

## ОПТИМАЛЬНЫЕ АСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Исследованы замкнутые системы с дробным порядком астатизма от 0,5 до 2. Найдены соотношения параметров дробных пропорционально-интегрирующих и интегрально-дифференцирующих регуляторов, обеспечивающих оптимальные динамические и статические характеристики систем. Предложены методы расчета сигналов дробных регуляторов для применения в микропроцессорных системах управления.

**Ключевые слова:** астатическая система, дробное интегрирование, дробное дифференцирование.

### ВВЕДЕНИЕ

При синтезе замкнутых систем управления для устранения статической ошибки по заданию и возмущению в контур включают интегрирующее звено требуемого порядка, а устойчивость и желаемые динамические показатели обеспечивают дополнительными форсирующими звеньями. Однако возможности настройки получаемых ПИ- или ПИД-регуляторов не всегда позволяют получить оптимальное сочетание быстродействия, перерегулирования и точности. А в некоторых случаях (например, в климатических установках, в электротехнических устройствах с суперконденсаторами), объект управления описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка [1]. Тогда параметры ПИ- или ПИД-регуляторов подбирают по упрощенным моделям с целочисленным порядком, в результате чего добиться соответствия между теоретическими и реальными показателями систем оказывается невозможно. Существенное улучшение сочетания всех показателей может быть получено за счет использования регуляторов с дробным порядком интегрирования, обеспечивающих соответственно дробный порядок астатизма замкнутого контура.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является синтез систем управления с дробным порядком астатизма в пределах 0,5...2, обеспе-

чивающий заданные динамические и статические показатели, с использованием дробных интегрально-дифференцирующих регуляторов.

Рассмотрим систему с единичной отрицательной обратной связью, передаточная функция разомкнутого контура которой

$$H_{\text{ОПТ}}(p) = \frac{bT_v p + 1}{aT_v p^\mu (T_v p + 1)}, \quad (1)$$

где  $a, b$  – параметры настройки;  $T_v$  – некомпенсируемая малая постоянная времени объекта управления;  $\mu$  – выбираемый порядок астатизма. Рассмотрим системы с  $\mu \geq 0,5$ , так как дробно-дифференциальные уравнения именно такого порядка описывают некоторые физические процессы, в частности, изменение температуры в объектах управления климатических систем, диффузионные процессы при заряде/разряде суперконденсаторов.

В зависимости от  $\mu, a, b$  могут быть получены различные показатели качества замкнутого контура. В частности, хорошо известны соотношения настроек на модульный ( $\mu = 1, a = 2, b = 0$ ) и симметричный ( $\mu = 2, a = 8, b = 4$ ) оптимумы с целочисленным порядком астатизма. Необходимо отметить, что при  $\mu \in [0,5; 1]$  в (1) можно принять

$b = 0$ , так як даже така система характеризується приємними запасами устойчивости.

Исследуем реакцию системы  $Y(t)$  на единичный скачок на некотором временном интервале, соответствующем расчету  $N$  точек переходного процесса с шагом  $\Delta t$ . Чтобы обеспечить высокое быстродействие и минимальное перерегулирование при выборе параметров настройки, зададим критерий оценки качества системы следующим образом:

$$F = \sum_{i=1}^N \begin{cases} (1 - Y_i) \text{ при } Y_i < 1 \\ \left(\frac{1}{\delta}(1 - Y_i)\right)^2 \text{ при } Y_i > 1 \end{cases} \rightarrow \text{Min}, \quad (2)$$

где  $\delta$  – допустимое перерегулирование.

При такой постановке задачи  $F(\mu, a, b)$  имеет минимумы во всем исследуемом диапазоне  $\mu$ .

Зададимся  $\delta = 0,05$ , удовлетворяющим требованиям большинства технических систем. На рис. 1, а показаны графики зависимостей  $F(\mu, a)$  в диапазоне  $\mu \in [0, 5; 1]$ . На рис. 1, б в качестве примера показаны зависимости  $F(\mu, a, b)$  при  $\mu = 1,5$ , а на рис. 1, в – семейства экстремальных точек при некоторых  $\mu \in [1; 2]$ .

