Delta\tau}\left[T_n^{k+1}-T_n^k\right] &= \frac{1}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k+1}-\left(\frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k+1}+\right.\\ &\left.+\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n+1}^{k+1}\right]+\frac{1}{\Delta x_n+\Delta x_{n+1}}\cdot\left[\frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n}T_{n-1}^{k}-\left(\frac{\bar{\lambda}_n}{\Delta x_n}+\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}\right)T_n^{k}\right]+\\ &+\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}T_{n+1}^{k}\Big]^{*}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Це рівняння розділимо на c·ρ. Позначимо

$$\bar{a}_n=\frac{\bar{\lambda}_n}{c\cdot\rho}; \qquad \bar{a}_{n+1}=\frac{\bar{\lambda}_{n+1}}{c\cdot\rho}, \tag{40}$$

де $\bar{a}$ – середній коефіцієнт температуропровідності матеріалу, м^2/с, визначається за співвідношенням аналогічним до (23).

У виразах (40) використовують значення масової теплоємності «с» відповідно до умов задачі: «с» може бути сталою величиною або відомою функцією температури.

Рівняння (39) подамо на рівномірній сітці з урахуванням (40):

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{\Delta\tau}\left[T_n^{k+1}-T_n^k\right] &= \frac{1}{2x^2}\left[\bar{a}_n T_{n-1}^{k+1}-(\bar{a}_n+\bar{a}_{n+1})T_n^{k+1}+\bar{a}_{n+1}T_{n+1}^{k+1}\right]+\\ &+\frac{1}{2x^2}\left[\bar{a}_n T_{n-1}^{k}-(\bar{a}_n+\bar{a}_{n+1})T_n^{k}+\bar{a}_{n+1}T_{n+1}^{k}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Якщо теплофізичні властивості матеріалу прийнято від температури незалежними, тобто α = const, останнє рівняння можна подати у такому вигляді

$$\frac{2\Delta x^2}{a\cdot\Delta\tau}\left[T_n^{k+1}-T_n^k\right]=T_{n-1}^{k+1}-2T_n^{k+1}+T_{n+1}^{k+1}+T_{n-1}^{k}-2T_n^{k}+T_{n+1}^{k}. \tag{42}$$

Кінцево-різницеве рівняння на рівняння на рівномірній сітці у шеститочечній симетричній формі має порядок похибки $0\left(\Delta\tau^2+\Delta x^2\right)$.

Висновки. З наведеного аналізу випливає, що точність кінцево-різницевої апроксимації диференційних операторів залежить від кроку сітки та часових інтервалів, так чим дрібніше крок сітки (Δx або Δτ) або інтервал часу Δτ, тим точніший результат. Тому, при розробці алгоритму вирішення тієї чи іншої задачі крок часу і інтервал сітки повинні обиратися з урахуванням отримання необхідної точності вирішення та технічних можливостей обчислювальних систем, що використовується.

Таким чином, диференційне рівняння теплопровідності може бути наближено системою алгебраїчних рівнянь, складених у явній, неявній і шеститочковій формах.

Розв’язання за допомогою обчислювальної техніки системи алгебраїчних рівнянь, поданих у явній формі, значно простіше, ніж вирішення алгебраїчних виразів, складених у неявній формі, оскільки значно простіше програмується, вимагає меншого об’єму оперативної машинної пам’яті й часу виконання. Проте явні схеми у порівнянні з неявною накладають суттєві обмеження на забезпечення стійкості розв’язку системи алгебраїчних рівнянь. Вирішення кінцево-різницевого рівняння вважається стійким, якщо малі похибки, що виникають у процесі вирішення (наприклад, при округленні), з часом не накопичуються та залишаються малими навіть при безмежному зростанні номера тимчасового інтервалу й шару. Вирішення кінцево-різницевого рівняння буде нестійким, якщо ці похибки зростають.

Можна зробити висновок, що для обчислення кінцево-різницевих рівнянь слід використовувати тільки форми та методи стійких вирішень.

Література:

1. Chapra S. C., Canale R. P. Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill Education, 2021. 1008 p.

2. Луньов В. В., Бєліков С. Б., Улітенко О. М., Євсєєва Н. О. Фізико-математична модель та алгоритм розрахунку теплофізичних процесів твердіння зливка у виливниці // Теория и практика металлургии. 2011. № 1–2. С. 26–32.

3. Луньов В. В., Бєліков С. Б., Улітенко О. М. Фізико-математична модель та алгоритм розрахунку теплофізичних процесів твердіння зливка у виливниці // Теория и практика металлургии. 2004. № 2 (40). С. 18–21.

