

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**ІНЖЕНЕРНА МАТЕМАТИКА  
БАКАЛАВРСЬКИЙ МІНІМУМ**

**ЧАСТИНА 1**

Навчальний посібник

За загальною редакцією  
доктора фізико-математичних наук  
професора В.М.Онуфрієнка

Запоріжжя • ЗНТУ • 2019

УДК 517+ 512+ 514(075.8)

I-62

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Запорізького національного технічного університету  
(протокол № 5 від 14 грудня 2018р.)*

**К о л е к т и в а в т о р і в:**

*В. М. Онуфрієнко* – загальна редакція;

*Н. В. Сніжко* – розд. 1-6;

*Н. М. Антоненко* – розд. 17-28;

*В. П. П'янков* – розд. 7, 8, 14-16;

*І. І. Зіненко* – розд. 9-13

**Р е ц е н з е н т и:**

*В. З. Грищак* – завідувач кафедри прикладної математики і механіки ЗНУ, доктор технічних наук, професор, академік АН Вищої школи України, заслужений діяч науки і техніки України;

*Г. В. Корніч* – завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики ЗНТУ, доктор фіз.-мат. наук, професор;

*В. В. Погосов* – завідувач кафедри мікро- та наноелектроніки ЗНТУ, доктор фіз.-мат. наук, професор

**Онуфрієнко В.М.**

I-62 Інженерна математика. Бакалаврський мінімум. Частина 1: навч. посібник / В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко та ін.; за заг. ред. В.М. Онуфрієнка – Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 362 с.

ISBN 978-617-529-217-4

У навчальному посібнику методично реалізовано компетентнісну триаду («знання», «уміння», «отриманий досвід») двовимірною (зліва – направо і згори – донизу) побудовою викладу мінімального матеріалу з елементарної математики: за темою, тезаурусом, розкриттям змісту термінів, прикладами практичного застосування, задачами для самостійної роботи.

Посібник рекомендовано для використання слухачам підготовчих курсів закладів вищої освіти, а як довідник-тезаурус для абітурієнтів та студентів перших курсів бакалаврської підготовки з математики у політехнічному університеті.

**УДК 517+ 512+ 514(075.8)**

ISBN 978-617-529-217-4

© Онуфрієнко В.М., Сніжко Н.В.,  
Антоненко Н.М., П'янков В.П.,  
Зіненко І.І., 2019

© Запорізький національний технічний  
університет (ЗНТУ), 2019

## ЗМІСТ

Передмова . . . . .	5
Тезаурус . . . . .	7
1 Числа. Арифметичні дії з числами . . . . .	20
2 Пропорції та проценти . . . . .	40
3 Цілі вирази . . . . .	48
4 Дробово-раціональні вирази . . . . .	68
5 Ірраціональні вирази . . . . .	74
6 Показникові та логарифмічні вирази . . . . .	82
7 Тригонометричні вирази . . . . .	86
8 Елементарні функції . . . . .	102
9 Цілі раціональні рівняння та нерівності . . . . .	136
10 Дробово-раціональні рівняння та нерівності . . . . .	162
11 Ірраціональні рівняння та нерівності . . . . .	166
12 Показникові рівняння та нерівності . . . . .	172
13 Логарифмічні рівняння та нерівності . . . . .	176
14 Тригонометричні рівняння та нерівності . . . . .	184

15	Арифметична та геометрична прогресії . . . . .	206
16	Елементи комбінаторики . . . . .	212
17	Найпростіші геометричні фігури на площині. Аксиоми планіметрії . . . . .	216
18	Взаємне розміщення прямих на площині . . . . .	226
19	Трикутники . . . . .	234
20	Чотирикутники . . . . .	262
21	Многокутники . . . . .	278
22	Коло, круг та їх елементи . . . . .	286
23	Аксиоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі . . . . .	298
24	Призма . . . . .	320
25	Піраміда . . . . .	330
26	Циліндр . . . . .	340
27	Конус . . . . .	344
28	Куля . . . . .	350
	Післямова . . . . .	356
	Список літератури . . . . .	360

## ПЕРЕДМОВА

Національною доктриною розвитку освіти в Україні у XXI столітті серед головних завдань держави визначено «розвиток творчих здібностей і навичок самостійного наукового пізнання, самоосвіти і самореалізації особистості, підготовка кваліфікованих кадрів, здатних до творчої праці, професійного розвитку, освоєння та впровадження наукоємних та інформаційних технологій, конкурентоспроможних на ринку праці» (Закон України «Про вищу освіту» від 25.12.2002: Зі змінами, внесеними згідно із законом № 380-IV (380-15)).

Впровадження компетентнісного підходу у математичній підготовці бакалаврів з технічних спеціальностей за допомогою нових методик та технологій навчання, що формують певний набір знань, умінь та навичок, передбачає створення можливостей для самостійного застосування знань у моделюванні технологічних процесів за фахом. У математичній підготовці бакалаврів сутність визначення компетенції розкривається через ключові поняття «знання», «уміння», «навички, отриманий досвід» і здібності, які надбано і розвинуто завдяки навчанню.

Автори навчального посібника мали за мету методично реалізувати зазначену компетентнісну тріаду двовимірною (зліва – направо і згори – донизу) побудовою викладу мінімального матеріалу з елементарної математики: за темою, тезаурусом, розкриттям змісту термінів, прикладами практичного застосування, задачами для самостійної роботи.

Посібник є першою частиною математичної підготовки інженерів і містить класичний набір компетентнісних знань, що традиційно визначається програмами навчання у школі, ліцеї та коледжі і є базовими для подальшого розвитку навичок математичного моделювання у закладах вищої освіти.

Структура, зміст та тезаурус посібника сформовані як результат впровадження особистого багаторічного досвіду викладачів кафедри вищої математики Запорізького

національного технічного університету та педагогічних експериментів, здійснених останніми роками на підготовчих та перших курсах бакалаврської підготовки студентів.

У посібнику визначено послідовність викладання математичних знань:

розділи 1–6 (Числа. Арифметичні дії з числами. Пропорції та проценти. Цілі вирази. Дробово-раціональні вирази. Ірраціональні вирази. Показникові та логарифмічні вирази – доц. Сніжко Н.В.);

розділи 7–8 (Тригонометричні вирази. Елементарні функції – проф. Онуфрієнко В.М., доц. П'янков В.П.);

розділи 9–13 (Цілі раціональні рівняння та нерівності. Дробово-раціональні рівняння та нерівності. Ірраціональні рівняння та нерівності. Показникові рівняння та нерівності. Логарифмічні рівняння та нерівності – ст. викл. Зіненко І.І.);

розділи 14–16 (Тригонометричні рівняння та нерівності. Арифметична та геометрична прогресії. Елементи комбінаторики – доц. П'янков В.П.);

розділи 17–28 (Найпростіші геометричні фігури на площині. Аксиоми планіметрії. Взаємне розміщення прямих на площині. Трикутники. Чотирикутники. Многокутники. Коло, круг та їх елементи. Аксиоми стереометрії. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Призма. Піраміда. Циліндр. Конус. Куля – доц. Антоненко Н.М.).

У післямові (проф. Онуфрієнко В.М.) увагу читача зосереджено на можливостях застосування сучасних математичних пакетів (зокрема, MathCad) для розв'язування задач, розглянутих у розділах посібника, але громіздких в обчислювальному плані (дії з числами, алгебраїчні перетворення, графіки складних функцій, трансцендентні рівняння з суперпозицією елементарних функцій).

Посібник рекомендовано для використання слухачам підготовчих курсів закладів вищої освіти, а як довідник-тезаурус – для абітурієнтів та студентів перших курсів бакалаврської підготовки з математики у політехнічному університеті.

## ТЕЗАУРУС

1

Натуральні числа. Подільність (націло). Дільник. Прості числа. Складені числа. Парні (непарні) числа. Канонічний розклад числа. Ознаки подільності натуральних чисел. Спільний дільник. Найбільший спільний дільник. Взаємно прості числа. Найменше спільне кратне. Цілі числа. Ділення з остачею. Звичайний дріб. Рівність дробів. Основна властивість дробів. Скорочення дробу. Нескоротні дроби. Арифметичні дії над дробами. Порівняння дробів. Правильний (неправильний) дріб. Мішаний дріб. Скінченний десятковий дріб. Запис скінченного десяткового дробу у вигляді звичайного дробу. Нескінченний періодичний десятковий дріб. Період дробу. Запис нескінченного періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного дробу. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа. Порівняння дійсних чисел. Властивості числових рівностей. Властивості числових строгих нерівностей. Нестрогі числові нерівності.

20

2

Пропорція. Крайні та середні члени пропорції. Основна властивість пропорції. Перестановка членів пропорції. Похідна пропорція. Пряма пропорційність. Коефіцієнт пропорційності. Обернена пропорційність. Процент (відсоток). Перетворення дробу у проценти. Перетворення процентів у дріб. Знаходження процентів від числа. Знаходження числа за його процентами. Знаходження процентного відношення двох чисел. Зв'язок процентів з пропорціями. Формула простих процентів. Формула складних процентів. Промілле.

40

3

Степінь з натуральним показником. Степінь з цілим показником. Властивості степеня з цілим

48

показником. Одночлен. Стандартний вигляд одночлена. Степінь одночлена. Многочлен. Подібні члени. Зведення подібних членів. Правила розкриття дужок. Формули скороченого множення. Біном Ньютона. Трикутник Паскаля. Розклад многочлена на множники. Канонічний вигляд многочлена відносно змінної  $x$ . Степінь многочлена. Тотожно рівні многочлени. Дільник многочлена. Частка многочлена. Властивості подільності многочленів. Ділення многочленів з остачею. Ділення многочленів "стовпчиком". Схема Горнера. Теорема Безу. Корінь многочлена. Квадратний тричлен. Дискримінант квадратного тричлена. Розклад на множники квадратного тричлена. Теорема Вієта для квадратного тричлена. Розклад на множники многочлена третього степеня. Розклад на множники многочлена четвертого степеня. Розклад на множники многочлена  $n$ -го степеня. Властивості коренів многочлена  $n$ -го степеня. Теорема Вієта для многочлена  $n$ -го степеня. Знаходження коренів многочлена  $n$ -го степеня. Методи розкладу на множники многочлена  $n$ -го степеня.

4

68

Алгебраїчний дріб. Область допустимих значень дробу. Тотожна рівність двох дробів. Скорочення дробу. Зміна знаків членів дробу. Спільний знаменник дробів. Найменший спільний знаменник дробів. Зведення дробів до спільного знаменника. Додавання (віднімання) дробів. Добуток дробів. Частка дробів. Піднесення дробу до степеня. Умова рівності дробу нулю.

5

74

Корінь  $n$ -го степеня. Показник кореня. Квадратний корінь. Кубічний корінь. Корінь парного степеня. Корінь непарного степеня. Арифметичний корінь  $n$ -го степеня. Властивості коренів. Корінь зі

степеня. Степінь кореня. Корінь добутку. Корінь частки. Винесення множника з-під кореня. Внесення множника під корінь. Корінь з кореня. Добуток коренів. Частка коренів. Степінь з раціональним показником. Перетворення алгебраїчних виразів, які містять корені.

6

82

Властивості показникових виразів. Логарифм. Натуральний логарифм. Десятковий логарифм. Основна логарифмічна тотожність. Властивості логарифмів. Логарифмування. Потенціювання. Монотонність логарифмів.

7

86

Формули переходу від градусів до радіанів. Тригонометрична діаграма. Синус і косинус кута. Тангенс і котангенс. Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Основні періоди тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій. Знаки тригонометричних функцій по чвертях. Формули зведення Основна тригонометрична тотожність. Формули подвійного кута. Формули пониження степеня. Формули універсальної підстановки. Формули тангенса половинного аргументу. Формули додавання. Формули перетворення сум функцій в добутки. Формули перетворення добутків функцій в суми. Формули потрійного кута. Обернені тригонометричні функції. Арксинус. Арккосинус. Арктангенс. Арккотангенс. Перехід від від'ємного аргументу до додатного. Суми обернених функцій при одному значенні аргументів. Монотонність обернених функцій. Розподіл обернених функцій по чвертях в залежності від знака аргументу. Тотожності з оберненими функціями. Перетворення виразів виду  $a \sin x + b \cos x$  із залученням допоміжного кута.

Поняття функції. Область визначення функції. Область значень функції. Нулі функції. Проміжки знакосталості функції. Обмеженість функцій. Графік функції. Парні функції. Непарні функції. Проміжки монотонності функції. Локальні екстремуми функції. Складні функції. Періодичні функції. Основний період. Елементарні функції. Лінійна функція. Квадратична функція. Функції  $y = x^n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ . Асимптоти. Функції  $y = x^{-n}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ . Функції  $y = \sqrt[n]{x}$ , де  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Функція  $y = a^x$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Функція  $y = \log_a x$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Функція  $y = \sin x$ . Функція  $y = \cos x$ . Функція  $y = \operatorname{tg} x$ . Функція  $y = \operatorname{ctg} x$ . Функція  $y = \arcsin x$ . Функція  $y = \arccos x$ . Функція  $y = \operatorname{arctg} x$ . Функція  $y = \operatorname{arcctg} x$ . Графіки функцій виду  $y = f(kx)$ ;  $y \pm b = f(x \pm a)$ . Графіки суперпозиції функцій  $y = f(x) \pm g(x)$ ;  $y = f(x) \times g(x)$ ;  $y = f(x) / g(x)$ .

Алгебраїчне рівняння. Розв'язати рівняння. Корінь рівняння. Рівносильні рівняння. Цілі раціональні рівняння. Ціла раціональна функція. Лінійні рівняння з однією змінною. Квадратні рівняння. Дискримінант квадратного рівняння. Неповні квадратні рівняння. Теореми Вієта. Зведене квадратне рівняння. Формули Вієта для зведеного квадратного рівняння. Методи розв'язку цілих раціональних рівнянь вищих порядків. Бікватратні рівняння. Двочленні рівняння. Тричленні рівняння. Зворотні рівняння 4-го порядку. Симетричні рівняння 4-го порядку. Рівняння, які містять добутки  $(x + a_i)(x + b_i)$ , де  $a_i + b_i = \operatorname{const} \forall i$ . Рівняння виду  $(x + a)^n + (x + b)^n = c$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ . Рівняння зі змінною під знаком модуля.

	Алгебраїчні нерівності. Основні властивості рівносильних нерівностей. Лінійні нерівності. Квадратні нерівності. Цілі раціональні нерівності вищих порядків. Метод інтервалів. Нерівності зі змінною під знаком модуля. Деякі задачі з параметрами на розташування коренів квадратних рівнянь.	
10	Дробово-раціональні рівняння. Розв'язок дробово-раціонального рівняння. Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Дробово-раціональні нерівності. Розв'язок дробово-раціональної нерівності.	162
11	Ірраціональне рівняння. Рівняння-наслідок. Рівняння виду $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ . Рівняння виду $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{g(x)}$ . Рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{\varphi(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$ . Ірраціональна нерівність. Основні методи розв'язку. Нерівність виду $2\sqrt[n]{f(x)} < (\leq) g(x)$ . Нерівність виду $2\sqrt[n]{f(x)} > (\geq) g(x)$ . Нерівність виду $2\sqrt[n]{f(x)} > (\geq) 2\sqrt[n]{g(x)}$ .	166
12	Показникові рівняння. Найпростіші показникові рівняння. Методи розв'язку. Показникові нерівності. Найпростіші показникові нерівності.	172
13	Логарифмічні рівняння. Найпростіші логарифмічні рівняння. Потенціювання. Логарифмування. Методи розв'язку. Логарифмічні нерівності. Найпростіші логарифмічні нерівності. Методи розв'язку. Логарифмічні нерівності зі змінною основою	176
14	Тригонометричні рівняння. Найпростіші тригонометричні рівняння. Розв'язок рівняння	184

$\sin x = a$ . Розв'язок рівняння  $\cos x = a$ . Розв'язок рівнянь  $\operatorname{tg} x = a$  і  $\operatorname{ctg} x = a$ . Тригонометричні рівняння, які зводяться до квадратних за допомогою заміни. Метод універсальної підстановки. Однорідні рівняння 1-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$ . Неоднорідні рівняння 1-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$ . Однорідні рівняння 2-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$ . Неоднорідні рівняння 2-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$ . Перетворення неоднорідного рівняння 1-го порядку в однорідне 2-го порядку. Рівняння виду  $\sin \alpha(x) \pm \sin \beta(x) = 0$ . Рівняння виду  $\cos \alpha(x) \pm \cos \beta(x) = 0$ . Рівняння виду  $\sin \alpha(x) \pm \cos \beta(x) = 0$ . Тригонометричні нерівності. Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей з функцією  $\sin x$ . Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей з функцією  $\cos x$ . Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей з функцією  $\operatorname{tg} x$ . Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей з функцією  $\operatorname{ctg} x$ .

15

206

Арифметична прогресія (АП). Формула загального члена АП. Властивості членів АП. Суми членів АП. Геометрична прогресія (ГП). Формула загального члена ГП. Властивості членів ГП. Сума  $n$  перших членів ГП. Нескінченно спадна ГП. Сума нескінченно спадної ГП.

16

212

Комбінаторика. Правила суми й добутку. Факторіал. Впорядкована множина. Перестановки без повторень. Розміщення без повторень. Комбінації без повторень. Біном Ньютона.

- Розміщення без повторень. Комбінації без повторень.
- 17 Геометрія. Планіметрія. Основні фігури на площині. Позначення основних фігур. Прямі, що перетинаються. Відрізок. Довжина відрізка. Одиниці вимірювання відрізків. Рівні відрізки. Середина відрізка. Основна властивість довжини відрізка. Взаємне розміщення трьох точок на прямій. Промінь. Доповняльні промені. Кут. Елементи кута. Позначення кута. Одиниці вимірювання кутів. Розгорнутий кут. Прямий кут. Гострий кут. Тупий кут. Рівні кути. Бісектриса. Основна властивість величини кута. Аксиома. Аксиоми належності точок і прямих на площині. Аксиоми розміщення точок на прямій та на площині. Аксиоми вимірювання відрізків та кутів. Аксиоми вимірювання відрізків та кутів. Аксиоми відкладання відрізків та кутів. Аксиома паралельності.
- 18 Суміжні кути. Вертикальні кути. Кут між двома прямими. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Паралельні прямі. Відстань між двома паралельними прямими. Січна пряма. Кути, які утворюються при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих. Властивості паралельних прямих. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки.
- 19 Трикутник. Елементи трикутника. Гострокутний трикутник. Прямокутний трикутник. Тупокутний трикутник. Різносторонній трикутник. Рівнобедрений трикутник. Рівносторонній трикутник. Периметр трикутника. Нерівність трикутника. Сума внутрішніх кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника. Сума зовнішніх кутів трикутника. Медіана трикутника. Властивість

216

226

234

медіан трикутника. Формули для обчислення медіан трикутника. Висота трикутника. Бісектриса. Властивість бісектриси трикутника. Середня лінія трикутника. Властивість середньої лінії трикутника. Коло, описане навколо трикутника, та трикутник, вписаний у коло. Коло, вписане в трикутник, та трикутник, описаний навколо кола. Властивості рівнобедреного трикутника. Ознаки рівнобедреного трикутника. Властивості рівностороннього трикутника. Гіпотенуза прямокутного трикутника. Катети прямокутного трикутника. Властивості прямокутного трикутника. Теорема Піфагора. Обернена теорема Піфагора. Синус гострого кута прямокутного трикутника. Косинус гострого кута прямокутного трикутника. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Проекція катета на гіпотенузу. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Рівні трикутники. Ознаки рівності трикутників. Ознаки рівності прямокутних трикутників. Відповідні сторони. Подібні трикутники. Коефіцієнт подібності. Ознаки подібності трикутників. Ознаки подібності прямокутних трикутників. Теорема косинусів. Теорема синусів. Формули для обчислення площі трикутника. Формула Герона. Формула для обчислення площі правильного трикутника. Формули для обчислення площі прямокутного трикутника. Радіуси описаного та вписаного кіл трикутника. Радіуси описаного та вписаного кіл правильного трикутника. Радіуси описаного та вписаного кіл прямокутного трикутника.

20

Чотирикутник. Елементи чотирикутника. Опуклий чотирикутник. Неопуклий чотирикутник. Сусідні вершини. Протилежні вершини. Сусідні сторони. Протилежні сторони. Діагональ чотирикутника.

262

Периметр чотирикутника. Властивості сторін чотирикутника. Сума кутів чотирикутника. Зовнішній кут чотирикутника. Сума зовнішніх кутів чотирикутника. Площа чотирикутника. Чотирикутник, вписаний у коло, та коло, описане навколо чотирикутника. Площа чотирикутника, який можна вписати в коло. Чотирикутник, описаний навколо кола, та коло, вписане в чотирикутник. Площа чотирикутника, який можна описати навколо кола. Паралелограм. Висота паралелограма. Властивості паралелограма. Ознаки паралелограма. Площа паралелограма. Ромб. Властивості ромба. Ознаки ромба. Коло, вписане в ромб. Радіус кола, вписаного в ромб. Площа ромба. Прямокутник. Властивості прямокутника. Ознака прямокутника. Коло, описане навколо прямокутника. Радіус кола, описаного навколо прямокутника. Площа прямокутника. Квадрат. Ознака квадрата. Коло, вписане та описане навколо квадрата. Радіуси вписаного та описаного кіл навколо квадрата. Площа квадрата. Трапеція. Основи трапеції. Бічні сторони трапеції. Висота трапеції. Середня лінія трапеції. Властивість кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони. Прямокутна трапеція. Рівнобічна трапеція. Властивості рівнобічної трапеції. Ознаки рівнобічної трапеції. Площа трапеції.

21

Ламана. Елементи ламаної. Проста ламана. Довжина ламаної. Замкнена ламана. Многокутник. Плоский многокутник. Елементи многокутника. Сусідні сторони многокутника. Сусідні вершини многокутника. Несусідні вершини. Діагональ многокутника. Кут (внутрішній кут) многокутника. Зовнішній кут многокутника.  $n$ -кутник. Опуклий многокутник. Властивість сторін многокутника. Периметр многокутника. Сума кутів  $n$ -кутника.

278

Сума зовнішніх кутів  $n$ -кутника. Кількість діагоналей опуклого  $n$ -кутника. Многокутник, вписаний у коло. Многокутник, описаний навколо кола. Площа описаного многокутника. Правильний многокутник. Величина кута правильного  $n$ -кутника. Центр правильного многокутника. Радіус кола, описаного навколо правильного  $n$ -кутника. Радіус кола, вписаного в правильний  $n$ -кутник. Формули, які пов'язують радіуси описаного та вписаного кіл деяких многокутників з їх сторонами. Апофема правильного многокутника. Площа правильного  $n$ -кутника.

22

286

Геометричне місце точок. Коло. Радіус кола. Хорда. Діаметр. Довжина. Круг. Хорда (діаметр) круга. Площа круга. Властивість хорди та діаметра. Взаємне розміщення прямої і кола. Січна. Дотична до кола. Властивість дотичної. Ознака дотичної. Властивість дотичних проведених до кола з однієї точки. Властивості дотичної та січної. Взаємне розміщення двох кіл. Взаємне розміщення двох кіл. Центральний кут. Дуга. Градусна міра дуги. Довжина дуги. Градусна міра вписаного кута. Властивості вписаних кутів. Круговий сектор. Площа кругового сектора. Круговий сегмент. Площа кругового сегмента.

23

298

Стереометрія. Основні фігури в просторі. Аксиоми стереометрії. Аксиоми стереометрії. Наслідки з аксіом стереометрії. Паралельні прямі у просторі. Властивості паралельних прямих. Мимобіжні прямі. Ознака мимобіжності прямих. Паралельність прямої та площини. Ознака паралельності прямої та площини. Властивість паралельних прямої і площини. Паралельні площини. Ознака паралельності площин. Властивості паралельних площин. Паралельна

проекція точки на площину. Проекція фігури на площину. Центральне проектування. Паралельне проектування. Паралельна проекція фігури. Правила паралельного проектування. Кут між прямими, що перетинаються. Перпендикулярні прямі. Кут між мимобіжними прямими. Пряма перпендикулярна до площини. Ознака перпендикулярності прямої та площини. Властивості прямої та площини, які перпендикулярні між собою. Перпендикуляр, опущений з даної точки на дану площину. Похила, проведена з даної точки до даної площини. Проекція похилої. Співвідношення між похилими, проведеними з однієї точки, та їх проєкціями. Теорема про три перпендикуляри. Кут між площинами, які перетинаються. Перпендикулярні площини. Ознака перпендикулярності двох площин. Властивість перпендикулярних площин. Ортогональне проектування. Площа ортогональної проєкції многокутника. Проекція прямої на площину. Кут між прямою і площиною. Двогранний кут. Лінійний кут двогранного кута.

24

320

Многогранник. Грані, ребра та вершини многогранника. Діагональ многогранника. Опуклий многогранник. Призма. Бічні ребра призми. Бічні грані призми. Висота призми. Діагональ призми. Діагональний переріз призми.  $n$ -кутна призма. Пряма призма. Властивості прямої призми. Правильна призма. Площа бічної поверхні прямої призми. Площа повної поверхні прямої призми. Об'єм прямої призми. Похила призма. Перпендикулярний переріз. Площа бічної поверхні похилої призми. Площа повної поверхні похилої призми. Об'єм похилої призми. Паралелепіед. Властивості паралелепіеда. Прямий паралелепіед. Похилий паралелепіед. Прямокутний паралелепіед. Виміри прямокутного

паралелепіеда. Властивості прямокутного паралелепіеда. Площа бічної поверхні прямокутного паралелепіеда. Площа повної поверхні прямокутного паралелепіеда. Об'єм прямокутного паралелепіеда. Куб. Діагональ куба. Площа бічної поверхні куба. Площа повної поверхні куба. Об'єм куба.

25

330

Піраміда. Бічні грані. Бічні ребра піраміди. Висота піраміди. Діагональний переріз.  $n$ -кутна піраміда. Тетраедр. Правильна піраміда. Апофема правильної піраміди. Положення висоти в деяких видах пірамід. Площа бічної поверхні піраміди. Площа бічної поверхні правильної піраміди. Площа бічної поверхні піраміди, всі бічні грані якої нахилені під однаковими кутами до площини основи. Площа повної поверхні піраміди. Об'єм піраміди. Зрізана піраміда. Елементи зрізаної піраміди. Висота зрізаної піраміди. Правильна зрізана піраміда. Апофема правильної зрізаної піраміди. Площа бічної поверхні зрізаної піраміди. Об'єм зрізаної піраміди.

26

340

Циліндр (круговий циліндр). Циліндр як тіло обертання. Радіус циліндра. Твірні циліндра. Висота циліндра. Вісь циліндра. Осьовий переріз циліндра. Властивості циліндра. Рівносторонній циліндр. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі. Переріз циліндра площиною, паралельною його основам. Дотична площина до циліндра. Розгортка бічної поверхні циліндра. Площа бічної поверхні циліндра. Площа повної поверхні циліндра. Об'єм циліндра.

27

344

Конус (круговий конус). Конус як тіло обертання. Радіус конуса. Твірні конуса. Висота конуса. Вісь конуса. Осьовий переріз конуса. Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину.

Переріз конуса площиною, паралельною його основі. Дотична площина до конуса. Розгортка конуса. Площа бічної поверхні конуса. Площа повної поверхні конуса. Об'єм конуса. Зрізаний конус. Висота зрізаного конуса. Осьовий переріз зрізаного конуса. Площа бічної поверхні зрізаного конуса. Площа повної поверхні зрізаного конуса. Об'єм зрізаного конуса.

28

350

Куля. Куля як тіло обертання. Сфера. Сфера як тіло обертання. Радіус сфери (кулі). Хорда сфери (кулі). Діаметр сфери (кулі). Вісь кулі. Діаметральна площина. Великий круг (коло) кулі (сфери). Перерізи кулі площиною. Дотична площина (пряма). Площа сфери. Об'єм кулі. Кульовий сегмент. Висота кульового сегмента. Площа кульового сегмента. Об'єм кульового сегмента. Кульовий сектор. Площа кульового сектора. Об'єм кульового сектора. Кульовий шар. Кульовий пояс.

## 1 ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ЧИСЛАМИ

Натуральні числа	Числа 1, 2, 3, ..., які застосовуються для лічби, називаються <i>натуральними</i> . Множина натуральних чисел позначається символом $\mathbb{N}$ .
Подільність (націло)	Якщо число $n$ зображається у вигляді добутку двох натуральних чисел $m$ і $k$ , то говорять, що число $n$ <i>ділиться (націло)</i> на $m$ і на $k$ , а кожне з чисел $m$ і $k$ називається <i>дільником</i> числа $n$ .
Дільник	
Прості числа	Натуральне число, яке більше одиниці, називається <i>простим</i> , якщо воно не має інших дільників, крім одиниці і самого себе.
Складені числа	Натуральне число називається <i>складеним</i> , якщо воно має хоча б один дільник, відмінний від одиниці і самого себе.
Парні (непарні) числа	Натуральне число називається <i>парним</i> , якщо воно ділиться (націло) на число 2, і <i>непарним</i> , якщо воно не ділиться на 2.
Канонічний розклад числа	Кожне складене число $n$ можна розкласти на прості множники, тобто зобразити його у вигляді

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}, \quad (1.1)$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – прості числа, а  $k, m_1, m_2, \dots, m_k$  – натуральні числа. Вказане зображення називається *канонічним розкладом числа*; такий розклад (1.1) єдиний.

Будь-яке число  $n$  зображається в десятковій системі числення у вигляді

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad (1.2)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  можуть набувати значень 0, 1,

**Приклад 1.1.** Число 24 ділиться на 6 і на 4, а також на 3 і 8 (оскільки  $24 = 6 \cdot 4$   $24 = 3 \cdot 8$ ), і числа 6, 4, 3, 8 – дільники числа 24 (зауважимо, це не всі можливі дільники).

**Приклад 1.2.** Числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 – прості. Числа 6, 20, 21 – складені, оскільки 6 має дільник 3, 20 має дільник 10, 21 має дільник 7.

**Приклад 1.3.** Канонічні розклади чисел 8, 258, 180, 323:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3;$$

$$258 = 2 \cdot 3 \cdot 43;$$

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5;$$

$$323 = 17 \cdot 19.$$

**Приклад 1.4.** 1) Число 123456724 ділиться на 2, оскільки 4 ділиться на 2; число 123456729 не ділиться на 2, оскільки 9 не ділиться на 2.

2) Число 123456756 ділиться на 4, оскільки 56 ділиться на 4; число 123456714 не ділиться на 4, оскільки 14 не ділиться на 4.

3) Число 123456112 ділиться на 8, оскільки 112 ділиться на 8; число 123456124 не ділиться на 8, оскільки 124 не ділиться на 8.

4) Число 12345 ділиться на 3, оскільки  $1+2+3+4+5 = 15$  ділиться на 3; число 12245 не ділиться на 3, оскільки  $1+2+2+4+5 = 14$  не ділиться на 3.

5) Число 3375 ділиться на 9, оскільки  $3+3+7+5 = 18$  ділиться на 9; число 4276 не ділиться на 9, оскільки  $4+2+7+6 = 19$  не ділиться на 9.

6) Число 123670 ділиться на 5, оскільки

**1.1.** Довести, що добуток двох послідовних натуральних чисел ділиться на 2.

**1.2.** Подати числа 1124 і 24180 у вигляді простих множників.

(Відповідь:  $1124 = 2^2 \cdot 281$ ,  
 $24180 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 403$ )

**1.3.** Які з наступних чисел діляться на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15, 25:

1) 1080;

2) 1296;

3) 10800;

4) 11223344;

5) 73885635;

6) 547711300;

7) 46787641200;

8) 3893435594?

(Відповідь: 1) ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15;

2) ділиться на 2, 3, 4, 6, 8, 9;

3) ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15, 25;

4) ділиться на 2, 4, 8;

5) ділиться на 3, 5, 9, 15;

6) ділиться на 2, 4, 5, 25;

7) ділиться на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15, 25;

8) ділиться на 2)

**1.4.** Знайти НСД( $a, b$ ):

1)  $a = 108$ ;  $b = 105$ ;

2)  $a = 144$ ;  $b = 174$ ;

3)  $a = 192$ ;  $b = 102$ .

2, ..., 9, а число  $a_k$  – значень 1, 2, ..., 9.

Позиційний запис числа виду (1.2) наступний:

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0}. \quad (1.3)$$

Ознаки подільності  
натуральних чисел

- 1) Число ділиться на 2 тільки тоді, коли  $a_0$  ділиться на 2.
- 2) Число ділиться на 4 тільки тоді, коли число  $\overline{a_1 a_0}$  ділиться на 4.
- 3) Число ділиться на 8 тільки тоді, коли число  $\overline{a_2 a_1 a_0}$  ділиться на 8.
- 4) Число ділиться на 3 тільки тоді, коли сума всіх його цифр ділиться на 3.
- 5) Число ділиться на 9 тільки тоді, коли сума всіх його цифр ділиться на 9.
- 6) Число ділиться на 5 тільки тоді, коли  $a_0$  ділиться на 5.
- 7) Число ділиться на 25 тільки тоді, коли число  $\overline{a_1 a_0}$  ділиться на 25.

Спільний дільник

Якщо числа  $n_1$  і  $n_2$  діляться на одне й те ж саме число  $m$ , то  $m$  називається їх *спільним дільником*.

Найбільший  
спільний дільник

Найбільше число, на яке націло діляться числа  $n_1$  і  $n_2$ , називається їх *найбільшим спільним дільником* і позначається  $\text{НСД}(n_1, n_2)$ .

Взаємно прості  
числа

Якщо  $\text{НСД}(n_1, n_2) = 1$ , то числа  $n_1$  і  $n_2$  називаються *взаємно простими*.  
Якщо натуральні числа  $n_1$  і  $n_2$  взаємно прості і натуральне число  $n$  ділиться на  $n_1$  і  $n_2$ , то  $n$  ділиться на добуток  $n_1 n_2$ .

*Правило знаходження НСД( $n_1, n_2$ ):*

- а) знайти канонічний розклад чисел  $n_1$  і  $n_2$ ;
- б) виписати всі спільні прості множники, які

0 ділиться на 5; число 123674 не ділиться на 5, оскільки 4 не ділиться на 5.

7) Число 123456750 ділиться на 25, оскільки 50 ділиться на 25; число 123456740 не ділиться на 25, оскільки 40 не ділиться на 25.

**Приклад 1.5.** Спільні дільники чисел 15 і 18 – числа 1 і 3. Тоді НСД(15; 18) = 3.

Спільні дільники чисел 32 і 40 – числа 1, 2, 4 і 8. Тоді НСД(32; 40) = 8.

Спільні дільники чисел 72 і 128 – числа 1, 2, 4 і 8. Тоді НСД(72; 128) = 8.

**Приклад 1.6.** Числа 33 і 35 взаємно прості, оскільки НСД(33; 35) = 1.

Числа 21 і 14 не є взаємно простими, оскільки НСД(21; 14) = 7.

**Приклад 1.7.** Число 24 ділиться на число 6, яке дорівнює добутку двох взаємно простих дільників 2 і 3. Але 24 не ділиться на число 32, яке дорівнює добутку дільників 4 і 8, що не є взаємно простими.

**Приклад 1.8.** Знайти НСД(360; 8400).

а) Знаходимо канонічний розклад чисел 360 і 8400:  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ;

$$8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7;$$

б) виписуємо всі спільні прості множники, які входять в канонічний розклад кожного із чисел 360 і 8400: 2, 3, 5;

в) найменший степінь числа 2, яке входить множником в кожний із розкладів даних чисел, дорівнює 3;

(Відповідь: 1) 3;

2) 6;

3) 6)

**1.5.** Чи є взаємно простими наступні числа:

1) 27 і 88;

2) 1155 і 338;

3) 1224 і 2487651?

(Відповідь: 1) так;

2) так;

3) ні)

**1.6.** Чи ділиться число

123...9899100

(виписані підряд всі числа від 1 до 100):

1) на 4;

2) на 8;

3) на 3;

4) на 9?

(Відповідь: 1) так;

2) ні;

3) ні;

4) ні)

**1.7.** Чи ділиться число

$\underbrace{1 \dots 1}_{81 \text{ цифра}}$

на 81?

(Відповідь: так)

**1.8.** Знайти НСК( $a, b$ ):

1)  $a = 36$ ;  $b = 54$ ;

2)  $a = 111$ ;  $b = 30$ ;

3)  $a = 216$ ;  $b = 270$ .

(Відповідь: 1) 108;

2) 1110;

3) 1080)

- входять в канонічні розклади  $n_1$  і  $n_2$  ;
- в) піднести кожний із виписаних в п. б) простих множників до найменшого степеня, з яким цей множник входить в канонічні розклади чисел  $n_1$  і  $n_2$  ;
- г) добуток отриманих степенів простих множників дає НСД( $n_1, n_2$ ).

Найменше спільне кратне

Найменше натуральне число, яке ділиться націло на числа  $n_1$  і  $n_2$ , називається їх *найменшим спільним кратним* і позначається НСК( $n_1, n_2$ ).

*Правило знаходження НСК( $n_1, n_2$ ):*

- а) знайти канонічний розклад чисел  $n_1$  і  $n_2$  ;
- б) виписати всі прості множники, які входять в розклад хоча б одного з чисел  $n_1$  і  $n_2$  ;
- в) піднести кожний із виписаних в п. б) простих множників до найбільшого степеня, з яким цей множник входить в канонічні розклади чисел  $n_1$  і  $n_2$  ;
- г) добуток отриманих степенів простих множників дає НСК( $n_1, n_2$ ).

НСД і НСК чисел  $n_1$  і  $n_2$  пов'язані співвідношенням

$$\text{НСД}(n_1, n_2) \cdot \text{НСК}(n_1, n_2) = n_1 n_2.$$

Властивості основних арифметичних дій

- 1)  $m + n = n + m$ ,  $mn = nm$  – комутативність;
- 2)  $(m + n) + k = m + (n + k)$   
 $(mn)k = m(nk)$  – асоціативність;
- 3)  $m(n + k) = mn + mk$  – дистрибутивність.

Цілі числа

Множина, яка складається з натуральних чисел, цілих від'ємних чисел (тобто чисел -1, -2, -3, ..., -n, ...) і нуля, називається *множиною цілих чисел*, а самі ці числа називаються *цілими*

найменший степінь числа 3 дорівнює 1;  
 найменший степінь числа 5 дорівнює 1;  
 г) знаходимо НСД(360; 8400) =  
 $= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$ .  
 Відповідь: НСД(360; 8400) = 120.

**Приклад 1.9.** НСК(24; 50) = 600; .  
 НСК(12; 48) = 48; НСК(72; 40) = 360.

**Приклад 1.10.** Знайти НСК(360;  
 8400).

а) знаходимо канонічний розклад чисел  
 360 і 8400:  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ;  
 $8400 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ ;

б) виписуємо всі прості множники, які  
 входять в канонічний розклад хоча б  
 одного із чисел 360 і 8400: 2, 3, 5, 7;

в) найбільший степінь числа 2, яке  
 входить множником в кожний із  
 розкладів даних чисел, дорівнює 4;  
 найбільший степінь числа 3 дорівнює 2;  
 найбільший степінь числа 5 дорівнює 2;  
 найбільший степінь числа 7 дорівнює 1;

г) знаходимо НСК(360; 8400) =  
 $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 25200$ .

Відповідь: НСК(360; 8400) = 25200.

**Приклад 1.11.** Обчислити

$$2(-3) + (-2) - (-3)(-4)(-2).$$

$$2(-3) + (-2) - (-3)(-4)(-2) =$$

$$= -6 + (-2) - (-24) = -6 + (-2) + 24 =$$

$$= -(6+2) + 24 = -8 + 24 = 24 - 8 = 16.$$

Відповідь: 16.

**Приклад 1.12.** Довести, що для  
 будь-якого натурального числа  $n$  число  
 $n^3 - n$  ділиться на 6.

**1.9.** Обчислити:

1)  $(-2) + (-3) : (-1) - (-7)$ ;

2)  $(3 \cdot (-2) - (-8)) \cdot (-7) -$   
 $- (-2)(-5) + 3 : (-1)$ ;

3)  $(-2) \cdot 3 + (-4) - 7 \cdot 0 + 1$ .

4)  $(-6) : (-2) + (-8) : 4 -$   
 $- (-2)$ ;

5)  $(5 - 3) + (4 - ((-3) - 7))$ ;

6)  $\frac{(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)}{(-3) - (-5)}$ ;

7)  $\frac{-2 + (-3)(-1) \cdot 0 + (-4)}{(-3) \cdot (-1) + 3}$

(Відповідь: 1) 8;

2) -27;

3) -9;

4) 3;

5) 28;

6) -60;

7) -1)

**1.10.** Довести, що для  
 будь-якого натурального  
 числа  $n$  число  $(n^2 + 5)n$   
 ділиться на 6.

**1.11.** Довести, що для  
 будь-якого натурального  
 числа  $n$  число  
 $(2n + 1)(n + 1)n$  ділиться на  
 6.

**1.12.** Довести, що для  
 будь-якого непарного  
 натурального числа  $n$   
 число  $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$   
 ділиться на 512.

*числами*. Множина цілих чисел позначається символом  $\mathbf{Z}$ .

Порядок виконання арифметичних дій

Якщо в числовому виразі, який не містить дужок, потрібно виконати арифметичні дії, то спочатку виконуються множення і ділення, а потім – додавання і віднімання. Якщо в числовому виразі містяться дужки, то спочатку виконуються дії в дужках (за вказаним вище правилом).

Правила арифметичних дій з цілими числами

Нехай  $m$  і  $n$  – натуральні числа. Тоді

$$(-m) + (-n) = -(m+n);$$

$$(-m) + n = \begin{cases} -(m-n), & m > n \\ n-m, & m < n; \\ 0, & m = n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (-m)n &= -mn; & (-m)(-n) &= mn; \\ -(-n) &= n; & n-m &= -(m-n). \end{aligned}$$

Якщо ціле число  $k \neq 0$  зображається у вигляді добутку двох цілих чисел  $d$  і  $q$ , то говорять, що число  $k$  ділиться (націло) на  $d$  і на  $q$ , а кожне з чисел  $d$  і  $q$  називається дільником числа  $n$ .

Основні властивості подільності націло

Нехай  $n, d, m, p, q \in \mathbf{Z}$ .

- 1) Якщо  $n$  ділиться на  $d$ , то добуток  $nm$  також ділиться на  $d$ .
- 2) Якщо  $n$  і  $m$  діляться на  $d$ , то сума  $n+m$  і різниця  $n-m$  також діляться на  $d$ .
- 3) Якщо  $m$  ділиться на  $p$ , а  $n$  ділиться на  $q$ , то добуток  $nm$  ділиться на добуток  $pq$ .
- 4) Якщо  $m$  ділиться на  $n$ , а  $n$  ділиться на  $p$ , то  $m$  ділиться на  $p$ .

Ділення з остачею

Для будь-якого цілого числа  $k$  і натурального числа  $n$  існує єдина пара чисел  $p$  і  $q$  таких,

$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ . Число  $n$  можна зобразити у вигляді  $n = 6k + l$ , де  $k$  – натуральне число або нуль, а  $l$  набуває одного із наступних значень:  $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3, l = 4, l = 5$ .

Якщо  $l = 0$ , то  $n = 6k$ , тому число  $n$  ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

Якщо  $l = 1$ , то  $n = 6k + 1$ , тому число  $n - 1 = 6k$  ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

Якщо  $l = 2$ , то  $n = 6k + 2$ , тому число

$$\begin{aligned} (n-1)n(n+1) &= (6k+2)(6k+1)(6k+3) = \\ &= 2(3k+1)(6k+1) \cdot 3 \cdot (2k+1) = \\ &= 6(3k+1)(6k+1)(2k+1) \end{aligned}$$

ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

Якщо  $l = 3$ , то  $n = 6k + 3$ , тому число

$$\begin{aligned} (n-1)n(n+1) &= (6k+3)(6k+2)(6k+4) = \\ &= 3(2k+1) \cdot 2 \cdot (3k+1)(6k+4) = \\ &= 6(2k+1)(3k+1)(6k+4) \end{aligned}$$

ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

Якщо  $l = 4$ , то  $n = 6k + 4$ , тому число

$$\begin{aligned} (n-1)n(n+1) &= (6k+4)(6k+3)(6k+5) = \\ &= 2(3k+2) \cdot 3 \cdot (2k+1)(6k+5) = \\ &= 6(3k+2)(2k+1)(6k+5) \end{aligned}$$

ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

Якщо  $l = 5$ , то  $n = 6k + 5$ , тому число

$$\begin{aligned} (n-1)n(n+1) &= (6k+5)(6k+4)(6k+6) = \\ &= 6(6k+5)(6k+4)(k+1) \end{aligned}$$

ділиться на 6, і, отже, число  $(n-1)n(n+1)$  також ділиться на 6.

**1.13.** Довести, що для будь-якого натурального числа  $n$  число:

1)  $10^n + 18n - 1$  ділиться на 27;

2)  $3^{2n+3} - 40n - 27$  ділиться на 64;

3)  $50^n - 5^n(2^n + 1) + 1$  ділиться на 36.

**1.14.** Знайти остачу від ділення числа:

1) 278456789;

2) 321792413

на 3, 4, 5, 8, 9, 125.

(Відповідь: 1) 2, 1, 4, 5, 2, 39;

2) 2, 1, 3, 5, 5, 38)

**1.15.** Довести, що сума квадратів двох послідовних цілих чисел при діленні на 4 дає остачу 1.

**1.16.** Довести, що квадрат непарного цілого числа, відмінного від нуля, при діленні на 8 дає остачу 1.

**1.16.** Довести, що якщо кожне з двох натуральних чисел при діленні на натуральне число  $m$  дає остачу 1, то їх добуток при діленні на  $m$  також дає остачу 1.