Интерполяция полученных результатов с помощью инженерного пакета программ DataFit позволила получить приближенные аналитические зависимости между параметрами  $\mu, a, b$ , при которых достигаются минимальные значения  $F$ . В области  $\mu \in [0, 5; 1]$  зависимость между заданным  $\mu$  и оптимальным значением  $a$  приближенно описывается выражением

$$a = \frac{\mu}{4,683 - 5,897\mu + 1,595\mu^2}. \quad (3)$$

В области  $\mu \in [1; 2]$  зависимости между заданным  $\mu$  и оптимальными значениями  $a$  и  $b$  приближенно описываются выражениями

$$\begin{aligned} a &= \exp(-10,27 + 7,831\mu), \\ b &= 7,336 + 0,792a + 3,83 \ln(a). \end{aligned} \quad (4)$$

Расчеты переходных процессов для найденных оптимальных соотношений параметров, выполненные при различных  $\mu \in [0, 5; 2]$ , показали, что система с дробным порядком астатизма может превосходить системы с классическими настройками на модульный (МО) и симметричный (СО) оптимумы по совокупности показателей. В частности, при перерегулировании не более 3 % время первого согласования может быть уменьшено в 3–6 раз. Однако при  $\mu \in [0, 5; 1]$  финальная часть переходного процесса затянута, после достижения максимума наступает просадка выходного сигнала до 7 %. При подаче линейно-возрастающего сигнала такая система будет характеризоваться возрастающей скоростной ошибкой.

Если такие свойства неприемлемы, то задаваясь  $1 < \mu < 2$ , можно сохранить желаемое быстродействие,

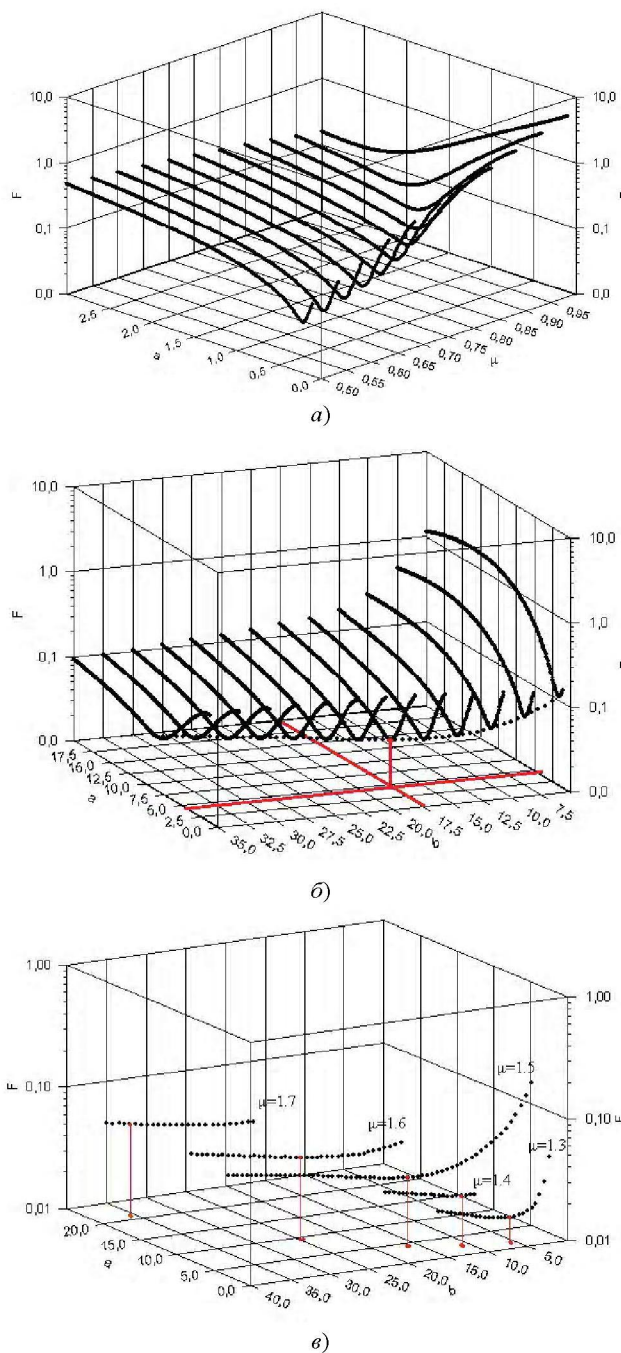
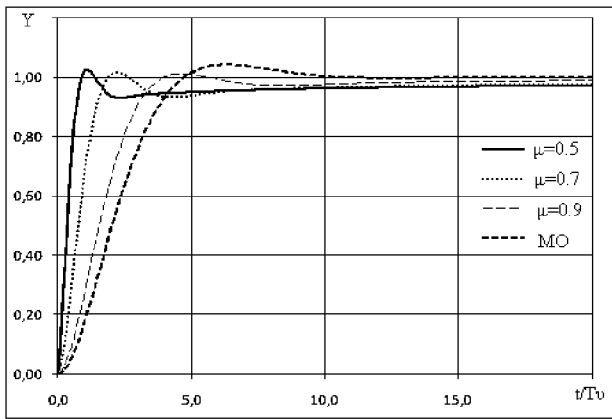