4. Valberg H. S. Applied Metal Forming: Including FEM Analysis. Cambridge University Press, 2010. 465 p. DOI: 10.1017/CBO9780511801907

5. Gadala M. S., Wang J. Simulation of metal forming processes with finite element method // International Journal For Numerical Methods in Engineering. 1999. № 44(10). P. 1397–1428 DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990410)44:10<1397::AID-NME496>3.0.CO;2-3

6. Слинько Г. І., Бєліков С. Б., Улітенко О. М. Теплотехнічні процеси та теплова обробка матеріалів і виробів. Мелітополь: ООО «Издательский дом Мелитопольской городской типографии». 2011. 258 с.

7. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи. Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

8. Волонтир Л. О, Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Чисельні методи. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с.

9. Євсєєва Н. О. Особливості чисельних розрахунків теплофізичних процесів // Тиждень науки – 2014 : зб. тез доп. наук.-практ. конф. викладачів, науковців, молодих учених, аспірантів, студентів ЗНТУ. Т. 1. Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. С. 76–77.

10. Євсєєва Н. О., Сметанко О. В. Методика чисельного розв’язання теплових задач // Тиждень науки. Тези доповідей науково-практичної конференції, Запоріжжя, 18–12 квітня 2016 р. Т. 1. Запоріжжя : ЗНТУ, 2016. С. 106–107.

11. Бондарчук Ю. В., Олійник Б. В. Основи дискретної математики. Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2009. 160 с.

References:

1. Chapra, S. C., Canale, R. P. (2021). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 1008. [in English].

2. Lunyov, V. V., Belikov, S. B., Ulitenko, O. M., Yevsyeyeva, N. O. (2011). Fiziko-matematichna model ta algoritm rozrahunku teplofizichnih procesiv tverdinnya zlivka u vilivnici [Physical-mathematical model and algorithm for calculating the thermophysical processes of ingot solidification in a mold] // *Teoriya i praktika metallurgii – Theory and Practice of Metallurgy*, 1–2, 26–32. [in Ukrainian].

3. Lunyov, V. V., Belikov, S. B., Ulitenko, O. M. (2004). Fiziko-matematichna model ta algoritm rozrahunku teplofizichnih procesiv tverdinnya zlivka u vilivnici [Physical-mathematical model and algorithm for calculating the thermophysical processes of ingot solidification in a mold] // *Teoriya i praktika metallurgii – Theory and Practice of Metallurgy*, 2 (40), 18–21. [in Ukrainian].

4. Valberg H. S. (2010). *Applied Metal Forming: Including FEM Analysis*. Cambridge University Press, 465. DOI: 10.1017/CBO9780511801907 [in English].

5. Gadala, M. S., Wang, J. (1999). Simulation of Metal Forming Processes With Finite Element Method // *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 44(10), 1397–1428 DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990410)44:10<1397::AID-NME496>3.0.CO;2-3 [in English].

6. Slynko, G. I., Belikov, S. B., Ulitenko, O. M. (2011). *Teplotehnichni procesi ta teplova obrobka materialiv i virobiv [Thermal processes and heat treatment of materials and products]*. Melitopol: LLC "Publishing house of Melitopol city printing house", 258. [in Ukrainian].

7. Zadachin, V. M., Konyushenko, I. G. (2014). *Chiselni metodi [Numerical methods]*. Kharkiv: Publishing house of KhNEU named after S. Kuznets, 180. [in Ukrainian].

8. Volontyr, L. O., Zelinska, O. V., Potapova, N. A., Chikov, I. A. (2020). *Chiselni metodi. [Numerical Methods]*. Vinnytsia: VNAU, 322 p. [in Ukrainian].

9. Yevseeva, N. O. (2014). Osoblivosti chiselnih rozrahunkiv teplofizichnih procesiv [Peculiarities of numerical calculations of thermophysical processes] // Proceedings from Annual Scientific and Practical Conference *Tizhden nauki-2014 – Science Week-2014.* Volume 1 (pp. 91–92). Zaporizhzhia: Zaporizhzhia National Technical University. [in Ukrainian].

10. Yevsyeyeva, N.O., Smetanko, O.V. (2016). Metodika chiselnogo rozv'yazannya teplovih zadach [Methodology of numerical solution of thermal problems] // Proceedings from Annual Scientific and Practical Conference *Tizhden nauki – Science Week*. Volume 1 (pp. 106–107). Zaporizhzhia: Zaporizhzhia National Technical University. [in Ukrainian].

11. Bondarchuk, Y. V., Oliynyk, B. V. (2009). Osnovi diskretnoyi matematiki [Fundamentals of Discrete Mathematics]. Kyiv: Publishing House "Kyiv-Mohyla Academy", 160. [in Ukrainian].