**1.17.** Порівняти дробі:

що  $k = nr + q$ , де  $r$  – ціле число,  $q$  – натуральне число або нуль, причому  $0 \leq q < n$ . При  $q = 0$  число  $k$  ділиться на  $n$  націло. При  $q \neq 0$  говорять, що число  $k$  ділиться на  $n$  із *остачею*.

При діленні цілого числа  $k$  на натуральне число  $n$  маємо:

- а) або число  $k$  ділиться на число  $n$  націло;
- б) або при діленні числа  $k$  на число  $n$  одержуємо в остачі одне із чисел  $1, 2, \dots, n - 1$ .

Звичайний дріб Вираз виду  $\frac{p}{q}$  називається *звичайним дробом*, де  $q$  – *знаменник* дробу (натуральне число),  $p$  – *чисельник* дробу (ціле число). Будь-яке ціле число  $k$  зображається у вигляді дробу  $\frac{k}{1}$ .

Рівність дробів Два дроби  $\frac{p}{q}$  і  $\frac{m}{n}$  рівні, якщо справедлива рівність  $pn = qt$ .

Основна властивість дробів Якщо чисельник і знаменник даного дробу домножити на одне і те ж саме ціле, відмінне від нуля число, або розділити на їх спільний множник, то одержимо дріб, який дорівнює даному, тобто

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Скорочення дробу Ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник називається *скороченням* дробу.

Нескоротні дроби Дріб  $\frac{p}{q}$  називається *нескоротним*, якщо числа

Отже, при будь-якому натуральному числі  $n$  число  $n^3 - n$  ділиться на 6.

**Приклад 1.13.** При діленні числа 25 на число 7 одержуємо  $25 = 3 \cdot 7 + 4$ , де 3 – частка, а 4 – остача.

При діленні числа  $-25$  на число 7 одержуємо  $-25 = (-4) \cdot 7 + 3$ , де  $(-4)$  – частка, а 3 – остача.

**Приклад 1.14.** Дроби  $\frac{4}{7}$  і  $\frac{8}{14}$  рівні, оскільки  $4 \cdot 14 = 7 \cdot 8$ .

Дроби  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{6}{14}$  і  $-\frac{9}{21}$  рівні, оскільки за основною властивістю дробу

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{3 \cdot (-3)}{7 \cdot (-3)}.$$

**Приклад 1.15.** Записати дробі  $\frac{105}{147}$  і  $-\frac{18}{42}$  у вигляді нескоротних дробів.

Оскільки  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , а  $147 = 3 \cdot 7^2$ , то, скорочуючи чисельник і знаменник дробу на спільні множники 3 і 7,

$$\text{одержимо } \frac{105}{147} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Оскільки  $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ , а  $42 = 3 \cdot 2 \cdot 7$ , то

$$-\frac{18}{42} = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 7} = -\frac{3}{7}.$$

**Приклад 1.16.** Дріб  $\frac{13}{7}$  нескоротний, оскільки НСД(13; 7) = 1.

**Приклад 1.17.** Виконати дії:

1)  $\frac{3}{7} + \frac{4}{7}$ ;

2)  $-\frac{5}{11} + \frac{6}{11}$ ;

3)  $\frac{8}{9} + \frac{7}{9}$ ;

4)  $-\frac{13}{123} + \frac{13}{129}$ ;

5)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ ;

6)  $\frac{6}{7} + \frac{24}{28}$ ;

7)  $-\frac{13}{14} + \frac{14}{15}$ ;

8)  $\frac{124}{119} + \frac{137}{129}$ .

(Відповідь: 1)  $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ ;

2)  $-\frac{5}{11} > -\frac{6}{11}$ ;

3)  $\frac{8}{9} > -\frac{7}{9}$ ;

4)  $-\frac{13}{123} < -\frac{13}{129}$ ;

5)  $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$ ;

6)  $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$ ;

7)  $-\frac{13}{14} > -\frac{14}{15}$ ;

8)  $\frac{124}{119} < \frac{137}{129}$

**1.18.** Записати дріб у вигляді нескоротного дробу:

$p$  і  $q$  взаємно прості. Будь-який дріб  $\frac{p}{q}$  можна записати у вигляді нескоротного дробу. Для цього необхідно скоротити на НСД( $p, q$ ) чисельник і знаменник дробу.

Арифметичні дії над дробами

$$1) \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} \quad (\text{сума дробів});$$

$$2) \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{q_1q_2} \quad (\text{різниця дробів});$$

$$3) \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2} \quad (\text{добуток дробів});$$

$$4) \frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1q_2}{q_1p_2} \quad (\text{частка дробів}).$$

В деяких випадках правило знаходження суми (різниці) дробів допускає спрощення.

1) Для того, щоб додати (відняти) два дроби  $\frac{p}{q}$  і  $\frac{r}{q}$  з однаковими знаменниками, потрібно

написати дріб, у якого знаменник дорівнює знаменнику даних дробів, а чисельник – сумі (різниці) чисельників цих дробів.

2) Для того, щоб додати (відняти) два дроби  $\frac{p}{q}$  і  $\frac{r}{s}$  з різними знаменниками, потрібно

знайти найменше спільне кратне  $A$  знаменників цих дробів і звести дані дроби до цього спільного знаменника  $A$ , а потім виконати додавання (віднімання) одержаних дробів з однаковими знаменниками.

Порівняння дробів

Говорять, що дріб  $\frac{p}{q}$  більше (менше) дробу

$$\frac{m}{n} \text{ і пишуть } \frac{p}{q} > \frac{m}{n} \quad \left( \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \right), \text{ якщо дріб}$$

$$1) \frac{5}{21} + \frac{4}{9}; 2) \frac{7}{90} - \frac{11}{105};$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}.$$

1) НСК(21; 9) = 63. Зводючи дроби до цього спільного знаменника, одержуємо

$$\frac{5}{21} = \frac{15}{63}, \frac{4}{9} = \frac{28}{63}, \text{ тому}$$

$$\frac{5}{21} + \frac{4}{9} = \frac{15}{63} + \frac{28}{63} = \frac{15 + 28}{63} = \frac{43}{63}.$$

2) Оскільки  $90 = 3^2 \cdot 5 \cdot 2$ , а  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ , то НСК(21; 9) =  $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 630$ , і тому

$$\frac{7}{90} - \frac{11}{105} = \frac{7 \cdot 7 - 6 \cdot 11}{630} = \frac{49 - 66}{630} = -\frac{17}{630}$$

$$3) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 10}{60} = \frac{213}{60} = \frac{71}{20}.$$

**Приклад 1.18.** Порівняти дроби:

$$1) \frac{11}{12} \text{ і } \frac{12}{13}; 2) \frac{11}{18} \text{ і } \frac{17}{21}.$$

1) Домножимо чисельник і знаменник першого дроби на 13, а другого – на 12,

$$\text{тоді } \frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 13} = \frac{143}{156} \text{ і}$$

$$\frac{12}{13} = \frac{12 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{144}{156}. \text{ Оскільки у цих}$$

дробів знаменники однакові, то перший дріб менше, ніж другий; отже,  $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$ .

$$2) \text{ Оскільки } \frac{11}{18} - \frac{17}{21} = \frac{7 \cdot 11 - 6 \cdot 17}{126} =$$

$$1) \frac{81}{504};$$

$$2) \frac{1075}{600};$$

$$3) \frac{11111}{1001};$$

$$4) \frac{10101010}{1010}.$$

(Відповідь: 1)  $\frac{9}{56}$ ;

$$2) \frac{43}{24};$$

$$3) 111;$$

$$4) 10001)$$

**1.19.** Який з наступних дробів є правильний, а який – неправильний? Записати неправильний дріб у вигляді мішаного дроби:

$$1) \frac{5}{4};$$

$$2) -\frac{11}{7};$$

$$3) -\frac{119}{23};$$

$$4) \frac{124}{271}.$$

(Відповідь: 1)  $1\frac{1}{4}$ ;

$$2) -1\frac{4}{7};$$

$$3) -5\frac{4}{23};$$

$$4) \text{ дріб правильний)}$$

$\frac{p}{q} - \frac{m}{n}$  додатний (від'ємний).

З двох додатних дробів  $\frac{p}{q}$  і  $\frac{r}{q}$  з однаковими знаменниками більший той, у якого чисельник більше. З двох додатних дробів  $\frac{p}{q}$  і  $\frac{p}{r}$  з однаковими чисельниками більший той, у якого знаменник менше.

Правильний  
(неправильний) дріб

Додатний дріб  $\frac{p}{q}$  називається *правильним*, якщо його чисельник менше знаменника; у протилежному випадку (тобто якщо чисельник дорівнює знаменнику або більше його) – *неправильним*.

Мішаний дріб

Якщо додатний дріб  $\frac{p}{q}$  неправильний, то його чисельник можна єдиним чином зобразити у вигляді  $p = nq + r$ , де  $n$  – натуральне число, а  $r$  – ціле число, яке задовольняє умову  $0 \leq r < q$ . При  $r \neq 0$  неправильний дріб  $\frac{p}{q}$  записується у вигляді  $n + \frac{r}{q}$ , або  $n \frac{r}{q}$ . Число  $n \frac{r}{q}$  називається *мішаним дробом*, де  $n$  – ціла частина, а  $\frac{r}{q}$  – дробова частина. Будь-який мішаний дріб можна перетворити в неправильний дріб.

Скінченний  
десятковий дріб

Дріб  $\frac{p}{q}$ , знаменник якого дорівнює  $10^k$ , де  $k$  – натуральне число, можна записати в такий

$$= \frac{77 - 102}{126} = -\frac{25}{126} < 0, \text{ то } \frac{11}{18} < \frac{17}{21}.$$

**Приклад 1.19.** Правильні дробі:  $\frac{3}{7}, \frac{2}{8}, \frac{11}{123}$ . Неправильні дробі:  $\frac{5}{5}, \frac{8}{3}, \frac{17}{11}$ .

Запис неправильного дробу у вигляді мішаного:

$$\frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}, \quad -\frac{17}{3} = -5\frac{2}{3}, \quad \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}.$$

Запис мішаного дробу у вигляді неправильного:

$$2\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{2}{1} + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{12}{5}.$$

**Приклад 1.20.** Обчислити:

$$\frac{\left(1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 3\frac{1}{3}}{\frac{115}{7}}.$$

Оскільки

$$1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4} = \frac{10}{7} - \frac{9}{4} = \frac{40 - 63}{28} = -\frac{23}{28}$$

$$\text{і } \left(-\frac{23}{28}\right) \cdot 3\frac{1}{3} = -\frac{23}{28} \cdot \frac{10}{3} = -\frac{23 \cdot 10}{28 \cdot 3} =$$

$$= -\frac{230}{84} = -\frac{115}{42},$$

то

$$\frac{\left(1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 3\frac{1}{3}}{\frac{115}{7}} = \frac{-\frac{115}{42}}{\frac{115}{7}} = -\frac{115}{42} : \frac{115}{7} =$$

$$= -\frac{115}{42} \cdot \frac{7}{115} = -\frac{115 \cdot 7}{42 \cdot 115} = -\frac{7}{42} = -\frac{1}{6}.$$

**1.20.** Перетворити мішаний дріб у неправильний:

1)  $2\frac{3}{7}$ ;

2)  $-4\frac{3}{8}$ ;

3)  $1\frac{11}{12}$ ;

4)  $-2\frac{3}{35}$ .

(Відповідь: 1)  $\frac{17}{7}$ ;

2)  $-\frac{35}{8}$ ;

3)  $\frac{23}{12}$ ;

4)  $-\frac{73}{35}$ )

**1.21.** Обчислити:

1)  $1\frac{5}{7} \cdot 1\frac{3}{4} + 3\frac{2}{11} : 2\frac{3}{121}$ ;

2)  $\left(\frac{1}{4} - \frac{1/4 + 1/9}{1/9}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{7/15}{2/5 - 1/6}\right)$ .

(Відповідь: 1)  $4\frac{4}{7}$ ;

2)  $-\frac{9}{8}$ )

**1.22.** Записати дріб у вигляді скінченного десяткового дробу:

спосіб. Якщо  $p > 0$ , то пишуть чисельник цього дробу – число  $p - i$ , відрахувавши справа  $k$  цифр, відділяють їх комою. При цьому якщо в чисельнику менше цифр, ніж  $k$  (наприклад,  $n < k$ ), то перед першою цифрою чисельника вписують  $k - n$  нулів, потім ставлять кому і перед нею ще один нуль. Таке зображення числа називають *скінченним десятковим дробом*.

Запис скінченного десяткового дробу у вигляді звичайного дробу

Будь-який скінченний десятковий дріб переводиться в звичайний дріб. Для цього необхідно записати в чисельник ціле число, яке отримуємо при відкиданні коми у десяткового дробу і нулів зліва, а в знаменник записати одиницю і після неї стільки нулів, скільки цифр стоїть у десяткового дробу після коми. Після цього дріб можна скоротити на спільний множник, якщо він є.

Для того, щоб нескоротний дріб  $\frac{p}{q}$  можна

було записати у вигляді скінченного десяткового дробу, необхідно і достатньо, щоб його знаменник не містив інших простих множників, крім 2 і 5.

Нескінченний періодичний десятковий дріб

Десятковий дріб, у якого після коми стоїть безліч цифр, причому одна цифра або впорядкована група цифр, починаючи з деякого розряду після коми, повторюється, називається *нескінченим періодичним десятковим дробом*. Повторювана цифра або впорядкована група цифр називається *періодом*. Період прийнято писати один раз, уклавши його в круглі дужки:  $16,7433433 \dots = 16,7(433)$ ;  $-0,88\dots = -0,(8)$ .

Період дробу

Кожний нескоротний дріб  $\frac{p}{q}$ , знаменник

**Приклад 1.21.** Запис дробу зі знаменником  $10^k$  у вигляді десяткового

дробу:  $\frac{19}{10} = 1,9$ ;  $\frac{19}{100} = 0,19$ ;

$\frac{19}{1000} = 0,019$ ;  $-\frac{3}{100} = -0,03$ .

Запис десяткового дробу у вигляді звичайного:

$$1,15 = \frac{115}{100} = \frac{23}{20}$$

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \quad -2,755 = -\frac{2755}{1000} = -\frac{551}{200}$$

**Приклад 1.22.** Дріб  $\frac{17}{20}$  можна записати у вигляді скінченного десяткового:

$$\frac{17}{20} = \frac{17}{4 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{85}{100} = 0,85$$

Дріб  $\frac{5}{21}$  неможливо записати у вигляді скінченного десяткового, оскільки знаменник дробу містить прості множники, відмінні від 2 і 5.

**Приклад 1.23.** Запис нескінченного періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного дробу:

$$0,11(7) = \frac{117 - 11}{900} = \frac{106}{900} = \frac{53}{450};$$

$$0,(37) = \frac{37 - 0}{99} = \frac{37}{99};$$

$$-2,15(16) = -\frac{21516 - 215}{9900} = -\frac{21301}{9900}$$

Запис звичайного дробу у вигляді нескінченного періодичного десяткового:

$$1) \frac{112}{1000};$$

$$2) -\frac{3728}{200};$$

$$3) \frac{693}{616};$$

$$4) -\frac{42}{1344}.$$

(Відповідь: 1) 0,112;

2) -1,864;

3) 1,125;

4) -0,03125)

**1.23.** Записати десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 2,15;

2) -17,12;

3) 0,1212;

4) -3,082.

(Відповідь: 1)  $\frac{43}{20}$ ;

$$2) -\frac{428}{25};$$

$$3) \frac{303}{2500};$$

$$4) -\frac{1541}{500}$$

**1.24.** Записати раціональне число у вигляді періодичного дробу:

$$1) \frac{2}{9};$$

$$2) -1\frac{3}{13};$$

якого містить хоча б один простий множник, відмінний від 2 і 5, може бути поданий у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Запис нескінченного періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного дробу

Кожний нескінченний періодичний десятковий дріб може бути єдиним чином поданий у вигляді дробу  $\frac{p}{q}$ . Для цього

необхідно від числа, що стоїть до другого періоду, відняти число, яке стоїть до першого періоду, і зробити цю різницю чисельником, а в знаменнику написати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді і після дев'яток дописати тільки нулів, скільки цифр між комою і першим періодом. Існує домовленість не мати цифру 9 періодом. Тоді кожний скінченний десятковий дріб може бути єдиним чином поданий у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу з періодом 0 і, навпаки, кожний такий дріб є скінченим десятковим дробом. Враховуючи сказане, можна вважати, що кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є іншою формою запису деякого звичайного дробу.

Раціональні числа

Будь-який нескінченний періодичний десятковий дріб (звичайний дріб) називається *раціональним числом*. Множина всіх раціональних чисел позначається символом **Q**.

Ірраціональні числа

Будь-який нескінченний неперіодичний десятковий дріб називається *ірраціональним числом*. Множина всіх ірраціональних чисел позначається символом **I**. Ірраціональне число

неможливо подати у вигляді дробу  $\frac{p}{q}$ , і навпаки, кожне число, яке не може бути

$$\frac{1}{3} = 0,(3); \quad \frac{17}{7} = 2,(428571).$$

$$3) \frac{8}{123};$$

$$4) -2\frac{1}{3}.$$

**Приклад 1.24.** Довести, що числа є ірраціональними: 1)  $\sqrt{2}$ ; 2)  $\log_7 6$ .

(Відповідь: 1) 0,(2);

2)  $-1,(230769)$ ;

3)  $0,(06504)$ ;

4)  $-2,(3)$

1) Припустимо, що число  $\sqrt{2}$  є раціональним, тобто  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , де  $\frac{p}{q}$  –

нескоротний дріб. Тоді  $p^2 = 2q^2$ . Оскільки права частина цієї рівності ділиться на 2, то і ліва частина також ділиться на 2, тобто  $p^2$  є парним числом. Очевидно, що тоді і  $p$  є парним. Це означає, що існує ціле число  $m$  таке, що  $p = 2m$ . Підставляючи це

**1.25.** Перетворити періодичний дріб в звичайний:

1)  $0,2(3)$ ;

2)  $1,4(51)$ ;

3)  $0,413(1561)$ ;

4)  $-0,41(356)$ .

(Відповідь: 1)  $\frac{7}{30}$ ;

2)  $\frac{479}{330}$ ;

3)  $\frac{1032787}{2499750}$ ;

4)  $-\frac{8263}{19980}$ )

значення в вираз  $p^2 = 2q^2$ , одержуємо  $2p^2 = q^2$ . Оскільки ліва частина цієї рівності ділиться на 2, то аналогічно отримуємо  $q = 2l$ . Отже, числа  $p$  і  $q$  мають спільний множник – число 2, однак за припущенням  $p$  і  $q$  взаємно прості. Це протиріччя означає, що зроблене припущення є невірним. Отже, число  $\sqrt{2}$  є ірраціональним.

**1.26.** Довести ірраціональність чисел:

1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;

2)  $\log_2 3$ .

2) Припустимо, що число  $\log_7 6$  є раціональним, тобто  $\log_7 6 = \frac{p}{q}$ , де  $p$  і  $q$  – натуральні числа. За означенням логарифма  $7^{p/q} = 6$ , або  $7^p = 6^q$ . Але ця рівність неможлива, оскільки  $7^p$  натуральне непарне число, а  $6^q$  – натуральне парне число. Отже, число  $\log_7 6$  є ірраціональним.

**1.27.** Порівняти числа:

1)  $0,22(23)$  і  $0,2223$ ;

2)  $\frac{1}{7}$  і  $0,1428(57)$ ;

3)  $-2\frac{2}{3}$  і  $-2,67$ ;

подане у вигляді  $\frac{p}{q}$ , є ірраціональним.

Дійсні числа

Множина всіх раціональних і ірраціональних чисел позначається символом  $\mathbf{R}$  і називається множиною *дійсних чисел*.

Порівняння дійсних чисел

Два дійсних числа  $a$  і  $b$  рівні, якщо  $a - b = 0$ . Число  $a$  більше (менше) числа  $b$ , якщо різниця  $a - b$  додатна (від'ємна).

Властивості числових рівностей

- 1) Якщо  $a = b$  і  $b = c$ , то  $a = c$ .
- 2) Якщо  $a = b$  і  $c = d$ , то  $a \pm c = b \pm d$ .
- 3) Якщо  $a = b$  і  $c = d$ , то  $ac = bd$  і  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  ( $c \neq 0$ ).
- 4) Якщо  $a = b$ , то  $a \pm c = b \pm c$ .
- 5) Якщо  $a = b$ , то  $ac = bc$  і  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$  ( $c \neq 0$ ).

Властивості числових строгих нерівностей

- 1) Якщо  $a > b$  і  $b > c$ , то  $a > c$ .
- 2) Якщо  $a > b$  і  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ .
- 3) Якщо  $a > b$  і  $c < d$ , то  $a - c > b - d$ .
- 4) Якщо  $a > b > 0$  і  $c > d > 0$ , то  $ac > bd$  і  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ .
- 5) Якщо  $a > b$ , то  $a \pm c > b \pm c$ .
- 6) Якщо  $a > b$  і  $c > 0$ , то  $ac > bc$  і  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .
- 7) Якщо  $a > b$  і  $c < 0$ , то  $ac < bc$  і  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

Нестрогі числові нерівності

Нестрога числова нерівність  $a \geq b$  вважається вірною і при  $a > b$ , і при  $a = b$ . Перелічені вище властивості нерівностей справедливі і для нестрогих нерівностей.

**Приклад 1.25.** Встановити, яке з двох чисел більше:

1)  $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1$  чи  $-\frac{4}{5}$ ; 2)  $\frac{131}{273}$  чи  $\frac{179}{235}$ ;

3) 2 чи  $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ ; 4)  $3^{21}$  чи  $2^{31}$ .

1) Знайдемо різницю вказаних чисел:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{6}} - 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) &= \frac{1}{\sqrt{6}} - 1 + \frac{4}{5} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{5} = \\ &= \frac{5 - \sqrt{6}}{5\sqrt{6}} > 0. \end{aligned}$$

Отже, число  $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1$  більше числа  $-\frac{4}{5}$ .

2) Розглянемо частку даних чисел:

$$\frac{131}{273} : \frac{179}{235} = \frac{131}{273} \cdot \frac{235}{179} = \frac{131}{179} \cdot \frac{235}{273} < 1,$$

оскільки кожен з дробів добутку менше

1. Отже, число  $\frac{179}{235}$  більше числа  $\frac{131}{273}$ .

3) Оскільки  $(3\sqrt{3})^2 = 27 > 25 = 5^2$ , то

$3\sqrt{3} > 5$ . Оскільки  $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 9 = 3^2$ ,

то  $3\sqrt{2} < 3$ . Віднімаючи від нерівності

$3\sqrt{3} > 5$  нерівність  $3\sqrt{2} < 3$ , одержуємо

$3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} > 5 - 3 = 2$ . Отже, число

$3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$  більше числа 2.

4) Подамо задані числа у вигляді:

$$3^{21} = 3^{20} \cdot 3 = (3^2)^{10} \cdot 3 = 9^{10} \cdot 3,$$

$$2^{31} = 2^{30} \cdot 2 = (2^3)^{10} \cdot 2 = 8^{10} \cdot 2.$$

Оскільки  $9^{10} > 8^{10}$ , то  $9^{10} \cdot 3 > 8^{10} \cdot 3 >$

$> 8^{10} \cdot 2$ . Отже, число  $3^{21}$  більше числа  $2^{31}$ .

4)  $-\frac{7}{6}$  і  $-1,16667$ .

(Відповідь: 1)  $0,22(23) > 0,2223$ ;

2)  $\frac{1}{7} < 0,1428(57)$ ;

3)  $-2\frac{2}{3} > -2,67$ ;

4)  $-\frac{7}{6} > -1,16667$

**1.28.** Обчислити:

1)  $0,4(3) + 0,6(2) \cdot 2\frac{1}{2} -$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : \frac{50}{0,5(8) \cdot 53};$$

2)  $3\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{49} - \left(2, (4) \cdot 2\frac{5}{11}\right) :$

$$\left(-\frac{42}{5}\right).$$

(Відповідь: 1)  $\frac{22}{45}$ ;

2) 1)

## 2 ПРОПОРЦІЇ ТА ПРОЦЕНТИ

Пропорція	Рівність двох відношень $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (bd \neq 0) \quad (2.1)$
Крайні та середні члени пропорції	називається <i>пропорцією</i> , а числа $a, b, c, d$ – <i>членами пропорції</i> . При цьому числа $a$ і $d$ називаються <i>крайніми</i> членами пропорції, а числа $b$ і $c$ – <i>середніми</i> членами пропорції.
Основна властивість пропорції	Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів, тобто $ad = bc$ .
Перестановка членів пропорції	Якщо $abcd \neq 0$ , то пропорцію (2.1) можна записати у вигляді однієї з наступних пропорцій (перестановка членів пропорції): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$
Похідна пропорція	Якщо дана пропорція (2.1), то при довільних $m$ і $n$ і довільних $\alpha$ і $\beta$ таких, що $nb + ma \neq 0$ і $nd + mc \neq 0$ , справедлива рівність $\frac{\alpha a + \beta b}{ma + nb} = \frac{\alpha c + \beta d}{mc + nd},$ яка називається <i>похідною пропорцією</i> . Зокрема, із пропорції (2.1) одержуємо наступні похідні пропорції: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$
Пряма пропорційність	Дві величини $a$ і $b$ називаються <i>прямо пропорційними</i> , якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини збільшується в таку

**Приклад 2.1.** Один сплав складається з двох металів, які входять у нього у відношенні 1:2, а другий сплав містить ті ж самі метали у відношенні 2:3. Скільки потрібно взяти частин кожного із сплавів, щоб одержати новий сплав, який містить ті ж самі метали у відношенні 17:27?

Позначимо через  $x$  кількість першого сплаву, а через  $y$  – кількість другого сплаву, які містяться у новому сплаві.

Тоді в новому сплаві міститься  $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}$

першого металу і  $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}$  другого металу; тому

$$\frac{\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}}{\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}} = \frac{17}{27}.$$

Звідки одержуємо  $\frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{17}{27}$ , або

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{35}.$$

Отже, в новому сплаві міститься 9 частин першого і 35 частин другого металу.

Відповідь: 9 частин першого і 35 частин другого металу.

**Приклад 2.2.** Дві труби, відкриті одночасно, заповнюють резервуар за 12 годин. Тільки через першу трубу резервуар заповниться за 20 годин. За скільки годин заповнює резервуар друга труба?

Перша труба (самостійно) за одну годину заповнює  $\frac{1}{20}$  частину

**2.1.** Пасажир метро спускається вниз по рухомому ескалатору за 24 секунди. Якщо пасажир йде з тією ж швидкістю, але по нерухомому ескалатору, то він спускається за 42 секунди. За скільки секунд він спуститься, стоячи на сходинці рухомого ескалатора?

(Відповідь: 56 секунд)

**2.2.** На обробку однієї деталі перший робітник витрачає на 6 хв менше, ніж другий. Скільки деталей обробить кожний з них за 7 год, якщо перший обробляє за цей час на 8 деталей більше, ніж другий?

(Відповідь: 28 і 20 деталей)

**2.3.** З першого крану за 21 хвилину виливається 48 літрів води, а з другого крану за 84 хвилини – 36 літрів. Скільки літрів води вилється з першого крану за той час, за який з другого крану вилється 54 літри?

(Відповідь: 288 літрів)

**2.4.** Число  $a$  більше числа  $b$  на 50%. На скільки процентів число  $b$  менше числа  $a$  ?

Коефіцієнт  
пропорційності

ж кількість разів:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ . Число  $k$

називається *коефіцієнтом пропорційності*.

Обернена  
пропорційність

Дві величини  $a$  і  $b$  називаються *обернено пропорційними*, якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини зменшується в таку

ж кількість разів:  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{b_2}$ .

Якщо розглядається рівномірний рух тіла, то при сталій відстані час руху і швидкість тіла обернено пропорційні; при сталому часі швидкість і відстань прямо пропорційні; при сталій швидкості час і відстань прямо пропорційні. При розв'язуванні задач на потужність або продуктивність праці (кількість роботи в одиницю часу) маємо: час роботи і продуктивність є обернено пропорційними величинами (якщо обсяг роботи сталий), продуктивність і кількість роботи є прямо пропорційними величинами (якщо час роботи сталий), час роботи і її кількість є прямо пропорційними величинами (якщо продуктивність стала).

Процент (відсоток)

*Процентом (відсотком)* даного числа  $a$  називається його сота частина. Отже, саме число складає 100 процентів. Один процент позначається символом 1%. Процент є величиною безрозмірною, і тому має місце рівність  $1\% = 0,01$ .

Перетворення дробу  
у проценти

Щоб перетворити десятковий або звичайний дріб у проценти, потрібно помножити його на 100:

$$0,006 = 0,006 \cdot 100\% = 0,6\% ;$$

$$0,12 = 0,12 \cdot 100\% = 12\% ;$$

$$2,58 = 2,58 \cdot 100\% = 258\% ;$$

резервуару. Обидві труби, відкриті одночасно, за одну годину заповнюють

$\frac{1}{12}$  частину резервуару. Отже, друга

труба (самостійно) за одну годину

заповнює  $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$  частину

резервуару. Отже, на заповнення резервуару тільки другою трубою

знадобиться  $1 : \frac{1}{30} = 30$  годин.

Відповідь: 30 годин.

**Приклад 2.3.** Поїзд проїхав деяку відстань за 8 годин. Якби він рухався зі швидкістю 120 км/год, то проїхав би цю ж саму відстань за 7 годин. З якою швидкістю рухався поїзд?

Якщо відстань є сталою величиною, то швидкість руху і час є обернено пропорційними величинами. Позначимо шукану швидкість поїзда  $x$  км/год, тоді одержимо пропорцію:

$$\frac{x}{120} = \frac{7}{8},$$

звідки  $x = \frac{120 \cdot 7}{8} = 105$  км/год.

Відповідь: 105 км/год.

**Приклад 2.4.** Знайти 25% від числа 68.

а)  $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ;

б)  $\frac{1}{4} \cdot 68 = 17$ .

Відповідь: 17.

**Приклад 2.5.** Знайти число, 17%

(Відповідь:  $33\frac{1}{3}\%$ )

**2.5.** Обсяг промислової продукції збільшився в 10 разів. На скільки процентів відбулось збільшення?

(Відповідь: 900%)

**2.6.** Цех випускає 20 виробів на рік. На скільки виробів на рік збільшиться випуск продукції, якщо продуктивність праці збільшиться на 45%?

(Відповідь: 90 виробів)

**2.7.** В результаті зростання продуктивності праці на 35% токарь почав обробляти 405 виробів за зміну. Скільки виробів за зміну він обробляв раніше?

(Відповідь: 300 виробів)

**2.8.** На конвейері збирали в місяць 126 агрегатів. В результаті впровадження новітньої технології на конвейері почали збирати 189 агрегатів в місяць. На скільки процентів збільшилась потужність конвейера?

(Відповідь: 50%)

**2.9.** Двигун танкера за перший тиждень рейсу витратив 25% місячного

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\% .$$

Перетворення  
процентів у дріб

Щоб перетворити проценти у десятковий дріб,  
треба число відсотків поділити на 100:

$$60\% = 60\% : 100\% = 0,6 ;$$

$$7,54\% = 7,54\% : 100\% = 0,0754 ;$$

$$57\frac{1}{7}\% = 57\frac{1}{7}\% : 100\% = \frac{400}{7} : 100 = \frac{4}{7} .$$

Знаходження  
процентів від числа

Для того щоб знайти  $q$  процентів від заданого  
числа  $a$  , потрібно:

а) записати  $q$  процентів десятковим дробом;

б) помножити число  $a$  на одержаний  
десятковий дріб.

Знаходження числа  
за його процентами

Для того щоб знайти число за відомою його  
частиною  $b$  (яка складає  $q$  процентів  
шуканого числа), потрібно:

а) записати  $q$  процентів десятковим дробом;

б) поділити  $b$  на одержаний десятковий дріб.

Знаходження  
процентного  
відношення двох  
чисел

Для того щоб знайти, скільки процентів  
становить число  $a$  від числа  $b$  , потрібно:

а) знайти значення дробу  $\frac{a}{b}$  ;

б) помножити його на 100%.

Зв'язок процентів з  
пропорціями

В загальному випадку при розв'язуванні задач  
на проценти деяку величину  $a$  приймаємо за  
100%, а її частину – величину  $b$  – приймаємо  
за  $\alpha\%$  ; тоді складаємо пропорцію

$$\frac{a}{b} = \frac{100}{\alpha} .$$

З цієї пропорції за двома відомими  
величинами визначаємо шукану третю  
величину, користуючись основною

якого складає 425.

$$\text{а) } 17\% = \frac{17}{100} = 0,17 ;$$

$$\text{б) } \frac{425}{0,17} = 2500 .$$

Відповідь: 2500.

**Приклад 2.6.** Робітнику із зарплатні 4270 грн. виплатили авансом 1708 грн. Який процент зарплатні одержав робітник?

$$\text{а) } \frac{1708}{4270} = 0,4 ;$$

$$\text{б) } 0,4 \cdot 100\% = 40\% .$$

Відповідь: 40% .

**Приклад 2.7.** Завод випускає 300 виробів на місяць. На скільки виробів на місяць збільшиться випуск, якщо продуктивність праці збільшиться на 20%?

Шукане число виробів позначимо  $x$ . Тоді 300 виробам відповідає 100%;  $x$  виробам відповідає 20%. Складаємо пропорцію:

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{20} ,$$

$$\text{звідки } x = \frac{300 \cdot 20}{100} = 60 .$$

Відповідь: на 60 виробів.

**Приклад 2.8.** Товар ціною 1136 грн. після оголошення знижки був проданий за 852 грн. На скільки процентів знизили ціну товару?

Ціна товару зменшилась на  $1136 - 852 = 284$  грн. Позначимо через  $x$  число процентів, на яке зменшилась ціна. Тоді

запасу палива, за другий тиждень – 110% від витраченого за перший тиждень, за третій тиждень – 60% від витраченого за перші два тижні, а за четвертий тиждень витратив останні 32 т. Скільки тонн палива витрачає двигун танкера на місяць?

(Відповідь: 200т)

**2.10.** Радіус кола збільшили на 25%. На скільки процентів збільшилась площа круга?

(Відповідь: 56,25%)

**2.11.** На скільки процентів треба зменшити число  $A$ ,

щоб одержати число  $\frac{4A}{5}$ ?

(Відповідь: 20%)

**2.12.** Гриби при висушуванні втрачають 80% своєї маси. Скільки потрібно взяти свіжих грибів, щоб отримати 1кг сушених?

(Відповідь: 5кг)

**2.13.** Обсяг будівельних робіт збільшився на 60%, при цьому продуктивність праці зросла на 25%. На скільки процентів треба збільшити кількість працюючих?

властивістю пропорції:  $a\alpha = 100b$ .

Формула простих  
процентів

В бухгалтерському обліку, статистичних розрахунках та інших областях господарської діяльності використовуються формули простих та складних процентів. Дано їх означення на прикладі банківської діяльності. Якщо банк виплачує клієнтові щомісячно (або щорічно, загалом за деякий період)  $p\%$  від внесеної суми  $U_0$ , то на рахунку клієнта через  $n$  місяців (років, загалом періодів) буде сума

$$U_n = U_0 \left( 1 + \frac{pn}{100} \right).$$

Формула складних  
процентів

Це є *формула простих процентів*.

Якщо клієнт поклав у банк суму  $U_0$ , і банк виплачує клієнтові щомісячно (або щорічно, загалом за деякий період)  $p\%$  від суми на рахунку, то через  $n$  місяців (років, загалом періодів) сума на рахунку буде становити

$$U_n = U_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Це є *формула складних процентів*. Вона відрізняється від формули простих процентів тим, що у цьому випадку нараховані проценти приєднуються до основної суми вкладу, і нарахування в наступному періоді відбувається на іншу (збільшену) суму вкладу (відбувається так звана капіталізація процентів).

Промілле

Тисячна доля цілого, тобто десята частина процента, має спеціальну назву *промілле* і позначається символом ‰:

$$0,15\% = 1,5\text{‰};$$

$$0,057\% = 0,57\text{‰}.$$

Ця одиниця використовується переважно в хімії, медицині та ін.

1136 грн. відповідає 100%; 284 грн. (Відповідь: 8%).  
відповідає  $x$  %. Складаємо пропорцію:

$$\frac{1136}{284} = \frac{100}{x},$$

$$\text{звідки } x = \frac{100 \cdot 284}{1136} = 25.$$

Відповідь: на 25%.

**Приклад 2.9.** В банк поклали 10000 грн. під певний процент річних. Через три роки банк повернув вкладнику всю суму, яка на цей час становила 14049грн. 48 коп. Під який процент річних були покладені гроші?

Нехай гроші були покладені під  $p\%$  річних. Застосуємо формулу складних процентів. Маємо:  $U_0 = 10000$ ,  $n = 3$ ,  $U_n = 14049,48$ . Тоді

$$14049,48 = 10000 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^3,$$

$$1,404948 = \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^3,$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{1,404948},$$

$$1 + \frac{p}{100} = 1,12,$$

$$\frac{p}{100} = 0,12,$$

$$p = 12.$$

Отже, гроші були покладені під 12% річних.

Відповідь: 12%.

**2.14.** Сторону квадрата збільшили на 10%. На скільки процентів збільшилась його площа? (Відповідь: 21%)

**2.15.** Ціна на товар була підвищена на 25%. На скільки процентів її треба зменшити, щоб отримати початкову ціну? (Відповідь: 20%)

**2.16.** Населення міста щорічно збільшується на 2%. Через скільки років населення зросте втричі? (Відповідь:  $\log_{1,02} 3 \approx 55$ )

**2.17.** Підприємство щорічно збільшувало обсяг випуску продукції на одне і те ж саме число процентів. Знайти це число, якщо відомо, що за два роки обсяг випуску продукції збільшився вдвічі. (Відповідь:  $100(\sqrt{2} - 1)\% \approx 41,4\%$ )

**2.18.** Вкладник поклав гроші під 15% річних на 2 роки. Скільки процентів прибутку він отримає через два роки? (Відповідь: 32,25%)

### 3 ЦІЛІ ВИРАЗИ

Степінь з натуральним показником

Степенем  $a^n$  числа  $a$  ( $a \in R, n \in N$ ) з натуральним показником  $n$  називається добуток  $n$  множників, кожний з яких дорівнює  $a$ , тобто  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ .

Степінь з цілим показником

Степенем  $a^\alpha$  числа  $a$  ( $a \in R, \alpha \in Z$ ) з цілим показником  $\alpha$  називається число, яке визначається наступним чином:

- 1)  $a^0 = 1$ , якщо  $a \neq 0$ ;
- 2)  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ , якщо  $\alpha = n, n \in N$ ;
- 3)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , якщо  $a \neq 0$  і  $\alpha = -n, n \in N$ .

При цьому число  $a$  називається основою степеня  $a^\alpha$ , число  $\alpha$  – показником степеня.

Властивості степеня з цілим показником

Нехай  $a, b \in R$ ,  $a, b \neq 0$ ,  $n, m \in Z$ . Тоді:

- 1)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ;
- 2)  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ ;
- 3)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ;
- 4)  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ;
- 5)  $(a^n)^m = a^{mn}$ ;
- 6) якщо  $a > 0$ , то  $a^n > 0$ ;
- 7) якщо  $a > 1$ , то  $n > m \Leftrightarrow a^n > a^m$ ;
- 8) якщо  $0 < a < 1$ , то  $n > m \Leftrightarrow a^n < a^m$ ;

**Приклад 3.1.** Обчислення степенів з натуральним показником.

- 1)  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ .
- 2)  $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ .
- 3)  $(-1)^4 = (-1)(-1)(-1)(-1) = 1$ .
- 4)  $(-5)^1 = -5$ .

**Приклад 3.2.** Обчислення степенів з цілим показником.

- 1)  $2^1 = 2$ .
- 2)  $(4,73)^0 = 1$ .
- 3)  $(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$ .
- 4)  $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = \frac{1}{(-4)(-4)(-4)} = -\frac{1}{64}$ .

**Приклад 3.3.** Обчислення степенів.

- 1)  $4x^3 \cdot x \cdot x^4 = 4x^{3+1+4} = 4x^8$ .
- 2)  $2^3 \cdot x^4 \cdot axa^5 = 8a^{1+5} \cdot x^{4+1} = 8a^6 x^5$ .
- 3)  $3^2 ab^3 cbca^2 = 9a^{1+2} \cdot b^{3+1} \cdot c^{1+1} = 9a^3 b^4 c^2$ .
- 4)  $4(a^2)^3 = 4a^6$ .
- 5)  $4^2(a^2)^4 \cdot (b^3)^4 \cdot ba^2 = 16a^8 b^{12} \cdot ba^2 = 16a^{10} b^{13}$ .
- 6)  $(3^2 ab)^3 \cdot ab \cdot (a^2 b)^4 = 3^6 a^3 b^3 \cdot ab \cdot a^8 b^4 = 729 a^{12} b^8$ .

**Приклад 3.4.** Знаходження стандартного вигляду одночленів.

**3.1.** Обчислити:

- 1)  $\frac{7^5 \cdot 5^4}{5^5 \cdot 49^3}$ ;
- 2)  $25 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot (-2^{-3})^{-1}$ ;
- 3)  $\frac{((-2)^2)^3 \cdot (-4)^{-2}}{(-2)^3 (-2)^2}$ ;
- 4)  $(2^{-1} + 3^{-1})(2^{-1} - 3^{-1}) + \frac{(2^{-1} \cdot 2^0)^{-4}}{2^3}$ ;
- 5)  $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - 2^{-1}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 2^{-1}}}$

(Відповідь: 1)  $\frac{1}{35}$ ;

- 2)  $-32$ ;
- 3)  $-\frac{1}{8}$ ;
- 4)  $\frac{77}{36}$ ;
- 5)  $-\frac{2}{5}$

**3.2.** Записати вираз у вигляді  $Ax^m y^n$ , де  $A$  – дійсне число,  $m$  і  $n$  – цілі числа:

- 1)  $3(x : y)^2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^3$ ;
- 2)  $2\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right)^2 \cdot \frac{xy}{x^3 y^3}$ ;

9) якщо  $a > 0$  і  $a \neq 1$ , то  $a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$ .

Одночлен	<i>Одночленом</i> називається алгебраїчний вираз, в якому числа і букви пов'язані тільки двома діями – множенням і піднесенням до натурального степеня.
Стандартний вигляд одночлена	Якщо в одночлені добуток всіх чисел записати перед буквами, а добуток кожної його букви і її степенів зобразити у вигляді натурального степеня цієї букви, то тоді одночлен вважається записаним у <i>стандартному вигляді</i> , а його числовий множник називається <i>коефіцієнтом одночлена</i> .
Степінь одночлена	Якщо одночлен містить одну букву, то показник степеня цієї букви є <i>степенем одночлена</i> . Число вважається одночленом нульового степеня.
Арифметичні дії з одночленами	Щоб помножити одночлен на одночлен, потрібно перемножити їхні коефіцієнти і перемножити степені з однаковими основами. Щоб піднести одночлен до степеня, потрібно піднести його коефіцієнт до цього степеня і помножити показник степеня кожної букви на показник степеня, до якого підноситься одночлен.
Многочлен	<i>Многочленом</i> називається алгебраїчна сума кількох одночленів. Одночлен є окремим випадком многочлена.
Подібні члени	Одночлени називаються <i>подібними</i> , якщо в стандартному записі вони збігаються або відрізняються тільки коефіцієнтами.
Зведення подібних членів	Подібні члени многочлена можна об'єднати в один член, їм подібний, з коефіцієнтом, який дорівнює алгебраїчній сумі коефіцієнтів

$$1) \frac{1}{3} a^2 b \cdot 2a \cdot ba = \frac{2}{3} a^4 b^2 .$$

$$2) 5ab \cdot abc \cdot d \cdot 3c = 15a^2 b^2 c^2 d .$$

**Приклад 3.5.** Множення одночлена на одночлен.

$$1) (5xy) \cdot (-2x^2 yb) =$$

$$= 5 \cdot (-2) \cdot x^{1+2} y^{1+1} \cdot b = -10x^3 y^2 b .$$

$$2) 2x \cdot (-4xy) \cdot (8x^2 y^3) =$$

$$= 2 \cdot (-4) \cdot 8x^{1+1+2} y^{1+3} = -64x^4 y^4 .$$

**Приклад 3.6.** Піднесення одночлена до степеня.

$$1) (5a^2 b^3)^4 = 5^4 a^{2 \cdot 4} b^{3 \cdot 4} = 625 a^8 b^{12} .$$

$$2) (2a^2 b^3 c^4)^k = 2^k a^{2k} b^{3k} c^{4k} .$$

**Приклад 3.7.** Зведення подібних членів.

$$1) x + 3x + 4a - x + 8a = (1 + 3 - 1)x +$$

$$+ (4 + 8)a = 3x + 12a .$$

$$2) 5ax - 3ax^2 - 4ax + 7ax^2 = (5 - 4)ax +$$

$$+ (-3 + 7)ax^2 = ax + 4ax^2 .$$

**Приклад 3.8.** Розкриття дужок.

$$1) 1 + 3a + (8b - 4kc) = 1 + 3a + 8b - 4kc .$$

$$2) 4x - (4a - x^2) = 4x - 4a + x^2 .$$

**Приклад 3.9.** Арифметичні дії з многочленами.

$$1) (4x - 5y) - (-x - 4y) + x =$$

$$= 4x - 5y + x + 4y + x = 6x - y .$$

$$2) 3a(a^2 - b - 2a^2) =$$

$$3) \left( \frac{xy^2}{3} \right)^{-2} \cdot \left( \frac{x^2 y}{3} \right)^2 .$$

(Відповідь: 1)  $3x^{-1}y$ ;

$$2) 2x^{-2}y^{-2}$$
;
$$3) x^2 y^{-2}$$
)

**3.3.** Записати одночлен у стандартному вигляді:

$$1) p^6 q^4 \frac{1}{2^2} (pq^2)(4p^2 q)^2 ;$$

$$2) ababab \cdot 2x^2 \cdot 3x^3 .$$

(Відповідь: 1)  $4p^{12}q^8$ ;

$$2) 6a^3 b^3 x^5)$$

**3.3.** Звести подібні члени:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{4}{3} mn^2 +$$

$$+ 0,2mn^2 - 1\frac{1}{3} mn^2 .$$

(Відповідь:  $2x - \frac{37}{15} mn^2$ )

**3.4.** Розкрити дужки і звести подібні члени

$$a - (2b + (c - (d - a))) + d -$$

$$- ((a - b) - c) .$$

(Відповідь:  $-a - b + 2d$ )

**3.5.** Перемножити многочлени

$$1) a(a + b + c) i$$

$$b(a - b - c);$$

$$2) (x^2 - x + 1)(x + 1) i$$

членів, що об'єднуються; така їх заміна називається *зведенням подібних членів*.