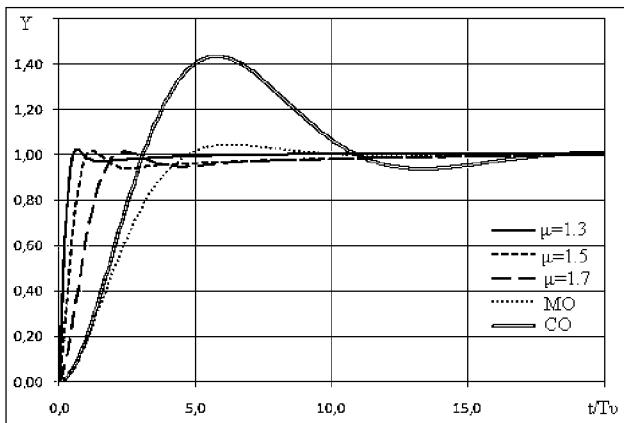
Рис. 1. Зависимости  $F(\mu, a, b)$

уменьшить просадку сигнала до 3 %, обеспечить отсутствие статической ошибки при подаче скачка и уменьшить скоростную ошибку при линейно-возрастающем задающем сигнале. На рис. 2 показаны нормированные во времени (по оси абсцисс отложено  $t/T_v$ ) графики переходных процессов при единичном скачке задания для систем с  $0,5 \leq \mu \leq 1$  (рис. 2, а) и  $1 < \mu < 2$  (рис. 2, б).

Желаемое значение  $\mu$  может быть выбрано равным порядку дробно-инерционного звена или дробно-интегрирующего звена в объекте управления. Но может быть также выбрано по представленным на рис. 2 нормированным графикам переходных процессов, исходя из требуемого быстродействия системы.



а)



б)

Рис. 2. Нормированные переходные функции

Для обеспечения настройки (1) объекта управления с передаточной функцией  $H_{OY}(p)$  необходимо использовать регулятор, передаточная функция которого определяется из выражения

$$H_{РЕГ}(p) = \frac{H_{ОПТ}(p)}{H_{OY}(p)}. \quad (5)$$

В случае, если объект управления является реальным дробно-инерционным звеном

$$H_{OY}(p) = \frac{k_{OY}}{(T_{OY}p^{\mu_{OY}} + 1)(T_v p + 1)}, \quad (6)$$

необходимо использовать регулятор с передаточной функцией

$$H_{РЕГ}(p) = \begin{cases} \frac{T_{OY}}{k_{OY} a T_v p^{\mu-1} + 1} + \frac{1}{k_{OY} a T_v p^{\mu}} \\ \text{при } \mu \in [0, 5; 1] \\ \left(\frac{b}{a} + \frac{1}{a T_v p}\right) \left(\frac{T_{OY}}{k_{OY} p^{\mu-1-\mu_{OY}} + 1} + \frac{1}{k_{OY} p^{\mu-1}}\right) \\ \text{при } \mu \in ]1; 2]. \end{cases} \quad (7)$$

