УДК 517.9

Онуфрієнко В.М.[1]
[1]д-р фіз.-мат. наук, проф. ЗНТУ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЄМНОСТІ ФРАКТАЛЬНОГО КОМПАКТА З ЕРЕДИТАРНИМ ЕФЕКТОМ

Останнім десятиріччям актуалізуються математичні дослідження питання про реалізації від‘ємної ємності як виду представлення від‘ємної реактивної провідності, що є еквівалентною індуктивністю [1].

Застосування поняття фракталу в математичному моделюванні динамічних систем наділяє їх властивостями, властивими складним нелінійним системам, наприклад, ефектами ередитарності, в яких враховується не тільки теперішній стан системи або найближчий попередній стан (тобто початкові значення параметрів стану системи, а також деякі похідні за часом), але також і всі попередні стани, в яких перебувала дана система. Диференціальні рівняння дробових порядків, що виникають у таких моделях, знаходять своє самостійне застосування в багатьох областях фізико-математичної й технічної науки [2, 3] і називаються за термінологією В. Вольтерра ередитарними [4]. Поняття ередитарності означає наявність в досліджуваному процесі ефекту пам'яті або нелокальності за часом. Нелокальність за часом, що міститься в ядрі інтегрального оператора вихідного рівняння називається функцією пам'яті. Якщо функція пам'яті є степеневою (в наших задачах з фрактальною геометрією компактів і неперервним розподілом фізичних параметрів на них та в задачах з фрактальними розподілами зарядів і струмів на гладких компактах), то виникає природний перехід до рівнянь з дробовими похідними.

Диферінтегральна модель струмопровідних фрактальных радіоелементів розвивається на основі вводу хаусдорфової метрики та міри фрактальних компактів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) в метаматеріальному середовищі [2] та у часі.

Для виявлення екзотичних ефектів, що можуть виникати у фізично реалізовних приладах з від‘ємними ємностями та індуктивностями, розглядаємо математичні основи побудови фрактальної моделі імітації від‘ємної ємності наношару у просторі і часі як функції множини за аналогією фізичного поняття електростатичної ємності $C = Q/U$, де Q – заряд, U – потенціал.

Для моделювання кусково-неперервного у просторі заряду (струму) $Q(x,t)$ з розривами 1-го роду в точках $x_1, x_2, \ldots$ та скачками $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ у фрактальному середовищі розглянемо $Q_1(x,t) = Q(x,t) - \sum\limits_k \Delta_k \theta(x - x_k)$.

Для одиничної функції виду $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ та її дробової похідної

${}_0D_x^{\alpha}\theta(x) = \theta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^{\alpha}, & x > 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$ порядку α дія на заряд (струм) $Q(x,t)$ з урахуванням формул інтегрування частинами дає

$$(\theta^{(\alpha)}(x), Q(x,t)) = (\theta(x), (-1)^{\alpha} Q^{(\alpha)}(x,t)) = (-1)^{\alpha} \int\limits_0^{\infty} Q^{(\alpha)}(x,t)dx = Q^{(\alpha-1)}(0,t) \quad ,(1)$$

звідки одержуємо зв'язок між похідною порядку α одиничної функції та похідною порядку $\alpha - 1$ дельта-функції: $\theta^{(\alpha)}(x) = \delta^{(\alpha-1)}(x)$, $\theta^{(\alpha)}(x - x_0) = \delta^{(\alpha-1)}(x - x_0)$, або $\theta^{(1+\alpha)}(x) = \delta^{(\alpha)}(x)$, $\theta^{(1+\alpha)}(x - x_0) = \delta^{(\alpha)}(x - x_0)$. Очевидно, що введена функція неперервна всюди та має звичайну похідну за виключенням скінченного числа точок. Перша похідна від регулярного функціоналу $Q_1(x,t)$ збігається з регулярним функціоналом, що визначається функцією $Q_1(x,t)$. Результати диференціювання можна узагальнити у вигляді

$$Q_1^{(1+\alpha)}(x,t) = Q^{(1+\alpha)}(x,t) - \sum_k \Delta_k \delta^{(\alpha)}(x - x_k). \quad (2)$$

У спробах знаходження густини заряду з розподілом у вигляді звичайної функції $Q(x)$, похідна якої існує у звичайному сенсі за виключенням, можливо, окремих точок, але не є локально інтегровною функцією, може виникати своєрідна ситуація, що полягає у розбіжності інтегралу $(Q', f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q'(x) f(x) dx$, який, таким чином, не може визначатись як функціонал. Але такий інтеграл є збіжним, коли $Q'(x)$

дорівнює нулю в околі точки x_0 з неінтегровною особливістю. У зв‘язку з цим впроваджують довизначення функціоналу побудовою такого, що на основні функції діє за формулою: $(Q', f) = -(Q, f') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q'(x) f(x) dx$, що і виступає регуляризацією густини заряду(струму) $Q'(x)$.

Введення інтегродиференціалів в опис моделі фрактальних множин дозволяє розглядати таким чином наявність в точках компакту неінтегровної густини зарядів(струмів) та ємності $\alpha -$ фрактально конфігурованого компакту.

Для виявлення ефекту $\beta -$ еридитарності фрактального компакту у часі за схемою побудови рівнянь (1) і (2) з розривами зарядів(струмів) у часі виду $\delta^{(\beta)}(t - t_m)$ маємо

$$Q(\alpha, \beta, x, t) = C_1^{(1+\alpha)}(x)\, U(t) + C_{er} D_t^{1+\beta} U(t)\,, \tag{3}$$

Концепція фрактальності процесів накопичення заряду у просторі і часі демонструє неминучі зміни більшості результатів, отриманих до цього часу звичайними методами. Але з моделі випливають декілька ефектів, які неможливо пояснити цими методами. Найважливішим з них є ефект пам'яті, що наводить на висновок про те, що від‘ємні ємнісні (індуктивні) компакти мають пам'ять (порів. з [5]), керувати якою можна за допомогою часово-частотної та просторової фракталізації.

Визначено перспективи подальшого застосування розробленого математичного методу для аналізу й синтезу штучних метаматеріальних фрактальних радіоелементів з необхідними електродинамічними характеристиками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Mengwei S. Step-slope hysteresis-free negative capacitance MoS2 transistors / S. Mengwei // Nature Nanotechnology. – 2018. – 13. – P. 24–28.

2. Онуфрієнко В.М. Потенціали фрактальних зарядів і струмів у штучному середовищі / В.М. Онуфрієнко // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2004. – №1(1). – С. 18–21.

3. Onufrienko V.M. Planar fractally- shaped terahertz waveguide: on the Goos-Hanchen effect / V.M. Onufrienko, T.I. Slyusarova, L.M. Onufriyenko // 14th International conference on advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, April 2018. – Lviv, 2018. – P. 1237−1240.

4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифферен-циальных уравнений / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1982. – 304 с.
5. Westerlund S. Dead matter has memkry / S. Westerlund // Physica Scripta. – 1991. – Vol. 43. – № 2. – P. 174–179.