Правила розкриття дужок

Многочлен, який міститься в дужках, перед якими стоїть знак плюс, можна записати без дужок, зберігши знаки, які стоять перед його одочленами. Многочлен у дужках, перед якими стоїть знак мінус, можна записати без дужок, змінивши знак, який стоїть перед кожною його одочленом, на протилежний.

Арифметичні дії з многочленами

Сумою (різницею) двох многочленів називається многочлен, коефіцієнти якого є сумою (різницею) коефіцієнтів при подібних членах цих многочленів. Для знаходження суми і різниці многочленів використовують вищевказане правило розкриття дужок. Щоб помножити многочлен на одочлен, потрібно помножити кожний член многочлена на одочлен і додати одержані одочлени. Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно помножити кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена і додати одержані одочлени.

Формули скороченого множення

$$\begin{aligned}(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \\a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b); \\a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2); \\a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3); \\a^5 \pm b^5 &= (a \pm b)(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4); \\(a + b \pm c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \pm 2ac \pm 2bc.\end{aligned}$$

Біном Ньютона

Степінь двочлена можна розкласти наступним чином (*біном Ньютона*):

$$(a + b)^n = a^n + \lambda_1 a^{n-1} b + \lambda_2 a^{n-2} b^2 + \dots +$$

$$= 3a^3 - 3ab - 6a^3 = -3ab - 3a^3.$$

$$3) (2+b)(b^2-4) = 2b^2 - 8 + b^3 - 4b.$$

$$4) (a^2+1)^0 = 1.$$

$$5) (ac+d)^2 = (ac+d)(ac+d) = \\ = ac \cdot ac + ac \cdot d + d \cdot ac + d \cdot d = \\ = a^2c^2 + 2acd + d^2.$$

**Приклад 3.10.** Обчислення за допомогою формул скороченого множення.

$$1) (a-b)(a^2+b^2)(a+b) = \\ = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) = \\ = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4.$$

$$2) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(8x^3+y^3) = \\ = (8x^3-y^3)(8x^3+y^3) = 64x^6 - y^6.$$

$$3) 41 \cdot 39 = (40+1)(40-1) = \\ = 40^2 - 1 = 1600 - 1 = 1599.$$

$$4) \frac{97^3 + 83^3}{180} - 97 \cdot 83 = \\ = \frac{(97+83)(97^2 - 97 \cdot 83 + 83^2)}{180} - 97 \cdot 83 = \\ = \frac{180 \cdot (97^2 - 97 \cdot 83 + 83^2)}{180} - 97 \cdot 83 = \\ = 97^2 - 97 \cdot 83 + 83^2 - 97 \cdot 83 = \\ = 97^2 - 2 \cdot 97 \cdot 83 + 83^2 = \\ = (97 - 83)^2 = 14^2 = 196.$$

**Приклад 3.11.** Піднесення двочлена до степеня за допомогою формули бінома Ньютона (знаходження коефіцієнтів за трикутником Паскаля).

$$(x^2 + x + 1)(x - 1).$$

$$\text{(Відповідь: 1) } a^3b - ab^3 - \\ - 2ab^2c - abc^2;$$

$$2) x^6 - 1)$$

**3.6.** Використовуючи формули скороченого множення, виконати дії:

$$1) (3ab+1)(3ab-1);$$

$$2) (a-x)(a+x)(a^2+x^2);$$

$$3) (m+n)(m^2-mn+n^2);$$

$$4) (x-2y)^2 - (x+2y)^2;$$

$$5) (a-3)^3 - (a+3)^3;$$

$$6) (a-b-c)^2 - \\ - (a-b+c)^2;$$

$$7) (1+x+x^2)(1-x) \times \\ \times (1-x+x^2)(1+x).$$

$$\text{(Відповідь: 1) } 9a^2b^2 - 1;$$

$$2) a^4 - x^4;$$

$$3) m^3 + n^3;$$

$$4) -8xy;$$

$$5) -18a^2 - 54;$$

$$6) 4bc - 4ac;$$

$$7) 1 - x^6)$$

**3.7.** Обчислити:

$$1) \frac{84,5^2 - 59,5^2}{61^2 - 11^2};$$

$$2) 1002 \cdot 998 - 1003 \cdot 997.$$

$$\text{(Відповідь: 1) } 1;$$

$$2) 5)$$

$$+ \lambda_{n-2} a^2 b^{n-2} + \lambda_{n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

Трикутник Паскаля

Коефіцієнти цього розкладу  $1; \lambda_1; \dots; \lambda_{n-1}; 1$  беруть з таблиці (т. зв. *трикутник Паскаля*):  
 степінь коефіцієнти розкладу

$(a + b)^0$	1					
$(a + b)^1$	1	1				
$(a + b)^2$	1	2	1			
$(a + b)^3$	1	3	3	1		
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1	
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1
.....						

Розклад многочлена на множники

Зображення многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називається *розкладом многочлена на множники*. Для такого розкладу застосовуються наступні методи: використання формул скороченого множення, винесення спільного множника за дужки, групування та ін. Іноколи корисно застосувати метод виділення повного квадрату відносно деякої букви (або виразу) за допомогою формули  $P^2 \pm 2PQ + Q^2 = (P \pm Q)^2$ .

Канонічний вигляд многочлена відносно змінної  $x$

Многочлен  $P_n(x)$  відносно змінної  $x$  виду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (3.1)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – дійсні числа і  $a_0 \neq 0$ , називається *многочленом, упорядкованим за спадаючими степенями  $x$* , або *многочленом, зображеним в канонічному вигляді*. Числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$  називаються його *коефіцієнтами*, одночлен  $a_0 x^n$  – його *старшим членом*, а число  $n$  – *степенем многочлена*.

Степінь многочлена

Якщо у многочлена відсутній деякий степінь

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

**Приклад 3.12.** Розклад многочлена на множники.

- 1)  $2x(x+y) + ax + ay = 2x(x+y) + a(x+y) = (x+y)(2x+a).$
- 2)  $4y^2 - 2m^2 = 2(2y^2 - m^2) = 2\left((\sqrt{2}y)^2 - m^2\right) = 2(\sqrt{2}y - m)(\sqrt{2}y + m).$
- 3)  $a^2 + a - ab - b = a(a+1) - b(a+1) = (a+1)(a-b).$
- 4)  $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$

**Приклад 3.13.** Застосування ознак подільності многочленів.

- 1) Многочлен  $x^4 - 1$  ділиться на многочлен  $x^2 - 1$ , а многочлен  $x^2 - 1$  ділиться на многочлен  $x + 1$ . Тому за ознакою 1 многочлен  $x^4 - 1$  також ділиться на многочлен  $x + 1$ .
- 2) Кожний з многочленів  $x^3 - 1$  і  $5x^2 - x - 4$  ділиться на многочлен  $x - 1$ . Тому за ознакою 2 многочлен  $x^3 + 5x^2 - x - 5$  (який дорівнює їх сумі) і многочлен  $x^3 - 5x^2 + x + 3$  (який дорівнює їх різниці) також діляться на  $x - 1$ , а многочлен

**3.8.** Розкласти многочлен на множники:

- 1)  $2a^2 + 4a + 2;$
  - 2)  $(a+b)^2 - (m-n)^2;$
  - 3)  $y^2 - 10y + 25 - 4m^2;$
  - 4)  $d^3 - p^6 + (p^2 - d)d^2;$
  - 5)  $a^3 - x^3 + 2x - 2a;$
  - 6)  $3x^3 - 3y^3 + 5x^2 - 5y^2.$
- (Відповідь: 1)  $2(a+1)^2;$   
 2)  $(a+b+m-n) \times (a+b-m+n);$   
 3)  $(y-5+2m)(y-5-2m);$   
 4)  $p^2(p^2+d)(d-p^2);$   
 5)  $(a-x)(a^2+ax+x^2-2);$   
 6)  $(x-y) \times (3x^2+3xy+3y^2+5)$

**3.9.** Знайти числа  $a$  і  $b$  із тотожної рівності:

- 1)  $x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + bx^2 + ax - 2);$
  - 2)  $(x^2 - 1)(x^2 + ax + b) = x^4 + x^3 - x - 1.$
- (Відповідь: 1)  $a = 1, b = 1;$   
 2)  $a = 1, b = 1)$

**3.10.** Методом невизначених коефіцієнтів знайти частку і остачу від ділення многочлена  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$ .

$x$ , то коефіцієнт відповідного одночлена дорівнює нулю.

Тотожно рівні  
многочлени

Два многочлени, зображені в канонічному вигляді, *тотожно рівні*, якщо рівні їх степені і рівні коефіцієнти при однакових степенях  $x$ .

Дільник многочлена

Якщо многочлени  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  і  $K_l(x)$  такі, що  $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_l(x)$ , то кожний з многочленів  $Q_m(x)$  і  $K_l(x)$  є *дільником* многочлена  $P_n(x)$ . При цьому говорять, що многочлен  $P_n(x)$  *ділиться* на многочлен  $Q_m(x)$  (або  $K_l(x)$ ), і тоді многочлен  $K_l(x)$  (відповідно  $Q_m(x)$ ) називають *часткою* від ділення многочлена  $P_n(x)$  на многочлен  $Q_m(x)$  (відповідно  $K_l(x)$ ).

Частка многочлена

Якщо многочлен степеня  $n$  ділиться на многочлен степеня  $m$ , то часткою від ділення буде многочлен степеня  $n - m$ , і цей многочлен єдиний.

Властивості  
подільності  
многочленів

1. Якщо многочлен  $P_n(x)$  ділиться на многочлен  $Q_m(x)$ , а многочлен  $Q_m(x)$  ділиться на многочлен  $K_l(x)$ , то многочлен  $P_n(x)$  ділиться на многочлен  $K_l(x)$ .
2. Якщо многочлени  $P_n(x)$  і  $Q_m(x)$  діляться на многочлен  $K_l(x)$ , то многочлени  $P_n(x) \pm Q_m(x)$  діляться на многочлен  $K_l(x)$ , а многочлен  $P_n(x) \cdot Q_m(x)$  ділиться на многочлен  $(K_l(x))^2$ .
3. Якщо многочлен  $P_n(x)$  ділиться на многочлен  $Q_m(x)$ , то добуток многочлена  $P_n(x)$  на будь-який многочлен  $K_l(x)$  також

$5x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 4$  (який дорівнює їх добутку) ділиться на многочлен  $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ .

3) Многочлен  $x^2 - x + 1$  ділиться на многочлен  $x^2 - x + 1$ . Тому за ознакою 3 многочлен  $x^4 + x^2 + 1$  (який дорівнює добутку многочленів  $x^2 - x + 1$  і  $x^2 + x + 1$ ) ділиться на многочлен  $x^2 - x + 1$ .

4) Оскільки многочлен  $x^4 - 1$  ділиться на двочлен  $x - 1$  і виконується рівність  $x^4 - 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)$ , то за ознакою 4 многочлен  $x^3 - x^2 + x - 1$  ділиться на двочлен  $x - 1$ .

**Приклад 3.14.** Знайти частку і остачу від ділення многочлена  $x^3 - x + 2$  на многочлен  $x^2 + 1$ . Нехай многочлен першого степеня  $ax + b$  є часткою, а многочлен  $cx + d$  – остача. Тоді справедлива тотожна рівність

$$x^3 - x + 2 = (ax + b)(x^2 + 1) + cx + d.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} (ax + b)(x^2 + 1) + cx + d &= \\ &= ax^3 + bx^2 + (a + c)x + b + d, \end{aligned}$$

то, використовуючи означення тотожної рівності двох многочленів, одержимо систему

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a + c = -1 \\ b + d = 2 \end{cases}$$

$$1) P(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x, Q(x) = 2x^2 - 4x;$$

$$2) P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1, Q(x) = x - 1.$$

(Відповідь: 1) частка  $\frac{1}{2}(x^2 + 5x + 4)$ , остача 0;

2) частка  $x^2 + 3x + 6$ , остача 7)

**3.11.** Розділити "стовпчиком" многочлен  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$ :

$$1) P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4, Q(x) = x - 3;$$

$$2) P(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, Q(x) = x^2 - 2x - 1;$$

$$3) P(x) = x^5 + 5x^3 + 6, Q(x) = x^2 + 2x + 3;$$

$$4) P(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1, Q(x) = x^2 + 1.$$

(Відповідь: 1)  $P(x) = (x-3)(2x^2 + 5x + 10) + 34$ ;

$$2) P(x) = (x^2 - 2x + 1) \times (4x^2 + 6x) + 11x + 9;$$

$$3) P(x) = (x^2 + 2x + 3) \times (x^3 - 2x^2 + 6x - 6) -$$

ділиться на многочлен  $Q_m(x)$ .

4. Якщо многочлен  $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_l(x)$  ділиться на двочлен  $x - \alpha$ , то хоча б один із многочленів –  $Q_m(x)$  або  $K_l(x)$  – ділиться на  $x - \alpha$ .

Ділення  
многочленів з  
остачею

Поділити з остачею многочлен  $P_n(x)$  на многочлен  $T_m(x)$  ( $m \leq n$ ) означає знайти многочлени  $q_l(x)$  і  $r_k(x)$  такі, що:

$$P_n(x) = T_m(x) \cdot q_l(x) + r_k(x),$$

де  $0 \leq k < m$ . При цьому многочлен  $q_l(x)$  називається *часткою*, а многочлен  $r_k(x)$  – *остачею*; многочлени  $q_l(x)$  і  $r_k(x)$  визначені єдиним чином, причому  $l = n - m$ .

Ділення  
многочленів  
"стовпчиком"

Будь-який многочлен  $P_n(x)$  ділиться на многочлен  $T_m(x)$  ( $m \leq n$ ) або націло, або з остачею. При діленні "стовпчиком" необхідно виконати наступні дії:

- 1) обидва многочлени упорядкувати за спаданням степенів змінної  $x$ ;
- 2) поділити старший член многочлена  $P_n(x)$  на старший член многочлена  $T_m(x)$ ;
- 3) одержаний результат помножити на дільник  $T_m(x)$  і одержаний добуток відняти від діленого;
- 4) з одержаною різницею (яка є многочленом степеня меншого, ніж  $n$ ) повторити кроки 1) – 3), доки не залащиться в остачі нуль, або степінь остачі не стане меншим від степеня  $m$  дільника  $T_m(x)$ .

Схема Горнера

При діленні многочлена  $P_n(x)$  (3.1) на двочлен  $x - \alpha$  також застосовується *схема Горнера* – так називається метод скороченого

Звідси  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=-2$ ,  $d=2$ .

Отже,

$$x^3 - x + 2 = (x^2 + 1) \cdot x + (-2x + 2),$$

де  $x$  - шукана частка, а  $-2x + 2$  є остачею.

Відповідь: частка  $x$ , остача  $-2x + 2$ .

**Приклад 3.15.** Розділити многочлен  $5x^4 - 3x^5 + 3x - 1$  на многочлен  $x + 1 - x^2$ .

Зобразимо ділене і дільник в канонічному вигляді і виконаємо ділення "стовпчиком".

$$\begin{array}{r} -3x^5 + 5x^4 + 3x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} -x^2 + x + 1 \\ 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \end{array} \right. \\ \underline{-3x^5 + 3x^4 + 3x^3} \phantom{-1} \\ \phantom{-} 2x^4 - 3x^3 + 3x - 1 \\ \underline{\phantom{-} 2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\ \phantom{-} \phantom{2x^4} - x^3 + 2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{\phantom{-} \phantom{2x^4} - x^3 + x^2 + x} \\ \phantom{-} \phantom{2x^4} \phantom{-x^3} x^2 + 2x - 1 \\ \underline{\phantom{-} \phantom{2x^4} \phantom{-x^3} x^2 - x - 1} \\ \phantom{-} \phantom{2x^4} \phantom{-x^3} \phantom{x^2} 3x \end{array}$$

Отже,

$$\begin{aligned} 5x^4 - 3x^5 + 3x - 1 &= \\ &= (3x^3 - 2x^2 + x - 1)(x + 1 - x^2) + 3x, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \frac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{x + 1 - x^2} &= \\ &= 3x^3 - 2x^2 + x - 1 + \frac{3x}{x + 1 - x^2}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $5x^4 - 3x^5 + 3x - 1 =$

$$-6x + 24;$$

$$4) P(x) = (x^2 + 1) \times (x^4 + x + 1) - x$$

**3.12.** Застосовуючись до Горнера, знайти частку і остачу від ділення многочлена  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$ .

$$1) P(x) = 2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5, Q(x) = x - 2;$$

$$2) P(x) = 2x^5 - 6x^4 - 3x^2 + 4x, Q(x) = x - 2.$$

(Відповідь: 1)  $P(x) = (x - 2)(2x^3 + 3x^2 - 3x + 7) + 9;$

$$2) P(x) = (x - 3) \times (2x^4 - 3x - 5) - 15)$$

**3.13.** Знайти остачу від ділення многочлена

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7 \text{ на } 2x + 1.$$

(Відповідь:  $\frac{29}{8}$ )

**3.14.** Знайти всі значення  $a$  і  $b$ , при яких многочлен

$$P(x) = x^3 + ax^2 - x + b$$

ділиться на  $x^2 - 1$ .

(Відповідь:  $a = -b$ )

ділення за допомогою таблиці:

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_n$
$\alpha$	$a_0$	$b_1 =$ $\alpha a_0 +$ $a_1$	$b_2 =$ $\alpha b_1 +$ $a_2$	...	$b_n =$ $\alpha b_{n-1} +$ $a_n$
	коефіцієнти многочлена ( $n - 1$ ) степеня				остача

Теорема Безу

*Теорема Безу.* Остача від ділення многочлена  $P_n(x)$  на двочлен  $x - \alpha$  дорівнює значенню многочлена  $P_n(x)$  при  $x = \alpha$ , тобто  $r = P_n(\alpha)$ . При діленні многочлена  $P_n(x)$  на двочлен виду  $ax + b$  одержуємо остачу  $r = P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$ .

Корінь многочлена

Число  $\alpha$  називається *коренем* многочлена  $P_n(x)$ , якщо  $P_n(\alpha) = 0$ . З теореми Безу випливає, що многочлен  $P_n(x)$  ділиться на  $x - \alpha$  тоді і тільки тоді, коли число  $\alpha$  є коренем многочлена  $P_n(x)$ .

Квадратний тричлен

Многочлен  $ax^2 + bx + c$ , де  $a \neq 0$ , називається *квадратним тричленом*. Вираз  $D = b^2 - 4ac$  називається *дискримінантом* квадратного тричлена.

Дискримінант квадратного тричлена

Розклад на множники квадратного тричлена

Якщо  $D > 0$ , то квадратний тричлен зображається у вигляді:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ , тобто в цьому випадку

квадратний тричлен розкладається в добуток двох лінійних множників, а числа  $x_1, x_2$  є коренями квадратного тричлена.

$$= (3x^3 - 2x^2 + x - 1)(x + 1 - x^2) + 3x.$$

**Приклад 3.16.** Розділити многочлен  $4x^3 - x^5 + 32 - 8x^2$  на двочлен  $x + 2$ .

Зобразимо ділене в канонічному вигляді

$$-x^5 + 0 \cdot x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 0 \cdot x + 32$$

і виконаємо ділення за схемою Горнера.

	-1	0	4	-8	0	32
-2	-1	2	0	-8	16	0

Отже, маємо частку  $Q_4(x) = -x^4 + 2x^3 - 8x + 16$  і остачу  $r = 0$ .

Відповідь:  $4x^3 - x^5 + 32 - 8x^2 = (x + 2)(-x^4 + 2x^3 - 8x + 16)$ .

**Приклад 3.17.** Знайти остачу від ділення  $P_4(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$  на  $x - 1$ .

Згідно з теоремою Безу маємо

$$r = P_4(1) = 1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 9.$$

Відповідь: 9.

**Приклад 3.18.** Встановити, чи многочлен  $P_4(x) = x^4 + 4x^3 + 5x + 8$  ділиться на: 1)  $x + 2$ ; 2)  $x + 1$ .

1) Оскільки  $P_4(-2) \neq 0$ , то число  $x = -2$  не є коренем многочлена, і многочлен не ділиться націло на  $x + 2$ .

2) Оскільки  $P_4(-1) = 0$ , то число  $x = -1$  є коренем многочлена, і многочлен ділиться націло на  $x + 1$ .

**3.15.** Перевірити подільність націло многочлена  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$ :

1)  $P(x) = 35x^3 - 124x^2 - 67x + 12$ ,  $Q(x) = 5x + 3$ ;

2)  $P(x) = 18x^3 - 105x^2 + 77x - 10$ ,  $Q(x) = x - 5$ ;

3)  $P(x) = 63x^3 - 149x^2 + 48x - 4$ ,  $Q(x) = x - 2$ ;

4)  $P(x) = 6x^3 + 17x^2 - 23x - 70$ ,  $Q(x) = 2x + 5$ ;

5)  $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 60x^2 + 25x + 28$ ,  $Q(x) = (x - 4)(x + 7)$ .

(Відповідь: 1)  $P(x) = (5x + 3)(7x^2 - 29x + 4)$ ;

2)  $P(x) = (x - 5) \times (18x^2 - 15x + 2)$ ;

3)  $P(x) = (x - 2) \times (63x^2 - 23x + 2)$ ;

4)  $P(x) = (2x + 5) \times (3x^2 + x - 14)$ ;

5)  $P(x) = (x - 4)(x + 7) \times (2x^2 - x - 1)$

**3.16.** Довести, що многочлен

$$P(x) = x^{17} - 15x^{14} + 37x^{10} - 16x^8 - 7$$

Якщо  $D = 0$ , то квадратний тричлен зображається у вигляді:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

де  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , тобто в цьому випадку

квадратний тричлен є повним квадратом, а число  $x_0$  є коренем квадратного тричлена (кратності 2).

При  $D < 0$  квадратний тричлен на лінійні множник не розкладається і не має дійсних коренів.

Теорема Вієта для квадратного тричлена

Якщо  $D \geq 0$ , то для коренів  $x_1, x_2$  квадратного тричлена  $ax^2 + bx + c$  справедливі рівності (теорема Вієта):

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{і} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Розклад на множники многочлена третього степеня

Для многочлена третього степеня  $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  можливий один з двох розкладів:

а)  $P_3(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ , де числа  $\alpha, \beta, \gamma$  не обов'язково різні;

б)  $P_3(x) = a(x - \alpha)(x^2 + \beta x + \gamma)$ .

Розклад на множники многочлена четвертого степеня

Для многочлена четвертого степеня  $P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$  можливий один з трьох розкладів:

а)  $P_4(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$ , де числа  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  не обов'язково різні;

б)  $P_4(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x^2 + \gamma x + \delta)$ , де числа  $\alpha, \beta$  не обов'язково різні;

в)  $P_4(x) = a(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \gamma x + \delta)$ , де одночасно можливі рівності  $\alpha = \gamma$  і  $\beta = \delta$ .

Відповідь: 1) ні; 2) так.

**Приклад 3.19.** Розкласти на множники квадратний тричлен:

1)  $2x^2 - 12x + 18$ ;

2)  $3x^2 - 3x - 6$ ;

3)  $x^2 - x + 1$ .

1) Оскільки  $D = 12^2 - 8 \cdot 18 = 0$ , то  $x_0 = 3$ , отже,  $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$ .

2) Оскільки  $D = 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 6 = 81 > 0$ , то  $x_1 = 2$  і  $x_2 = -1$ , отже,

$$3x^2 - 3x - 6 = 3(x - 2)(x + 1).$$

3) Оскільки  $D = 1 - 4 < 0$ , то квадратний тричлен  $x^2 - x + 1$  не має дійсних коренів і на лінійні множники не розкладається.

Відповідь: 1)  $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$ ;

2)  $3x^2 - 3x - 6 = 3(x - 2)(x + 1)$ ;

3) не розкладається.

**Приклад 3.20.** Навести приклад квадратного тричлена, коренями якого є числа  $2$  і  $-\frac{1}{2}$ .

Сума коренів  $p = \frac{3}{2}$ , добуток коренів  $q = -1$ . За теоремою Вієта дані числа є коренями квадратного тричлена  $x^2 - px + q$ , тобто  $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ .

Відповідь:  $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$ .

**Приклад 3.21.** Розклад многочленів

ділиться на  $x - 1$ .

**3.17.** Розкласти на множники квадратні тричлени.

1)  $x^2 + 4x + 4$ ;

2)  $x^2 - 5x + 6$ ;

3)  $x^2 + x + 2$ .

(Відповідь: 1)  $(x + 2)^2$ ;

2)  $(x - 2)(x - 3)$ ;

3) не розкладається)

**3.18.** Навести приклад квадратного тричлена, коренями якого є числа:

1)  $-1$  і  $-2$ ;

2)  $-1$  і  $1$ ;

3)  $17$ ;

4)  $0$ .

(Відповідь: 1)  $x^2 + 3x + 2$ ;

2)  $x^2 - 1$ ;

3)  $x^2 - 34x + 289$ ;

4)  $x^2$ )

**3.19.** Розкласти многочлен  $P(x)$  на множники:

1)  $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2$ ;

2)  $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ ;

3)  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ ;

4)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ ;

5)  $P(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 +$

Розклад на множники многочлена  $n$ -го степеня

В загальному випадку многочлен  $n$ -го степеня  $P_n(x)$  зображається єдиним чином у вигляді добутку многочленів, степінь кожного з яких не більше 2, тобто кожний з яких є або двочленом, або квадратним тричленом, який не має коренів.

Властивості коренів многочлена  $n$ -го степеня

Можливість виділення у многочлена лінійних множників пов'язана з наявністю у цього многочлена коренів.

1. Многочлен  $n$ -го степеня має не більш ніж  $n$  дійсних коренів (з урахуванням їх кратностей).

2. Многочлен непарного степеня має хоча б один дійсний корінь.

Теорема Вієта для многочлена  $n$ -го степеня

3. (Теорема Вієта). Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – дійсні корені многочлена (3.1), то мають місце наступні рівності:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0},$$

...

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

4. Якщо  $P_n(x) = Q_m(x)K_l(x)$ , то кожний корінь многочлена  $P_n(x)$  є коренем хоча б одного із многочленів  $Q_m(x)$  і  $K_l(x)$ , а кожний корінь многочлена  $Q_m(x)$  і кожний корінь многочлена  $K_l(x)$  є коренями многочлена  $P_n(x)$ .

Знаходження коренів многочлена  $n$ -го степеня

5. Якщо  $\alpha$  – корінь многочлена  $P_n(x)$ , то  $P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x)$ , де  $Q_{n-1}(x)$  – деякий

третього степеня на множники.

$$\begin{aligned} 1) \quad x^3 + x - 2 &= (x^3 - 1) + (x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 2). \end{aligned}$$

Дискримінант квадратного тричлена  $x^2 + x + 2$  від'ємний, тому на множники він не розкладається.

$$\begin{aligned} 2) \quad x^3 - 3x + 2 &= x^3 - x - 2x + 2 = \\ &= x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 2) = \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2). \end{aligned}$$

**Приклад 3.22.** Розклад многочленів четвертого степеня на множники.

$$\begin{aligned} 1) \quad x^4 - 5x^2 + 6 &= \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= (x^2 - 3)(x^2 - 2) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^4 + 5x^2 + 6 &= \left(x^2 + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= (x^2 + 3)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x^4 + x^3 - x - 1 &= x^3(x + 1) - (x + 1) = \\ &= (x + 1)(x^3 - 1) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad x^4 + 4 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 2)(x^2 + \sqrt{2}x + 2). \end{aligned}$$

**Приклад 3.23.** Знайти корені та

$$+ 16x^2 + 16x - 32 ;$$

$$6) \quad P(x) = x^6 + 27.$$

(Відповідь:

$$1) \quad P(x) = (x - 1) \times \\ \times (x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3});$$

$$2) \quad P(x) = (x + 1)(x - 1)^2;$$

$$3) \quad P(x) = (x + 1)(x - 1)^3;$$

$$\begin{aligned} 4) \quad P(x) &= (x^2 - x + 1) \times \\ &\times \left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \times \\ &\times \left(x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right); \end{aligned}$$

$$5) \quad P(x) = (x + 2)^2(x - 2)^3;$$

$$\begin{aligned} 6) \quad P(x) &= (x^2 + 3) \times \\ &\times (x^2 - \sqrt{3}x + 3) \times \\ &\times (x^2 + \sqrt{3}x + 3) \end{aligned}$$

**3.20.** Знайти всі  $a$  і  $b$ , при яких многочлен  $P(x)$  ділиться націло на многочлен  $Q(x)$ :

$$1) \quad P(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b, \quad Q(x) = x^2 - 1;$$

$$2) \quad P(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4, \quad Q(x) = x^2 - 4.$$

(Відповідь: 1)  $a = -2$ ,  $b = 1$ ;

$$2) \quad a = -25, \quad b = 4)$$

многочлен степеня  $n - 1$ .

Знаходження  
коренів многочлена  
 $n$ -го степеня

Знаходження коренів многочлена не є простою задачею в загальному випадку. Однак в тих випадках, коли многочлен  $P_n(x)$  розкладений в добуток многочленів, степінь кожного з яких не більше 2, цю задачу вдається розв'язати повністю, оскільки за властивістю 4 множина коренів многочлена  $P_n(x)$  збігається з множиною коренів його дільників.

Для того щоб нескоротний дріб  $\frac{p}{q}$  ( $p$  – ціле число,  $q$  – натуральне число) був коренем многочлена  $P_n(x)$  (3.1) з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб число  $p$  було дільником вільного члена  $a_n$ , а число  $q$  – дільником старшого коефіцієнта  $a_0$ .

Зокрема, якщо многочлен  $P_n(x)$  (3.1) має цілі коефіцієнти і  $a_0 = 1$  то раціональними коренями такого многочлена можуть бути тільки ті цілі числа, які є дільниками вільного члена  $a_n$ .

Методи розкладу  
на множники  
многочлена  $n$ -го  
степеня

Таким чином, для розкладу на множники многочлена  $n$ -го степеня та знаходження його коренів застосовуються вже згадувані методи групування, виділення повного квадрату, використання формул скороченого множення, винесення спільного множника за дужки, ділення "стовпчиком", схема Горнера, теорема Безу, а також метод невизначених коефіцієнтів (див. приклад 3. 14).

розкласти на множники многочлен

$$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2.$$

Встановимо, чи має многочлен раціональні корені. Нехай нескоротний

дріб  $\frac{p}{q}$  є коренем даного многочлена,

тоді число  $p$  може набувати значень 1, -1, 2, -2, а число  $q$  - значень 1 і 2..

Таким чином, раціональними коренями даного многочлена можуть бути наступні числа: -2, -1,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1, 2.

Безпосередньою підстановкою кожного з цих чисел в многочлен одержуємо:

$$P(-2) \neq 0, \quad P(-1) = 0, \quad P(1) \neq 0,$$

$$P(2) = 0, \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, .$$

Це означає, що числа -1 і 2 є коренями даного многочлена; отже,

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x).$$

Многочлен  $Q(x)$  можна знайти, наприклад, діленням "стовпчиком" многочлена  $P(x)$  на многочлен

$(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$  або діленням за схемою Горнера многочлена  $P(x)$  на  $x+1$  а потім діленням одержаної частки на  $x-2$  (див. приклади. 3.15, 3.16).

Одержимо  $Q(x) = x^2 + 1$ . А цей многочлен дійсних коренів не має і на множники не розкладається. Отже, маємо  $P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + 1)$ . <

Відповідь: корені  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ ; розклад на множники

$$P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + 1).$$

**3.21.** Знайти корені могочлена:

1)  $P(x) = 5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$ ;

2)  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + 20$ ;

3)  $P(x) = 3x^3 - x^2 - 27x + 9$ ;

4)  $P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10$ ;

5)  $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$ ;

6)  $P(x) = 2x^5 - 9x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 28x + 12$ .

(Відповідь:

1)  $x_1 = -4$ ,

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{5};$$

2)  $x_{1,2} = \pm 2$ ,  $x_3 = \frac{5}{2}$ ;

3)  $x_{1,2} = \pm 3$ ,  $x_3 = \frac{1}{3}$ ;

4)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -\frac{5}{3}$ ,  
 $x_3 = x_4 = 1$ ;

5)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  
 $x_3 = x_4 = 1$ ;

6)  $x_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = x_3 = 1$ ,  
 $x_4 = x_5 = 2$ )

## 4 ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Алгебраїчний дріб	Дріб, чисельник і знаменник якого є многочленами, називається <i>алгебраїчним дробом</i> (або дробово-раціональним виразом).
Область допустимих значень дробу	<i>Областю допустимих значень</i> (ОДЗ) алгебраїчного дробу $\frac{A}{B}$ називається множина числових значень букв та змінних, які входять в многочлени $A$ і $B$ , для яких числове значення многочлена $B$ не дорівнює нулю.
Тотожна рівність двох дробів	Алгебраїчні дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$ <i>тотожно рівні</i> на множині $M$ , якщо на множині $M$ виконана рівність $AD = BC$ (за умови, що многочлени $B$ і $D$ не перетворюються в нуль).
Скорочення дробу	Для будь-якого многочлена $P$ , який не перетворюється в нуль на ОДЗ алгебраїчного дробу $\frac{A}{B}$ , справедливі рівності $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot P}{B \cdot P}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A/P}{B/P},$ тобто дріб не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити (розділити) на одий і той же самий многочлен $P(x)$ , який не перетворюється в нуль на ОДЗ цього дробу. Ділення чисельника і знаменника на спільний множник $P$ , який не перетворюється в нуль, називається <i>скороченням</i> дробу.
Зміна знаків членів дробу	На ОДЗ алгебраїчного дробу $\frac{A}{B}$ справедливі наступні рівності:

**Приклад 4.1.** Знайти алгебраїчного дробу  $\frac{a(c^2 + d^2)}{c + d}$ .

ОДЗ:  $c + d \neq 0$ , тобто  $c \neq -d$ .

Відповідь:  $c \neq -d$ .

**Приклад 4.2.** Скоротити дріб  $\frac{(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)(x + 2)}$ .

$$\frac{(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{x^2 + 1}{x + 2} \text{ при } x \neq \pm 1, x \neq -2.$$

Відповідь:  $\frac{x^2 + 1}{x + 2}$ ,  $x \neq \pm 1, x \neq -2$ .

**Приклад 4.3.** Звести до найменшого спільного знаменника наступні дробі:

$$\frac{5x}{4 - a^2}, \frac{13}{6 + 3a}, \frac{ax}{10 - 5x}.$$

а) Розкладемо знаменники даних дробів на множники:

$$4 - a^2 = (2 - a)(2 + a), \quad 6 + 3a = 3(2 + a), \\ 10 - 5a = 5(2 - a).$$

б) Спільний знаменник  $15(4 - a^2)$ .

в) Чисельник і знаменник першого дробу домножимо на 15, другого дробу – на  $5(2 - a)$ , третього дробу – на  $3(2 + a)$ . Одержимо наступні дробі:

$$\frac{75x}{15(4 - a^2)}, \frac{65(2 - a)}{15(4 - a^2)}, \frac{3ax(2 + a)}{15(4 - a^2)}.$$

ОДЗ **4.1.** Знайти ОДЗ виразів:

1)  $\frac{a^3 - 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{b}{a}$ ;

2)  $\frac{ab}{c - d} : \frac{c + d}{a}$ .

(Відповідь: 1)  $a \neq 0, a \neq \pm 1$ ;

2)  $a \neq 0, c \neq \pm d$ )

**4.2.** Звести алгебраїчні дробі до найменшого спільного знаменника:

1)  $\frac{2a}{cd^2}, \frac{b^2}{ac}, \frac{c}{3ab^2d^3}$ ;

2)  $\frac{1}{a - b}, \frac{1}{ab + b^2},$

$$\frac{1}{a^3 - b^3}.$$

(Відповідь: 1)  $\frac{6a^2b^2d}{3ab^2cd^3},$

$$\frac{3b^4d^3}{3ab^2cd^3}, \frac{c^2}{3ab^2cd^3};$$

2)  $\frac{b(a + b)(a^2 + ab + b^2)}{b(a + b)(a^3 - b^3)},$

$$\frac{a^3 - b^3}{b(a + b)(a^3 - b^3)},$$

$$\frac{b(a + b)}{b(a + b)(a^3 - b^3)}$$

**4.3.** Виконати дії:

1)  $\frac{b^2a - a^3}{ba^2} \cdot \frac{b^2a}{b^2 - ab}$ ;

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B},$$

тобто якщо у дробу змінити знак тільки чисельника або тільки знаменника, то і дріб змінить свій знак; якщо ж у дробу змінити знак і чисельника, і знаменника одночасно, то знак дробу не зміниться.

Спільний знаменник дробів

*Спільним знаменником* кількох алгебраїчних дробів називається многочлен, який ділиться на знаменник кожного з цих дробів. Спільний знаменник, на який ділиться будь-який інший спільний знаменник без остачі, називається *найменшим спільним знаменником*.

Найменший спільний знаменник дробів

Зведення дробів до спільного знаменника

Для того, щоб звести кілька алгебраїчних дробів до найменшого спільного знаменника на ОДЗ цих дробів, треба виконати такі дії:

- а) розкласти знаменники дробів на множники;
- б) утворити спільний знаменник, внісши до нього всі різні множники у найвищих степенях, в яких вони входять у розклади знаменників;
- в) знайти додатковий множник для кожного дробу, для цього треба знайдений спільний знаменник поділити на чисельник даного дробу;
- г) чисельник і знаменник кожного дробу домножити на додатковий множник.

Додавання (віднімання) дробів

*Сумою (різницею)* двох алгебраїчних дробів з однаковим знаменником є дріб, знаменник якого дорівнює знаменнику цих дробів, а чисельник – сумі (різниці) чисельників, тобто

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}.$$

Для того щоб додати (відняти) два дроби з різними знаменниками, треба звести ці дроби до найменшого спільного знаменника, а потім одержані дроби додати (відняти) за правилом

Відповідь:  $\frac{75x}{15(4-a^2)}, \frac{65(2-a)}{15(4-a^2)}, 2) \frac{x^2+xy}{x^2-y^2} \left( \frac{x^2-xy}{x^3+y^3} \right)^{-1};$   
 $\frac{3ax(2+a)}{15(4-a^2)}.$

3)  $\left( \frac{m^2}{m-n} - n \right) \times$   
 $\times \left( m + \frac{n^2}{m+n} \right)^{-1};$

**Приклад 4.4.** Виконати дії:

- 1)  $\frac{3a}{5x^2y} + \frac{5b}{4xy^2}$  при  $xy \neq 0$ ;  
 2)  $\frac{4ab}{15dcy} \cdot \frac{5xy}{8ab^2}$  при  $abcdy \neq 0$ ;  
 3)  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} : (x+y)$  при  $x+y \neq 0$ ;  
 4)  $\left( \frac{ab}{(a+b)^2} \right)^{-3}$  при  $ab \neq 0, a+b \neq 0$ .

1)  $\frac{3a}{5x^2y} + \frac{5b}{4xy^2} = \frac{3a \cdot 4y}{5x^2y \cdot 4y} +$   
 $+\frac{5b \cdot 5x}{4xy^2 \cdot 5x} = \frac{12ay}{20x^2y^2} + \frac{25bx}{20x^2y^2} =$   
 $= \frac{12ay + 25bx}{20x^2y^2}, xy \neq 0.$

2)  $\frac{4ab}{15dcy} \cdot \frac{5xy}{8ab^2} = \frac{4ab \cdot 5xy}{15dcy \cdot 8ab^2} =$   
 $= \frac{20abxy}{120dcyab^2} = \frac{x}{6bdc}, abcdy \neq 0.$

3)  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} : (x+y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x+y}{1} =$   
 $= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{x-y}{x^2+y^2}, x+y \neq 0.$

4)  $\left( \frac{ab}{(a+b)^2} \right)^{-3} = \frac{1}{(ab/(a+b)^2)^3} =$

(Відповідь: 1)  $(a+b),$   
 $ab \neq 0, a \neq b;$

2)  $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2}, x \neq 0,$   
 $x \neq \pm y;$

3)  $\frac{m^3+n^3}{m^3-n^3}, m \neq \pm n)$

**4.4.** Знайти числа  $a, b, c,$   
 при яких справедлива  
 рівність:

1)  $\frac{1}{x(x-1)(x+2)} =$   
 $= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2};$

2)  $\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} =$   
 $= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-2};$

3)  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1} +$   
 $+\frac{c}{x+1}.$

(Відповідь: 1)  $a = -\frac{1}{2},$

додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Добуток дробів

*Добутком* двох дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників цих дробів, а знаменник дорівнює добутку їх знаменників:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Частка дробів

*Часткою* від ділення двох дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника першого дробу і знаменника другого дробу, а знаменник – добутку знаменника першого дробу і чисельника другого дробу, тобто

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A/D}{C/B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

Ділення алгебраїчних дробів можливо лиш на такій множині, на якій не перетворюється в нуль жоден з многочленів  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Піднесення дробу до степеня

Якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то справедлива рівність:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

На множині, для якої  $A \neq 0$  і  $B \neq 0$ , справедливі рівності:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \frac{1}{(A/B)^n} = \frac{B^n}{A^n}; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^0 = 1.$$

Властивості степенів з цілим показником для алгебраїчних дробів аналогічні відповідним властивостям для чисел.

Умова рівності дроба нулю

Алгебраїчний дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю:

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{(a+b)^6}{a^3 b^3}, \quad ab \neq 0, \quad a+b \neq 0$$

**Приклад 4.5.** Знайти числа  $a, b, c$ , при яких справедлива рівність

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}.$$

Додаючи дроби в правій частині рівності, одержимо

$$\frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

Тому

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)} &= \frac{(ax+b)(x+1) + c(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \\ &= \frac{(a+c)x^2 + (a+b)x + (b+c)}{(x^2+1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Ця рівність справедлива при довільних  $x \neq -1$ , зокрема, при  $x=0$ ,  $x=1$  і  $x=2$ . Підставляючи ці значення в останню рівність, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} b+c=1, \\ 2a+2b+2c=1, \\ 6a+3b+5c=1 \end{cases}$$

звідки  $a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$

Безпосередньо перевіркою пересвідчуємось, що ця трійка чисел задовольняє умову задачі.

Відповідь:  $a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$

$$b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{6};$$

2)  $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1;$

3)  $a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{3}.)$

**4.5.** Спростити вираз:

1)  $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \times \left( \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right);$

2)  $\left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1 \right) \times \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1 \right) \times \frac{1}{x^4 + x^2 a^2 + a^4};$

3)  $\frac{1}{a^2+3a+2} + \frac{2a}{a^2+4a+3} + \frac{1}{a^2+5a+6}$

(Відповідь: 1)  $\frac{x}{x-y},$

$x \neq \pm y;$

2)  $\frac{1}{a^3}, \quad a \neq 0;$

3)  $\frac{2}{a+3}, \quad a \neq -1 \quad a \neq -2, \quad a \neq -3)$

## 5 ІРРАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Корінь $n$ -го степеня	Число, $n$ -й ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ) степінь якого дорівнює $a$ , називається <i>коренем <math>n</math>-го степеня</i> з числа $a$ ; корінь позначають як $\sqrt[n]{a}$ .
Показник кореня	При цьому $\sqrt[n]{a}$ називається коренем, $n$ – <i>показником кореня</i> , $a$ – <i>підкореневим виразом</i> .
Квадратний корінь	Зокрема, корінь другого степеня називають <i>квадратним коренем</i> , а корінь третього степеня – <i>кубічним коренем</i> . Квадратний корінь прийнято позначати як $\sqrt{a}$ .
Кубічний корінь	
Корінь парного степеня	Якщо $n$ – парне число, то корінь існує тільки для $a \geq 0$ , причому цих коренів два (якщо $a \neq 0$ ), і вони відрізняються тільки знаками.
Корінь непарного степеня	Якщо $n$ – непарне число, то корінь існує для довільних $a$ , і він єдиний, причому, якщо $a \geq 0$ , то і $\sqrt[n]{a} \geq 0$ , і навпаки, якщо $a \leq 0$ , то і $\sqrt[n]{a} \leq 0$ .
Арифметичний корінь $n$ -го степеня	Невід'ємне число, $n$ -й ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ) степінь якого дорівнює невід'ємному числу $a$ (тобто $a \geq 0$ ), називається <i>арифметичним коренем <math>n</math>-го степеня</i> з $a$ . Арифметичний корінь також позначається як $\sqrt[n]{a}$ . Якщо $n$ – непарне число ( $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ ), то такий показник використовують для позначення будь-яких коренів, як арифметичних, так і не арифметичних. Якщо $n$ – парне число ( $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ ), то такий показник використовують для позначення тільки арифметичних коренів.