Анализ (7) показывает, что при  $\mu \in [0, 5; 1]$  и  $\mu = \mu_{OY}$  необходим дробный ПИ-регулятор, когда  $\mu < \mu_{OY}$  – дробный ИД-регулятор, а если  $\mu > \mu_{OY}$  – дробный интегральный регулятор с двумя составляющими (ИИ-регулятор). В то же время, при  $\mu \in ]1; 2]$  и  $\mu - 1 = \mu_{OY}$  необходимо использовать последовательно соединенные ПИ- и дробный ПИ- регуляторы, когда  $\mu - 1 < \mu_{OY}$  – последовательно соединенные ПИ- и дробный ИД-регуляторы, а если  $\mu - 1 > \mu_{OY}$  – последовательно соединенные ПИ- и дробный ИИ-регуляторы.

Очевидно, что аналогичный анализ может быть выполнен и для объектов управления с другими передаточными функциями.

Расчет дробно-интегральной  $U_{И}^{\mu}$  и дробно-дифференцирующей  $U_{Д}^{\mu}$  составляющих сигналов регуляторов при подаче на вход сигнала  $X$  может быть выполнен в соответствии с модифицированным определением дробного интеграла в форме Римана-Лиувилля для численного интегрирования с шагом  $\Delta t$

$$U_{Иi}^{\mu} = \frac{\Delta t^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \sum_{j=1}^i X_{i-j+1} k_j^{\mu},$$

$$U_{Дi}^{\mu} = \frac{U_{Иi}^{1-\mu} - U_{Иi-1}^{1-\mu}}{\Delta t}, \quad (8)$$

где коэффициенты  $k_j^{\mu}$  вычисляются по рекуррентной формуле

$$k_j^{\mu} = \frac{j^{\mu+1} - (j-1)^{\mu+1}}{\mu(\mu+1)} - \sum_{n=1}^{j-1} k_n^{\mu}. \quad (9)$$

### ВЫВОДЫ

Выполнено исследование динамических и статических характеристик замкнутых систем с передаточной функцией (1) с дробным порядком астатизма от 0,5 до 2. Оценка качественных показателей таких систем с помощью критерия (2) позволила получить параметры настроек регуляторов, обеспечивающих требуемый порядок астатизма при высоком быстродействии и минимальном перерегулировании. Найдены приближенные аналитические выражения (3) и (4), позволяющие рассчитать параметры регуляторов без предварительного расчета переходных процессов. Передаточные функции (7) определяют правила выбора структуры регуляторов, а выражения (8) и (9) описывают способ вычисления выходных сигналов регуляторов с дробными интегральными и дифференцирующими составляющими, применимый в микропроцессорных системах управления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бушер, В. В. Идентификация элементов климатических систем дифференциальными уравнениями дробного порядка / В. В. Бушер // Електромашинобудування та електрообладнання. – 2010. – Вип. 75. – С. 68–70.

2. *Мартинюк, В. В.* Модель суперконденсатора с дробно-интегрирующим элементом и метод идентификации ее параметров / В. В. Мартинюк, В. В. Бушер // Приводная техника. – 2011. – № 5 (93). – С. 27–33.

Стаття надійшла до редакції 13.12.2011.

Бушер В. В.

**ОПТИМАЛЬНІ АСТАТИЧНІ СИСТЕМИ З ДРОБОВИМИ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІЙНИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ**

Досліджено замкнуті системи з дробовим порядком астатизму від 0,5 до 2. Знайдено параметри дробових пропорційно-інтегральних та інтегрально-диференційних регуляторів для забезпечення оптимальних динамічних та статичних характеристик. Запропоновано методи розрахунку сигналів регуля-

торів з урахуванням використання в мікропроцесорних системах управління.

**Ключові слова:** астатична система, дробовий інтеграл, дробова похідна.

Busher V. V.

**OPTIMAL ASTATIC CONTROL WITH FRACTIONAL ORDER INTEGRAL-DIFFERENTIAL REGULATORS**

The research of close-loop systems with fractional integral-differential regulators with order from 0,5 to 2,0 is carried out. Parameters of regulators for optimal dynamic and static control are defined. Presented methods of numeric solve of fractional equation for their microprocessor's realization.

**Key words:** astatic system, fractional integral, fractional differential.