**Приклад 5.1.** Спростити вираз

$$\sqrt{(c-1)^2} - \sqrt{(c+1)^2}$$

при  $-1 \leq c \leq 1$ ,  $c \in R$ .

За властивістю 3)

$$\sqrt{(c-1)^2} = |c-1|, \sqrt{(c+1)^2} = |c+1|.$$

Тоді

$$\sqrt{(c-1)^2} - \sqrt{(c+1)^2} = |c-1| - |c+1|.$$

З умови  $-1 \leq c \leq 1$  випливає, що  $c-1 \leq 0$  і  $c+1 \geq 0$ . Тому

$$|c-1| = -(c-1) = 1-c, |c+1| = c+1.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \sqrt{(c-1)^2} - \sqrt{(c+1)^2} &= \\ &= (1-c) - (c+1) = -2c. \end{aligned}$$

Відповідь:  $-2c$ .

**Приклад 5.2.** Зобразити у вигляді кореня:

1)  $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2}$ ;

2)  $\sqrt[3]{2^5 \sqrt{8}} : \sqrt[3]{2}$ .

а)  $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^9} \cdot \sqrt[6]{2^4} =$   
 $= \sqrt[6]{2^{9+4}} = \sqrt[6]{2^{13}}.$

1)  $\sqrt[3]{2^5 \sqrt{8}} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^5 \sqrt{8}} : 2 = \sqrt[3]{2^4 \sqrt{8}} =$   
 $= \sqrt[3]{\sqrt{2^8} \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^{11}}.$

Відповідь: 1)  $\sqrt[6]{2^{13}}$ ;

2)  $\sqrt[6]{2^{11}}.$

**Приклад 5.3.** Спростити вираз  
 $(2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2}).$

**5.1.** Зобразити у вигляді кореня:

1)  $\sqrt[5]{125\sqrt{625}}$ ;

2)  $\sqrt[3]{6\sqrt{324}}$ ;

3)  $\frac{\sqrt[9]{2^6}}{\sqrt[2]{\sqrt{128}}}.$

(Відповідь: 1) 5;

2)  $\sqrt{108}$ ;

3)  $\sqrt[3]{2}$ .)

**5.2.** Внести множник під знак кореня.

1)  $-3 \cdot 4\sqrt{\frac{1}{9}}$ ;

2)  $2 \cdot 5\sqrt{\frac{1}{16}}$ ;

3)  $-\frac{3}{2}\sqrt[4]{2}.$

(Відповідь: 1)  $-\sqrt[4]{9}$ ;

2)  $\sqrt[5]{2}$ ;

3)  $-4\sqrt[4]{\frac{81}{8}}$ .)

**5.3.** Спростити:

1)  $(3\sqrt{5} - 2)(3\sqrt{5} - 1)$ ;

2)  $\sqrt{12} + \sqrt{45} + \sqrt{18}$ ;

3)  $(12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} +$   
 $+ 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}.$

(Відповідь: 1)  $47 - 9\sqrt{5}$ ;

2)  $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ ;

Властивості коренів

1)  $\sqrt[n]{0} = 0$ ,  $\sqrt[n]{1} = 1$  (арифметичний корінь).

2)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ , при цьому

$$(2k+1\sqrt{a})^{2k+1} = a, a \in R;$$

$$(2k\sqrt{a})^{2k} = a, a \geq 0.$$

Корінь зі степеня

3)  $2k+1\sqrt{a^{2k+1}} = a$ ;  $a \in R$ ;

$$2k+1\sqrt{-a} = -2k+1\sqrt{a}; a \in R;$$

$$2k\sqrt{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Зокрема,  $\sqrt{a} = |a|$ .

Степінь кореня

4)  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  для всіх значень  $a$  з області визначення виразу  $\sqrt[n]{a}$  (див. властивість 2)),  $m \in Z$ .

Корінь добутку

5)  $2k+1\sqrt{ab} = 2k+1\sqrt{a} \cdot 2k+1\sqrt{b}$ ;  $a, b \in R$ ;

$$2k\sqrt{ab} = 2k\sqrt{|a|} \cdot 2k\sqrt{|b|}; ab \geq 0.$$

Корінь частки

6)  $2k+1\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2k+1\sqrt{a}}{2k+1\sqrt{b}}$ ;  $a, b \in R$ ;  $b \neq 0$ ;

$$2k\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{2k\sqrt{|a|}}{2k\sqrt{|b|}}; ab \geq 0, b \neq 0.$$

Внесення множника з-під кореня

7)  $2k+1\sqrt{a^{2k+1}b} = a \cdot 2k+1\sqrt{b}$ ;  $a, b \in R$ ;

$$2k\sqrt{a^{2k}b} = |a| \cdot 2k\sqrt{b}; a \in R, b \geq 0.$$

Внесення множника під корінь

8)  $a \cdot 2k+1\sqrt{b} = 2k+1\sqrt{a^{2k+1}b}$ ;  $a, b \in R$ ;

$$a \cdot 2k\sqrt{b} = \begin{cases} 2k\sqrt{a^{2k}b}, & a \geq 0 \\ -2k\sqrt{a^{2k}b}, & a < 0 \end{cases}; b \geq 0.$$

Корінь з кореня

9)  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$  для всіх значень  $a$  з області

Оскільки  $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$  і  $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$ , то

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2}) = \\ & = (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) = \\ & = (5\sqrt{2} - \sqrt{5})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) = \\ & = 25\sqrt{4} - 10\sqrt{10} - 5\sqrt{10} + 2\sqrt{25} = \\ & = 50 - 15\sqrt{10} + 10 = 60 - 15\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $60 - 15\sqrt{10}$ .

**Приклад 5.4.** Звільнитися від іраціональності в знаменнику дроба

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

Домножимо чисельник і знаменник даного дробу на число  $\sqrt{2} - \sqrt{5} \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2 - 5} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{-3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$ .

**Приклад 5.5.** Винести множник за знак кореня:

- 1)  $\sqrt[6]{128}$ ;
- 2)  $\sqrt{7b^5}$ ;
- 3)  $\sqrt[4]{3y^4}$ , якщо  $y < 0$ .

3)  $17\sqrt{5}$ )

**5.4.** Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ ;
- 2)  $\frac{4}{3\sqrt{2} + 1}$ ;
- 3)  $\frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ .

(Відповідь: 1)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{3}$ ;

- 2)  $\frac{4(3\sqrt{2} - 1)}{17}$ ;
- 3)  $-\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{19}$ .)

**5.5.** Спростити вирази:

- 1)  $\sqrt[4]{3(\sqrt{2} - 1)^4}$ ;
- 2)  $\sqrt{\frac{2}{(3 - \sqrt{10})^2}}$ ;

(Відповідь: 1)  $(\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt[4]{3}$ ;

- 2)  $\sqrt{2}(3 + \sqrt{10})$ )

**5.6.** Зобразити у вигляді добутку степенів з раціональними показниками ( $a, b, c, d > 0$ ).

- 1)  $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^{-1}})^{-2} \cdot ab^2$ ;

визначення виразу  $\sqrt[n]{a}$  (див. властивість 2)),  
 $m \in \mathbb{Z}$ .

Подальші властивості сформулюємо для  
 $a > 0$ ,  $n, m, k \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ ,  $k \geq 2$ .

Добуток коренів

$$10) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}.$$

Частка коренів

$$11) \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}.$$

$$12) \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}.$$

$$13) \sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}; \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[nm]{a^{km}}.$$

Степінь з  
раціональним  
показником

Наступний вираз

$$a^{\frac{p}{q}} = \left( \sqrt[q]{a} \right)^p$$

називається *степенем* числа  $a$  з *раціональним*

*показником*  $\frac{p}{q}$ , де  $p$  – ціле число, а  $q \geq 2$  –

натуральне число; цей вираз існує для тих  
значень  $a$ , для яких визначений корінь  $\sqrt[q]{a}$ .

Зокрема,  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Для степеня з раціональним показником  
виконуються властивості 1) – 13), з  
урахуванням області визначення коренів.

Перетворення  
алгебраїчних  
виразів, які містять  
корені

Перетворення алгебраїчних виразів, які  
містять корені, виконуються відповідно до  
загальних законів дій з алгебраїчними  
виразами і правил дій з коренями.

Деякі формули скороченого множення (див.  
розділ 3) можна записати і для коренів:

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \text{ якщо } a, b \geq 0;$$

$$a - b = (\sqrt{-a} - \sqrt{-b})(\sqrt{-a} + \sqrt{-b}), \text{ якщо } a, b \leq 0;$$

$$1) \sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2 \cdot 2^6} = 2\sqrt[6]{2}.$$

$$2) \sqrt{7b^5} = \sqrt{7b^4 \cdot b} = |b|^2 \sqrt{7b} = b^2 \sqrt{7b}.$$

$$3) \sqrt[4]{3y^4} = |y| \sqrt[4]{3} = -y \sqrt[4]{3}, \quad y < 0.$$

Відповідь: 1)  $2\sqrt[6]{2}$ ;

$$2) b^2 \sqrt{7b};$$

$$3) -y \sqrt[4]{3}.$$

**Приклад 5.6.** Обчислити:

$$1) \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^6};$$

$$2) \sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}}.$$

$$1) \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^6} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}.$$

$$2) \sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}} = \\ = \sqrt[3]{(8-\sqrt{37})(8+\sqrt{37})} = \sqrt[3]{64-37} = \\ = \sqrt[3]{27} = 3$$

Відповідь: 1)  $3-2\sqrt{2}$ ;

2) 3.

**Приклад 5.7.** Зобразити у вигляді степеня з раціональним показником:

$$1) A = \left( \frac{1}{a^4} y \frac{2}{3} \right)^{\frac{6}{5}} : a \frac{10}{3} \cdot y^{\frac{4}{5}}, \quad a, y > 0;$$

$$2) B = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{x}}}, \quad a, b, x > 0$$

$$1) A = a^{\frac{6}{20}} \cdot y^{\frac{12}{15}} : a \frac{10}{3} \cdot y^{\frac{4}{5}} =$$

$$= a^{\frac{6}{20} - \frac{10}{3}} \cdot y^{\frac{12}{15} - \frac{4}{5}} = a^{\frac{109}{30}} \cdot y^0 = a^{\frac{109}{30}}.$$

$$2) \left( \frac{3ab}{5cd^{-1}} \right)^4 \cdot \left( \frac{ac^{-4}}{b^2d^3} \right)^{-2} \times \\ \times \left( \frac{a^{-2}b^2}{cd^{-3}} \right)^4;$$

$$3) \left( \frac{5}{a^3} \cdot b \frac{1}{6} \right) \cdot \left( a \frac{1}{3} : b \frac{1}{3} \right)^4;$$

$$4) (\sqrt{a} : \sqrt{b}) \sqrt{a\sqrt{b}}.$$

(Відповідь: 1)  $b^3$ ;

$$2) 3^4 5^{-4} a^{-6} b^{16} c^0 d^{22};$$

$$\frac{1}{a^3} b^{\frac{7}{6}};$$

$$4) ab^{-\frac{1}{4}})$$

**5.7.** Знайти ОДЗ та позбавитись від ірраціональності знаменнику дробу.

$$1) \frac{b}{\sqrt{x+1}};$$

$$2) \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2+y}};$$

$$3) \frac{a}{\sqrt{x-2\sqrt{y}}};$$

$$4) \frac{a+b}{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}.$$

$$(Відповідь: 1) \frac{b(\sqrt{x}-1)}{x-1},$$

$x \geq 0$ , якщо  $x \neq 1$ ;

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}), \text{ якщо } a, b \geq 0;$$

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = (2\sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n]{b})(2\sqrt[n]{a} + 2\sqrt[n]{b}), \quad \text{якщо}$$

$$a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$$

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2});$$

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2});$$

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = (3\sqrt[n]{a} - 3\sqrt[n]{b})(\sqrt[3n]{a^2} + 3\sqrt[n]{ab} + \sqrt[3n]{b^2}),$$

якщо  $a, b \geq 0$ ;

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = (3\sqrt[n]{a} + 3\sqrt[n]{b})(\sqrt[3n]{a^2} - 3\sqrt[n]{ab} + \sqrt[3n]{b^2}),$$

якщо  $a, b \geq 0$ .

Зауважимо, що всі формули і властивості коренів і степенів з раціональним показником для чисел відповідним чином переносяться на алгебраїчні вирази. Наприклад, якщо алгебраїчні вирази  $A$  і  $B$  додатні при всіх значеннях змінних та букв, що входять до їх складу, то

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, \quad \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B},$$

$$\sqrt[4]{A^2} = \sqrt{A} \text{ і т. ін.}$$

Тотожні перетворення алгебраїчних виразів виконуються з урахуванням їх області допустимих значень (ОДЗ).

$$\begin{aligned}
 2) B &= \sqrt{\sqrt{a^2 b \sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^4 b^2 x}}} = \\
 &= \sqrt[8]{a^4 b^2 x} = \sqrt[8]{a^4} \cdot \sqrt[8]{b^2} \cdot \sqrt[8]{x} = \\
 &= a^{\frac{4}{8}} \cdot b^{\frac{2}{8}} \cdot x^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}}
 \end{aligned}$$

Відповідь: 1)  $a^{\frac{109}{30}}$ ;

$$2) a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}}.$$

**Приклад 5.7.** Спростити вираз:

$$A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

ОДЗ даного виразу має вигляд  $ab \geq 0$ ,  $b \neq 0$ . Тобто маємо два випадки: або  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , або  $a \leq 0$ ,  $b < 0$ .

Розглянемо їх окремо.

Якщо  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , то:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{a}\sqrt{b} - \sqrt{b}\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \\
 &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -1.
 \end{aligned}$$

Якщо  $a \leq 0$ ,  $b < 0$ , то:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{-a}\sqrt{-b} - \sqrt{-b}\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}\sqrt{-b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \\
 &= \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}} - \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = 1 - \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \\
 &= 1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}.
 \end{aligned}$$

Відповідь:  $A = -1$ , якщо  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ;

$$A = 1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ якщо } a \leq 0, b < 0.$$

$$\frac{b}{2}, \text{ якщо } x = 1;$$

$$2) \frac{\sqrt[3]{x^2 y} - x\sqrt[3]{x} - y^2}{x^2 + y^3},$$

$$x^2 \neq -y^3;$$

$$3) \frac{a(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})}{x - 4y}, \quad x, y \geq 0,$$

$$x \neq 4y;$$

$$4) \frac{(a+b)(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}, \quad \text{якщо}$$

$$x \neq 1; \frac{a+b}{3}, \text{ якщо } x = 1)$$

**5.8.** Спростити вираз:

$$1) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y};$$

$$\begin{aligned}
 2) &\left( \sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}} + \right. \\
 &\left. + \sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} \right) (1+n^{-2})^{0.5},
 \end{aligned}$$

за умов  $m > 0$ ,  $n > 0$ .

$$\text{(Відповідь: 1) } \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}},$$

$$x, y \geq 0, y \neq x;$$

$$2) \frac{2\sqrt{m}}{n}, \quad \text{якщо } m > 0,$$

$$0 < n \leq 1;$$

$$2\sqrt{m}, \text{ якщо } m > 0, n \geq 1)$$

## 6 ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ ВИРАЗИ

Властивості  
показникових  
виразів

Розглянемо степінь з додатною основою та дійсним показником:  $a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in R$ . Ці умови поширюються на весь даний розділ.

$$1) a^{x+y} = a^x \cdot a^y;$$

$$2) a^{x-y} = a^x : a^y;$$

$$3) a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x;$$

$$4) a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$5) \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x;$$

$$6) a^0 = 1;$$

$$7) a^1 = a;$$

$$8) a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \text{ зокрема, } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ якщо } n \in N$$

(див. розділ 3);

$$9) a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}, \text{ якщо } n \in N \text{ (див. розділ 5).}$$

Логарифм

Показник степеня, до якого треба піднести основу  $a$ , щоб одержати додатне число  $b$ , називається *логарифмом* числа  $b$  за основою  $a$ . Це число позначається  $\log_a b$ ,  $b > 0$ .

Тобто, якщо  $a^x = b$ , то  $x = \log_a b$ , і навпаки.

За означенням логарифма вирази типу  $\log_2(-5)$  і  $\log_1 7$  не мають змісту на множині дійсних чисел.

Натуральний  
логарифм

Якщо основа  $a = e$  ( $e \approx 2,718\dots$  – стала Ейлера), то логарифм називається *натуральним*, і позначається  $\ln b$ .

**Приклад 6.1.** За означенням логарифма маємо:

- 1) оскільки  $3^2 = 9$ , то  $\log_3 9 = 2$ ;  
 2) оскільки  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ , то  $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ .

**Приклад 6.2.** Обчислити:

- 1)  $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$ ;  
 2)  $\log_{16} 32$ .  
 1)  $\log_{12} 2 + \log_{12} 72 = \log_{12}(2 \cdot 72) =$   
 $= \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2 \log_{12} 12 = 2$ .  
 2)  $\log_{16} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 4} = \frac{5}{4}$ .

Відповідь: 1) 2;

2)  $\frac{5}{4}$ .

**Приклад 6.3.** Відомо, що  $\lg 3 = a$ ,  $\lg 7 = a$ . Виразити  $\log_{70} 63$  через  $a$ ,  $b$ .  
 За властивістю 7 логарифмів маємо:

$$\begin{aligned} \log_{70} 63 &= \frac{\lg 63}{\lg 70} = \frac{\lg(7 \cdot 3^2)}{\lg(10 \cdot 7)} = \\ &= \frac{\lg 7 + 2 \lg 3}{\lg 10 + \lg 7} = \frac{2a + b}{1 + b}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{2a + b}{1 + b}$ .

**Приклад 6.4.** Прологарифмувати вираз  $x = 12a^2 \sqrt{b}$  за основою  $a$ .  
 За властивостями логарифма маємо:

$$\begin{aligned} \log_a x &= \log_a 12a^2 \sqrt{b} = \\ &= \log_a 12 + \log_a a^2 + \log_a \sqrt{b} = \end{aligned}$$

**6.1.** Спростити вираз:

- 1)  $5^{\log_5 \frac{1}{10}}$ ;  
 2)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 7}$ ;  
 3)  $2^{-\log_{\frac{1}{2}} 7}$ .

(Відповідь: 1)  $\frac{1}{10}$ ;

2)  $\frac{1}{49}$ ;

3) 7)

**6.2.** Виразити  $\lg A$  через десяткові логарифми простих чисел:

1)  $A = \frac{7^3 \cdot 3^5}{5^2}$ ;

2)  $A = \frac{21^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{124}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{24}}$ .

(Відповідь:

1)  $3 \lg 7 + 5 \lg 3 - 2 \lg 5$ ;

2)  $\frac{3}{4} \lg 7 + \frac{17}{28} \lg 3 +$   
 $+ \frac{5}{21} \lg 2 + \frac{1}{3} \lg 31 - \frac{1}{2} \lg 5$ )

**6.3.** Обчислити:

1)  $\frac{\ln 16 - \ln 4}{\ln 64}$ ;

2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2 \log_2 3}$ ;

Десятковий  
логарифм

Якщо основа  $a = 10$ , то логарифм називається *десятковим*, і позначається  $\lg b$ .

Основна  
логарифмічна  
тотожність

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Властивості  
логарифмів

Нехай  $x > 0$ ,  $y > 0$  – довільні дійсні числа,  
 $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , і  $\alpha \in \mathbb{R}$  – довільне  
дійсне число.

1)  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ;

2)  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ ;

3)  $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$ ;

4)  $\log(a^\alpha)x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$ , якщо  $\alpha \neq 0$ ;

5)  $\log_a 1 = 0$ ;

6)  $\log_a a = 1$ ;

7) *формула переходу до іншої основи:*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c > 0, \quad c \neq 1;$$

8)  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ ,  $c > 0$ ,  $c \neq 1$ ;

9)  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

Логарифмування

Обчислення логарифмів заданих чисел або виразів називається *логарифмуванням*.

Потенціювання

Знаходження числа або виразу за даним його логарифмом називається *потенціюванням*.

Монотонність  
логарифмів

1) Якщо  $a > 1$ , то  $x > y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$ .

2) Якщо  $0 < a < 1$ , то  $x > y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$ .

Звідси випливає, що  $x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y$ ,  
тобто рівність логарифмів можлива тільки за  
умови рівності їх аргументів.

$$= \log_a 12 + 2 \log_a a + \frac{1}{2} \log_a b =$$

$$= \log_a 12 + \frac{1}{2} \log_a b + 2.$$

Відповідь:  $\log_a 12 + \frac{1}{2} \log_a b + 2.$

**Приклад 6.5.** Пропотенціювати вираз  $\ln x = \ln 3 - 3 \ln a + 5 \ln b.$

Оскільки  $\ln 3 - 3 \ln a + 5 \ln b =$

$$= \ln 3 - \ln a^3 + \ln b^5 = \ln \frac{3b^5}{a^3}, \text{ то:}$$

$$\ln x = \ln \frac{3b^5}{a^3}, \quad x = \frac{3b^5}{a^3}.$$

Відповідь:  $\frac{3b^5}{a^3}.$

**Приклад 6.6.** 1) Оскільки  $3 < \pi$ , то за властивістю 1 монотонності логарифмів  $\log_\pi 3 < \log_\pi \pi = 1$ , тобто  $\log_\pi 3 < 1.$

2) Якщо  $\log_{0,9} x > \log_{0,9} 7$ , то за властивістю 2 монотонності логарифмів одержуємо оцінку  $0 < x < 7.$

**Приклад 6.7.** Порівняти числа  $\log_{13} 150$  і  $\log_{17} 290.$

Оскільки

$$\log_{13} 150 < \log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2,$$

$$\log_{17} 290 > \log_{17} 289 = \log_{17} 17^2 = 2,$$

то  $\log_{13} 150 < \log_{17} 290.$

Відповідь:  $\log_{13} 150 < \log_{17} 290.$

3)  $\frac{\log_4 27}{\log_4 3};$

4)  $\frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 3,6 + 1}$

(Відповідь: 1)  $\frac{1}{3};$

2)  $\frac{1}{18};$

3) 3;

4)  $\frac{1}{2}.)$

**6.4.** Перейти до основи 3 і спростити одержаний вираз:

1)  $\log_{3\sqrt{3}} 27;$

2)  $\log_3 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_5 3.$

(Відповідь: 1) 2;

2)  $\frac{1}{\log_3 5}.)$

**6.5.** Відомо, що  $\lg 2 = a$ ,  $\lg 3 = b.$  Виразити через  $a, b$  наступні числа:

1)  $\lg 3,6;$

2)  $\lg 9\sqrt[3]{2}.$

(Відповідь: 1)  $2a + 2b - 1;$

2)  $\frac{1}{3}a + 2b.)$

**6.6.** Порівняти числа  $\log_2 5$  і  $\log_3 7.$

(Відповідь:

$\log_2 5 > \log_3 7.)$

## 7 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ

Формули переходу від градусів до радіанів

$$\alpha = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}; \quad \alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Тригонометрична діаграма

*Тригонометрична діаграма* – це коло одиничного радіуса, до якого прибудовані тригонометричні осі. Вона є наочним інструментом розв'язання багатьох тригонометричних задач.

На колі лежить *вісь кутів* (рис 7.1). Це непрямоїнійна вісь. Її треба розглядати як нескінченно довгу і тонку нитку, що намотана на круг, як на барабан, і проградуїрована. Кожній точці кола відповідає нескінченно багато кутів, що лежать на різних витках і відрізняються один від одного на числа, які кратні  $360^\circ$ .

Синус і косинус

Вісь абсцис є *віссю косинусів*, а вісь ординат – *віссю синусів*.

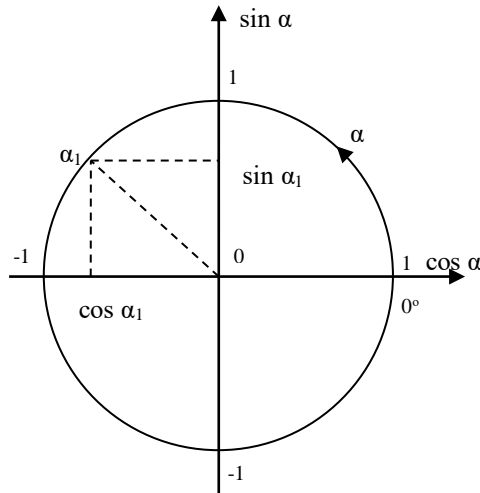


Рис. 7.1.

Тангенс і котангенс

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Приклад 7.1.** Чому дорівнюють в радіанах кути  $0^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $180^\circ$ ?

$$0^\circ \cdot \pi/180^\circ = 0; \quad 30^\circ \cdot \pi/180^\circ = \pi/6;$$

$$45^\circ \cdot \pi/180^\circ = \pi/4; \quad 60^\circ \cdot \pi/180^\circ = \pi/3;$$

$$90^\circ \cdot \pi/180^\circ = \pi/2; \quad 180^\circ \cdot \pi/180^\circ = \pi.$$

Відповідь:  $0$ ;  $\pi/6$ ;  $\pi/4$ ;  $\pi/3$ ;  $\pi/2$ ;  $\pi$ .

**Приклад 7.2.** Використовуючи тригонометричну діаграму, можна визначити основні властивості тригонометричних функцій. Зокрема, з тригонометричної діаграми видно, що:

- а) синус і косинус обмежені:  
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ ;  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ;  
 б) синус і косинус – періодичні функції з періодом  $2\pi$ .

**Приклад 7.3.** Обчислити  
 $T = \cos 180^\circ + \cos 270^\circ + \cos 360^\circ +$   
 $+ \cos 450^\circ + \cos 540^\circ + \cos 630^\circ.$

$$T = (-1) + 0 + 1 + 0 + (-1) + 0 = -1.$$

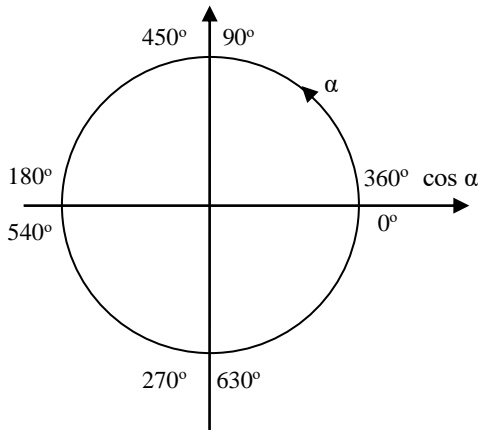


Рис. 7.2.

Відповідь:  $-1$ .

**7.1.** Чому дорівнюють в радіанах кути:

- а)  $270^\circ$ ;  $360^\circ$ ;  $450^\circ$ ;  $540^\circ$ ;  
 $630^\circ$ ;  $720^\circ$ ;  
 б)  $120^\circ$ ;  $135^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  
 в)  $210^\circ$ ;  $225^\circ$ ;  $240^\circ$ ;  
 г)  $300^\circ$ ;  $315^\circ$ ;  $330^\circ$ ,

які часто зустрічаються в задачах?

(Відповідь:

- а)  $3\pi/2$ ;  $2\pi$ ;  $5\pi/2$ ;  $3\pi$ ;  
 $7\pi/2$ ;  $4\pi$ ;  
 б)  $2\pi/3$ ;  $3\pi/4$ ;  $5\pi/6$ ;  
 в)  $7\pi/6$ ;  $5\pi/4$ ;  $4\pi/3$ ;  
 г)  $5\pi/3$ ;  $7\pi/4$ ;  $11\pi/6$ )

**7.2.** Використовуючи тригонометричну діаграму, показати:

якщо точка  $\alpha$  лежить на осі косинусів, то  $\cos \alpha = \pm 1$  і  $\sin \alpha = 0$ ;  
 якщо точка  $\alpha$  лежить на осі синусів, то  $\sin \alpha = \pm 1$  і  $\cos \alpha = 0$ .

**3.** Обчислити  
 $n(\pi/2) + \sin \pi + \sin(3\pi/2) +$   
 $\cdot \sin(2\pi) + \sin(5\pi/2).$

(Відповідь:  $1$ )

**7.4.** Використовуючи подібність трикутників, обґрунтувати розташування осей тангенсів і котангенсів на тригонометричній діаграмі (див. рис. 7.3).

Розташування осей тангенсів і котангенсів вказано на рис. 7.3.

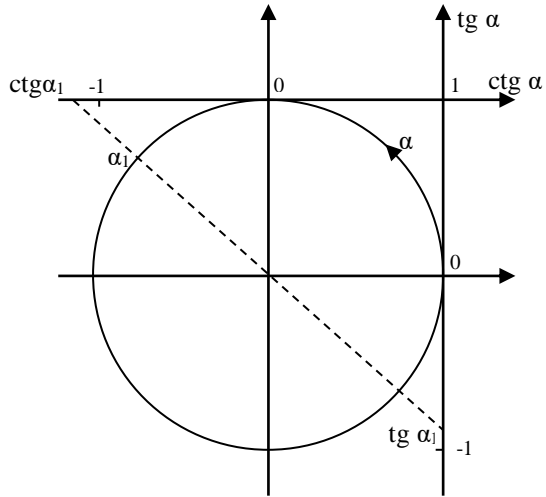


Рис. 7.3.

Таблиця значень тригонометричних функцій деяких кутів в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Знак « $\infty$ » означає, що в цій точці значення функції не існує, точніше границя приймає нескінченно велике по модулю значення.

**Приклад 7.4.** Використовуючи тригонометричну діаграму, визначити, в яких межах змінюються значення тангенса і котангенса.

З діаграми видно, що тангенс і котангенс – необмежені функції.

Відповідь:  $-\infty < \operatorname{tg} \alpha < +\infty$ ,  
 $-\infty < \operatorname{ctg} \alpha < +\infty$ .

**Приклад 7.5.** Обчислити  $T = \operatorname{ctg} 90^\circ + \operatorname{ctg} 135^\circ + \operatorname{ctg} 225^\circ + \operatorname{ctg} 270^\circ$ .

$$135^\circ = 90^\circ + 45^\circ; \quad 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ;$$

$$T = 0 + (-1) + 1 + 0.$$

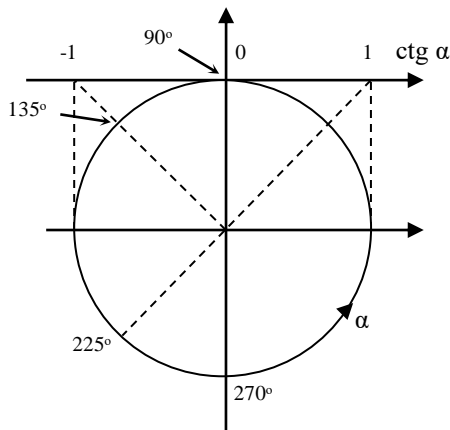


Рис. 7.4.

Відповідь: 0.

**Приклад 7.6.** Обчислити  $T = \sin 90^\circ - \sin 30^\circ + \cos 30^\circ + \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ$ .

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \sqrt{3}.$$

Відповідь:  $-\sqrt{3}/6$ .

**7.5.** Використовуючи тригонометричну діаграму, визначити: а) в яких кутах тангенс і котангенс не існує; б) характер їх монотонності на своїх проміжках безперервності.

(Відповідь:

а) не існує  $\operatorname{tg} \alpha$  при  $\alpha = \pi/2 + \pi n$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  при  $\alpha = \pi n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ;

б)  $\operatorname{tg} \alpha$  зростає,  $\operatorname{ctg} \alpha$  спадає)

**7.6.** Обчислити  $\operatorname{tg} 0 + \operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg}(3\pi/4) + \operatorname{tg} \pi + \operatorname{tg}(5\pi/4)$  (не використовуючи таблицю). (Відповідь: 1)

**7.7.** Обчислити  $\sin 0 + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} + \cos 0 - \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} 0 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$ .

(Відповідь:  $2 + 7\sqrt{3}/6$ )

**7.8.** Використовуючи тригонометричну діаграму, визначити розподіл знаків тригонометричних функцій по чвертях. (Відповідь: див. рис. 7.5)

Основні періоди  
тригонометричних  
функцій

Найменший додатний період функції називають *основним*.

У функцій  $\sin x$  і  $\cos x$  основний період дорівнює  $360^\circ$ , у функцій  $\operatorname{tg} x$  і  $\operatorname{ctg} x$  –  $180^\circ$ .

До виразу, що стоїть під знаком періодичної функції, можна додавати число, яке кратне основному періоду, або віднімати від нього це число.

Парність і  
непарність  
тригонометричних  
функцій

Функція  $f(x)$  називається *парною*, якщо виконується умова  $f(-x) = f(x)$  для всіх  $x \in D(f)$ . Функція  $f(x)$  називається *непарною*, якщо виконується умова  $f(-x) = -f(x)$  для всіх  $x \in D(f)$ .

Функція  $\cos x$  – парна. Функції  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  – непарні.

Знаки  
тригонометричних  
функцій по чвертях

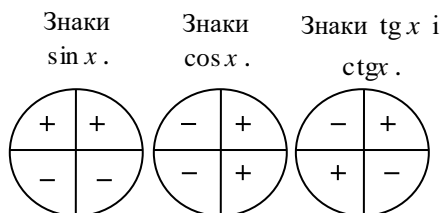


Рис. 7.5.

Формули зведення

Це формули перетворення тригонометричних функцій від  $(\pi/2 \pm \alpha)$ ,  $(\pi \pm \alpha)$  або  $(3\pi/2 \pm \alpha)$  до функцій від  $\alpha$ .

Зазвичай їх автоматично не запам'ятовують, а відновлюють за допомогою двох правил.

1) Якщо в дужках присутній  $\pi$ , то функція не змінюється; якщо  $\pi/2$  або  $3\pi/2$ , то функція змінюється на схожу (кофункцію).

2) Перед функцією від  $\alpha$  треба поставити той знак, який має інша частина при малому додатному  $\alpha$ .

**Приклад 7.7.** Обчислити:  
а)  $\cos(-780^\circ)$ ; б)  $\operatorname{ctg}(-2730^\circ)$ .

а) Функція  $\cos x$  – парна. Отже,  
 $\cos(-780^\circ) = \cos 780^\circ =$  (Далі відкинемо  
число, яке кратне основному періоду)  
 $= \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2$ .

б) Функція  $\operatorname{ctg} x$  – непарна і у неї  
основний період дорівнює  $180^\circ$ . Отже,  
 $\operatorname{ctg}(-2730^\circ) = -\operatorname{ctg} 2730^\circ =$

$= -\operatorname{ctg}(1800^\circ + 930^\circ) = -\operatorname{ctg} 930^\circ =$   
 $= -\operatorname{ctg}(5 \cdot 180^\circ + 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}$ .

Відповідь: а) 0,5; б)  $-\sqrt{3}$ .

**Приклад 7.7.** Розв'язати нерівність  
 $x \cdot \sin 350^\circ > 7 \sin 350^\circ$ .

Кут  $350^\circ$  належить четвертої  
чверті, в якій  $\sin \alpha < 0$ . Отже,  
 $x \cdot \sin 350^\circ > 7 \sin 350^\circ \mid : \sin 350^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 7$ . Відповідь:  $x \in (+\infty; 7)$ .

**Приклад 7.8.** Чому рівні вирази:  
а)  $\sin(\pi/2 - \alpha)$ ; б)  $\cos(\pi + \alpha)$ ;  
в)  $\sin(\alpha - \pi)$ ?

а) При малому  $\alpha > 0$   $(\pi/2 - \alpha)$   
належить 1-ої чверті, в якій синус  
додатний, отже  $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$ .

б) При малому  $\alpha > 0$   $(\pi + \alpha)$  належить  
3-ої чверті, в якій косинус від'ємний,  
отже  $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ . в) Якщо в  
різниці на першому місці стоїть кут  $\alpha$ ,  
то його треба поставити на друге місце,  
використовуючи парність-непарність  
функцій:  $\sin(\alpha - \pi) = \sin(-(\pi - \alpha)) =$   
 $= -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ .

**7.9.** Обчислити:  
 $\sin(-405^\circ)$ ;  $\operatorname{tg}(-930^\circ)$  (без  
калькулятора). (Відповідь:  
 $-\sqrt{2}/2$ ;  $-\sqrt{3}/3$ )

**7.10.** Розв'язати нерівність  
 $2x \cdot \operatorname{tg}(5\pi/6) \leq 3\operatorname{tg}(5\pi/6)$ .  
(Відповідь:  $x \in [1,5; +\infty)$ )

**7.11.** Чому рівні вирази:

1)  $\cos(\pi/2 + \alpha)$ ;

2)  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ ;

3)  $\sin(180^\circ + \alpha)$ ;

4)  $\cos(3\pi/2 + \alpha)$ ;

5)  $\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)$ ;

6)  $\operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha)$ ?

(Відповідь: 1)  $-\sin \alpha$ ;

2)  $\operatorname{ctg} \alpha$ ; 3)  $-\sin \alpha$ ;

4)  $\sin \alpha$ ; 5)  $-\operatorname{tg} \alpha$ ; 6)  $\operatorname{ctg} \alpha$ )

**7.12.** Чому дорівнює  
вирази: а)  $\operatorname{ctg}(x - 3\pi/2)$ ;  
б)  $\cos(\alpha - 180^\circ)$ ?

(Відповідь:

а)  $-\operatorname{tg} x$ ; б)  $-\cos \alpha$ )

**7.13.** Обчислити:

а)  $\sin 150^\circ$ ; б)  $\cos 225^\circ$ ;

в)  $\operatorname{ctg}(-1920^\circ)$ ;

г)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$

(без калькулятора).

(Відповідь:

а) 0,5; б)  $-\sqrt{2}/2$ ; в)  $\sqrt{3}$ ;

г)  $\sqrt{3}/3$ )

Основна  
тригонометрична  
тотожність  
і її наслідки

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha, \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \\ \operatorname{tg}^2 \alpha &= 1/\cos^2 \alpha - 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{1/\cos^2 \alpha - 1}; \\ \sin^2 \alpha &= 1/(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha), \quad \sin \alpha = \pm 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Формули  
подвійного кута

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

Формули  
пониження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha); \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Формули  
універсальної  
підстановки

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \\ \operatorname{tg} x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

У цих формулах можна зробити заміну  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ . В результаті отримаємо залежність різних тригонометричних функцій від однієї і тієї ж величини.

Формули тангенса  
половинного  
аргументу

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

**Приклад 7.9.** Дано: а)  $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$ ,  $\sin \alpha = -0,8$ ; б)  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$ ,  $\text{ctg} \alpha = -0,5$ . Обчислити  $\cos \alpha$ .

а) В третьої чверті  $\cos \alpha < 0$ .

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - (-0,8)^2}.$$

б)  $\text{tg} \alpha = 1/\text{ctg} \alpha = 1/(-0,5) = -2$ .

В четвертої чверті  $\cos \alpha > 0$ .

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = 1/\sqrt{1 + (-2)^2}.$$

Відповідь: а)  $-0,6$ ; б)  $\sqrt{5}/5$ .

**Приклад 7.10.**

Дано:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -1/3. \text{ Обчислити } \sin 2\alpha.$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = (-1/3)^2;$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1/9;$$

$$1 + \sin 2\alpha = 1/9; \sin 2\alpha = 1/9 - 1.$$

Відповідь:  $-8/9$ .

**Приклад 7.11.** Вивести першу формулу універсальної підстановки.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1} &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \\ &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2) : \cos^2(x/2)}{(\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)) : \cos^2(x/2)} = \dots \end{aligned}$$

**Приклад 7.12.** Вивести першу формулу  $\text{tg}(x/2)$ .

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{x}{2} &= \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \\ &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{2 \cos^2(x/2)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

**7.14.** Дано:  $\cos x = -0,2$ ;  $x \in (\pi/2; \pi)$ . Обчислити  $\sin x$ . (Відповідь:  $2\sqrt{6}/5$ )

**7.15.** Дано:  $\sin x = 0,25$ ;  $x \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Обчислити  $\text{ctg} x$ . (Відповідь:  $-\sqrt{15}$ )

**7.16.** Обчислити  $\sin^4 \frac{\pi}{8} - \cos^4 \frac{\pi}{8}$ .

(Відповідь:  $-\sqrt{2}/2$ )

**7.17.** Дано:  $\text{tg} \alpha + \text{ctg} \alpha = 3$ . Обчислити  $\sin 2\alpha$ . (Відповідь:  $2/3$ )

**7.18.** Дано:  $\sin \alpha = -0,6$ . Обчислити  $\cos 2\alpha$ . (Відповідь:  $0,28$ )

**7.19.** Дано:  $\cos 2\alpha = -0,02$ . Обчислити  $\cos^2 \alpha$ . (Відповідь:  $0,49$ )

**7.20.** Вивести другу і третю формули універсальної підстановки.

**7.21.** Дано:  $\text{tg}(\alpha/2) = 2$ . Обчислити  $\sin \alpha + \cos \alpha$ . (Відповідь:  $0,2$ )

**7.22.** Обчислити  $\text{tg} 22,5^\circ$ . (Відповідь:  $\sqrt{2} - 1$ )

Формули додавання Так називають групу формул перетворення тригонометричних функцій, аргументами яких є суми або різниці кутів.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \alpha \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Формули перетворення сум функцій в добутки

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Формули перетворення добутків функцій в суми

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Формули потрійного кута

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \quad \operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.$$

**Приклад 7.13.** Обчислити  $\sin 75^\circ$ .

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$ .

**Приклад 7.14.** Спростити вираз

$$\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x}.$$

$$\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \frac{2 \sin 3x \cos 2x}{-2 \sin 3x \sin 2x}.$$

Відповідь:  $-\operatorname{ctg} 2x$ .

**Приклад 7.15.** Обчислити

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ.$$

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \left( \cos 40^\circ + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \frac{1}{4} \sin 20^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\sin(-20^\circ) + \sin 60^\circ) + \frac{1}{4} \sin 20^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\sqrt{3}/8$ .

**Приклад 7.16.** Вивести формулу  $\sin 3x$ .

$$\begin{aligned} \sin(x + 2x) &= \sin x \cos 2x + \\ &+ \cos x \sin 2x = \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \\ &+ \cos x \cdot 2 \sin x \cos x = \sin x - 2 \sin^3 x + \\ &+ 2 \sin x \cos^2 x = \sin x - 2 \sin^3 x + \\ &+ 2 \sin x(1 - \sin^2 x) = \dots \end{aligned}$$

**7.23.** Спростити вираз  $(\sin \alpha)^{-1} + (\operatorname{tg} \alpha)^{-1}$ .  
(Відповідь:  $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$ )

**7.24.** Дано:  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ;  $\operatorname{ctg} \beta = 0,2$ . Обчислити:  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ;  $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ .  
(Відповідь:  $-7/9$ ;  $-11/3$ )

**7.25.** Дано:  $\operatorname{tg} \gamma = -3$ ;  $\gamma \in (270^\circ; 360^\circ)$ .  
Обчислити  $\cos(945^\circ - \gamma)$ .  
(Відповідь:  $\sqrt{5}/5$ )

**7.26.** Дано:  $\alpha - \beta = \pi/3$ ;  $\alpha + \beta = \pi/2$ . Обчислити  $\cos \alpha + \cos \beta$  (перетворивши суму в добуток).  
(Відповідь:  $\sqrt{6}/2$ )

**7.27.** Обчислити  $\cos(2\pi/5) + \cos(4\pi/5)$  (помноживши та розділивши це на  $\sin(\pi/5)$  і перетворивши добуток в суми). (Відповідь:  $-0,5$ )

**7.28.** Обчислити  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$  (помноживши та розділивши це на  $\sin 20^\circ$ ).  
(Відповідь:  $1/8$ )

**7.29.** Вивести формули  $\cos 3x$ ,  $\operatorname{tg} 3x$ .

Обернені  
тригонометричні  
функції

Нехай задано число  $x \in [-1; 1]$ . Скільки є кутів  $\alpha$ , синус яких дорівнює  $x$ :  $\sin \alpha = x$ ? Їх – нескінченно багато (див. рис. 7.1). Серед них вибирають один, що належить деякому проміжку, і дають йому свою назву.

Арксинус

*Арксинусом*  $\arcsin x$  називають кут, що лежить на проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ , синус якого дорівнює  $x$ . При цьому область визначення  $D(\arcsin x)$ :  $-1 \leq x \leq 1$ , область значень  $E(\arcsin x)$ :  $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$ .

Арккосинус

*Арккосинусом*  $\arccos x$  називають кут, що лежить на проміжку  $[0; \pi]$ , косинус якого дорівнює  $x$ .  
 $D(\arccos x) = [-1; 1]$ ;  $E(\arccos x) = [0; \pi]$ .

Арктангенс

*Арктангенсом*  $\arctg x$  називають кут, що лежить на проміжку  $(-\pi/2; \pi/2)$ , тангенс якого дорівнює  $x$ .  
 $D(\arctg x) = R$ ;  $E(\arctg x) = (-\pi/2; \pi/2)$ .

Арккотангенс

*Арккотангенсом*  $\text{arcctg} x$  називають кут, що лежить на проміжку  $(0; \pi)$ , котангенс якого дорівнює  $x$ .  
 $D(\text{arcctg} x) = R$ ;  $E(\text{arcctg} x) = (0; \pi)$ .

Перехід від  
від'ємного  
аргументу до  
додатного

$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \forall x \in [-1; 1]$ ;  
 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \forall x \in [-1; 1]$ ;  
 $\arctg(-x) = -\arctg x \quad \forall x \in R$ ;  
 $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg} x \quad \forall x \in R$ .  
(знак « $\forall$ » означає «для всіх»).

**Приклад 7.17.**

Обчислити

$$P = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2} - \arccos 1 + \\ + \arctg 0 - \arctg \sqrt{3} + \operatorname{arctg} 1.$$

Згідно таблиці значень тригонометричних функцій для кутів в межах від 0 до  $\pi/2$

$$P = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - 0 + 0 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь:  $\pi/2$ .**Приклад 7.18.**

Обчислити

$$R = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \\ - \arctg(-1) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ (в градусах).}$$

$$R = -\arcsin \frac{1}{2} + \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \\ + \arctg 1 - \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ = -30^\circ + 180^\circ - 45^\circ + 45^\circ - 180^\circ + 60^\circ.$$

Відповідь:  $30^\circ$ .**Приклад 7.19.**

Обчислити

$$S = \sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right). \\ S = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}.$$

Відповідь:  $-1/2$ .

**7.30.** Дано:  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ .

Обчислити  $\sin 3\alpha$ .

(Відповідь:  $\frac{23}{27}$ )

**7.31.** Перетворити суму  $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$  в добуток.

(Відповідь:  $-4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{7\alpha}{2}$ )

**7.32.** Спростити вираз

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

(Відповідь:  $\frac{2}{\cos 2\alpha}$ )

**7.33.** Обчислити:

$$\cos\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\sin\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(Відповідь:  $\frac{1}{2}; 1$ )

**7.34.** Обчислити

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \\ + \arccos 0 + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

(Відповідь:  $-\frac{\pi}{2}$ )

Суми обернених функцій при одному значенні аргументів

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \forall x \in [-1;1];$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2 \quad \forall x \in R.$$

Монотонність обернених функцій

Функції  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{arctg} x$  – зростаючі; функції  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$  – спадні (див. рис. 7.1, 7.3).

Розподіл обернених функцій по чвертях в залежності від знака аргументу

При  $-1 \leq x \leq 0$   $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq 0$  (4-а чверть),  
при  $0 \leq x \leq 1$   $0 \leq \arcsin x \leq \pi/2$  (1-а чверть);  
при  $-1 \leq x \leq 0$   $\pi \geq \arccos x \geq \pi/2$  (2-а чверть),  
при  $0 \leq x \leq 1$   $\pi/2 \geq \arccos x \geq 0$  (1-а чверть)  
(див. рис. 7.1).  
При  $-\infty < x \leq 0$   $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x \leq 0$  (4-а чверть),  
при  $0 \leq x < +\infty$   $0 \leq \operatorname{arctg} x < \pi/2$  (1-а чверть);  
при  $-\infty < x \leq 0$   $\pi > \operatorname{arcctg} x \geq \pi/2$  (2-а чверть),  
при  $0 \leq x < +\infty$   $\pi/2 \geq \operatorname{arcctg} x \geq 0$  (1-а чверть)  
(див. рис. 7.3).

Тотожності з оберненими функціями

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1;1],$$
$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1;1]$$

(при інших значеннях  $x$   $\arcsin x$  і  $\arccos x$  не існують);

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \forall x \in R;$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \forall x \in R.$$

Справедливі також тотожності:

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\pi/2; \pi/2];$$
$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0; \pi];$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \forall x \in (-\pi/2; \pi/2);$$
$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \forall x \in (0; \pi).$$

Відзначимо, що ліві частини цих тотожностей існують і на інших проміжках, але на них виконуються інші рівності.

**Приклад 7.20.** Обчислити  
 $T = \cos(\arctg 2 + \arctg 2 + \arcsin 0,7)$ .  
 $T = \cos(\pi/2 + \arcsin 0,7) =$   
 $= -\sin(\arcsin 0,7) = -0,7$ .  
 Відповідь:  $-0,7$ .

**Приклад 7.21.** Обчислити  
 $A = \cos(\operatorname{arccctg} 2)$ .  
 Заміна:  $\operatorname{arccctg} 2 = \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ ;  
 $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$ .  $A = \cos \alpha =$   
 $= 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1/\sqrt{1 + 1/4} = 2/\sqrt{5}$ .  
 Відповідь:  $2\sqrt{5}/5$ .

**Приклад 7.22.** Обчислити  
 $B = \cos(2 \arcsin 0,2)$ .  
 Заміна:  $\arcsin 0,2 = \alpha$ ;  $\sin \alpha = 0,2$ .  
 $B = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha =$   
 $= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot 0,04$ .  
 Відповідь:  $0,92$ .

**Приклад 7.23.** Обчислити  
 $C = \cos(2 \operatorname{arctg}(-3))$ .  
 Заміна:  $\operatorname{arctg}(-3) = \alpha$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -3$ .  
 $C = \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 - (-3)^2}{1 + (-3)^2}$ .  
 Відповідь:  $-0,8$ .

**Приклад 7.24.** Обчислити  
 $\arcsin(\sin 6)$ .  
 $\arcsin(\sin 6) =$   
 $= \arcsin(\sin(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi$ ,  
 так як  $(6 - 2\pi) \in [-\pi/2; \pi/2]$ .  
 Відповідь:  $6 - 2\pi$ .

**7.35.** Обчислити  
 $\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} 0,1 + \arcsin 0,1 +$   
 $+ \operatorname{arctg} 7)$ .  
 (Відповідь:  $-7$ )

**7.36.** Обчислити  
 $\sin^2(\operatorname{arctg} 3)$ .  
 (Відповідь:  $0,1$ )

**7.37.** Обчислити  
 $\sin(\operatorname{arccos} 0,2)$ ;  
 $\operatorname{tg}(\arcsin 0,8)$ .  
 (Відповідь:  $2\sqrt{6}/5$ ;  $5/3$ )

**7.38.** Обчислити  
 $\sin^2(\operatorname{arctg}(-5))$ ;  
 $\cos(2 \operatorname{arccos} \sqrt{0,3})$ .  
 (Відповідь:  $1/26$ ;  $-0,4$ )

**7.39.** Обчислити  
 $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 3)$ ;  
 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$ .  
 (Відповідь:  $0,75$ ;  $-1,2$ )

**7.40.** Обчислити:  
 а)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-50^\circ))$ ;  
 б)  $\operatorname{arccos}(\cos 170^\circ)$ ;  
 в)  $\arcsin(\sin 370^\circ)$ ;  
 г)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 925^\circ)$ ;  
 д)  $\operatorname{arccos}(\cos 7)$ ;  
 е)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$ .  
 (Відповідь: а)  $-50^\circ$ ;  
 б)  $170^\circ$ ; в)  $10^\circ$ ; г)  $25^\circ$ ;  
 д)  $7 - 2\pi$ ; е)  $3 - \pi$ )

Перетворення  
виразів виду  
 $a \sin x + b \cos x$   
із залученням  
допоміжного кута

Нехай коефіцієнти  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \begin{cases} A \sin(x + \alpha), \\ A \cos(x - \beta), \end{cases} \\ a \sin x - b \cos x &= \begin{cases} A \sin(x - \alpha), \\ -A \cos(x + \beta), \end{cases} \end{aligned}$$

де  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  – допоміжні кути, що дорівнюють

$$\alpha = \arcsin \frac{b}{A} = \arccos \frac{a}{A} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b};$$

$$\beta = \arcsin \frac{a}{A} = \arccos \frac{b}{A} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Зазвичай в проміжних обчисленнях або у відповіді використовують не всі вирази допоміжного кута, а одне з наведених.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \sqrt{3}, \text{ то } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ то } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Якщо } a = b, \text{ то } \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

В інших випадках допоміжні кути зазвичай так і виражають через обернені тригонометричні функції.

**Приклад 7.25.** Обчислити:  
 $\gamma = \arcsin(\sin 220^\circ)$ ;  $\delta = \arccos(\cos 220^\circ)$ .

$$\begin{aligned} \gamma &= \arcsin(\sin(180^\circ + 40^\circ)) = \\ &= \arcsin(-\sin 40^\circ) = -\arcsin(\sin 40^\circ) = \\ &= -40^\circ; \quad \delta = \arccos(\cos(180^\circ + 40^\circ)) = \\ &= \arccos(-\cos 40^\circ) = 180^\circ - \\ &- \arccos(\cos 40^\circ) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\gamma = -40^\circ$ ;  $\delta = 140^\circ$ .

Зауваження. Можна прикинути, чому дорівнюють ці кути за допомогою тригонометричної діаграми (без вказаних обчислень) (див. рис. 7.6).

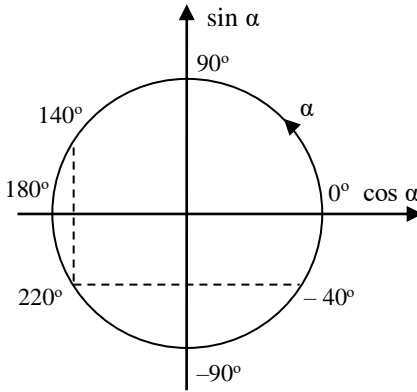


Рис. 7.6.

**Приклад 7.26.** Довести тотожність  
 $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin(x \pm \pi/4)$ .

$$A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) =$$

$$= \sqrt{2} (\sin x \cos(\pi/4) \pm \cos x \sin(\pi/4)) =$$

$$= \sqrt{2} \sin(x \pm \pi/4). \text{ Доведено.}$$

**7.41.** Обчислити:  
 $\arctg(\operatorname{tg} 560^\circ)$ ;  
 $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 560^\circ)$ .  
 (Відповідь:  $-20^\circ$ ;  $160^\circ$ )

**7.42.** Довести тотожності  
 $\sqrt{3} \sin x + \cos x =$   
 $= 2 \cos(x - \pi/3)$ ;  
 $3 \sin x - 2 \cos x =$   
 $= \sqrt{13} \sin(x - \operatorname{arctg} 1,5)$ ;  
 $3 \sin x - 4 \cos x =$   
 $= -5 \cos(x + \arcsin 0,6).$

**7.43.** Перетворити в добутки суми:

а)  $\cos \alpha + \sin \alpha + \cos 3\alpha + \sin 3\alpha$ ;

б)  $\sqrt{3}(\sin 3x - \cos x) + \cos 3x - \sin x$ .

(Відповідь:

а)  $2\sqrt{2} \sin(2\alpha + \pi/4) \cos \alpha$ ;

б)  $4 \sin(x - 30^\circ) \times \cos(2x + 45^\circ)$ )

**7.44.** Спростити вирази:  
 $\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$ ;  $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ .

(Відповідь:  $-\cos 2x$ ;  
 $\operatorname{tg}^2 x$ )

**7.45.** Спростити вираз  
 $\frac{\sin^2 3x - \sin 5x \sin x}{\cos^2 3x - \cos 5x \cos x}$ .  
 (Відповідь: 1)

## 8 ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

Поняття функції	Якщо кожному значенню змінної $x$ , що належить деякій множині, ставиться у відповідність за певним правилом одне значення змінної $y$ , то $y$ називають <i>функцією</i> від $x$ , а $x$ – <i>аргументом</i> функції $y$ . При цьому застосовують позначення: $y = f(x)$ , де під $f(x)$ розуміють правило знаходження значення змінної $y$ за значенням змінної $x$ . Це може бути формула або будь-який інший опис дій.
Область визначення функції	Множину значень, що може набувати аргумент $x$ , називають <i>областю визначення функції</i> і позначають $D(f)$ або $D(y)$ .
Область значень функції	Множину відповідних значень змінної $y$ називають <i>областю значень функції</i> і позначають $E(f)$ або $E(y)$ .
Нулі функції	Корені рівняння $f(x) = 0$ називають <i>нулями функції</i> $y = f(x)$ .
Проміжки знакосталості функції	Проміжки, на яких функція набуває тільки додатних значень або тільки від'ємних, називають <i>проміжками знакосталості функції</i> .
Обмеженість функцій	Функцію $y = f(x)$ називають <i>обмеженою знизу</i> , якщо існує таке число $a$ , при якому $f(x) > a$ для всіх $x \in D(f)$ , тобто $E(f) \subset (a; +\infty)$ . Функцію $y = f(x)$ називають <i>обмеженою зверху</i> , якщо існує таке число $b$ , при якому $f(x) < b$ для всіх $x \in D(f)$ , тобто $E(f) \subset (-\infty; b)$ . Функцію називають <i>обмеженою</i> , якщо вона обмежена знизу і зверху.

**Приклад 8.1.** Наведемо приклади різних способів опису функцій.

- а) Опис за допомогою формули:  
 $y = 4 - x^2$ ;  $y = \sqrt{x+1}$ ;  $y = 3\sin x$  і т.п.  
 б) Опис із залученням тексту:  
 $y = 1$ , якщо  $x$  – раціональне число;  
 $y = 0$ , якщо  $x$  – ірраціональне число.  
 Цю функцію називають функцією Діріхле.

**Приклад 8.2.** Знайти область  $D(y)$  визначення функцій: а)  $y = 4 - x^2$ ;

б)  $y = \frac{x+1}{x-1}$ ; в)  $y = \sqrt{x+1}$ .

а)  $x \in R$ , так як вираз  $4 - x^2$  не має обмежень на змінну  $x$ .

б)  $x - 1 \neq 0$ ;  $x \neq 1$ , оскільки знаменник дробу не може бути нулем.

в)  $x + 1 \geq 0$ ;  $x \geq -1$ , оскільки підкореневий вираз квадратного кореня може бути тільки невід'ємним.

Відповідь: а)  $D(y) = R$ ;

б)  $D(y) = R \setminus \{1\}$  або  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ ;

в)  $D(y) = [-1; +\infty)$ .

**Приклад 8.3.** Яку обмеженість мають функції: а)  $y = \sqrt{x}$ ;

б)  $y = 2 - 3^x$ ; в)  $y = \sin x$ ?

а) За визначенням квадратний корінь – невід'ємне число:  $\sqrt{x} \geq 0$ .

б) Для всіх  $x$   $3^x > 0$ ;  $-3^x < 0$ ;

$2 - 3^x < 2$ . в) Для всіх  $x$   $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

Відповідь: а) обмежена знизу;

б) обмежена зверху; в) обмежена.

**8.1.** Знайти  $D(y)$  функцій:

а)  $y = \frac{1-x}{x^2 - 5x + 6}$ ;

б)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ ;

в)  $y = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$ ;

г)  $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$ ;

д)  $y = \log_{x/2} 10$ ;

е)  $y = \arcsin(x - 2)$ .

(Відповідь: а)  $R \setminus \{2; 3\}$ ;

б)  $R$ ; в)  $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$ ;

г)  $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ ;

д)  $(0; 2) \cup (2; +\infty)$ ;

е)  $[1; 3]$ )

**8.2.** Знайти нулі і проміжки знакосталості функції  $y = x^2 - 7x + 6$ .

(Відповідь: нулі  $x \in \{1; 6\}$ ;

$y > 0$  на  $(-\infty; 1)$ ,  $(6; +\infty)$ ;

$y < 0$  на  $(1; 6)$ )

**8.3.** Яку обмеженість мають функції: 1)  $y = x^2$ ;

2)  $y = x^3$ ; 3)  $y = \sqrt[3]{x} + 1$ ;

4)  $y = \sqrt[4]{x} - 1$ ; 5)  $y = -|x|$ ;

6)  $y = \cos 2x$ ; 7)  $y = \operatorname{tg} x$ ;

8)  $y = \operatorname{arctg} x$ ? (Відповідь:

обмежена зверху – 5;

обмежені знизу – 1, 4;

обмежені – 6, 8;

не обмежені (ні зверху, ні

знизу) – 2, 3, 7)

Графік функції	<i>Графіком функції</i> $y = f(x)$ називають множину точок $(x; f(x))$ на координатній площині $Oxy$ .
Парні функції	Функцію $y = f(x)$ називають <i>парної</i> , якщо виконується умова: $f(-x) = f(x)$ для всіх $x \in D(f)$ . Графік парної функції симетричний відносно осі $Oy$ .
Непарні функції	Функцію $y = f(x)$ називають <i>непарної</i> , якщо виконується умова: $f(-x) = -f(x)$ для всіх $x \in D(f)$ . Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Якщо функція не є парною і непарною, то її часто називають <i>функцією загального виду</i> .
Проміжки монотонності функції	Проміжок називають <i>проміжком зростання (спадання) функції</i> $y = f(x)$ , якщо для будь-яких двох різних значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто при збільшенні аргументу на цьому проміжку значення функції зростає (спадає). Проміжки зростання і спадання функції називають <i>проміжками (строгої) монотонності функції</i> .
Локальні екстремуми функції	Число $x_0$ називають <i>точкою локального максимуму (мінімуму) функції</i> $y = f(x)$ , якщо існує такий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , де $\delta > 0$ , для всіх точок якого, крім точки $x_0$ , виконується умова $f(x) < f(x_0)$ ( $f(x) > f(x_0)$ ). При цьому число $f(x_0)$ називають <i>локальним максимумом (мінімумом) функції</i> . Локальні максимуми і мінімуми функції називають її <i>локальними екстремумами</i> .

**Приклад 8.4.** Встановити, чи є функція  $y = 4 - x^2$  парною, непарною або загального виду. Побудувати її графік. Вказати обмеженість,  $E(y)$ , проміжки монотонності, екстремуми.

$D(y) : x \in R$ .  $y(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 = y(x)$  для всіх  $x \in R$ . Отже, дана функція парна. Оскільки графік парної функції симетричний відносно осі  $Oy$ , його можна спочатку побудувати при  $x \geq 0$ , а потім відобразити вліво симетрично цієї осі. Для побудови графіка (рис. 8.1) складемо таблицю достатнього обсягу:

$x$	0	1	2	3
$y$	4	3	0	-5

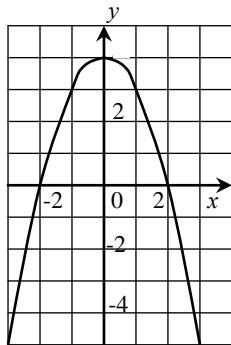


Рис. 8.1.

Функція обмежена зверху, причому  $E(y) = (-\infty; 4]$ . На проміжку  $(-\infty; 0]$  функція зростає, на  $[0; +\infty)$  спадає.  $x = 0$  – точка максимуму (локального і абсолютного на  $D(y)$ ),  $y_{\max} = 4$ . Мінімумів немає.

**8.4.** Функція  $f(x)$  – парна, а  $g(x)$  – непарна. Відомо, що  $f(-3) = 2$ ;  $g(-5) = 3$ . Знайти  $10 \cdot f(3) + 7 \cdot g(5)$ . (Відповідь:  $-1$ )

**8.5.** Які з даних функцій є парними, непарними, загального виду: 1)  $5 - |x|$ ; 2)  $x^4 - 5$ ; 3)  $x^4 - x$ ; 4)  $5 + x^3$ ; 5)  $5^x + 5^{-x}$ ; 6)  $4^x - 4^{-x}$ ; 7)  $\sin(3x)$ ; 8)  $\sin(x - 3)$ ; 9)  $x^3 \cos x$ ? (Відповідь: парні – 1, 2, 5; непарні – 6, 7, 9; загального виду – 3, 4, 8)

**8.6.** Довести, що функція  $y = x^3 - 3x$  непарна. Побудувати її графік при  $x \geq 0$  і відобразити його симетрично відносно початку координат. Вкажіть  $D(y)$ ,  $E(y)$ , проміжки монотонності, локальні екстремуми. (Відповідь:  $D(y) = R$ ,  $E(y) = R$ ; зростає на  $(-\infty; -1]$ ,  $[1; +\infty)$ ; спадає на  $[-1; 1]$ ;  $x = -1$  – точка локального максимуму,  $y(-1) = 2$ ;  $x = 1$  – точка локального мінімуму,  $y(1) = -2$ )

Складні функції	<p><i>Складною</i> (або <i>складеною</i>) називають функцію, яку можна отримати за допомогою взяття функції від функції.</p> <p>При цьому отриману функцію <math>y = f(g(x))</math> називають <i>композицією</i> або <i>суперпозицією</i> функцій <math>f</math> та <math>g</math>.</p>
Періодичні функції	<p>Функцію <math>y = f(x)</math> називають <i>періодичною</i>, якщо існує таке число <math>T \neq 0</math>, при якому виконується умова: <math>f(x + T) = f(x)</math> для всіх <math>x \in D(f)</math>. При цьому число <math>T</math> називають <i>періодом функції</i>. Періодична функція має нескінченно багато періодів. Якщо число <math>T</math> – період функції, то числа <math>\pm nT</math>, де <math>n \in N</math>, також є її періодами.</p>
Основний період	<p>Найменший додатний період називають <i>основним</i> (або <i>головним</i>) <i>періодом</i>.</p> <p>Зауважимо, що не всі періодичні функції мають найменший додатний період.</p>
Елементарні функції	<p>До <i>основних елементарних функцій</i> відносять функції виду:</p> <p><math>y = x^\alpha</math> (степенева);</p> <p><math>y = a^x</math> (показникова);</p> <p><math>y = \log_a x</math> (логарифмічна);</p> <p><math>y = \sin x</math>, <math>y = \cos x</math>, <math>y = \operatorname{tg} x</math>, <math>y = \operatorname{ctg} x</math> (тригонометричні);</p> <p><math>y = \arcsin x</math>, <math>y = \arccos x</math>, <math>y = \operatorname{arctg} x</math>,  <math>y = \operatorname{arcctg} x</math> (обернені тригонометричні).</p> <p><i>Елементарними функціями</i> називають функції, які можна скласти з вказаних вище функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних дій над числами і цими функціями, а також скінченного числа операцій взяття функції від функції.</p>

**Приклад 8.5.** Складними функціями є  $y = \sin^3 x$ ,  $y = \sin x^3$ ,  $y = \cos(\lg x)$ ,  $y = \cos(\lg(\operatorname{arccctg} x))$  і т.п.

**Приклад 8.6.** До періодичних функцій відносять тригонометричні функції  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  і  $\operatorname{ctg} x$ . У функцій  $\sin x$  і  $\cos x$  основний період –  $2\pi$ , у функцій  $\operatorname{tg} x$  і  $\operatorname{ctg} x$  –  $\pi$ .

Існують і нетригонометричні періодичні функції, наприклад,  $y = \{x\}$ , де  $\{x\}$  означає дробову частину числа  $x$ ,  $y = c$ , де  $c$  – константа, і функція Діріхле. Основним періодом функції  $y = \{x\}$  є 1. Періодом функції  $y = c$  є будь-яке число, крім нуля, а основного періоду немає. Періодом функції Діріхле є будь-яке раціональне число, а основного періоду також немає.

**Приклад 8.7.** За допомогою періодичних функцій описують незгасаючі коливання. Найпоширенішими є гармонійні коливання. Вони описуються формулою

$$y = A \cos(\omega t + \varphi),$$

де  $A$  – амплітуда,  $\omega$  – кругова частота,  $\varphi$  – початкова фаза коливань. Основний період цієї функції дорівнює  $T = 2\pi/\omega$ .

**Приклад 8.8.** Елементарними функціями є  $y = 5x^2 + 7 \sin x$ ,  $y = \cos x \cdot \lg x$ ,  $y = \cos(\lg(3x + 2))$  і т.п. Не відноситься до елементарних функцій, наприклад, функція Діріхле.

**8.7.** Знайти вираз функції  $y = f(g(x))$ , якщо

$$f(x) = \sqrt{x-1},$$

$$g(x) = 4x^2 + 1.$$

(Відповідь:  $y = 2|x|$ )

**8.8.** Побудувати графік функції  $y = 1 + 2 \sin(3x)$ , вимірюючи аргумент  $x$  в градусах. Для цього за допомогою калькулятора скласти таблицю значень функції достатнього обсягу, змінюючи аргумент  $x$  з кроком  $10^\circ$ .

Вкажіть  $E(y)$ , основний період, нулі функції, проміжки монотонності, точки екстремумів. (Відповідь:  $E(y) = [-1; 3]$ ; основний період –  $120^\circ$ ; нулі функції  $x = \dots - 130^\circ, -10^\circ, 70^\circ, 110^\circ, \dots$ ;

зростає на проміжках  $[-30^\circ + 120^\circ n; 30^\circ + 120^\circ n]$ , спадає на проміжках  $[30^\circ + 120^\circ n; 90^\circ + 120^\circ n]$ , точки максимумів –  $x = 30^\circ + 120^\circ n$ , мінімумів –  $x = -30^\circ + 120^\circ n$ , де  $n \in Z$ )

**8.9.** Чи є періодичними функції: а)  $y = \cos(\lg x)$ ; б)  $y = \lg(\cos x)$ ? (Відповідь: а) ні; б) так).

## Лінійна функція

Ця функція описується формулою

$$y = kx + b.$$

$D(y) = R$ . Її графіком є пряма лінія (рис. 8.2). Число  $k$  називають *кутовим коефіцієнтом* прямої, причому  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , де  $\alpha$  – *кут нахилу* прямої до осі абсцис, який зазвичай відлічують від додатного напрямку цієї осі проти годинникової стрілки. Сенс числа  $b$  див. на рис. 8.2.

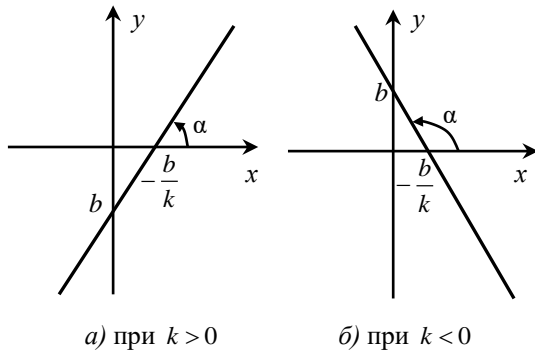


Рис. 8.2.

Якщо  $k \neq 0$ , то  $E(y) = R$ ,  
функція не обмежена, не періодична,  
локальних екстремумів немає,  
нуль функції –  $x_0 = -b/k$ .

Для  $k > 0$  функція зростає на всій  $D(y)$ ,  
 $y < 0$  на проміжку  $(-\infty; x_0)$ ,  
 $y > 0$  на проміжку  $(x_0; +\infty)$  (рис. 8.2, а).

Для  $k < 0$  спадає на всій  $D(y)$ ,  
 $y > 0$  на проміжку  $(-\infty; x_0)$ ,  
 $y < 0$  на проміжку  $(x_0; +\infty)$  (рис. 8.2, б).

**Приклад 8.9.** Які властивості має функція виду  $y = kx + b$  при  $k = 0$  ?

При  $k = 0$  маємо  $y = b$  – сталу, яка є парною періодичною функцією з  $E(y) = \{b\}$ . Графік цієї функції – пряма, що паралельна осі  $Ox$ .

**Приклад 8.10.** Побудувати графік функції  $y = 0,5x + 3$  і описати її властивості.

Пряму лінію будують зазвичай по двох точках. Якщо задана лінійна функція загального виду, то воліють знаходити координати точок перетину графіка з осями координат. Координати цих точок відобразимо в таблиці:

$x$	$0$	$-6$
$y$	$3$	$0$

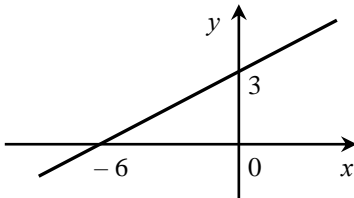


Рис. 8.3.

Відповідь:  $D(y) = R$ ,  $E(y) = R$ ;  
 функція не обмежена, не періодична, загального виду,  
 зростає на всій  $D(y)$ ;  
 локальних екстремумів немає;  
 нуль функції –  $x = -6$ ;  
 $y < 0$  на проміжку  $(-\infty; -6)$ ,  
 $y > 0$  на проміжку  $(-6; +\infty)$  (рис.8.3).

**8.10.** Коли функція  $y = kx + b$  є: а) непарною,

б) загального виду? (Відповідь: а) при  $b = 0$ ;  
 б) при  $k \neq 0$  і  $b \neq 0$ )

**8.11.** Коли графік функції  $y = kx + b$  проходить через початок координат? (Відповідь: при  $b = 0$ )

**8.12.** Побудувати графіки функцій: а)  $y = -2x + 3$ ;  
 б)  $y = 3x$ . Описати їх властивості.

**8.13.** Коли кут нахилу прямої  $y = kx + b$  до осі  $Ox$ : а) дорівнює нулю,  
 б) гострий, в) тупий? (Відповідь: а) при  $k = 0$ ,  
 б) при  $k > 0$ , в) при  $k < 0$ )

**8.14.** Чому рівні кути нахилу до осі  $Ox$  прямих:  
 1)  $y = x - 2$ ; 2)  $y = 2x - 1$ ;

3)  $y = \sqrt{3}x/3 + 4$ ;

4)  $y = \sqrt{3}x + 5$ ;

5)  $y = -x + \sqrt{3}$ ;

6)  $y = -\sqrt{3}x + 1$ ;

7)  $y = -\sqrt{3}x/3 + 6$  ?

(Відповідь:

1)  $45^\circ$ ; 2)  $\arctg 2$ ; 3)  $30^\circ$ ;

4)  $60^\circ$ ; 5)  $135^\circ$ ; 6)  $120^\circ$ ;

7)  $150^\circ$ )

Квадратична  
функція

Ця функція описується формулою

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ де } a \neq 0.$$

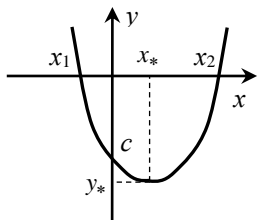
$D(y) = R$ . Її графік називають *параболою*.

Ескізи парабол наведені на рис. 8.4.

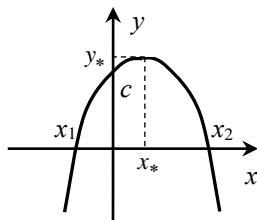
Парабола має вершину в точці з координатами

$$x_* = -b/(2a), \quad y_* = y(x_*) = -D/(4a),$$

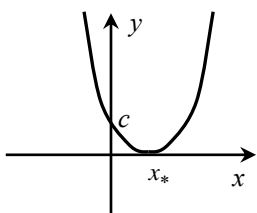
де  $D = b^2 - 4ac$  – дискримінант.



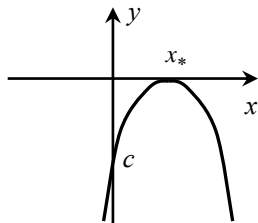
а) при  $a > 0, D > 0$



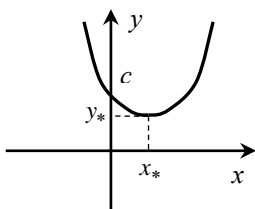
б) при  $a < 0, D > 0$



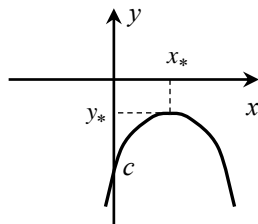
в) при  $a > 0, D = 0$



г) при  $a < 0, D = 0$



д) при  $a > 0, D < 0$



е) при  $a < 0, D < 0$

Рис. 8.4.

**Приклад 8.11.** Що відбувається з функцією виду  $y = ax^2 + bx + c$  при  $a = 0$  ?

Кажуть, що квадратична функція вироджується (перетворюється) в лінійну.

**Приклад 8.12.** Побудувати графік функції  $y = x^2 + 2x - 3$  і описати її властивості.

При побудові графіка зазвичай дотримуються правила: точніше вказують важливі точки (екстремумів, перетину з осями та деякі інші), а ділянку графіка між ними проводять схематично, дотримуючись характерних властивостей.

Координати вершини:

$$x_* = -2/(2 \cdot 1) = -1;$$

$$y_* = y(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4.$$

Координата перетину графіка з віссю

$$Oy: y(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3.$$

Координати перетину графіка з віссю  $Ox$  (нули функції) знаходимо з рівняння:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;  $x_1 = -3$ ;  $x_2 = 1$  (рис.8.5).

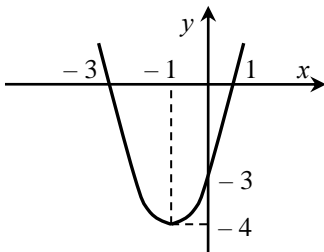


Рис. 8.5.

**8.15.** Коли функція  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a \neq 0$ , є: а) парною, б) загального виду? (Відповідь: а) при  $b = 0$ ; б) при  $b \neq 0$ )

**8.16.** Яку симетрію має графік функції  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a \neq 0$  та коли ця функція обмежена: а) зверху, б) знизу? (Відповідь: графік заданої функції є симетричним відносно вертикальної прямої  $x = x_*$ ; а) при  $a < 0$ ; б) при  $a > 0$ )

**8.17.** Знайти відстань від початку координат до вершини параболу  $y = 4x^2 + 12x + 11$ . (Відповідь: 2,5)

**8.18.** Побудувати графіки функцій: 1)  $y = x^2 - 4x$ ;

2)  $y = -x^2 - 4x - 3$ ;

3)  $y = x^2 + 6x + 9$ ;

4)  $y = -x^2 + 6x - 9$ ;

5)  $y = x^2 + 2x + 5$ ;

6)  $y = -x^2 + 2x - 5$ .

Описати властивості графіків даних функцій.

Квадратична функція не періодична.

При  $D > 0$  функція має два нулі  $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}$ , тобто парабола перетинає вісь  $Ox$  в двох точках  $x_1$  та  $x_2$  (рис. 8.4, а, б).

При  $D = 0$  функція має один нуль  $x_* = -b/(2a)$ , тобто парабола торкається своєю вершиною осі  $Ox$  (рис. 8.4, в, г).

При  $D < 0$  функція не має нулів, тобто її графік не перетинає і не торкається осі  $Ox$  (рис. 8.4, д, е).

При  $a > 0$  в вершині мінімум,  $E(y) = [y_*; +\infty)$ , функція обмежена знизу, на проміжку  $(-\infty; x_*]$  спадає, на  $[x_*; +\infty)$  зростає (рис. 8.4, а, в, д).

При  $a > 0$  і  $D > 0$  на проміжках  $(-\infty; x_1)$  і  $(x_2; +\infty)$   $y > 0$ , на  $(x_1; x_2)$   $y < 0$  (рис. 8.4, а).

При  $a > 0$  і  $D = 0$  на проміжках  $(-\infty; x_*)$  і  $(x_*; +\infty)$   $y > 0$ , проміжків, де  $y < 0$ , немає (рис. 8.4, в).

При  $a > 0$  і  $D < 0$  на всій області визначення  $y > 0$  (рис. 8.4, д).

При  $a < 0$  в вершині максимум,  $E(y) = (-\infty; y_*]$ , функція обмежена зверху, на проміжку  $(-\infty; x_*]$  зростає, на  $[x_*; +\infty)$  спадає (рис. 8.4, б, г, е).

При  $a < 0$  і  $D > 0$  на проміжках  $(-\infty; x_1)$  і  $(x_2; +\infty)$   $y < 0$ , на  $(x_1; x_2)$   $y > 0$  (рис. 8.4, б).

При  $a < 0$  і  $D = 0$  на проміжках  $(-\infty; x_*)$  і  $(x_*; +\infty)$   $y < 0$  (рис. 8.4, г).

При  $a < 0$  і  $D < 0$  на всій області визначення  $y < 0$  (рис. 8.4, е).

$$D(y) = R, E(y) = [-4; +\infty).$$

Функція обмежена знизу, не періодична, загального виду.

На проміжку  $(-\infty; -1]$  спадає, на  $[-1; +\infty)$  зростає.

$$x = -1 - \text{точка мінімуму}, y_{\min} = -4.$$

Нулі функції:  $x_1 = -3; x_2 = 1$ .

$y > 0$  на проміжках  $(-\infty; -3)$  і  $(1; +\infty)$ ,

$y < 0$  на проміжку  $(-3; 1)$ .

**Приклад 8.13.** Відомо що, коли тіло кинути під кутом  $45^\circ$  до горизонту з початковою швидкістю  $v$ , то воно буде рухатися по параболі, яка описується формулою

$$y = x - \frac{g}{v^2} x^2,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння. Побудувати ескіз графіка траєкторії. Обчислити максимальну висоту  $h$  і дальність  $l$  польоту.

Оскільки коефіцієнт при  $x^2$  від'ємний, то в вершині максимум.

Нулі функції дорівнюють  $x_1 = 0$  і  $x_2 = g/v^2$ .

Цього достатньо для побудови ескізу графіка (рис. 8.7).

Дальність польоту  $l = x_2$ .

Координати вершини:  $x_* = g/(2v^2)$ ;

$$y_* = \frac{g}{2v^2} - \frac{g}{v^2} \left( \frac{g}{2v^2} \right)^2. \quad \text{Відповідь:}$$

$$h = \frac{g}{2v^2} \left( 1 - \frac{g^2}{2v^4} \right); l = \frac{g}{v^2}.$$

**8.19.** При яких значеннях коефіцієнта  $b$  і вільного члена  $c$  вершина параболи

$$y = 2x^2 + bx + c$$

знаходиться в точці  $(1; 3)$ ?

(Відповідь:  $b = -4; c = 5$ )

**8.20.** Коли графік функції

$$y = ax^2 + bx + c,$$

де  $a \neq 0$ , проходить через початок координат?

(Відповідь: при  $c = 0$ )

**8.21.** За яких умов значення функції

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ де } a \neq 0,$$

на всій області визначення:

- а) не додатні,
- б) не від'ємні?

(Відповідь:

- а) при  $a < 0$  і  $D \leq 0$ ,
- б) при  $a > 0$  і  $D \leq 0$ )

**8.22.** Вертикальна стіна висотою  $h = 19,6$  м стоїть

на рівній горизонтальній поверхні. З її верху

в горизонтальному напрямку кидають тіло з

початковою швидкістю  $v = 10$  м/с.

Обчислити на яку відстань від стіни пролетить тіло.

Відомо, що тіло рухається по параболічній траєкторії, яка описується формулою:

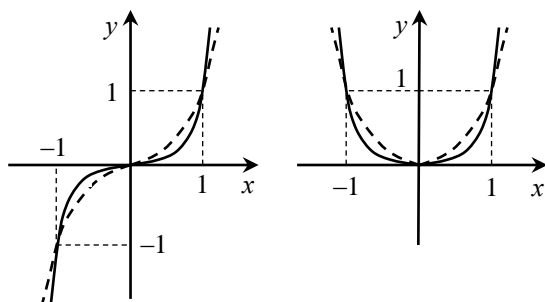
Функції  $y = x^n$ , де  $n \in \mathbb{N}$

Це основні степеневі функції з натуральним показником. Вище були розглянуті лінійні і квадратичні функції, в тому числі,  $y = x$ ,  $y = x^2$ . Тепер розглянемо функції  $y = x^n$  більшого порядку.

Ескізи їх графіків наведені на рис. 8.6.

Властивості цих функцій різні в залежності від парності або непарності показника  $n$ .

На рис. 8.6 графіки, що проведені пунктирно, відповідають меншим показникам.



а) при непарному  $n$

б) при парному  $n$

Рис. 8.6.

При всіх  $n \in \mathbb{N}$   $D(y) = \mathbb{R}$ ,

функція не періодична, нуль функції –  $x = 0$ ,

на проміжку  $(0; +\infty)$   $y > 0$ ,

графік завжди проходить через точку  $(1; 1)$ .

При непарному показнику  $n$  (див. рис. 8.6, а) функція непарна,

не обмежена, причому  $E(y) = \mathbb{R}$ ,

зростає на всій  $D(y)$ , екстремумів немає,

на проміжку  $(-\infty; 0)$   $y < 0$ ,

графік завжди проходить через точку  $(-1; -1)$ .

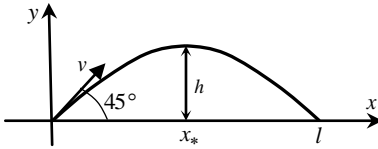


Рис. 8.7.

**Приклад 8.14.** Побудувати графік функції  $y = x^3$  і описати її властивості.

Функція непарна, оскільки  $y(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -y(x)$  для всіх  $x$ . Тому при побудові графіка (рис. 8.8) скористаємося тим, що він симетричний відносно початку координат.

$x$	0	0,5	1	1,5
$y$	0	0,125	1	3,375

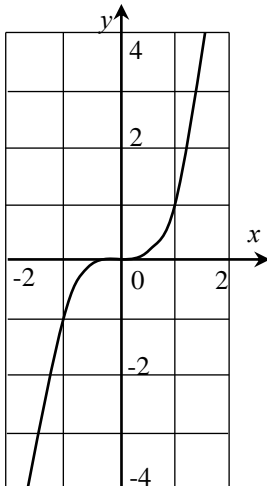


Рис. 8.8.

$$y = h - \frac{g}{2v^2} x^2,$$

де  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$  – прискорення вільного падіння. (Підказка: треба знайти один з нулів функції. Відповідь:  $\approx 20 \text{ м}$ )

**8.23.** Побудувати графік функції  $y = x^4$  і описати її властивості.

**8.24.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = x^2$ ,  $y = x^4$ ? (Відповідь:  $(-1; 1)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ )

**8.25.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = x^3$ ,  $y = x^4$ ? (Відповідь:  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ )

**8.26.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = x^3$ ,  $y = x^5$ ? (Відповідь:  $(-1; -1)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ )

**8.27.** Що потрібно зробити з графіком функції  $y = x^n$ , щоб отримати графік  $y = x^n + 2$ ? (Відповідь: змістити кожну його точку на 2 одиниці вгору)

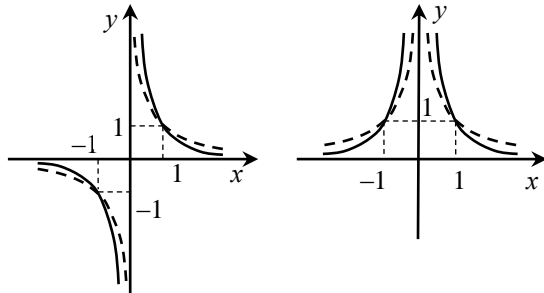
При парному показнику  $n$  (див. рис. 8.6, б) функція парна, обмежена знизу, причому  $E(y) = [0; +\infty)$ , спадає на проміжку  $(-\infty; 0]$ , зростає на проміжку  $[0; +\infty)$ ,  $x = 0$  – точка мінімуму,  $y_{\min} = 0$ , на проміжку  $(-\infty; 0)$   $y > 0$ , графік завжди проходить через точку  $(-1; 1)$ .

Асимптоти

*Асимптотою* графіка функції, що має нескінченну вітку, називають таку пряму, відстань від якої до точки графіка прагне до нуля при русі точки графіка вздовж вітки до нескінченності.

Функції  $y = x^{-n}$ , де  $n \in \mathbb{N}$

Це *основні степеневі функції з цілим від'ємним показником*. Ескізи їх графіків зображені на рис. 8.9. Властивості цих функцій різні в залежності від парності або непарності  $n$ . На рис. 8.9 графіки, що проведені пунктирно, відповідають меншому  $n$ .



а) при непарному  $n$

б) при парному  $n$

Рис. 8.9.

$D(y) = R$ . Функція непарна, не обмежена, причому  $E(y) = R$ , зростає на всій  $D(y)$ , екстремумів немає,  $x = 0$  - нуль функції, на проміжку  $(-\infty; 0)$   $y > 0$ , на  $(0; +\infty)$   $y < 0$ .

**Приклад 8.15.** Доведіть, що вісь абсцис є асимптотою графіка затухаючих коливань виду  $y = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$ , де  $\alpha > 0$ .

Помічаємо, якщо  $\alpha > 0$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  вираз  $A e^{-\alpha t} = A/e^{\alpha t} \rightarrow 0$ . Оскільки  $\cos(\omega t + \varphi)$  - обмежена функція, то

$$y = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .

Це означає, що відстань між точкою графіка і віссю абсцис, яка описується рівнянням  $y = 0$ , прямує до нуля при  $t \rightarrow +\infty$ , тобто пряма  $y = 0$  є асимптотою даної кривої.

Зауваження. Графік функції може перетинати асимптоту, причому неодноразово, що показує цей приклад.

**Приклад 8.16.** *Обернена пропорційність* описується функцією  $y = k/x$ , де  $k \neq 0$ , зокрема  $y = 1/x$ .

Очевидно, заміною  $x$  на  $(-x)$  можна упевнитись у тому, що функція  $y = k/x$  є непарною, її графік є центально симетричним.

Графік цієї функції називають *гіперболою*.

**8.28.** При яких натуральних  $n$  функції  $y = |x|^n \Leftrightarrow y = x^n$ ?  
(Відповідь: при парних)

**8.29.** Чим відрізняється графік  $y = |x|^n$  від графіка  $y = x^n$  при непарному  $n$ ?  
(Відповідь: на проміжку  $(-\infty; 0)$  вітка першого графіка симетрична вітці другого відносно осі  $Ox$ . Графік має U-образну форму)

**8.30.** Доведіть, що пряма  $y = 1$  є асимптотою графіка функції  $y = 3^{-x} + 1$ .

**8.31.** Чи є пряма  $y = 2$  асимптотою графіка функції  $y = 2 - 3/x$ ?  
(Відповідь: так)

**8.32.** Чи є пряма  $x = 2$  асимптотою графіка функції  $y = 3/(x - 2)$ ?  
(Відповідь: так).

**8.33.** Яка функція описує *пряму пропорційність* з коефіцієнтом пропорційності  $k$ ?  
(Відповідь: лінійна функція  $y = kx$ , де  $k \neq 0$ ).

При всіх  $n \in \mathbb{N}$   $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  
 функція не періодична,  
 екстремумів і нулів функція не має,  
 осі координат – асимптоти графіка,  
 графік має дві окремі вітки,  
 на проміжку  $(0; +\infty)$  функція спадає і  $y > 0$ ,  
 графік завжди проходить через точку  $(1; 1)$ .

При непарному  $n$  (див. рис. 8.9, а)  
 функція непарна,  
 не обмежена, причому  $E(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  
 на проміжку  $(-\infty; 0)$  функція спадає і  $y < 0$ ,  
 графік завжди проходить через точку  $(-1; -1)$ .

При парному  $n$  (див. рис. 8.9, б)  
 функція парна,  
 обмежена знизу, причому  $E(y) = (0; +\infty)$ ,  
 на проміжку  $(-\infty; 0)$  функція зростає і  $y > 0$ ,  
 графік завжди проходить через точку  $(-1; 1)$ .

Функції  $y = \sqrt[n]{x}$ , де  
 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Це основні ірраціональні функції.  
 Ірраціональними функціями називають  
 функції, формули яких містять символи  
 вилучення коренів (радикали). Ірраціональні  
 функції формально відносять до степеневих  
 функцій.

Ескізи графіків основних ірраціональних  
 функцій наведені на рис. 8.11.  
 Властивості цих функцій різні в залежності від  
 парності або непарності степеня  $n$  кореня.  
 На рис. 8.11 графіки, що проведені пунктирно,  
 відповідають меншому  $n$ .

При всіх  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  функції не періодичні,  
 зростають на всій  $D(y)$ , нуль функції –  $x = 0$ ,  
 на проміжку  $(0; +\infty)$   $y > 0$ ,  
 графік завжди проходить через точку  $(1; 1)$ .

**Приклад 8.17.** Побудувати графік функції  $y = 1/x$  і описати її властивості.

Функція непарна.

$x$	1/4	1/2	1	2	4
$y$	4	2	1	1/2	1/4

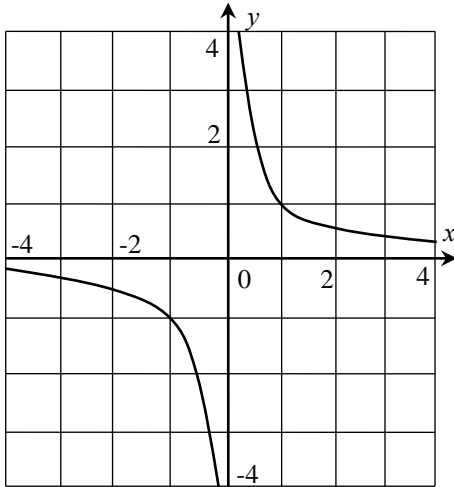


Рис. 8.10.

$D(y) = R \setminus \{0\}$ ,  $E(y) = R \setminus \{0\}$ . Функція не періодична, непарна, не обмежена, на проміжках  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$  спадає. Екстремумів і нулів не має. На проміжку  $(-\infty; 0)$   $y < 0$ , на  $(0; +\infty)$   $y > 0$ . Осі координат – асимптоти.

**Приклад 8.18.** Побудуйте графіки функцій  $y = \sqrt{x}$  і описати її властивості.

$D(y) = [0; +\infty)$ . Для побудови графіка (рис. 8.12) складемо таблицю,

**8.34.** Побудувати графік функції  $y = 1/x^2$  і описати її властивості.

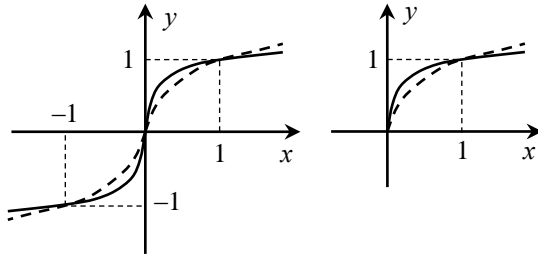
**8.35.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = \frac{1}{x^4}$ ?  
(Відповідь:  $(-1; 1)$ ,  $(1; 1)$ )

**8.36.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = \frac{1}{x^3}$ ,  $y = \frac{1}{x^4}$ ?  
(Відповідь: тільки в точці  $(1; 1)$ )

**8.37.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = \frac{1}{x^3}$ ,  $y = \frac{1}{x^5}$ ?  
(Відповідь:  $(-1; -1)$ ,  $(1; 1)$ )

**8.38.** Що потрібно зробити з графіком функції  $y = x^{-n}$ , щоб отримати графік  $y = x^{-n} - 3$ ?  
(Відповідь: змістити кожен його точку на 3 одиниці вниз)

**8.39.** Побудуйте графіки функцій  $y = \sqrt[3]{x}$  і описати її властивості.



а) при непарному  $n$

б) при парному  $n$

Рис. 8.11.

При непарному  $n$  (крім  $n = 1$ )  $D(y) = R$ , функція непарна, не обмежена, причому  $E(y) = R$ , екстремумів немає, на проміжку  $(-\infty; 0)$   $y < 0$ , графік завжди проходить через точку  $(-1; -1)$ .

При парному  $n$   $D(y) = [0; +\infty)$ , функція загального виду, обмежена знизу, причому  $E(y) = [0; +\infty)$ ,  $x = 0$  – точка найменшого значення функції на всій області  $D(y)$ ,  $y_{\min} = 0$ .

Функція  $y = a^x$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

Це основна показникова функція.

Ескізи її графіків наведені на рис. 8.13.

При всіх  $a > 0$ ,  $a \neq 1$   $D(y) = R$ , функція не періодична, загального виду, обмежена знизу, причому  $E(y) = (0; +\infty)$ , екстремумів і нулів функція не має,  $y > 0$  на всій  $D(y)$ ,

графік завжди проходить через точку  $y = 1$  на осі ординат, ось  $Ox$  – асимптота графіка.

задаючи такі значення аргументу, при яких корені дорівнюють раціональним числам.

$x$	0	0,25	1	4
$y$	0	0,5	1	2

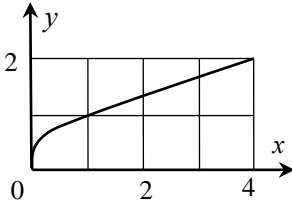


Рис. 8.12.

$$D(y) = [0; +\infty), E(y) = [0; +\infty).$$

Функція не періодична,  
загального виду,  
обмежена знизу,  
зростає на всій  $D(y)$ ,

$x = 0$  – нуль функції, а також точка  
найменшого значення функції на всій  
 $D(y)$ ,  $y_{\min} = 0$ ,  
на проміжку  $(0; +\infty)$   $y > 0$ .

**Приклад 8.19.** Що відбувається з  
функцією виду  $y = a^x$  при  $a = 1$ ?

Показникова функція  
вироджується в сталу функцію  $y = 1$ ,  
яка має якісно інші властивості.

**Приклад 8.20.** Побудувати графік  
функції  $y = 2^x$  і описати її властивості.

$D(y) = R$ . Для побудови графіка  
(рис. 8.15) складемо таблицю:

**8.40.** Як розташовується  
графік функції  $y = \sqrt[3]{x}$   
щодо графіка функції

$$y = \sqrt{x} ?$$

(Відповідь: Графіки  
перетинаються в точках  
 $(-1; -1)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ .  
Перший графік  
розташовується нижче  
другого на проміжках  
 $(-\infty; -1)$  і  $(0; 1)$ , вище –  
на проміжках  $(-1; 0)$  і  
 $(1; +\infty)$ .)

**8.41.** Чим відрізняється  
графік  $y = \sqrt[n]{|x|}$  від графіка  
 $y = \sqrt[n]{x}$  при непарному  $n$   
(крім  $n = 1$ )?

(Відповідь:  
на проміжку  $(-\infty; 0)$  вітка  
першого графіка  
симетрична вітці другого  
відносно осі  $Ox$ . Графік  
має V-образну форму.)

**8.42.** Побудувати графік  
функції  $y = (1/3)^x$  і  
описати її властивості.

**8.43.** У яких точках  
перетинаються графіки  
функцій

$$y = 4^x, y = (1/3)^x ?$$

(Відповідь: тільки в точці  
 $(0; 1)$ .)

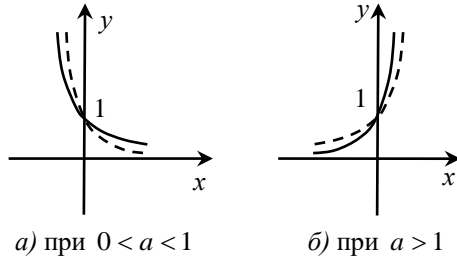


Рис. 8.13.

На рис. 8.13 графіки, що проведені пунктирно, відповідають меншому значенню  $a$ .

На всій  $D(y)$  функція спадає при  $0 < a < 1$  (рис. 8.13, а) і зростає при  $a > 1$  (рис. 8.13, б).

Функція  $y = \log_a x$ ,  
де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$

Це *основна логарифмічна функція*.

Обмеження  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  пов'язані з тим, що за визначенням логарифм існує при цих значеннях основи.

Ескізи графіків функції зображені на рис. 8.14.

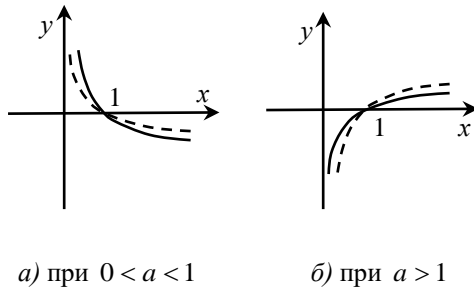


Рис. 8.14.

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	0,25	0,5	1	2	4

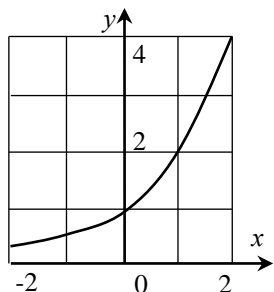


Рис. 8.15.

$D(y) = R$ ,  $E(y) = (0; +\infty)$ . Функція не періодична, загального виду, обмежена знизу, зростає на всій  $D(y)$ . Екстремумів і нулів функція не має,  $y > 0$  на всій  $D(y)$ . Ось  $Ox$  – асимптота.

**Приклад 8.21.** Побудувати графік функції  $y = \log_{1/2} x$  і описати її властивості.

$D(y) = (0; +\infty)$ . Для побудови графіка (рис. 8.17) цієї функції найзручніше таблиця, в якій аргумент задають рівним степеням з основою  $1/2$  і цілими показниками. При цьому використовують формулу  $\log_a a^k = k$ .

$x$	$(1/2)^2 = 1/4$	$(1/2)^1 = 1/2$	$(1/2)^0 = 1$
$y$	2	1	0
$x$	$(1/2)^{-1} = 2$	$(1/2)^{-2} = 4$	$(1/2)^{-3} = 8$
$y$	-1	-2	-3

**8.44.** Як розташовується графік функції  $y = (1/3)^x$  щодо графіка функції  $y = (1/5)^x$ ?

(Відповідь: Графіки перетинаються в точці  $x = 0$ . Перший графік розташовується нижче другого на проміжку  $(-\infty; 0)$ , вище – на проміжку  $(0; +\infty)$ .)

**8.45.** Чим відрізняється графік  $y = a^{|x|}$  від графіка  $y = a^x$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ?

(Відповідь: На проміжку  $[0; +\infty)$  їх графіки збігаються. На відміну від другої функції, перша функція парна. Тому її графік на проміжку  $(-\infty; 0)$  симетричний графіку на проміжку  $(0; +\infty)$  відносно осі  $Oy$ .)

**8.46.** Побудувати графік функції  $y = \log_3 x$  і описати її властивості.

**8.47.** У яких точках перетинаються графіки функцій  $y = \log_{0,5} x$  і  $y = \log_5 x$ ?

(Відповідь: тільки в точці  $(1; 0)$ .)

На рис. 8.14 графіки, що проведені пунктирно, відповідають меншому значенню  $a$ .

При всіх  $a > 0$ ,  $a \neq 1$   $D(y) = (0; +\infty)$ ,  
функція загального виду,  
не обмежена, причому  $E(y) = R$ ,  
екстремумів немає,  
 $x = 1$  – нуль функції,  
ось  $Oy$  – асимптота графіка.

При  $0 < a < 1$  функція спадає на всій  $D(y)$ ,  
 $y > 0$  на проміжку  $(0; 1)$ ,  
 $y < 0$  на проміжку  $(1; +\infty)$ .

При  $a > 1$  функція зростає на всій  $D(y)$ ,  
 $y < 0$  на проміжку  $(0; 1)$ ,  
 $y > 0$  на проміжку  $(1; +\infty)$ .

Функція  $y = \sin x$

Це одна з основних тригонометричних функцій.

Графік цієї функції наведено на рис. 8.16 (синусоїда).

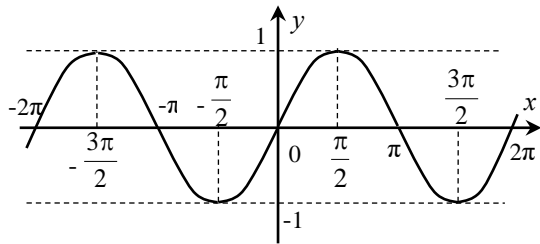


Рис. 8.16.

$D(y) = R$ ,  $E(y) = [-1; 1]$ .

Функція періодична з основним періодом  $2\pi$ ,  
непарна, обмежена.

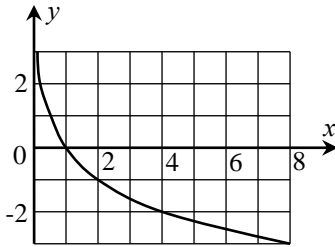


Рис. 8.17.

$D(y) = (0; +\infty)$ ,  $E(y) = R$ . Функція не періодична, загального виду, не обмежена, спадає на всій  $D(y)$ . Екстремумів не має. Точка  $x = 1$  – нуль функції,  $y > 0$  на проміжку  $(0; 1)$ ,  $y < 0$  на  $(1; +\infty)$ . Ось  $Oy$  – асимптота.

**Приклад 8.22.** Побудувати графік функції  $y = A \sin x$ ,  $A > 0$ .

Очевидно, що точки перетину графіка функції  $y = A \sin x$  з віссю  $Ox$  такі ж, як і у функції  $y = \sin x$ ,

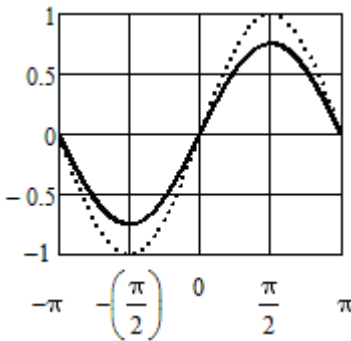


Рис. 8.18.

адже  $y = 0$ , коли  $x = \pm n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**8.48.** Як розташовується графік функції  $y = \log_{0,5} x$  щодо графіка функції  $y = \log_{0,3} x$ ?

(Відповідь: Графіки перетинаються в точці  $x = 1$ . Перший графік розташовується вище другого на проміжку  $(0; 1)$ , нижче – на проміжку  $(1; +\infty)$ .)

**8.49.** Визначте множину значень  $x$ , при яких графіки функцій

$$y = \ln x \text{ та } y = |\ln x|$$

перетинаються.

(Відповідь: множина точок  $x \geq 1$ )

**8.50.** Побудувати графік функції  $y = -2 \sin x$ .

(Вказівка: див. приклад 8.22 з урахуванням того, що  $A = -2 < 0$ )

**8.51.** Побудувати графік функції  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

(Вказівка: побудуйте графік функції  $y = \sin x$ ; у порівнянні з її графіком усі точки  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

зміщуються вправо на величину  $\pi/2$ )

Зростає на проміжках  $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n]$ ,  
 спадає на проміжках  $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$ ,  
 $x = -\pi/2 + 2\pi n$  – точки мінімумів,  $y_{\min} = -1$ ,  
 $x = \pi/2 + 2\pi n$  – точки максимумів,  $y_{\max} = 1$ ,  
 нулі функції –  $x = \pi n$ ,  
 $y > 0$  на  $(2\pi n; \pi n + 2\pi n)$ ,  
 $y < 0$  на  $(\pi n + 2\pi n; 2\pi n + 2\pi n)$ ,  
 де  $n \in \mathbb{Z}$ .

Функція  $y = \cos x$

Графік цієї функції наведено на рис. 8.19  
 (косинусоїда).

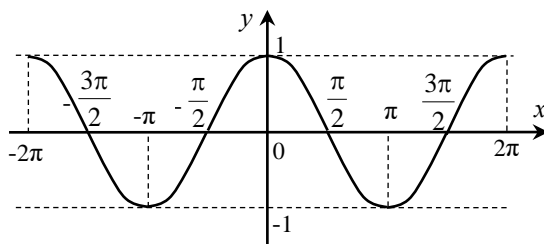


Рис. 8.19.

$$D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = [-1; 1].$$

Функція періодична з основним періодом  $2\pi$ ,  
 парна, обмежена.

Спадає на проміжках  $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ ,  
 зростає на проміжках  $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ,  
 $x = 2\pi n$  – точки максимумів,  $y_{\max} = 1$ ,  
 $x = \pi + 2\pi n$  – точки мінімумів,  $y_{\min} = -1$ ,  
 нулі функції –  $x = \pi/2 + \pi n$ ,  
 $y > 0$  на проміжках  $(-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n)$ ,  
 $y < 0$  на проміжках  $(\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n)$ ,  
 де  $n \in \mathbb{Z}$ .

Але для усіх значень  $x \neq \pm n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$  ордината функції  $y = \sin x$  множиться на  $A$ .

Для прикладу на рис. 8.18 зображено графік функції  $y = 0,75 \sin x$ .

**Приклад 8.23.** Побудувати графік функції  $y = A \cos(x - \pi/2), A > 0$ .

Як і у прикладі 8.22, для побудови графіка ординати усіх точок  $y = \cos x$  множимо на  $A$ , після чого всі точки утвореного графіка зсуваємо вправо на відрізок величиною  $\frac{\pi}{2}$ . На рис. 8.20 показано графік функції, коли  $A=2$ .

$$y = \cos(x); \quad y = \underline{2 \cos(x)}; \quad y = \underline{2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

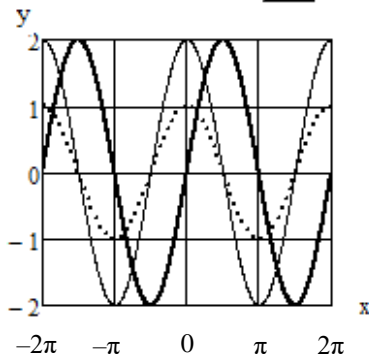


Рис. 8.20.

Зауважимо, що за формулами зведення  $y = A \cos(x - \pi/2) = A \sin x$ , що підтверджується рисунком 8.20.

**8.52.** Побудувати графік функції  $y = \left| -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ .

(Вказівка: побудуйте графік функції  $y = -\sin x$ ; усі точки цього графіка зсуньте вправо на  $\frac{\pi}{4}$ ;

частину зсунутого графіка, що розміщений у нижній півплощині, відобразіть симетрично осі  $Ox$  на верхню півплощину)

**8.53.** Знайти кількість точок перетину графіків  $y = 0,6 \cos 2x$  та  $y = 0,3x$  на інтервалі  $x \in [-\pi; \pi]$ .

(Вказівка: кількість точок перетину можна знайти після побудови графіків (див. рис. 8.21))

$$y = \cos(x); \quad y = \underline{0.6 \cos(x)}$$

$$y = \underline{0.6 \cos(2x)}; \quad y = \underline{0.3x}$$

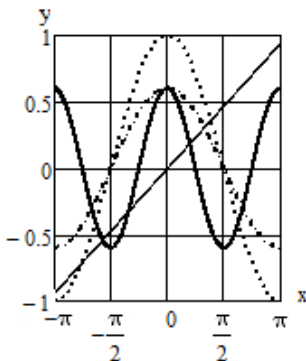


Рис. 8.21.

Функція  $y = \operatorname{tg} x$

Графік цієї функції (*тангенсоїда*) наведено на рис. 8.22.

Прямі  $x = \pi/2 + \pi n$   
– асимптоти,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Нулі функції –  
 $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$y < 0$  на проміжках  
 $(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$ ,

$y > 0$  на проміжках  
 $(\pi n; \pi/2 + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

Зростає на всіх  
проміжках  
неперервності  
 $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$   
 $n \in \mathbb{Z}$ .

Функція  $y = \operatorname{ctg} x$

Графік цієї функції (*котангенсоїда*) наведено на рис. 8.23.

Прямі  $x = \pi n$  –  
асимптоти,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Нулі функції –  
 $x = \pi/2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$y > 0$  на проміжках  
 $(\pi n; \pi/2 + \pi n)$ ,

$y < 0$  на проміжках  
 $(\pi/2 + \pi n; \pi + \pi n)$ ,

де  $n \in \mathbb{Z}$ .

Спадає на всіх  
проміжках  
неперервності  
 $(\pi n; \pi + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi n | n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $E(y) = \mathbb{R}$ .

Функція періодична з основним періодом  $\pi$ ,  
непарна, не обмежена. Екстремумів не має.

$D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $E(y) = \mathbb{R}$ .

Функція періодична з основним періодом  $\pi$ ,  
непарна, не обмежена. Екстремумів не має.

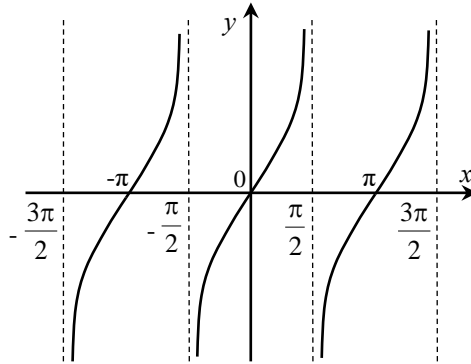


Рис. 8.22.

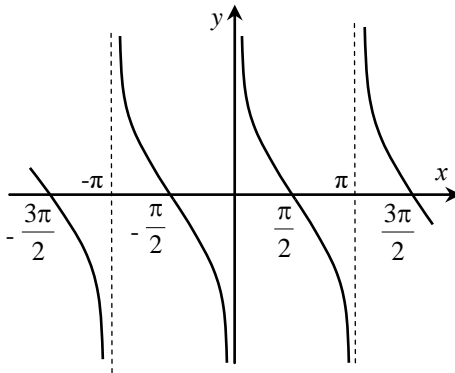


Рис. 8.23.

**Приклад 8.24.** Побудувати графік функції  $y = A \operatorname{tg} x$ ,  $A < 0$ . (Відповідь: 3)

Будуємо графік функції  $y = \operatorname{tg} x$ ; значення ординати  $y$  для кожного значення  $x$  множимо на  $A < 0$ . На рис. 8.24, наприклад,  $A = -2$ .

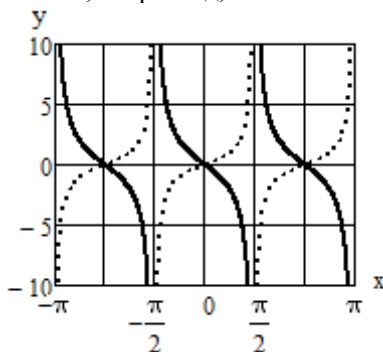


Рис. 8.24.

**Приклад 8.25.** Побудувати графік функції  $y = A \operatorname{ctg}(x + \varphi)$ ,  $A > 0$ ,  $\varphi > 0$ .

У графіку  $y = \operatorname{ctg} x$  ординату  $y$  множимо на  $A > 0$ , а потім усі точки зсунемо на величину  $\varphi$  вліво. На рис. 8.25 побудовано графік з  $A = 2$ ;  $\varphi = \pi/4$ .

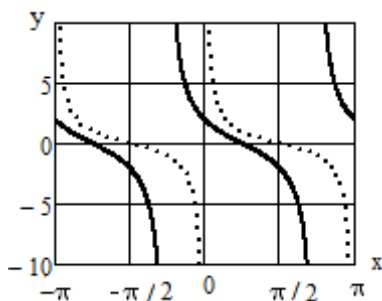


Рис. 8.25.

**8.53.** Побудувати графік функції  $y = 2 \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ .

(Вказівка: побудуйте графік  $y = A \operatorname{tg} x$  з урахуванням  $A = 2 > 0$  (див. приклад 8.24), а потім зсуньте усі точки графіка вправо на  $\frac{\pi}{4}$ )

**8.54.** Побудувати графік функції  $y = -3 \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{2})$ .

(Вказівка: побудуйте графік функції  $y = -3 \operatorname{ctg} x$ ; зсуньте усі точки графіка вліво на величину  $\frac{\pi}{2}$ )

**8.55.** Визначте множину точок перетину графіків функцій  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$  та  $y = x^2$  на інтервалі значень  $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

(Вказівка: див. рис. 8.26)

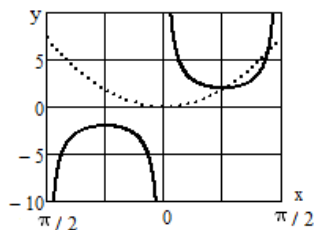


Рис. 8.26.

Функція  $y = \arcsin x$  Це одна з основних обернених тригонометричних функцій.

Графік цієї функції наведено на рис. 8.27.

$D(y) = [-1; 1]$ ,  $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$ . Функція не періодична, непарна, обмежена, зростає на всій  $D(y)$ , набуває в точці  $x = -1$  найменше значення  $y_{\min} = -\pi/2$ , а в точці  $x = 1$  – найбільше  $y_{\max} = \pi/2$ . Нуль функції –  $x = 0$ ,  $y < 0$  на проміжку  $[-1; 0)$ ,  $y > 0$  на  $(0; 1]$ .

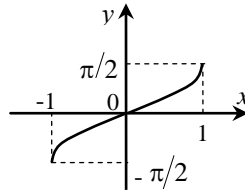


Рис. 8.27.

Функція  $y = \arccos x$

Графік цієї функції наведено на рис. 8.28.

$D(y) = [-1; 1]$ ,  $E(y) = [0; \pi]$ .

Функція не періодична, загального виду, обмежена, спадає на всій  $D(y)$ , набуває в точці  $x = -1$  найбільше значення  $y_{\max} = \pi$ , а в точці  $x = 1$  – найменше  $y_{\min} = 0$ . Нуль функції –  $x = 1$ , на проміжку  $[-1; 1)$   $y > 0$ .

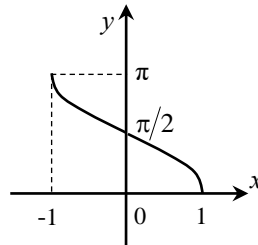


Рис. 8.28.

**Приклад 8.26.** Побудувати графік функції  $y = A \arcsin(x - \varphi)$ ,  $A > 0$ ,  $\varphi > 0$ .

Будуємо графік функції  $y = \arcsin x$  (див. рис. 8.27); для усіх значень  $x \in [-1; 1]$  ординати  $y$  графіка множимо на  $A > 0$ ; зсуваємо графік на величину  $\varphi$  вправо. На рис.8.29 показано графік для  $y = \arcsin x$ ;  $y = 1,5 \arcsin x$ ;  $y = 1,5 \arcsin(x - 0,5)$ .

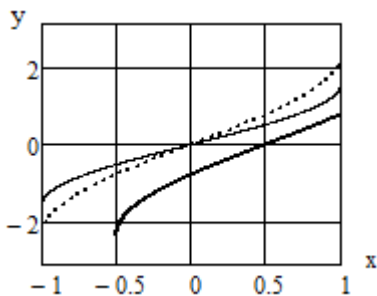


Рис. 8.29.

**Приклад 8.27.** Побудувати графік  $y = A \arccos(x + \varphi)$ ,  $A < 0$ ,  $\varphi > 0$ .

На рис.8.30 показано графіки для  $y = \arccos x$ ;  $y = -1,5 \arccos x$ ;  $y = -1,5 \arccos(x + 0,5)$ . Тут зсув вліво.

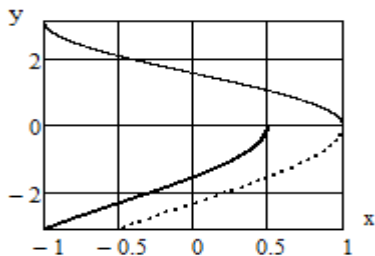


Рис. 8.30.

**8.56.** Побудувати графік функції

$$y = -2 \arcsin(x + 0,5).$$

(Вказівка: див. приклад 8.26)

**8.57.** Побудувати графік функції

$$y = 2 \arccos(x - 0,5).$$

(Вказівка: див. приклад 8.27)

**8.58.** Чи перетинаються графіки функцій

$$y = \arcsin x; \quad y = \arccos x?$$

Якщо перетинаються, то у скількох точках?

(Вказівка: побудуйте графіки в одній системі координат, визначте можливість їх перетину і кількість точок перетину).  
(Відповідь: так; у 1)

**8.59.** Побудуйте і порівняйте графіки функцій  $y = \arcsin x$  та

$$y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}.$$

**8.59.** Побудуйте і порівняйте графіки функцій  $y = \arccos x$  та

$$y = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40}.$$

Функція  $y = \operatorname{arctg} x$

Графік цієї функції наведено на рис. 8.31.

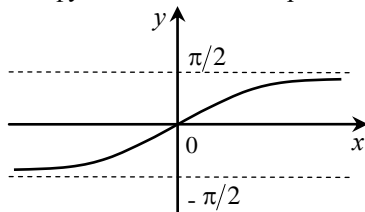


Рис. 8.31.

$D(y) = R$ ,  $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$ . Функція не періодична, непарна, обмежена, зростає на всій  $D(y)$ . Екстремумів не має. Прямі  $y = \pm\pi/2$  – асимптоти. Нуль функції –  $x = 0$ ,  $y < 0$  на проміжку  $(-\infty; 0)$ ,  $y > 0$  на  $(0; +\infty)$ .

Функція  
 $y = \operatorname{arcctg} x$

Графік цієї функції наведено на рис. 8.32.

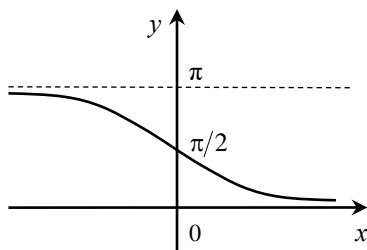


Рис. 8.32.

$D(y) = R$ ,  $E(y) = (0; \pi)$ .

Функція не періодична, загального виду, обмежена, спадає на всій  $D(y)$ . Екстремумів і нулів функція не має. Прямі  $y = 0$ ,  $y = \pi$  – асимптоти. На всій  $D(y)$   $y > 0$ .

**Приклад 8.28.** Побудувати графік функції  $y = A \arctg(x - \varphi)$ ,  $A > 0$ ,  $\varphi > 0$ .

Побудову здійснюємо у три етапи: будемо базовий графік функції  $y = \arctg x$ ; множенням на  $A$  ординат цього графіка будемо  $y = A \arctg x$ ; усі точки графіка зсуваємо по осі  $Ox$  вправо на величину  $\varphi$ . На рис. 8.33 зображено графіки  $y = \arctg x$ ;  $y = 1,75 \arctg x$ ;  $y = 1,75 \arctg(x - 1)$ .

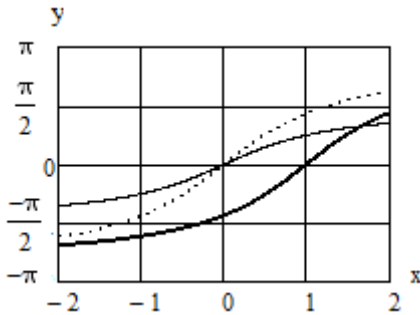


Рис. 8.33.

**Приклад 8.29.** Побудувати графік функції  $y = A \operatorname{arcsctg}(x - \varphi)$ ,  $A > 0$ ,  $\varphi > 0$ .

Опис етапів побудови графіка див. Приклад 8.28 для базового графіка  $y = \operatorname{arcsctg} x$ . На рис.8.34 зображено графік  $y = 1,75 \operatorname{arcsctg}(x - 1)$ .

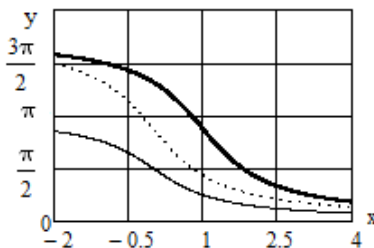


Рис. 8.34.

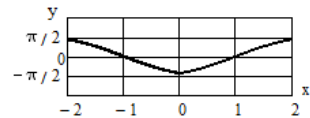
**8.60** Побудувати графік функції

$$y = 1,75 \arctg(|x| - 1).$$

(Вказівка: побудуйте графік функції

$$y = 1,75 \arctg(x - 1)$$

(див. рис. 8.33); частину цього графіка, що лежить у правій півплощині  $x \geq 0$ , відобразить симетрично осі  $Oy$  на ліву півплощину).



**8.61.** Знайти кількість точок перетину графіків  $y = 1,75 \arctg(x - 1)$  та  $y = 1,75 \operatorname{arcsctg}(x - 1)$  на інтервалі  $x \in [0; 2]$ .

(Вказівка: кількість точок перетину можна знайти після побудови графіків (див. рис. 8.35) ).

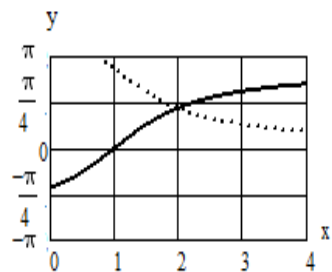


Рис. 8.35.

Графіки функцій  
виду

$$y = f(kx),$$

$$y \pm b = f(x \pm a)$$

Нехай відомий графік функції  $y = f(x)$  (базовий графік).

Для побудови графіка  $y = f(kx)$  можна кожному значенню абсциси  $x_1, x_2, \dots$  поставити у відповідність ординату  $y_1, y_2, \dots$ , що відповідає абсцисі  $kx_1, kx_2, \dots$  базового графіка.

Для побудови графіка  $y \pm b = f(x \pm a)$ , де  $a > 0, b > 0$ , можна:

або 1) зсунути усі точки базового графіка на  $a$  одиниць вліво для  $(x+a)$  або вправо для  $(x-a)$  та на  $b$  одиниць вниз для  $(y+b)$  або вгору для  $(y-b)$ ;

або 2) у системі координат  $XOY$  базового графіка перенести початок системи координат в точку  $(\pm a; \pm b)$ .

Графіки  
суперпозиції  
функцій

$$y = f(x) \pm g(x),$$

$$y = f(x) \times g(x),$$

$$y = f(x) / g(x)$$

Для побудови графіків функцій, що є суперпозицією базових елементарних функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ , можна:

1) виділити послідовність значень аргумента  $x_i$  (абсцис);

2) знайти значення функцій  $f(x_i)$  та  $g(x_i)$  (ординат) в обраних точках  $x_i$ ;

3) підрахувати значення ординат для заданих функцій: якщо  $y = f(x) \pm g(x)$ , то додати (відняти) ординати; якщо  $y = f(x) \times g(x)$ , то перемножити ординати; якщо  $y = f(x) / g(x)$ , то поділити ординати.

Зауваження. Для побудови графіків таких та більш складних функцій можна застосовувати комп'ютер.

**Приклад 8.30.** Щоб побудувати графік функції  $y = 2(x^2 - x)$ , зображаємо базовий графік  $y = x^2 - x$  з абсцисами  $x_i = \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; x_i$  та ординатами  $y_i = \dots; 2; 0; 0; 2; \dots; (x_i^2 - x_i)$ . Отже, ординатами графіка функції  $y = 2(x^2 - x)$  будуть значення (див. рис.8.36)  $y_i = \dots; 4; 0; 0; 4; \dots; 2(x_i^2 - x_i)$ .

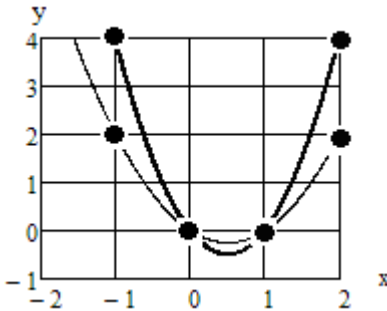


Рис. 8.36.

**Приклад 8.31.** Для побудови графіка функції  $Y = \ln(X - 1) + 1,5$  зображаємо  $y = \ln x$  в системі координат  $xOy$  і будемо початок системи  $XOY$  у точці  $(-1; -1,5)$  (рис. 8.37).

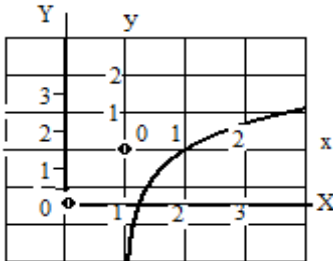
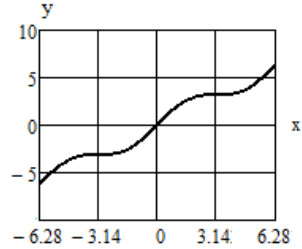


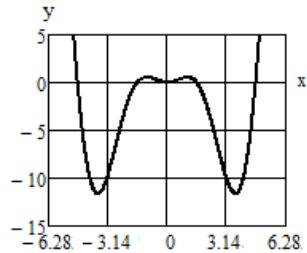
Рис. 8.37.

**8.62.** Встановіть (без комп'ютера), графіками яких функцій з вказаних нижче є графіки, що зображені на рис. 8.38.

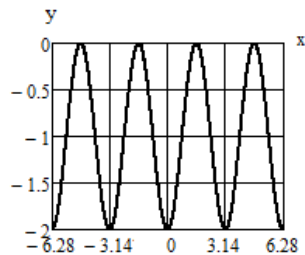
- 1)  $y = \sin(2(x - \pi/4)) - 1$ ;
- 2)  $y = x + \sin x$ ;
- 3)  $y = x^2 \cos x$ .



а



б



в

Рис. 8.38.

## 9 ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Алгебраїчне рівняння	Рівність алгебраїчних виразів із невідомою змінною. В алгебраїчному рівнянні над невідомою змінною виконуються тільки алгебраїчні дії: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.
Розв'язати рівняння	- знайти всі його корені або довести, що їх не існує.
Корінь рівняння	Значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність.
Рівносильні рівняння	Рівняння, множини коренів яких співпадають. Наприклад, $x^2 = 9$ та $ x  = 3$ . Корені першого рівняння $x \in \{3; -3\}$ співпадають з коренями другого. Усі рівняння, які не мають коренів – рівносильні.
Цілі раціональні рівняння	Рівняння виду $P_n(x) = 0$ , де $P_n(x)$ – ціла раціональна функція $n$ -го порядку виду
Ціла раціональна функція	$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ , де $n$ – натуральне число, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – деякі дійсні числа.
Лінійні рівняння з однією змінною	Рівняння виду $ax = b$ , де $x$ – невідома змінна, $a$ та $b$ – відомі числа. Якщо $a \neq 0$ , то $x = \frac{b}{a}$ – єдиний корінь рівняння.

**Приклад 9.1.** Розв'язати рівняння  
 $3x - 2(x - 5) = 10$ .

Розкриваємо дужки та зводимо подібні члени:  $3x - 2x + 10 = 10$ ,  $x = 0$ .  
Відповідь: 0.

**Приклад 9.2.** Розв'язати рівняння  
 $3x - 3(x - 5) = 15$ .

Розкриємо дужки та приведемо подібні члени:  $3x - 3x + 15 = 15$ ,  
 $0 = 0$ .

Відповідь: довільне число ( $x \in R$ ).

**Приклад 9.3.** Розв'язати рівняння  
 $3x - 3(x - 5) = 10$ .

Розкриємо дужки та приведемо подібні члени:  $3x - 3x + 15 = 10$ ,  
 $0 \neq -5$ .

Відповідь: коренів немає ( $x \in \emptyset$ ).

**Приклад 9.4.** Розв'язати рівняння  
 $\frac{2x - 3}{4} + \frac{x + 2}{2} = \frac{3x + 3}{4}$ .

Помножимо все рівняння на 4 та приведемо подібні члени:  
 $2x - 3 + 2(x + 2) = 3x + 3$ ,  
 $4x + 1 = 3x + 3$ ,  $x = 2$ .

Відповідь: 2.

**Приклад 9.5.** При якому значенні параметра  $a$  рівняння  $a^2x + 1 = x + a$  має безліч коренів?

Розв'язуючи рівняння відносно змінної  $x$ , отримаємо:  $a^2x - x = a - 1$ ,  
 $x(a^2 - 1) = a - 1$ . Якщо  $a = 1$ , то маємо рівність  $0 = 0$ , тоді  $x \in R$ .

Відповідь:  $a = 1$ .

**9.1.** Розв'язати рівняння  
 $12 + 3x = 0$ .  
(Відповідь:  $-4$ )

**9.2.** Розв'язати рівняння  
 $5(x - 2) + 2x = 4$ .  
(Відповідь: 2)

**9.3.** Розв'язати рівняння  
 $4 - \frac{x - 1}{2} = \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{3}$ .  
(Відповідь: 11)

**9.4.** Розв'язати рівняння  
 $2(8x - 3) - 4(4x + 3) = 10$ .  
(Відповідь:  $\emptyset$ )

**9.5.** Розв'язати рівняння  
 $\frac{3x + 2}{4} + 2x - 1 = \frac{11x - 2}{4}$ .  
(Відповідь:  $x \in R$ )

**9.6.** Розв'язати рівняння  
 $\frac{8x}{3} = \frac{36x - 21}{6}$ .  
(Відповідь: 1,05)

**9.7.** Розв'язати рівняння  
 $(x - 1)^2 - x(x + 2) = 2x - 3$ .  
(Відповідь:  $\frac{2}{3}$ )

**9.8.** При якому значенні параметра  $a$  рівняння  $a^2x + 2 = a(x + 2)$  не має коренів?  
(Відповідь:  $a = 0$ )

Якщо  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то  $0 \cdot x = 0$  і коренями рівняння є всі дійсні числа.

Якщо  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $0 \cdot x = b$  і рівняння коренів не має.

Як правило, задані рівняння за допомогою послідовних, рівносильних перетворень зводяться до лінійних рівнянь з трьома можливими варіантами відповідей.

Квадратні рівняння

Рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – відомі числа, причому  $a \neq 0$ .

Розв’язок рівняння знаходимо за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Дискримінант квадратного рівняння

де вираз  $b^2 - 4ac = D$  називають *дискримінантом квадратного рівняння*.

Якщо  $D > 0$ , рівняння має два різні дійсні корені.

Якщо  $D = 0$ , рівняння має один (двократний) дійсний корінь.

Якщо  $D < 0$ , рівняння не має дійсних коренів.

Неповні квадратні рівняння

Якщо  $c = 0$ , то рівняння розв’язується розкладом на множники  $x(ax + b) = 0$ , тоді

$$x_1 = 0, \text{ а } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Якщо  $b = 0$  та  $a$  і  $c$  мають однакові знаки, то рівняння дійсних коренів не має,  $x \in \emptyset$ .

Якщо  $b = 0$  та  $a$  і  $c$  мають різні знаки, то

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Якщо  $b = 0$  та  $c = 0$ , то рівняння має один (двократний) корінь  $x = 0$ .

**Приклад 9.6.** Розв'язати рівняння  $x^2 - 7x + 6 = 0$ .

Обчислимо дискримінант:

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25.$$

$$\text{Тоді: } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2};$$

$$x_1 = \frac{7+5}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{7-5}{2} = 1.$$

Відповідь: 1; 6.

Корені цього рівняння легко можна підібрати, використовуючи теорему Вієта: потрібно знайти пару чисел, сума яких дорівнює 7, а добуток дорівнює 6, це 1 та 6. Коренями заданого рівняння є  $x_1 = 6$  та  $x_2 = 1$ .

**Приклад 9.7.** Розв'язати рівняння  $x^2 - 5 = 0$ .

Запишемо рівняння як  $x^2 = 5$ . Тоді  $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ .

Відповідь:  $\pm\sqrt{5}$ .

**Приклад 9.8.** Розв'язати рівняння  $-6x^2 + 7x + 10 = 0$ .

Помножимо задане рівняння на  $-1$  та обчислимо дискримінант:

$$6x^2 - 7x - 10 = 0,$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10) = 289 = 17^2.$$

$$\text{Тоді: } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17^2}}{2 \cdot 6};$$

$$x_1 = \frac{7+17}{12} = 2; \quad x_2 = \frac{7-17}{12} = -\frac{5}{6}.$$

Відповідь: 2;  $-\frac{5}{6}$ .

**9.9.** Розв'язати рівняння

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

(Відповідь:  $-1; 5$ )

**9.10.** Розв'язати рівняння

$$(x+15)(x+5) = -9.$$

(Відповідь:  $-14; -6$ )

**9.11.** Розв'язати рівняння

$$2x^2 + 3x + 5 = 0.$$

(Відповідь:  $\emptyset$ )

**9.12.** Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{3}x^2 - 4x + 6 = 0.$$

(Відповідь: 3)

**9.13.** Розв'язати рівняння

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

(Відповідь:  $3 \pm 2\sqrt{2}$ )

**9.14.** За яких значень параметра  $a$  рівняння

$$4x^2 + 2x - a = 0 \quad \text{має тільки один корінь?}$$

(Відповідь:  $-0,25$ )

**9.15.** Знайти суму коренів

$$\text{рівняння } 2x^2 - 5x - 7 = 0.$$

(Відповідь: 2,5)

**9.16.** Знайти значення

виразу  $x_1^2 + x_2^2$ , де  $x_1, x_2$  – корені рівняння

$$x^2 - 3x - 5 = 0.$$

(Відповідь: 19)

## Теорема Вієта

1. Якщо  $x_1$  та  $x_2$  – корені квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , то  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  і

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Якщо  $x_1$  та  $x_2$  такі, що  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , то  $x_1$  та  $x_2$  – корені квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ .

## Зведене квадратне рівняння

Рівняння, що має вигляд  $x^2 + px + q = 0$ .

Будь-яке квадратне рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  можна перетворити на зведене, якщо його поділити на коефіцієнт  $a$ .

## Формули Вієта для зведеного квадратного рівняння

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

## Методи розв'язку цілих раціональних рівнянь вищих порядків

- 1) метод розкладання на множники;
- 2) метод заміни.

За допомогою цих двох методів задане раціональне рівняння вищого порядку може бути зведене до лінійного чи квадратного рівняння або їх сукупності.

## Бікватратні рівняння

Рівняння виду  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – відомі числа, причому  $a \neq 0$ . Заміною  $x^2 = t$ ;  $t \geq 0$  бікватратне рівняння зводиться до квадратного.

**Приклад 9.9.** Розв'язати рівняння  $9x^2 - 6x + 1 = 0$ .

Обчислимо значення дискримінанта:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0.$$

$$\text{Тоді: } x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{3}.$$

**Приклад 9.10.** Розв'язати рівняння  $10x^2 - 5x + 2 = 0$ .

Обчислимо значення дискримінанта:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2 = 25 - 80 = -55 < 0.$$

Тоді задане рівняння дійсних коренів не має.

Відповідь:  $\emptyset$ .

**Приклад 9.11.** Розв'язати рівняння  $x^3 = -8$ .

Після того, як добудемо корінь кубічний з обох сторін рівняння,

$$\text{отримаємо: } x = \sqrt[3]{-8}; x = -2.$$

Відповідь:  $-2$ .

**Приклад 9.12.** Розв'язати рівняння  $x^4 = 81$ .

Після того, як добудемо корінь 4-го порядку з обох сторін рівняння,

$$\text{отримаємо: } x = \pm\sqrt[4]{81}; x = \pm 3.$$

Відповідь:  $\pm 3$ .

**9.17.** За яких значень параметра  $a$  один корінь квадратного рівняння  $x^2 + ax + 2 + a = 0$  буде вдвічі більший за другий? (Відповідь:  $-1,5$ )

**9.18.** За яких значень параметра  $a$  різниця коренів рівняння  $2x^2 - (a+1)x + a - 1 = 0$  дорівнює їх добутку? (Відповідь:  $2$ )

**9.19.** За яких значень параметра  $a$  сума квадратів коренів рівняння  $x^2 + ax + 2 + a = 0$  буде найменшою? (Відповідь:  $1$ )

**9.20.** Розв'язати рівняння  $x^3 + 1 = 0$ . (Відповідь:  $-1$ )

**9.21.** Розв'язати рівняння  $8x^3 - 125 = 0$ . (Відповідь:  $\frac{5}{3}$ )

**9.22.** Розв'язати рівняння  $16x^4 + 81 = 0$ . (Відповідь:  $\emptyset$ )

**9.23.** Розв'язати рівняння  $2x^6 - 128 = 0$ . (Відповідь:  $\pm 2$ )

Двочленні рівняння Рівняння виду  $ax^n + b = 0$ . Перетворимо рівняння до виду  $x^n = -\frac{b}{a}$ . Тоді якщо  $n$  – непарне, то рівняння має один дійсний корінь  $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ ; якщо  $n$  – парне, то при  $-\frac{b}{a} < 0$  рівняння не має дійсних коренів  $x \in \emptyset$ , при  $-\frac{b}{a} = 0$  рівняння має один корінь  $x = 0$ , при  $-\frac{b}{a} > 0$  рівняння має два корені  $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ .

Тричленні рівняння Рівняння виду  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a, b, c$  – відомі числа, причому  $a \neq 0$ . Заміною  $x^n = t$  тричленне рівняння зводиться до квадратного. Якщо  $n$  – непарне число, то  $t \in \mathbb{R}$ , якщо  $n$  – парне число, то  $t \geq 0$ .

Зворотні рівняння 4-го порядку Загальний вид таких рівнянь:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bnx + an^2 = 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a, b, c$  – відомі числа, причому  $a \neq 0$ ,  $n$  може приймати як додатні, так і від’ємні значення. Значення  $x = 0$  не є коренем такого рівняння. Після того, як вказане рівняння розділити на  $x^2$  та згрупувати за степенями змінної  $x$ , отримаємо рівняння виду  $a\left(x^2 + \frac{n^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{n}{x}\right) + c = 0$ .

Введемо заміну  $x + \frac{n}{x} = t$ . Піднесемо обидві частини заміни до квадрата та отримаємо

**Приклад 9.13.** Розв'язати рівняння  $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ .

Після того, як застосуємо групування доданків рівняння, отримуємо:  $(x^3 + 1) + (4x^2 + 4x) = 0$ . Розкладемо кожну групу на множники:  $(x+1)(x^2 - x + 1) + 4x(x+1) = 0$ .

Однакові вирази  $(x+1)$  винесемо за загальні дужки:

$$(x+1)(x^2 - x + 1) + 4x(x+1) = 0.$$

Після зведення подібних членів отримаємо рівняння:  $(x+1)(x^2 + 3x + 1) = 0$ , яке зводиться до сукупності лінійного:  $x+1=0$  та квадратного:  $x^2 + 3x + 1 = 0$  рівнянь. Після розв'язання цих рівнянь,

$$\text{отримуємо: } x_1 = -1; x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } -1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**Приклад 9.14.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ .

Після того, як введемо заміну  $x^2 = t$ , де  $t \geq 0$ , отримуємо:  $t^2 - 3t - 4 = 0$ . Знайдемо корені квадратного рівняння:  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -1$ .

Корінь  $t_2 = -1$  не підходить. Після повернення до змінної  $x$  отримуємо:

$$x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2.$$

Відповідь:  $\pm 2$ .

**Приклад 9.15.** Розв'язати рівняння  $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$ .

**9.24.** Розв'язати рівняння  $3x^4 + x^2 - 14 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } \pm \sqrt{2} \text{)}$$

**9.25.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } \pm \sqrt{5}; \pm 2 \text{)}$$

**9.26.** Скільки коренів має рівняння

$$2x^4 - 3x^2 + 2 = 0?$$

(Відповідь: жодного)

**9.27.** Розв'язати рівняння  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } 1; 2 \text{)}$$

**9.28.** Розв'язати рівняння  $x^8 - 65x^4 + 64 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } \pm 1; \pm 2\sqrt{2} \text{)}$$

**9.29.** Розв'язати рівняння  $(x+3)^6 - 19(x+3)^3 = 216$ .

$$\text{(Відповідь: } 0; -1 \text{)}$$

**9.30.** Розв'язати рівняння  $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } 0,5; \pm 2 \text{)}$$

**9.31.** Розв'язати рівняння  $5x^3 - x^2 - x + 5 = 0$ .

$$\text{(Відповідь: } -1 \text{)}$$

**9.32.** Розв'язати рівняння  $x^4 + x^3 - 3x = 3$ .

$$\text{(Відповідь: } -1; \sqrt[3]{3} \text{)}$$

$$x^2 + 2n + \frac{n^2}{x^2} = t^2 \quad \text{і} \quad x^2 + \frac{n^2}{x^2} = t^2 - 2n. \quad \text{Після}$$

підстановки цих виразів отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної

$$a(t^2 - 2n) + bt + c = 0 \quad \text{чи}$$

$$at^2 + bt + (c - 2an) = 0.$$

Треба відмітити що, рівняння виду

$$a\left(x^2 + \frac{n^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{n}{x}\right) + c = 0 \quad \text{можуть}$$

здаватись як окремі завдання.

Симетричні  
рівняння  
порядку

4-го

Рівняння виду  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ .  
Такі рівняння є частинним випадком зворотних рівнянь, у яких  $n = 1$ . Алгоритм розв'язання такий самий, як і для зворотних рівнянь.

Рівняння, які  
містять добутки  
 $(x + a_i)(x + b_i)$ , де  
 $a_i + b_i = \text{const} \forall i$

Рівняння виду

$$(x + a_1)(x + b_1)(x + a_2)(x + b_2) = e,$$

$$\frac{c}{(x + a_1)(x + b_1)} + \frac{d}{(x + a_2)(x + b_2)} = e,$$

$$\frac{c}{(x + a_1)(x + b_1)} + d(x + a_2)(x + b_2) = e, \quad \text{де}$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2.$$

Для таких рівнянь застосовують одну з замі:

$$t = x^2 + (a_1 + b_1)x, \quad y = (x + a_1)(x + b_1),$$

$$z = (x + a_2)(x + b_2), \quad \text{які зводять задані}$$

рівняння до квадратного. В рівняннях може бути більша кількість таких добутків, але у всіх добутків має бути однакова сума вільних членів лінійних множників.

Перевіримо умову  $\frac{1}{4} = \left(\frac{-1}{2}\right)^2$ .

Це зворотнє рівняння 4-го порядку. Оскільки  $x=0$  – не корінь заданого рівняння, то розділимо його на  $x^2$ .

Отримаємо:  $x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$ .

Після групування маємо рівняння:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 10 = 0, \text{ для якого}$$

введемо заміну  $x - \frac{2}{x} = t$ . Тоді:

$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = t^2, \quad x^2 - 2x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = t^2,$$

$x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$ . Після підстановки

отриманих виразів для нової змінної  $t$  маємо квадратне рівняння:

$t^2 + 4 - t - 10 = 0$ ,  $t^2 - t - 6 = 0$ , корені якого  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = -2$ . Після

повернення до змінної  $x$  отримаємо рівняння, які зводяться до квадратних:

$$1) \quad x - \frac{2}{x} = 3, \quad x^2 - 3x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2};$$

$$2) \quad x - \frac{2}{x} = -2, \quad x^2 + 2x - 2 = 0,$$

$$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Відповідь:  $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; -1 \pm \sqrt{3}$ .

**9.33.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$ .

(Відповідь:  $3 \pm \sqrt{6}; -1; -3$ )

**9.34.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$

(Відповідь:  $\pm 2; -1; 4$ )

**9.35.** Розв'язати рівняння  $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$ .

(Відповідь:  $\emptyset$ )

**9.36.** Розв'язати рівняння

$$x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4.$$

(Відповідь:  $1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ )

**9.37.** Розв'язати рівняння

$$7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

(Відповідь:  $2; 0,5$ )

**9.38.** Розв'язати рівняння

$$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

(Відповідь:  $2; 0,5$ )

**9.39.** Розв'язати рівняння

$$4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

(Відповідь:  $1$ )

**9.40.** Розв'язати рівняння

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 = 35x - 6.$$

(Відповідь:  $2; 0,5; 3; \frac{1}{3}$ )

Рівняння виду  $(x+a)^n + (x+b)^n = c$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$

Для розв'язання таких рівнянь можна застосувати заміну  $t = x + \frac{a+b}{2}$ . Тоді задане рівняння буде мати вигляд  $(t-k)^n + (t+k)^n = c$ , де  $k = (b-a)/2$ . Після розкриття дужок за біномом Ньютона та зведення подібних при парному (непарному)  $n$  пропадають степені непарні (парні). При  $n = 4$  отримаємо бікватратне рівняння.

Рівняння зі змінною під знаком модуля

Для розв'язання рівняння виду  $|f(x)| = a$ , де  $f(x)$  – раціональний алгебраїчний вираз зі змінною  $x$  при  $a > 0$  доцільно перейти до сукупності рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

При  $a < 0$  у відповідь запишемо  $x \in \emptyset$ .

Для розв'язання рівняння виду  $|f(x)| = \varphi(x)$ , де  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – раціональні алгебраїчні вирази зі змінною  $x$  можна застосувати два шляхи :

$$1) \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) = -\varphi(x) ; \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

або

$$2) \begin{cases} f(x) = \varphi(x), f(x) \geq 0 \\ f(x) = -\varphi(x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Вибір залежить від того, які з нерівностей, що входять до алгоритмів, легше розв'язати.

Для розв'язання рівняння виду  $|f(x)| = |\varphi(x)|$  можна застосувати піднесення до квадрата обох частин рівняння.

**Приклад 9.16.** Розв'язати рівняння  
 $(x-1)(x-7)(x-4)(x+2) = 40$ .

Помножимо вирази в першій та третій дужках і в другій та четвертій, тому що  $-1-4 = -5 = -7+2$ .  
 Отримаємо:

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x - 14) = 40.$$

Застосуємо заміну  $x^2 - 5x = t$ , яка зведе отримане рівняння до квадратного:

$$(t+4)(t-14) = 40,$$

$t^2 - 10t - 96 = 0$ , корені якого  $t_1 = 16$ ,  $t_2 = -6$ . Повертаючись до попередньої змінної  $x$ , отримаємо

квадратні рівняння: 1)  $x^2 - 5x - 16 = 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}; \quad 2) x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 2.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}; 3; 2.$$

**Приклад 9.17.** Розв'язати рівняння  $|2x+5| = 3$ .

Перейдемо до сукупності рівнянь:  $2x+5 = 3$  або  $2x+5 = -3$  та отримуємо відповідь:  $x = -1$  або  $x = -4$ .

Відповідь:  $-1; -4$ .

**Приклад 9.18.** Розв'язати рівняння  $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$ .

Вираз в правій частині цього рівняння простіший за вираз в лівій частині, тому можна записати наступну систему:

**9.41.** Розв'язати рівняння  
 $(x-3)(x+4)(x+5)(x-2) = 18$ .  
 (Відповідь:

$$-1 \pm \sqrt{18}; -1 \pm \sqrt{7} )$$

**9.42.** Розв'язати рівняння  
 $|3x-3| = 6$ .

(Відповідь:  $-1; 3$ )

**9.43.** Розв'язати рівняння  
 $||2x-1|-3| = 5$ .

(Відповідь:  $-3,5; 4,5$ )

**9.44.** Розв'язати рівняння  
 $|x^2 - x - 1| = 1$ .

(Відповідь:  $0; \pm 1; 2$ )

**9.45.** Розв'язати рівняння  
 $|5x-3| + |2x+1| = 0$ .

(Відповідь:  $\emptyset$ )

**9.46.** Розв'язати рівняння  
 $|3x^2 - x| = 8 + x$ .

(Відповідь:  $2; -\frac{4}{3}$ )

**9.47.** Розв'язати рівняння  
 $|x+3| = x^2 + x - 6$ .

(Відповідь:  $\pm 3$ )

**9.48.** Розв'язати рівняння  
 $|4x-5| - |2-x| = 0$ .

(Відповідь:  $1; 1,4$ )

Рівняння  $|f_1(x) \pm |f_2(x)| \pm \dots \pm |f_n(x)| = \varphi(x)$  виду доцільно

розв'язувати на інтервалах. Для цього:

1. Знаходимо нулі виразів під модулями. Наносимо ці точки на числову вісь та отримуємо інтервали, на яких вирази під модулями зберігають знак постійним.

2. На кожному інтервалі розкриваємо усі модулі в залежності від знака виразу під цими модулями. Розв'язуємо отримані рівняння. Отримані розв'язки порівнюємо з інтервалом. До відповіді включаємо тільки ті, що належать до інтервалів на яких вони знайдені.

3. Загальна відповідь – це сукупність відповідей отриманих на кожному інтервалі.

За такою методою можна розв'язувати усі типи рівнянь з модулями.

Алгебраїчні нерівності

Два алгебраїчні вирази з невідомою змінною, розділені одним зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Розв'язати нерівність

Означає знайти усі значення невідомої змінної, при підстановці яких в задану нерівність отримуємо правильну числову нерівність, або довести, що таких значень не існує.

Розв'язують алгебраїчні нерівності зазвичай послідовними, рівносильними перетвореннями заданої нерівності до нерівності, метод розв'язку якої відомий.

Основні властивості рівносильних нерівностей

1. Якщо доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.

2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише додатних значень (додатне число), то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = 2x - 1, \\ x^2 + x - 1 = -2x + 1; \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0, \\ x^2 + 3x - 2 = 0; \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Використовуючи умову  $x \geq \frac{1}{2}$ , вибираємо значення змінної для відповіді.

Відповідь: 1;  $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ .

**Приклад 9.19.** Розв'язати нерівність  $2x - 5 > 0$ .

Виконуючи перетворення, отримуємо:  $2x > 5$ ;  $x > 2,5$ .

Відповідь:  $x \in (2,5; +\infty)$ .

**Приклад 9.20.** Розв'язати нерівність  $\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-1}{2} \geq 1$ .

Помножимо всю нерівність на 6:  $2 \cdot (2x+1) - 3(3x-1) \geq 6$ , розкриємо дужки та приведемо подібні члени:  $-5x \geq 1$ , поділимо нерівність на  $-5$ ,

отримаємо відповідь:  $x \leq -\frac{1}{5}$ .

Відповідь:  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]$ .

**9.49.** Розв'язати рівняння

$$|x^2 - 4| = |x^2 - 14|.$$

(Відповідь:  $\pm 3$ )

**9.50.** Розв'язати рівняння

$$|x+4| + 2x = |x+1| - 7.$$

(Відповідь:  $-3$ )

**9.51.** Розв'язати рівняння

$$|x+2| - |x-3| + |x-1| = 1.$$

(Відповідь:  $-5; 1$ )

**9.52.** Розв'язати нерівність

$$2x - 10 \geq 0.$$

(Відповідь:  $x \in [5; +\infty)$ )

**9.53.** Розв'язати нерівність

$$3x + 6 \leq 0.$$

(Відповідь:  $x \in [-\infty; -2]$ )

**9.54.** Розв'язати нерівність

$$3x + \frac{2x-5}{2} \geq \frac{4x-3}{3}.$$

(Відповідь:  $x \in \left[\frac{9}{16}; +\infty\right)$ )

**9.55.** Розв'язати нерівність

$$x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2.$$

У відповідь записати суму цілих розв'язків.

(Відповідь:  $-3$ )

**9.56.** Розв'язати нерівність

$$\frac{5x-3}{3} + \frac{4x+1}{4} < 2x + \frac{2x-1}{3}.$$

(Відповідь:  $x \in (-\infty; +\infty)$ )

3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише від'ємних значень (від'ємне число) і змінити знак нерівності, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.

Лінійні нерівності

Нерівності виду  $ax+b < 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a$  та  $b$  – відомі числа ( $a \neq 0$ ),  $<$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Квадратні нерівності

Нерівності виду  $ax^2+bx+c < 0$ , де  $x$  – невідома змінна,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – відомі числа, причому  $a \neq 0$ ,  $<$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Розв'язання квадратних нерівностей зводять до відшукування проміжків, на яких відповідна квадратична функція  $y = ax^2 + bx + c$  набуває додатних, недодатних, від'ємних, невід'ємних, значень. Розташування параболи

$y = ax^2 + bx + c$  відносно осі абсцис залежить від знаків дискримінанта  $D$  та коефіцієнта  $a$ . Можливі наступні випадки:

1. Якщо  $D < 0$ , то при  $a > 0$  парабола повністю розташована вище осі  $OX$ , тоді  $ax^2 + bx + c > 0$  для всіх значень  $x$ ; при  $a < 0$  парабола повністю розташована нижче осі  $OX$ , тоді  $ax^2 + bx + c < 0$  для всіх значень  $x$ .

2. Якщо  $D = 0$ , то при  $a > 0$  парабола розташована вище осі  $OX$  та дотикається її вершиною в точці  $x = -\frac{b}{2a}$ , тоді

$ax^2 + bx + c \geq 0$  для всіх значень  $x$ ; при  $a < 0$  парабола розташована нижче осі  $OX$  та дотикається її вершиною в точці  $x = -\frac{b}{2a}$ ,

тоді  $ax^2 + bx + c \leq 0$  для всіх значень  $x$ .

**Приклад 9.21.** Розв'язати нерівність  $\frac{2x+1}{5} - \frac{3x-1}{10} > \frac{11x+4}{10} - x$ .

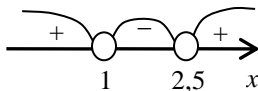
Помножимо всю нерівність на 10, приведемо подібні, отримаємо:  $3 > 4$  – неправильна числова нерівність.  
Відповідь:  $x \in \emptyset$ .

**Приклад 9.22** Розв'язати нерівність  $9 < 3 - 5x < 23$ . У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

Після того як перенесемо 3 до інших частин нерівності  $6 < -5x < 20$  та поділимо на  $(-5)$ , отримаємо:  $-1,2 > x > -4$ .  
Відповідь:  $x = -2$ .

**Приклад 9.23.** Розв'язати нерівність  $2x^2 - 7x + 5 > 0$ .

Для розв'язку нерівності застосуємо метод інтервалів. Знайдемо корені відповідного рівняння:  $2x^2 - 7x + 5 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2,5$ . Розклавши на множники задану нерівність, одержимо:  $2(x-1)(x-2,5) > 0$ . Позначимо корені  $x_1 = 1$  та  $x_2 = 2,5$  на числовій прямій та визначимо знак виразу на кожному з утворених проміжків:



Отже, розв'язок нерівності  $x \in (-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$ .

**9.57.** Знайти значення параметра  $a$ , за якого розв'язками нерівності є усі дійсні числа  $3x - 1 < ax + 5$ .  
(Відповідь: 3)

**9.58.** Розв'язати нерівність  $2x^2 - 5x - 3 < 0$ .  
(Відповідь:  $x \in (-0,5; 3)$ )

**9.59.** Розв'язати нерівність  $3x^2 - 8x + 4 \geq 0$ .  
(Відповідь:  $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$ )

**9.60.** Розв'язати нерівність  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ .  
(Відповідь:  $x \in \{3\}$ )

**9.61.** Розв'язати нерівність  $-6x^2 + 17x + 3 \leq 0$ .  
(Відповідь:  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [3; +\infty)$ )

**9.62.** Розв'язати нерівність  $3x < 2x^2$ .  
(Відповідь:  $x \in (-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$ )

**9.63.** Розв'язати нерівність  $4x > 8x^2 + 0,5$ .  
(Відповідь:  $x \in \emptyset$ )

3. Якщо  $D > 0$ , то при  $a > 0$  вітки параболи направлені вгору, парабола перетинає ось ОХ у двох точках  $x_1$  та  $x_2$ , які є коренями рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ . Тоді  $ax^2 + bx + c \leq 0$  при  $x \in [x_1; x_2]$ ;  $ax^2 + bx + c > 0$  при  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ; при  $a < 0$  вітки параболи направлені вниз, парабола перетинає ось ОХ у двох точках  $x_1$  та  $x_2$ , які є коренями рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ . Тоді  $ax^2 + bx + c < 0$  при  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ;  $ax^2 + bx + c \geq 0$  при  $x \in [x_1; x_2]$ .

Цілі раціональні нерівності вищих порядків

Нерівності виду  $P_n(x) \vee 0$ , де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го порядку ( $n > 2$ ),  $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ .

Раціональними також називають нерівності, які набувають вказаного вигляду після розкриття дужок та зведення отриманих подібних доданків. Наприклад,  $3x^3 + 5x^2 - 2x + 7 \leq 0$ ;  $(x + 3)^3(x^2 + 9) > 0$  – раціональні нерівності.

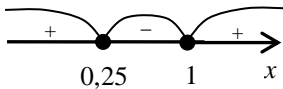
Метод інтервалів

Якщо многочлен  $P_n(x)$  розкласти на множники виду  $(ax \pm b)^k$ , то раціональну нерівність можна розв'язати методом інтервалів:

1. Знайти всі нулі многочлена  $P_n(x)$  (розв'язати рівняння  $P_n(x) = 0$ ).
2. Позначити нулі  $P_n(x)$  на числовій прямій.
3. Визначити знак многочлена  $P_n(x)$  на кожному з утворених проміжків (для цього достатньо обчислити значення многочлена  $P_n(x)$  у довільній точці проміжку).

**Приклад 9.24.** Розв'язати нерівність  $-4x^2 + 5x - 1 \geq 0$ .

Помножимо нерівність на  $(-1)$ . Отримаємо рівносильну нерівність  $4x^2 - 5x + 1 \leq 0$ . Знайдемо корені відповідного рівняння:  $x_1 = 0,25$ ;  $x_2 = 1$ . Розклавши на множники задану нерівність, одержимо:  $4(x-1)(x-0,25) \leq 0$ . Позначимо корені  $x_1 = 0,25$  та  $x_2 = 1$  на числовій прямій та визначимо знак виразу на кожному з утворених проміжків:



Отже, розв'язок нерівності  $x \in [0,25; 1]$ .  
Відповідь:  $x \in [0,25; 1]$ .

**Приклад 9.25.** Розв'язати нерівність  $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$ .

Знайдемо корені відповідного рівняння. Дискримінант для отриманого рівняння  $D < 0$ , а коефіцієнт  $a = 3 > 0$ .

Це означає, що вираз  $3x^2 - 7x + 5 > 0$  для всіх значень  $x$ . Отже, розв'язок нерівності  $x \in \emptyset$ .

Відповідь:  $x \in \emptyset$ .

**Приклад 9.26.** Розв'язати нерівність  $(x-2)(x+4)(x-7) \geq 0$ .

Корені нерівності:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = 7$ .

**9.64.** Розв'язати нерівність  $x^2 > 10$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty)$ )

**9.65.** Розв'язати нерівність  $(x-2)^2 < 16$ .

(Відповідь:  $x \in (-2; 6)$ )

**9.66.** Розв'язати нерівність  $(x+1)(3-x)(x-2) > 0$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 3)$ )

**9.67.** Розв'язати нерівність  $(2x-7)(x^2 + 11x + 18) > 0$ .

(Відповідь:  $x \in (-9; -2) \cup (3,5; +\infty)$ )

**9.68.** Розв'язати нерівність  $(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 7x - 8) \geq 0$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; -8] \cup [1; +\infty) \cup \{-3\}$ )

**9.69.** Розв'язати нерівність  $(2x+3)(x+5)(x-1)^2 \leq 0$ .

У відповіді вказати найбільший цілий розв'язок.

(Відповідь: 1)

**9.70.** Розв'язати нерівність  $(x+4)(5-x)(3-x)^2 < 0$ .

У відповіді вказати найменший цілий додатний розв'язок.

(Відповідь: 6)

4. Вибрати проміжки, на яких многочлен набуває значення того знака, якого вимагає нерівність, і записати множину розв'язків нерівності.

Нерівності зі змінною під знаком модуля

Нерівності виду  $|f(x)| > (\geq) a$ , де  $f(x)$  – раціональний вираз зі змінною  $x$ ,  $a$  – число, при  $a > 0$  зводяться до сукупності нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > (\geq) a \\ f(x) < (\leq) -a \end{cases}$$

При  $a < 0$  у відповідь записуємо  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

Нерівності виду  $|f(x)| < (\leq) a$ , де  $f(x)$  – раціональний вираз зі змінною  $x$ ,  $a$  – число, при  $a > 0$  зводяться до системи нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < (\leq) a \\ f(x) > (\geq) -a \end{cases}$$

При  $a < 0$  у відповідь записуємо  $x \in \emptyset$ .

Нерівності виду  $|f(x)| > (\geq) \varphi(x)$ , де  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – раціональні вирази зі змінною  $x$ , зводяться до сукупності нерівностей

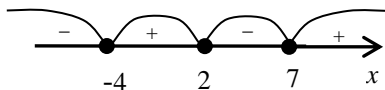
$$\begin{cases} f(x) > (\geq) \varphi(x) \\ f(x) < (\leq) -\varphi(x) \end{cases}$$

Нерівності виду  $|f(x)| < (\leq) \varphi(x)$ , де  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – раціональні вирази зі змінною  $x$ , зводяться до системи нерівностей

$$\begin{cases} f(x) < (\leq) \varphi(x) \\ f(x) > (\geq) -\varphi(x) \end{cases}$$

Нерівності виду  $|f(x)| \vee |\varphi(x)|$ , де  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – раціональні вирази зі змінною  $x$ ,  $\vee$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  можна розв'язати, записавши рівносильну нерівність  $(f(x))^2 \vee (\varphi(x))^2$ .

Нанесемо їх на числову пряму та визначимо знак виразу на кожному з утворених проміжків:



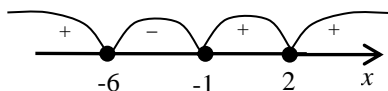
Отже, розв'язок нерівності –  $x \in [-4; 2] \cup [7; +\infty)$ .

Відповідь:  $x \in [-4; 2] \cup [7; +\infty)$ .

**Приклад 9.27.** Розв'язати нерівність  $(x-2)^2(x^2+7x+6) \leq 0$ .

Розкладемо на множники задану нерівність:  $(x-2)^2(x+6)(x+1) \leq 0$ .

Корені нерівності нанесемо на числову пряму та визначимо знак нерівності на кожному з утворених проміжків:



Отже, розв'язок нерівності –  $x \in [-6; -1] \cup \{2\}$ .

Відповідь:  $x \in [-6; -1] \cup \{2\}$ .

**Приклад 9.28.** Розв'язати нерівність  $|x+4| > 3$ .

Запишемо відповідну сукупність нерівностей:  $\begin{cases} x+4 > 3 \\ x+4 < -3 \end{cases}$ . Розв'язавши

її, отримаємо:  $\begin{cases} x > -1 \\ x < -7 \end{cases}$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$ .

**9.71.** Розв'язати нерівність  $|2x-3| > 2$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; 0,5) \cup (2,5; +\infty)$ )

**9.72.** Розв'язати нерівність  $|x^2-2x-8| > 5$ .

(Відповідь:  $x \in \emptyset$ )

**9.73.** Розв'язати нерівність  $\|x-1|-2| > 1$ .

У відповіді вказати найбільший цілий розв'язок.

(Відповідь: 1)

**9.74.** Розв'язати нерівність  $|x^2-3x-11| < 7$ .

(Відповідь:  $x \in (-3; -1) \cup (4; 6)$ )

**9.75.** Розв'язати нерівність  $|x^3-1| \geq 1-x$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ )

**9.76.** Розв'язати нерівність  $x^2-5x+9 > |x-6|$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ )

**9.77.** Розв'язати нерівність  $|3+x| \geq |x|$ .

(Відповідь:  $x \in [-1,5; +\infty)$ )

Нерівності виду  
 $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \dots \pm |f_n(x)| \vee \varphi(x)$ , де  $f_n(x)$ ,  
 $\varphi(x)$  – раціональні чи дробово-раціональні  
 вирази зі змінною  $x$ ,  $\vee$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  
 $\geq$ ,  $\leq$  розв'язують на інтервалах. Для цього:  
 1. Знаходимо нулі виразів під модулями.  
 Наносимо ці точки на числову вісь та  
 отримуємо інтервали, на яких вирази під  
 модулями зберігають знак постійним.  
 2. На кожному інтервалі розкриваємо усі  
 модулі в залежності від знака виразу під ними  
 та записуємо систему, яка складається із  
 отриманої нерівності та одного інтервалу.  
 Розв'язуємо отримані системи.  
 3. Загальна відповідь – це сукупність  
 відповідей, отриманих на кожному інтервалі.

Деякі задачі з параметрами на розташування коренів квадратних рівнянь

Такі задачі зводяться до нерівностей або систем нерівностей відносно параметра.

Так, наприклад, коли треба знайти значення параметра, при яких корені квадратного рівняння  $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$  мають різні знаки, достатньо скласти нерівність  $\frac{C(a)}{A(a)} < 0$ . При цьому вираз для дискримінанта

$D(a) = B^2(a) - 4A(a) \cdot C(a) > 0$  буде завжди додатним.

Якщо треба знайти значення параметра, при яких квадратне рівняння має тільки додатні (тільки від'ємні) корені, необхідно скласти систему, використовуючи умови теореми Вієта:

**Приклад 9.29.**  
нерівність  $|2x - 1| \leq 5$ .

Запишемо відповідну систему

нерівностей:  $\begin{cases} 2x - 1 \leq 5 \\ 2x - 1 \geq -5 \end{cases}$ . Розв'язавши

її, отримаємо:  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \end{cases}$ .

Відповідь:  $x \in [-2; 3]$ .

**Приклад 9.30.**  
нерівність  $|x^2 - 4| < 3x$ .

Запишемо відповідну систему  
нерівностей:

$\begin{cases} x^2 - 4 < 3x \\ x^2 - 4 > -3x \end{cases}$ . Розв'яжемо її:

$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0; \\ x^2 + 3x - 4 > 0; \end{cases}$   $\begin{cases} (x-4)(x+1) < 0; \\ (x+4)(x-1) > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-1; 4) \\ x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty) \end{cases}$ .

Отже, розв'язок системи –  $x \in (1; 4)$ .

Відповідь:  $x \in (1; 4)$ .

**Приклад 9.31.** Розв'язати  
нерівність  $|x - 2| + |x - 1| > x + 3$ .

Знаходимо нулі модулів:  $x_1 = 1$  та  $x_2 = 2$ . Отримуємо три інтервали. На кожному записуємо систему, яка складається із інтервалу та нерівності з розкритими модулями:

1)  $\begin{cases} x < 1 \\ -x + 2 - x + 1 > x + 3 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \end{cases}$ ,  $x < 0$ ;

Розв'язати 9.78. Розв'язати нерівність  
 $|x + 2| < |x - 2|$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; 0)$ )

9.79. Розв'язати нерівність  
 $|x + 1| - |x - 1| > 1$ .

(Відповідь:  $x \in (0,5; +\infty)$ )

9.80. Розв'язати нерівність  
 $2|x + 3| - |x + 1| < x$ .

(Відповідь:  $x \in \emptyset$ )

9.81. Розв'язати нерівність  
 $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| > 4$ .

(Відповідь:  
 $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ )

9.82. Розв'язати нерівність  
 $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ .

(Відповідь:  $x \in (2; 5)$ )

9.83. Знайти найменший  
розв'язок нерівності

$|x^2 - x + 1| \geq |x^2 - 3x + 4|$ .

(Відповідь: 1,5)

9.84. Знайти значення  
параметра  $a$ , при яких  
вираз

$(a - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 7 - a$

додатний для всіх значень  
змінної  $x$ . У відповіді  
вказати найбільший цілий  
розв'язок.

(Відповідь: 3)

$$\begin{cases} \frac{C(a)}{A(a)} > 0 & (1) \\ D(a) \geq 0 & (2) \\ -\frac{B(a)}{A(a)} > (<) 0. & (3) \end{cases}$$

Нерівність (1) гарантує виконання умови однаковості знаків коренів рівняння. Нерівність (2) потрібна для виконання умов наявності дійсних коренів заданого рівняння. Її треба включати в систему, тому що виконання умов нерівності (1) не гарантує наявності дійсних коренів рівняння. Нерівність (3) при виконанні умов (1), (2) гарантує, що корені рівняння будуть тільки додатні (>) чи тільки від'ємні (<).

Якщо треба знайти значення параметра, при яких один корінь квадратного рівняння належить інтервалу  $(\alpha, \beta)$ , другий не належить відрізьку  $[\alpha, \beta]$ , достатньо скласти

$$\text{систему: } \begin{cases} A(a) \neq 0 \\ f(\alpha, a) \cdot f(\beta, a) < 0. \end{cases}$$

У цій системі  $f(\alpha, a)$ ,  $f(\beta, a)$  – вирази, отримані підстановкою значень  $\alpha$  та  $\beta$  замість змінної  $x$  у задане квадратне рівняння. Для такої задачі умову існування дійсних коренів накладати необов'язково.

Якщо треба знайти значення параметра, при яких точка  $\alpha$  знаходиться між коренями квадратного рівняння, достатньо скласти нерівність  $A(a) \cdot f(\alpha, a) < 0$ .

$$2) \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ -x + 2 + x - 1 > x + 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ x < -2 \end{cases},$$

$x \in \emptyset$ ;

$$3) \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 + x - 1 > x + 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 6 \end{cases}, \quad x > 6.$$

Відповідь:  $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$ .

**Приклад 9.32.** При яких значеннях параметра  $p$  квадратне рівняння  $(p+7)x^2 + x + p - 2 = 0$  має корені різних знаків?

Складемо нерівність відносно параметра, яка забезпечує виконання заданої умови:  $\frac{p-2}{p+7} < 0$ . Розв'язком

отриманої нерівності є  $p \in (-7; 2)$ .

Відповідь:  $p \in (-7; 2)$ .

**Приклад 9.33.** При яких значеннях параметра  $p$  число 1 знаходиться між коренями квадратного рівняння  $(p-1)^2 x^2 + (2p-3)x - p = 0$ .

Для того, щоб число 1 знаходилось між коренями заданого квадратного рівняння, необхідне і достатнє виконання умови:

$$(p-1)^2((p-1)^2 + (2p-3) - p) < 0.$$

Після спрощення отриманої нерівності маємо:

$$(p-1)^2(p+1)(p-2) < 0.$$

Розв'язком останньої нерівності є

$p \in (-1; 1) \cup (1; 2)$ .

Відповідь:  $p \in (-1; 1) \cup (1; 2)$ .

**9.85.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність

$$(a+3)x^2 + 2(a+1)x < -1$$

не виконується ні при яких значеннях змінної  $x$ ?

(Відповідь:  $a \in (-2; 1)$ )

**9.86.** Знайти значення параметра  $a$ , при яких рівняння

$$(a-3)x^2 - 2x + a - 5 = 0$$

має корені різних знаків. У відповіді вказати найменший цілий розв'язок.

(Відповідь: 4)

**9.87.** Знайти значення параметра  $a$ , при яких корені рівняння

$$x^2 + 2(a+1)x + 8a - 5 = 0$$

від'ємні. У відповіді вказати найменший цілий розв'язок.

(Відповідь: 1)

**9.88.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння

$$(a-2)x^2 - 3(a+2)x + 6a = 0$$

має тільки додатні корені? У відповіді вказати найбільший цілий розв'язок.

(Відповідь: 6)

Якщо ж треба знайти значення параметра, при яких відрізок  $[\alpha, \beta]$  знаходиться між коренями квадратного рівняння, необхідно скласти систему: 
$$\begin{cases} A(a) \cdot f(\alpha, a) < 0 \\ A(a) \cdot f(\beta, a) < 0. \end{cases}$$

Для розв'язання задачі, де треба знайти значення параметра, при якому обидва кореня рівняння більше (не менше, менше, не більше) заданого значення  $\alpha$ , треба скласти систему:

$$\begin{cases} A(a) \cdot f(\alpha, a) > 0 \\ D(a) \geq 0 \\ -\frac{B(a)}{2A(a)} > \alpha \end{cases} \begin{pmatrix} (\geq, >, \geq) \\ \\ (\geq, <, \leq) \end{pmatrix}.$$

Знаки нерівностей в дужках відповідають вимогам не менше, менше, не більше відповідно.

Для розв'язання задачі, де треба знайти значення параметра, при якому обидва кореня рівняння знаходяться на інтервалі  $(\alpha; \beta)$ , треба скласти систему:

$$\begin{cases} A(a) \cdot f(\alpha, a) > 0 \\ A(a) \cdot f(\beta, a) > 0 \\ D(a) \geq 0 \\ \alpha < -\frac{B(a)}{2A(a)} < \beta \end{cases} \begin{pmatrix} (\geq, >, \geq) \\ (\geq, >, \geq) \\ \\ (\geq, <, \leq) \end{pmatrix}.$$

Знаки нерівностей в дужках відповідають вимогам, коли задані проміжки  $[\alpha; \beta)$ ,  $(\alpha; \beta]$ ,  $[\alpha; \beta]$  відповідно.

**Приклад 9.34.** При яких значеннях параметра  $p$  корені квадратного рівняння  $px^2 + px - 2 = 0$  будуть дійсними і один корінь по модулю буде більше за 1, а другий по модулю менший за 1?

Для виконання умови задачі необхідно, щоб один корінь рівняння належав інтервалу  $(-1; 1)$ , а інший не належав відрітку  $[-1; 1]$ . Складемо нерівність, яка забезпечує виконання цих умов:  $(p + p - 2)(p - p - 2) < 0$ . Після спрощення отриманої нерівності маємо:  $p - 1 > 0$ ,  $p > 1$ .

Відповідь:  $p \in (1; +\infty)$ .

**Приклад 9.35.** При яких значеннях параметра  $p$  один корінь рівняння  $(p - 2)x^2 - 2(p + 3)x + 4 = 0$  буде більше за 3, а другий менше за 2?

Для виконання умови задачі необхідно, щоб відрізок  $[2; 3]$  знаходився між коренями рівняння. Складемо систему, яка забезпечує виконання цієї умови:

$$\begin{cases} (p - 2)(4(p - 2) - 4(p + 3) + 4) < 0 \\ (p - 2)(9(p - 2) - 6(p + 3) + 4) < 0 \end{cases}$$

Після її спрощення маємо:

$$\begin{cases} (p - 2)(4p - 20) < 0 \\ (p - 2)(7p - 36) < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} p \in (2; 5) \\ p \in (2; \frac{36}{7}) \end{cases}$$

$$p \in (2; 5).$$

Відповідь:  $p \in (2; 5)$ .

**9.89.** При якому найбільшому цілому значенні параметра  $a$  число 1 знаходиться між коренями рівняння  $(12a + 7)x^2 + (9a - 42)x + 11 - 3a = 0$ ?  
(Відповідь: 1)

**9.90.** Знайти значення параметра  $a$ , при яких корені рівняння  $x^2 + 2(a + 3)x + 4a + 12 = 0$  більші за  $-1$ .  
(Відповідь:  $a \in (-3, 5; -3)$ )

**9.91.** При яких значеннях параметра  $a$  корені рівняння  $4x^2 - 2x + a = 0$  належать інтервалу  $(-1; 1)$ ?  
(Відповідь:  $a \in (-2; 0, 25)$ )

**9.92.** Якому проміжку повинно належати число  $p$ , щоб корені рівняння  $x^2 - 2px + p^2 = 1$  знаходились на відрітку  $[-2; 4]$ ?  
(Відповідь:  $p \in [-1; 3]$ )

## 10 ДРОБОВО–РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Дробово-раціональні рівняння

Раціональні рівняння виду  $P_n(x) = G_m(x)$  з хоча б одним дробовим виразом.

Наприклад,  $\frac{2x-5}{x+3} = \frac{5}{x-2}$  – дробово-раціональне рівняння.

Розв'язок дробово-раціонального рівняння

При розв'язанні дробово-раціонального рівняння виду  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$  потрібно пам'ятати,

що дріб дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю.

Тобто  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x) = 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}$ .

Область допустимих значень рівняння

(ОДЗ)

Множина значень невідомої змінної, за яких задане рівняння існує. Загальне ОДЗ знаходять як перетин усіх обмежень рівняння.

Для заданого дробово-раціонального рівняння спочатку знаходять ОДЗ, розв'язуючи систему, яка включає вимоги нерівності нулю знаменників усіх дробів. Далі дроби переносять в одну сторону і зводять їх до спільного знаменника. В результаті отримують рівняння виду  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0$ . Спільний знаменник

відкидають. Відкидання спільного знаменника можна розглядати як результат множення рівняння на цей спільний знаменник та скорочення дробу. Це означає, що ОДЗ заданого рівняння розширюється. Після розв'язання спрощеного раціонального рівняння  $P_n(x) = 0$  треба вилучити ті його корені, за яких  $Q_m(x) = 0$  (якщо такі є).

**Приклад 10.1.** Розв'язати рівняння

$$\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}.$$

ОДЗ:  $x \neq \pm 2$ ,  $x \neq 0$ . Перенесемо всі частини рівняння в одну сторону та приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = 0,$$

$$\frac{2x + (x-4)(x-2) - (x+2)}{(x-2)(x+2)x} = 0.$$

В чисельнику розкриємо дужки та приведемо подібні члени:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x+2)x} = 0, \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ (x-2)(x+2)x \neq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = 2; x_2 = 3 \\ x \neq 2; x \neq -2; x \neq 0 \end{cases}.$$

Відповідь: 3.

**Приклад 10.2.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}.$$

ОДЗ:  $x \neq -3$ ,  $x \neq 1$ . Перенесемо всі алгебраїчні дроби в одну сторону рівняння та приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2 + 2x - 3} = 0,$$

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{(x+3)(x-1)} = 0,$$

$$\frac{(x+2)(x-1) - (x+1)(x+3) - 4}{(x+3)(x-1)} = 0.$$

**10.1.** Розв'язати рівняння

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$$

(Відповідь: 1; 3)

**10.2.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 2x}{x+2} = 0.$$

(Відповідь: 0; 2)

**10.3.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x+5} = 0.$$

(Відповідь: -1)

**10.4.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2}{x-3} - \frac{x+6}{x-3} = 1.$$

(Відповідь: -1)

**10.5.** Розв'язати рівняння

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{8}{x^3 - 4x}.$$

(Відповідь: 3)

**10.6.** Розв'язати рівняння

$$\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 2.$$

(Відповідь: 2)

**10.7.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x}{x-5} - \frac{10}{x+3} = \frac{40}{x^2 - 2x - 15}.$$

(Відповідь: 2)

Дробово-раціональні нерівності

Нерівності виду  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \vee 0$ , де  $P_n(x)$ ,  $Q_m(x)$  – многочлени,  $\vee$  – один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Наприклад,  $\frac{x}{x-5} \leq x+2$  – дробово-раціональна нерівність.

Розв'язок дробово-раціональної нерівності

Виконуючи відповідні рівносильні перетворення, дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

Якщо знак нерівності строгий ( $<$  або  $>$ ), то нерівність виду  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < (>) 0$  рівносильна нерівності  $P_n(x) \cdot Q_m(x) < (>) 0$ .

Якщо знак нерівності не строгий ( $\leq$  або  $\geq$ ), то нерівність виду  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq (\geq) 0$  рівносильна

системі 
$$\begin{cases} P_n(x) \cdot Q_m(x) \leq (\geq) 0 \\ Q_m(x) \neq 0 \end{cases}.$$

В чисельнику розкриємо дужки та приведемо подібні члени:

$$\frac{-3x-9}{(x+3)(x-1)} = 0, \begin{cases} -3x-9=0 \\ (x+3)(x-1) \neq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ x \neq -3; x \neq 1 \end{cases}$$

Відповідь:  $\emptyset$ .

**Приклад 10.3.** Розв'язати нерівність  $x^2 + x \leq \frac{12x}{x-1} - \frac{12}{x-1}$ .

Перенесемо всі алгебраїчні дроби в одну сторону рівняння та приведемо їх до спільного знаменника:

$$\frac{(x^2 + x)(x-1) - 12(x-1)}{x-1} \leq 0,$$

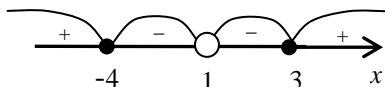
$$\frac{(x-1)(x^2 + x - 12)}{x-1} \leq 0,$$

$$\frac{(x-1)(x+4)(x-3)}{(x-1)} \leq 0.$$

Запишемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} (x-1)^2(x+4)(x-3) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Використовуючи метод інтервалів, отримаємо:



$$x \in [-4; 1) \cup (1; 3]$$

Відповідь:  $x \in [-4; 1) \cup (1; 3]$ .

**10.8.** Розв'язати рівняння

$$\frac{16}{(x+6)(x-1)} - \frac{20}{(x+2)(x+3)} = 1.$$

(Відповідь: 2; -7)

**10.9.** Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2}{3}.$$

(Відповідь:  $x \in (-\infty; 0) \cup [1,5; +\infty)$ )

**10.10.** Розв'язати нерівність  $\frac{5}{x} < \frac{4}{9-x}$ .

(Відповідь:  $x \in (-\infty; 0) \cup (5; 9)$ )

**10.11.** Розв'язати нерівність  $\frac{2x-7}{x^2+2x-8} > 1$ .

(Відповідь:  $x \in (-4; -1) \cup (1; 2)$ )

**10.12.** Розв'язати нерівність  $\frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 3x + 2} \geq \frac{2x}{x-2}$ .

(Відповідь:  $x \in [-2; 1) \cup (2; 3]$ )

**10.13.** Розв'язати нерівність  $\left| \frac{2x-5}{x-4} \right| \leq 1$ .

(Відповідь:  $x \in [1; 3]$ )

## 11 ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Ірраціональне  
рівняння

Рівність алгебраїчних виразів, в яких невідома змінна знаходиться під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад,  $x - 2 = \sqrt[3]{x+1}$ ,  $x^{1/5} + 7 = 6$ .

При розв'язанні ірраціональних рівнянь в елементарній математиці знаходять тільки дійсні корені. Ірраціональні рівняння за допомогою множення обох частин рівняння на вираз, який містить невідому змінну, піднесення обох частин рівняння до цілого додатного степеня чи заміни змінної можуть бути перетворені в цілі алгебраїчні рівняння. Такі рівняння є наслідком ірраціонального рівняння.

Рівняння-наслідок

Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається *наслідком* першого.

При перетворенні ірраціональних рівнянь в раціональні можлива поява сторонніх коренів. Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних розв'язків обов'язкова і є складовою частиною розв'язування. Перевірку робимо підстановкою отриманих розв'язків в початкове ірраціональне рівняння.

При розв'язанні ірраціональних рівнянь за допомогою піднесення обох частин рівняння до цілого додатного непарного степеня, отримаємо рівняння рівносильне (еквівалентне) заданому. У такому разі перевірка одержаних розв'язків не обов'язкова. Якщо ж обидві частини ірраціонального рівняння підносимо до цілого додатного парного степеня, то отримаємо рівняння-наслідок. Перевірка одержаних розв'язків обов'язкова.

**Приклад 11.1.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{12-x} = x$ .

Знайдемо ОДЗ:  $12-x \geq 0$ ,  $x \leq 12$ .  
За умовою пристайності знаків обох частин рівняння  $x \geq 0$ . Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату  $(\sqrt{12-x})^2 = x^2$ , отримаємо квадратне рівняння  $x^2 + x - 12 = 0$ , корені якого  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -4$  ( $x_2$  - не підходить за умовою пристайності знаків).  
Перевіримо розв'язок  $x = 3$ :  $\sqrt{12-3} = 3$ ,  $\sqrt{9} = 3$ ,  $3 = 3$ . Отримали правильну числову рівність.  
Відповідь: 3.

**Приклад 11.2.** Розв'язати рівняння  $3\sqrt[4]{3x-15} - \sqrt{2-x} = 5$ .

Знайдемо ОДЗ:  $\begin{cases} 3x-15 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ,  
 $x \in \emptyset$ . Оскільки ОДЗ - порожня множина, то рівняння коренів не має.  
Відповідь:  $\emptyset$ .

**Приклад 11.3.** Розв'язати рівняння  $x^{1/2} - 2x^{1/4} = 8$ .

Зробимо заміну:  $x^{1/4} = t$ . Тоді  $x^{1/2} = t^2$  і задане рівняння матиме вигляд:  $t^2 - 2t - 8 = 0$ , корені якого  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -2$ . Зробимо обернену заміну  $x^{1/4} = 4$ ,  $x = 4^4$ ,  $x = 256$ , або  $x^{1/4} = -2$ ,  $x \in \emptyset$ .  
Відповідь: 256.

**11.1.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{8}$ .  
(Відповідь:  $\pm 3$ )

**11.2.** Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{2x+7} = \sqrt[3]{4x-5}$ .  
(Відповідь: 6)

**11.3.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}} = \sqrt{2}$ .  
(Відповідь: -1)

**11.4.** Розв'язати рівняння  $(16-x^2)\sqrt{3+x} = 0$ .

У відповіді вказати суму коренів.  
(Відповідь: 1)

**11.5.** Розв'язати рівняння  $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3} = 0$ .  
(Відповідь: 1)

**11.6.** Розв'язати рівняння  $2 + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+1}$ .  
(Відповідь: 8)

**11.7.** Розв'язати рівняння  $\frac{5}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} = 3$ .  
(Відповідь: 2)

**11.8.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{3x+1} - \sqrt{7x+2} = -\sqrt{x}$ .  
(Відповідь: 1)

Рівняння виду  $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\varphi(x)}$  Такі рівняння розв'язують піднесенням обох частин рівняння до степеня  $k = НСК(n, m)$ .

Рівняння виду  $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{g(x)}$ .  
 У правій частині рівняння може бути вираз  $g(x)$  або константа  $a$ .  
 Такі рівняння розв'язуються піднесенням обох частин рівняння до квадрата два рази. Після першого піднесення маємо  $f(x) \pm 2\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)} + \varphi(x) = g(x)$ , або  $g^2(x)$  чи  $a^2$ . Перетворимо отримане рівняння до виду  $\pm 2\sqrt{f(x)}\sqrt{\varphi(x)} = g(x) - f(x) - \varphi(x)$  та після спрощення правої частини піднесемо до квадрата другий раз. Отримане раціональне рівняння є наслідком заданого ірраціонального рівняння, тому перевірка розв'язків обов'язкова.

Рівняння виду  $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{\varphi(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$ .  
 У правій частині рівняння може бути вираз  $g(x)$  або константа  $a$ .  
 Такі рівняння розв'язують піднесенням обох частин рівняння до кубу два рази. Після першого піднесення та групування використовуємо умову заданого рівняння. Отримане рівняння-наслідок підносимо другий раз до кубу для того, щоб позбутися ірраціональності. Після розв'язку раціонального рівняння перевірка отриманих розв'язків обов'язкова.

Ірраціональна нерівність  
 Нерівність, яка містить змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад,  $\sqrt{x+5} \leq 2-x$ ,  $x^{1/3} > 2-x$ ,  $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x-3} < 1$ .  
 Розв'язок ірраціональних нерівностей зводять до розв'язку раціональних нерівностей або їх систем чи сукупностей.

Основні методи розв'язку  
 1. За допомогою піднесення обох частин нерівності до необхідного степеня.  
 2. За допомогою підстановки, яка зводить ірраціональну нерівність до раціональної.

**Приклад 11.4.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} = \sqrt{2x+8}$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x-3 \geq 0$ ,  $x \geq 3$ .  
Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату  $(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{2x+8})^2$ ,  
отримаємо

$$x+5+x-3+2\sqrt{(x+5)(x-3)} = 2x+8.$$

Після перетворень отримаємо рівняння  
 $\sqrt{(x+5)(x-3)} = 3$ . Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату  $(x+5)(x-3) = 9$ , розкриємо дужки, приведемо подібні члени, отримаємо квадратне рівняння  $x^2 + 2x - 24 = 0$ , корені якого  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -6$ . Розв'язок  $x_2 = -6$  не підходить за ОДЗ. Зробимо перевірку для  $x_1 = 4$  і отримаємо правильну числову рівність.

Відповідь: 4.

**Приклад 11.5.** Розв'язати рівняння  
 $(x^2 - 4)\sqrt{x-1} = 0$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x-1 \geq 0$ ,  $x \geq 1$ .  
Розв'язки рівняння:  $x = 2$ ,  $x = -2$ ,  
 $x_3 = 1$ . Розв'язок  $x = -2$  не підходить за ОДЗ.

Відповідь: 1; 2.

**Приклад 11.6.** Розв'язати  
нерівність  $\sqrt{x+3} < -1$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x+3 \geq 0$ ,  $x \geq -3$ .  
Ліва частина нерівності невід'ємна і не може бути менша за від'ємне число.  
Тоді  $x \in \emptyset$ .

Відповідь:  $\emptyset$ .

**11.9.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt[6]{2x-4} + \sqrt[3]{x+6} =$   
 $= 2 - \sqrt{2-x}$ .

(Відповідь: 2)

**11.10.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt{4+3x-x^2} = \sqrt{x+5} - 3$ .  
(Відповідь: 4)

**11.11.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$ .  
(Відповідь: 1; 1,5; 2)

**11.12.** Розв'язати рівняння  
 $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} = -3$ .  
(Відповідь:  $\pm 1; \pm 3\sqrt{3}$ )

**11.13.** Розв'язати  
нерівність  
 $\sqrt{x+1} > \sqrt{2}$ , у відповідь  
записати найменше ціле  
значення  $x$ .  
(Відповідь: 2)

**11.14.** Розв'язати  
нерівність  
 $\sqrt{0,5x-1} < 0,5$ .  
(Відповідь: [2; 2,5])

**11.15.** Розв'язати  
нерівність  
 $\sqrt[3]{x-2} < -2$ .  
(Відповідь:  $(-\infty; -6)$ )

При піднесенні обох частин ірраціональної нерівності до степеня необхідно пам'ятати, що:

1. Якщо обидві частини нерівності піднести до непарного додатного степеня, отримаємо нерівність рівносильну (еквівалентну) заданій.
2. Ірраціональну нерівність можна підносити до парного додатного степеня, якщо обидві частини нерівності невід'ємні. За таких умов отримаємо нерівність рівносильну (еквівалентну) заданій.

Нерівність виду  $\sqrt[2n]{f(x)} < (\leq) g(x)$  Зводиться до системи раціональних нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > (\geq) 0 \\ f(x) < (\leq) g^{2n}(x). \end{cases}$$

Нерівність виду  $\sqrt[2n]{f(x)} > (\geq) g(x)$  Зводиться до сукупності систем раціональних нерівностей:

$$\left[ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (\geq) g^{2n}(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \right.$$

Нерівність виду  $\sqrt[2n]{f(x)} > (\geq) \sqrt[2n]{g(x)}$  Зводиться до системи раціональних нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (\geq) g(x). \end{cases}$$

**Приклад 11.7.**  
нерівність  $\sqrt[4]{x-2} \geq -1$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x-2 \geq 0$ ,  $x \geq 2$ .  
Задана нерівність виконується в своїй  
ОДЗ:  $x \in [2; +\infty)$ .

Відповідь:  $[2; +\infty)$ .

**Приклад 11.8.**  
нерівність  $\sqrt[6]{x-3} \geq 1$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x-3 \geq 0$ ,  $x \geq 3$ .  
Обидві частини нерівності невід'ємні,  
піднесемо їх до шостого степеня  
 $x-3 \geq 1$ ,  $x \geq 4$ . Запишемо ОДЗ та

розв'язок в системі  $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$ , тоді  $x \geq 4$ .

Відповідь:  $[4; +\infty)$ .

**Приклад 11.9.**  
нерівність  $\sqrt[8]{x+2} < 1$ .

Знайдемо ОДЗ:  $x+2 \geq 0$ ,  $x \geq -2$ .  
Обидві частини нерівності невід'ємні,  
піднесемо їх до восьмого степеня  
 $x+2 < 1$ ,  $x < -1$ . Запишемо ОДЗ та

розв'язок в системі  $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \end{cases}$ , тоді

$x \in [-2; -1)$ .

Відповідь:  $[-2; -1)$ .

**Приклад 11.10.**  
нерівність  $\sqrt[3]{8x^3 + x^2 - 25} < 2x$ .

Обидві частини нерівності  
піднесемо до третього степеня  
 $8x^3 + x^2 - 25 < 8x^3$ ,  $x^2 - 25 < 0$ ,  
 $x \in (-5; 5)$ .

Відповідь:  $(-5; 5)$ .

Розв'язати **11.16.** Розв'язати  
нерівність

$$\sqrt{x+3} > \sqrt{x-3}.$$

(Відповідь:  $[3; +\infty)$ )

Розв'язати  
нерівність

$$\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}.$$

(Відповідь:  $[9; +\infty)$ )

Розв'язати  
нерівність

$$\sqrt{\frac{8-x}{x-10}} \leq \sqrt{\frac{2}{2-x}}.$$

(Відповідь:  $\emptyset$ )

Розв'язати  
нерівність

$$\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x.$$

(Відповідь:  $(-\infty; -3]$ )

Розв'язати  
нерівність

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x.$$

(Відповідь:  $(3; 5]$ )

Розв'язати  
нерівність

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

(Відповідь:  $[2; +\infty) \cup \{-1\}$ )

## 12 ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Показникові  
рівняння

Рівняння, які містять невідому змінну в показнику степеня. Наприклад,  $2^{x-1} = 16$   
 $5^{2x+3} + 7 = 5^x$ ,  $\frac{4}{2^x + 2} - \frac{1}{2^x - 3} = 2$ .

Найпростіші  
показникові  
рівняння

1. Рівняння  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , при  $a \neq 1$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x)$ .
2. Рівняння  $a^{f(x)} = b$ , при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  рівносильне рівнянню  $f(x) = \log_a b$ .
3. Рівняння  $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ , при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  рівносильне рівнянню  $f(x) = g(x) \log_a b$ .
4. Рівняння  $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ , при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  рівносильне рівнянню  $f(x) = 0$ .

Методи розв'язку

Більш складні показникові рівняння за допомогою властивостей степеня, кореня можна перетворити у найпростіші показникові рівняння, які зводять до алгебраїчних. Деякі типи показникових рівнянь розв'язують за допомогою введення нової змінної, що дозволяє отримати алгебраїчне рівняння, розв'язати його та після зворотної заміни отримати найпростіші показникові рівняння. Існують такі показникові рівняння, які розв'язуються перетворенням їх до вигляду  $f(x) = \varphi(x)$ , де одна із функцій зростаюча, а інша спадає. Таке рівняння має не більше одного кореня. Далі підбором чи за допомогою графіків цих функцій знаходять розв'язок рівняння чи доводять, що його не існує.

**Приклад 12.1.** Розв'язати рівняння  
 $5^{x^2+x-6} = 1$ .

За допомогою властивостей степеня задане рівняння перетворимо в найпростіше показникове рівняння  $5^{x^2+x-6} = 5^0$ , прирівняємо показники та отримаємо квадратне рівняння  $x^2 + x - 6 = 0$ , корені якого  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ .

Відповідь:  $-3; 2$ .

**Приклад 12.2.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt{10^{2x-6}} = \frac{100}{\sqrt[4]{10}}$ .

За допомогою властивостей кореня та степеня задане рівняння перетворимо в найпростіше показникове рівняння  $10^{x-3} = 10^{1,75}$ , прирівняємо показники та отримаємо рівняння  $x - 3 = 1,75$ ,  $x = 4,75$ .

Відповідь:  $4,75$ .

**Приклад 12.3.** Розв'язати рівняння  
 $25^x - 120 \cdot 5^{x-1} = 25$ .

Запишемо рівняння у вигляді  $25^x - 24 \cdot 5^x - 25 = 0$  та зробимо заміну:  $5^x = t$ ,  $t > 0$ . Одержимо квадратне рівняння  $t^2 - 24t - 25 = 0$ , корені якого  $t_1 = 25$ ,  $t_2 = -1$ . Корінь  $t_2 = -1$  не підходить за умовою заміни. Після оберненої заміни знайдемо  $x$ :  $5^x = 25$ ,  $x = 2$ .

Відповідь:  $2$ .

**12.1.** Розв'язати рівняння  
 $2^{x+5} = 4^{-2x}$ .  
(Відповідь:  $-1$ )

**12.2.** Розв'язати рівняння  
 $3^{x-1} = 5$ .  
(Відповідь:  $\log_3 5 + 1$ )

**12.3.** Розв'язати рівняння  
 $5^{|x|} = \frac{1}{2}$ .  
(Відповідь:  $\emptyset$ )

**12.4.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt{5^x} \cdot \sqrt[3]{5^{-x} \cdot 0,04^{x-1}} = \sqrt[3]{25}$

У відповіді вказати суму коренів.  
(Відповідь:  $3$ )

**12.5.** Розв'язати рівняння  
 $3^{x+3} + 8 \cdot 3^{x+2} = 33$ .  
(Відповідь:  $-1$ )

**12.6.** Розв'язати рівняння  
 $4^{x+1} + 15 \cdot 2^{x-1} = 1$ .  
(Відповідь:  $-3$ )

**12.7.** Розв'язати рівняння  
 $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 36^x$ .  
(Відповідь:  $0; 0,5$ )

**12.8.** Розв'язати рівняння  
 $3^x + 4^x = 5^x$ .  
(Відповідь:  $2$ )

Показникові  
нерівності

Нерівності, які містять змінну в показнику степеня. Наприклад,  $5^{x-3} \geq 3$ ,  $4^x - 2^x - 2 < 0$ . Розв'язок показникових нерівностей базується на монотонності показникової функції  $y = a^x$ , при  $a > 1$  показникова функція монотонно зростає на всій області визначення; при  $0 < a < 1$  показникова функція монотонно спадає на всій області визначення.

Якщо ж функція  $y = f(x)$  монотонно зростає (спадає) на своїй області визначення, то нерівність  $f(a) > f(b)$  еквівалентна нерівності  $a > b$  ( $a < b$ ).

Найпростіші  
показникові  
нерівності

1. Нерівність  $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$ , при  $a \neq 1$  ( $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ ) рівносильна нерівності  $f(x) \vee g(x)$ . При такому переході треба пам'ятати, що при  $a > 1$  знак нерівності зберігається, при  $0 < a < 1$  знак нерівності змінюється на протилежний.

2. Нерівність  $a^{f(x)} \vee b$ , при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  ( $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ ) рівносильна нерівності  $f(x) \vee \log_a b$ . Треба пам'ятати, що при  $a > 1$  знак нерівності зберігається, при  $0 < a < 1$  знак нерівності змінюється на протилежний. Розв'язком такої нерівності при  $b < 0$  для знаків  $<, \leq$  є пуста множина  $x \in \emptyset$ , для знаків  $>, \geq$  – всі дійсні числа  $x \in R$ .

Методи розв'язку

За допомогою властивостей степеня та кореня більш складні показникові нерівності можна перетворити у найпростіші показникові нерівності, які зводять до алгебраїчних нерівностей. Деякі показникові нерівності за допомогою заміни можна звести до найпростіших показникових нерівностей їх систем чи сукупностей.

**Приклад 12.4.**  
нерівність  $7^{|x-5|} < \frac{49}{\sqrt[3]{7-9}}$ .

За допомогою властивостей степеня та кореня задану нерівність можна записати  $7^{|x-5|} < 7^5$  та перейти до алгебраїчної нерівності  $|x-5| < 5$ . Розв'язком такої нерівності є система

$$\begin{cases} x-5 < 5 \\ x-5 > -5 \end{cases}, \begin{cases} x < 10 \\ x > 0 \end{cases}, x \in (0; 10).$$

Відповідь:  $x \in (0; 10)$ .

**Приклад 12.5.**  
нерівність  $3^{x+1} + 3^x \geq 36$ .

Винесемо за дужки множник  $3^x$ , отримаємо  $3^x(3+1) \geq 36$ ,  $3^x \geq 9$ ,  $x \geq 2$ .  
Відповідь:  $x \in [2; +\infty)$ .

**Приклад 12.6.**  
нерівність  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$ .

Зробивши заміну  $2^x = t$ ,  $t > 0$ , отримаємо  $t^2 - 6t + 8 < 0$ . Розв'язком такої квадратичної нерівності є  $t \in (2; 4)$ . Запишемо відповідь у вигляді системи

$$\begin{cases} t > 2 \\ t < 4 \end{cases} \text{ та зробимо зворотню}$$

$$\text{заміну } \begin{cases} 2^x > 2 \\ 2^x < 4 \end{cases}, \text{ тоді } \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}, x \in (1; 2).$$

Відповідь:  $x \in (1; 2)$ .

Розв'язати **12.9.** Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-20} > 1.$$

(Відповідь:  $(-4; 5)$ )

**12.10.** Розв'язати нерівність  $3^x > 5^x$ .

(Відповідь:  $(-\infty; 0)$ )

**12.11.** Розв'язати нерівність

$$4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52.$$

(Відповідь:  $(3; +\infty)$ )

**12.12.** Розв'язати нерівність

$$3 \cdot 5^x - 5^{2x+1} + 2 \geq 0.$$

(Відповідь:  $(-\infty; 0]$ )

**12.13.** Розв'язати нерівність,

у відповідь записати найменше ціле значення  $x$ .

$$5^{x+2} - 2^{x+2} > 5^{x+1} + 2^{x+4}.$$

(Відповідь: 1)

**12.14.** Розв'язати нерівність

$$x^2 \cdot 4^x - 4^{x+1} \leq 0.$$

(Відповідь:  $[-2; 2]$ )

**12.15.** Розв'язати нерівність

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x > 0.$$

(Відповідь:  $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ )

### 13 ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Логарифмічні  
рівняння

Рівняння, які містять невідому змінну під знаком логарифма або в основі логарифма. Наприклад,  
 $\log_2(x+7) = 1$ ,  $\ln 3e^x = x$ ,  $\log_{x-1}(2x-3) = 2$ ,  
 $\frac{2}{\lg x - 1} - \frac{1}{2 \lg x - 3} = 5$ .

Найпростіші  
логарифмічні  
рівняння

1. Рівняння  $\log_a f(x) = b$ , при  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  
рівносильне системі  $\begin{cases} f(x) = a^b \\ f(x) > 0 \end{cases}$ .

2. Рівняння  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , при  $a > 0$ ,  
 $a \neq 1$ , після потенціювання, рівносильне системі  
 $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ .

Потенціювання

Обернена процедура до логарифмування.  
Дозволяє перейти від логарифмічного рівняння  
 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$  до рівняння виду  
 $f(x) = g(x)$ . При проведенні потенціювання  
отримуємо рівняння-наслідок, що приводить до  
можливості появи сторонніх коренів. Перевірка  
отриманих розв'язків обов'язкова.

Логарифмування

Процедура, при проведенні якої здійснюється  
перехід від рівняння виду  $f(x) = g(x)$  до  
логарифмічного рівняння  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ .  
Загалом логарифмування звужує ОДЗ заданого  
рівняння, що може привести до втрати коренів.  
Тому цю процедуру застосовують, коли обидві  
частини заданого рівняння додатні  
( $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ ).

**Приклад 13.1.** Розв'язати рівняння  
 $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ .  
 ОДЗ:  $2x > 0, \quad x > 0$ . За  
 визначенням логарифма маємо  $2x = 4^{\frac{1}{2}}$ ,  
 $x = 1$ .  
 Відповідь: 1.

**Приклад 13.2.** Розв'язати рівняння  
 $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ .  
 ОДЗ:  $x > 0$ . Послідовно  
 використовуючи визначення  
 логарифма, отримаємо  $\log_3 \log_2 x = 1$ ,  
 $\log_2 x = 3, \quad x = 8$ .  
 Відповідь: 8.

**Приклад 13.3.** Розв'язати рівняння  
 $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$ .  
 ОДЗ знайдемо частково:  $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases}$ ,  
 $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ . Використовуючи визначення  
 логарифма, запишемо рівняння у  
 вигляді  $2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x+1)^3$ .  
 Після перетворень одержимо рівняння  
 $x^3 - x^2 - 6x = 0$ , корені якого  $x_1 = 0$ ,  
 $x_2 = -2, \quad x_3 = 3$ . Корені  $x_1 = 0$ ,  
 $x_2 = -2$  не підходять за ОДЗ.  
 Перевіримо значення змінної  $x = 3$ :  
 $\log_4(2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1) = 3, \quad 64 = 64$ .  
 Отримали правильну числову рівність,  
 $x = 3$  корінь заданого рівняння.  
 Відповідь: 3.

**13.1.** Розв'язати рівняння  
 $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ .  
 (Відповідь: 1)

**13.2.** Розв'язати рівняння  
 $\log_4 \log_3(3 \log_2(x^2 - 1)) = \frac{1}{2}$ .  
 (Відповідь:  $\pm 3$ )

**13.3.** Розв'язати рівняння  
 $\log_{\sqrt{x+5}}(3x^2 + 16x + 5) = 4$ .  
 (Відповідь: 2)

**13.4.** Розв'язати рівняння  
 $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$ .  
 (Відповідь: 2; 3)

**13.5.** Розв'язати рівняння  
 $\log_{0,5} x + 2 \log_2 x = 1$ .  
 (Відповідь: 2)

**13.6.** Розв'язати рівняння  
 $\log_2 x(2-x) + \log_2 \frac{x}{2-x} = 0$ .  
 (Відповідь: 1)

**13.7.** Розв'язати рівняння  
 $\lg(2-x)^2 + \lg(x-4)^2 = 0$ .  
 (Відповідь:  $3, 3 \pm \sqrt{2}$ )

**13.8.** Розв'язати рівняння  
 $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 = \frac{1}{2}$ .  
 (Відповідь: -1,25)

Методи розв'язку

Більш складні логарифмічні рівняння за допомогою визначення логарифма, властивостей логарифма можна перетворити у найпростіші логарифмічні рівняння, які зводять до рівносильних алгебраїчних систем рівнянь та нерівностей. Також існують такі типи логарифмічних рівнянь, які розв'язують через введення нової змінної, що дозволяє отримати алгебраїчне рівняння, розв'язати його та після зворотної заміни отримати найпростіші логарифмічні рівняння.

Логарифмічні нерівності

Нерівності, які містять невідому змінну під знаком логарифма або в основі логарифма.

Наприклад,  $\log_5(3x-2) > 1$ ,  $\ln e^x \leq 2 \ln e^{x+1}$ ,

$$\frac{\lg x}{\lg x - 1} - \frac{2}{3 \lg x - 3} \geq 1, \log_{x-1}(x^2 - 4) < 2.$$

Розв'язок логарифмічних нерівностей базується на монотонності логарифмічної функції  $y = \log_a x$ , при  $a > 1$  логарифмічна функція монотонно зростає на всій області визначення; при  $0 < a < 1$  логарифмічна функція монотонно спадає на всій області визначення.

Якщо ж функція  $y = f(x)$  монотонно зростає (спадає) на своїй області визначення, то нерівність  $f(a) > f(b)$  еквівалентна нерівності  $a > b$  ( $a < b$ ).

Найпростіші логарифмічні нерівності

1. Нерівність  $\log_a f(x) \vee b$ , при  $a > 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $>, \geq$ ) рівносильна нерівності  $f(x) \vee a^b$ . При такому переході треба пам'ятати, що при  $a > 1$  знак еквівалентної алгебраїчної нерівності зберігається.

**Приклад 13.4.** Розв'язати рівняння  $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3 \lg 2 + \lg(x-2)$ .

ОДЗ:  $x > 2$ . Використовуючи властивості логарифмів, отримаємо рівняння  $\lg((x-1)(x+1)) = \lg(8(x-2))$ . Після його потенціювання отримаємо алгебраїчне рівняння

$$(x-1)(x+1) = 8(x-2), \quad x^2 - 8x + 15 = 0,$$

корені якого  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$ . Обидва кореня входять до ОДЗ рівняння.

Відповідь: 3; 5.

**Приклад 13.5.** Розв'язати рівняння  $0,1 \cdot x^{\lg x - 2} = 100$ .

ОДЗ:  $x > 0$ . Помножимо рівняння на 10 та злогарифмуємо його  $\lg x^{\lg x - 2} = \lg 1000$ . Після застосування властивостей логарифмів маємо  $(\lg x - 2) \lg x = 3$ . Введемо заміну  $\lg x = t$  та отримаємо квадратне рівняння  $t^2 - 2t - 3 = 0$ , корені якого  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = -1$ . Після зворотної заміни маємо два найпростіших логарифмічних рівняння  $\lg x = 3$  або  $\lg x = -1$ , розв'язками яких є  $x = 1000$  або  $x = 0,1$ .  
Відповідь: 1000; 0,1.

**Приклад 13.6.** Розв'язати нерівність  $\log_5(x^2 - 5x + 7) > 0$ .

Це найпростіша логарифмічна нерівність, що рівносильна нерівності  $x^2 - 5x + 7 > 1$  чи  $x^2 - 5x + 6 > 0$ , розв'язком якої є  $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ .

**13.9.** Розв'язати рівняння  $\log_{3x} x = \log_{9x} x$ .

(Відповідь: 1)

**13.10.** Розв'язати рівняння

$$2 \log_2^2 x - 11 = 3 \log_2 \frac{x}{4}.$$

(Відповідь: 0,5;  $4\sqrt{2}$ )

**13.11.** Розв'язати рівняння

$$\log_2^2(2x) = \log_2 x^4.$$

(Відповідь: 2)

**13.12.** Розв'язати рівняння

$$2 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 4.$$

(Відповідь: -100)

**13.13.** Розв'язати рівняння

$$x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}.$$

(Відповідь: 1; 100)

**13.14.** Розв'язати рівняння

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$$

(Відповідь:  $\frac{1}{6}$ ; 6)

**13.15.** Розв'язати рівняння

$$9^{\lg x} - 2 \cdot x^{\lg 3} = 3.$$

(Відповідь: 10)

**13.16.** Розв'язати нерівність

$$\log_5(x-5) \leq \log_5 9.$$

(Відповідь: (5; 14])

2. Нерівність  $\log_a f(x) \vee b$ , при  $0 < a < 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $>, \geq$ ) рівносильна системі

нерівностей  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \vee a^b \end{cases}$ . Треба пам'ятати, що

при  $0 < a < 1$  знак другої нерівності в системі змінюється на протилежний.

3. Нерівність  $\log_a f(x) \vee b$ , при  $a > 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $<, \leq$ ) рівносильна системі

нерівностей  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \vee a^b \end{cases}$ . Треба пам'ятати, що

при  $a > 1$  знак другої нерівності в системі зберігається.

4. Нерівність  $\log_a f(x) \vee b$ , при  $0 < a < 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $<, \leq$ ) рівносильна нерівності

$f(x) \vee a^b$ , ( $\vee$  – один із знаків  $>, \geq$ ). При такому переході треба пам'ятати, що при  $0 < a < 1$  знак еквівалентної алгебраїчної нерівності змінюється на протилежний.

5. Нерівність  $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$ , при  $a > 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ ) рівносильна

системі  $\begin{cases} f(x) \vee g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ . Треба пам'ятати, що при

$a > 1$  знак першої нерівності в системі зберігається.

6. Нерівність  $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$ , при  $0 < a < 1$ , ( $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ )

рівносильна системі  $\begin{cases} f(x) \vee g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ . Треба

пам'ятати, що при  $0 < a < 1$  знак першої нерівності в системі змінюється на протилежний.

**Приклад 13.7.** Розв'язати нерівність  $\log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$ .

Задана логарифмічна нерівність еквівалентна системі  $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 8 \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 4x - 5 \leq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (x-3)(x-1) > 0 \\ (x-5)(x+1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ x \in [-1; 5] \end{cases}, \quad x \in [-1; 1) \cup (3; 5].$$

Відповідь:  $x \in [-1; 1) \cup (3; 5]$ .

**Приклад 13.8.** Розв'язати нерівність  $\log_{0,1} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$ .

Запишемо рівносильну нерівність  $\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1$ , яка враховує ОДЗ для логарифма з основою 0,1. Наступна рівносильна нерівність  $\frac{x^2 + x}{x + 4} > 6$

враховує ОДЗ для логарифма з основою 6. Виконуючи перетворення отримаємо дробово-раціональну нерівність

$$\frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0, \quad \frac{(x-8)(x+3)}{x+4} > 0,$$

розв'язком якої є  $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty)$ .

Відповідь:  $x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty)$ .

**Приклад 13.9.** Розв'язати нерівність  $\log_{0,04}(x+7) \geq \log_{0,2}(x+1)$ .

ОДЗ:  $x > -1$ . Використовуючи властивості логарифмів, зрівняємо основи логарифмів в заданій нерівності.

**13.17.** Розв'язати нерівність  $\log_{\frac{1}{5}}(x-2) > -1$ .

(Відповідь: (2; 5) )

**12.18.** Розв'язати нерівність  $\log_{0,2} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \leq 0$ .

(Відповідь: (3; 4]  $\cup$  [6; + $\infty$ ) )

**13.19.** Розв'язати нерівність  $\log_{0,3} \log_2 \frac{x}{x+1} > 0$ .

(Відповідь: (- $\infty$ ; -2) )

**13.20.** Розв'язати нерівність  $\log_{\lg 8}(2x-3) \geq 0$ .

(Відповідь: (1,5; 2] )

**13.21.** Розв'язати нерівність  $\log_{\sqrt{8}} x - \log_8(3-x) \leq \frac{2}{3}$ .

(Відповідь: (0; 2] )

**13.22.** Розв'язати нерівність  $\log_{\frac{1}{2}}(x-7) + \log_{\frac{1}{2}} x < -3$ .

(Відповідь: (8; + $\infty$ ) )

**13.23.** Розв'язати нерівність  $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x \leq 1$ .

(Відповідь:

$[\frac{1}{27}; 1) \cup [9; +\infty)$ )

Методи розв'язку

За допомогою визначення логарифма, властивостей логарифма більш складні логарифмічні нерівності можна перетворити у найпростіші логарифмічні нерівності, які зводять до рівносильних алгебраїчних нерівностей чи їх систем. Деякі типи логарифмічних нерівностей розв'язують через введення нової змінної, що дозволяє отримати алгебраїчну нерівність, розв'язати її та після зворотної заміни отримати найпростіші логарифмічні нерівності їх системи чи сукупності.

Логарифмічні нерівності змінною основою

зі

$\log_{a(x)} f(x) \vee \log_{a(x)} g(x)$  ( $\vee$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ ) розв'язуються, розглядаючи сукупність двох випадків (систем):

1. Вираз в основі логарифма  $a(x) > 1$ : знак  $\vee$

зберігається, маємо систему 
$$\begin{cases} f(x) \vee g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases};$$

2. Вираз в основі логарифма  $0 < a(x) < 1$ : знак  $\vee$  змінюється на протилежний, маємо систему

$$\begin{cases} f(x) \vee g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

$$\frac{1}{2} \log_{0,2}(x+7) \geq \log_{0,2}(x+1),$$

$$\log_{0,2}(x+7) \geq 2 \log_{0,2}(x+1),$$

$$\log_{0,2}(x+7) \geq \log_{0,2}(x+1)^2. \quad \text{Після}$$

потенціювання маємо  $(x+7) \leq (x+1)^2$ .

Виконавши перетворення, отримаємо квадратичну нерівність  $x^2 + x - 6 \geq 0$ ,  $(x+3)(x-2) \geq 0$ , розв'язком якої є  $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ . Враховуючи

ОДЗ, отримаємо відповідь  $x \in (2; +\infty)$ .

Відповідь:  $x \in (2; +\infty)$ .

**Приклад 13.7.** Розв'язати нерівність  $\log_{2-x}(2+x) \leq 0$ .

Розглянемо перший випадок:  $2-x > 1$ . Тоді маємо систему

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2+x \leq 1 \end{cases}, \begin{cases} x > -2 \\ x \leq -1 \end{cases}. \text{ Враховуючи умову}$$

для основи логарифма  $x < 1$ , отримаємо відповідь для першого випадку  $x \in (-2; -1]$ .

Розглянемо другий випадок:  $0 < 2-x < 1$ . Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2+x > 0 \\ 2+x \geq 1 \end{cases}, \begin{cases} x > -2 \\ x \geq -1 \end{cases}. \text{ Враховуючи умову}$$

для основи логарифма  $1 < x < 2$ , отримаємо відповідь для другого випадку  $x \in (1; 2)$ .

Загальна відповідь це сукупність відповідей першого і другого випадків.

Відповідь:  $x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$ .

**13.24.** Розв'язати нерівність

$$5 \log_{0,5} x \leq 6 + \log_{0,5}^2 x.$$

(Відповідь:

$$(0; \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}; +\infty))$$

**13.25.** Розв'язати нерівність

$$\frac{\lg^2 x - \lg x^3 + 3}{\lg x - 1} \leq 1.$$

У відповіді вказати найбільший цілий розв'язок.

(Відповідь: 100)

**12.26.** Розв'язати нерівність

$$\lg^2(-x) + \lg x^2 < 3.$$

(Відповідь:  $(-10; -0,001)$ )

**13.27.** Розв'язати нерівність

$$3^{\lg x+2} + 2 < 3^{\lg x^2+5}.$$

(Відповідь:  $(0,01; +\infty)$ )

**13.28.** Розв'язати нерівність

$$\log_{x-3}(4-x) > 1.$$

(Відповідь:  $(3,5; 4)$ )

**13.29.** Розв'язати нерівність

$$\log_{x-4}(2x^2 - 9x + 4) > 1.$$

(Відповідь:  $(5; +\infty)$ )

## 14 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Тригонометричні  
рівняння

*Тригонометричними рівняннями* називають рівняння, які містять невідомі величини під знаком тригонометричних функцій. Зазвичай під розв'язком тригонометричних рівнянь розуміють формули, що містять цілий параметр. За допомогою цих формул можна обчислити будь-який числовий корінь тригонометричного рівняння, задаючи параметру конкретні значення.

Найпростіші  
тригонометричні  
рівняння

*Найпростішими* тригонометричними рівняннями називають рівняння виду

$$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a,$$

де  $x$  – невідома величина,  $a$  – задане число.

Розв'язок  
рівняння  
 $\sin x = a$

При  $a < -1$  або  $a > 1$  це рівняння не має коренів ( $x \in \emptyset$ ), так як  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

При  $-1 \leq a \leq 1$  рівняння  $\sin x = a$  має розв'язок

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi l, l \in Z, \end{cases}$$

де  $Z$  – множина всіх цілих чисел. Ці формули пояснює рис. 14.1.

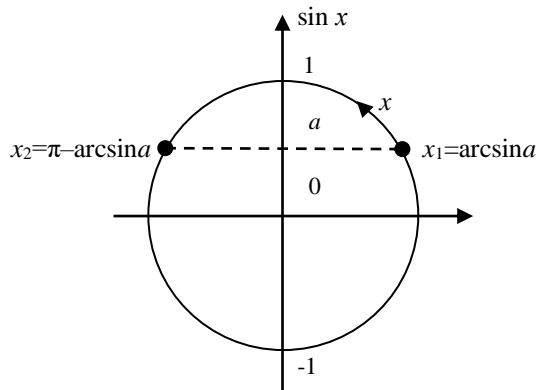
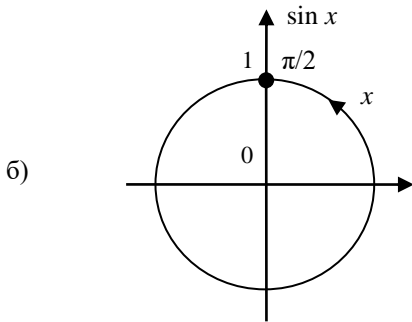
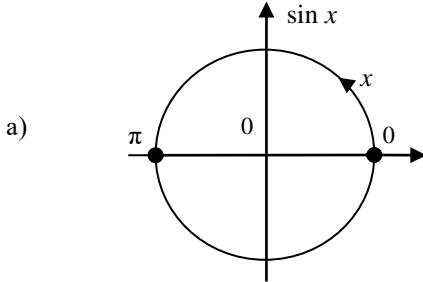


Рис. 14.1.

**Приклад 14.1.** Зобразимо на одиничному колі з тригонометричними осями (на тригонометричній діарамі) точки, які відповідають множині коренів наступних рівнянь: а)  $\sin x = 0$ ; б)  $\sin x = 1$ .



Ці рисунки пояснюють походження формул:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 14.2.** Розв'язати рівняння: а)  $\sin(x/3) = -1/3$ ; б)  $\sin(3x - 45^\circ) = 0,5$ .

$$\text{а) } \frac{x}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n;$$

$$\frac{x}{3} = -(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n;$$

**14.1.** Зобразити на одиничному колі з тригонометричними осями точки, які відповідають множині коренів рівняння  $\sin x = -1$ .

**14.2.** Розв'язати рівняння:

а)  $\sin(2x + \pi/4) = 0,2$ ;

б)  $\sin(2x - 2\pi/3) = -0,2$ ;

в)  $\sin(5x + 30^\circ) = \sqrt{2}/2$ ;

г)  $\sin 5x = -\sqrt{3}/2$ .

(Відповідь:

а)  $x = \frac{(-1)^n}{2} \arcsin 0,2 -$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

б)  $x = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \arcsin 0,2 +$

$$+\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

в)  $x = (-1)^n 9^\circ - 6^\circ + 36^\circ n,$   
 $n \in \mathbb{Z};$

г)  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5},$   
 $n \in \mathbb{Z})$

**14.3.** Знайти суму коренів рівняння

$$\sin\left(\frac{\pi(x-3)}{4}\right) = 1,$$

що належать проміжку  $-6 < x < 6$ .

(Відповідь: 2)

На рис. 14.1 зображений випадок при  $a \in [0; 1]$ . Однак формули залишаються справедливими і при  $a \in [-1; 0)$ . При  $a = \pm 1$  множини коренів, що описуються кожною формулою сукупності, збігаються.

Множину коренів, що описуються обома формулами, можна описати однією формулою

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z,$$

яка справедлива при всіх  $a \in [-1; 1]$ .

Ця формула спрощується при  $a = 0$ :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z.$$

Крім того, при  $a = \pm 1$  вона дає повторення коренів. У цих випадках краще використовувати більш прості формули:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z.$$

Розв'язок рівняння  $\cos x = a$

При  $a < -1$  або  $a > 1$   $\cos x = a \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

При  $-1 \leq a \leq 1$  (див. рис. 14.2)

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$$

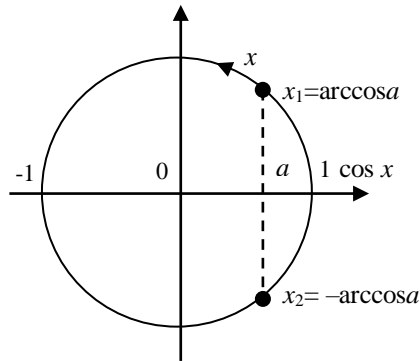


Рис. 14.2.

У випадках  $a = -1; 0; 1$  краще використовувати формули:

$$\frac{x}{3} = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n;$$

$$x = (-1)^{n+1} 3 \arcsin \frac{1}{3} + 3\pi n; n \in Z.$$

Зверніть увагу, що коефіцієнт 3 не можна вносити усередину арксинуса.

б)  $3x - 45^\circ = (-1)^n \arcsin 0,5 + \pi n;$

$$3x = 45^\circ + (-1)^n 30^\circ + 180^\circ n;$$

$$x = 15^\circ + (-1)^n 10^\circ + 60^\circ n; n \in Z.$$

Відповідь:

а)  $x = (-1)^{n+1} 3 \arcsin \frac{1}{3} + 3\pi n, n \in Z;$

б)  $x = 15^\circ + (-1)^n 10^\circ + 60^\circ n, n \in Z.$

**Приклад 14.3.** Розв'язати рівняння:

а)  $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{3};$  б)  $\cos(3x - 45^\circ) = \frac{1}{2}.$

а)  $\frac{x}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n;$

$$\frac{x}{3} = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n;$$

$$x = \pm 3 \left( \pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 6\pi n; n \in Z.$$

б)  $3x - 45^\circ = \pm \arccos 0,5 + 2\pi n;$

$$3x = 45^\circ \pm 60^\circ + 360^\circ n;$$

$$x = 15^\circ \pm 20^\circ + 120^\circ n; n \in Z.$$

Відповідь: а)  $x = \pm 3 \left( \pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 6\pi n,$

$n \in Z;$  б)  $x = 15^\circ \pm 20^\circ + 120^\circ n, n \in Z.$

**Приклад 14.4.** Розв'язати рівняння:

а)  $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -\frac{1}{3};$  б)  $\operatorname{ctg} 3x = -3.$

**14.4.** Зобразити на одиничному колі з тригонометричними осями точки, які відповідають множинам коренів рівнянь: а)  $\cos x = 1;$  б)  $\cos x = 0;$  в)  $\cos x = -1.$

**14.5.** Розв'язати рівняння:

а)  $\cos(2x + \pi/4) = 0,2;$

б)  $\cos(2x - 2\pi/3) = -0,2;$

в)  $\cos(5x + 30^\circ) = \sqrt{2}/2;$

г)  $\cos 5x = -\sqrt{3}/2.$

(Відповідь:

а)  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos 0,2 -$

$-\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z;$

б)  $x = \pm \frac{1}{2} (\pi - \arccos 0,2) +$

$+\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z;$

в)  $x = \pm 9^\circ - 6^\circ + 72^\circ n,$   
 $n \in Z;$

г)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z)$

**14.6.** Знайти суму коренів

рівняння: а)  $\cos 2x = -0,5$

на проміжку

$$180^\circ < x < 360^\circ;$$

б)  $\cos(3x + 60^\circ) = -1$

на проміжку

$$-360^\circ \leq x \leq -180^\circ.$$

(Відповідь: а)  $540^\circ;$

б)  $-520^\circ)$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язок рівнянь  
 $\operatorname{tg} x = a$  і  $\operatorname{ctg} x = a$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометричні  
рівняння, які  
зводяться до  
квадратних за  
допомогою заміни

У рівняннях виду

$$a \sin^2 \alpha(x) + b \sin \alpha(x) + c =$$

$$= d \cos^2 \alpha(x) + e \cos(2\alpha(x))$$

після перетворень правій частині  
 $d(1 - \sin^2 \alpha(x)) + e(1 - 2\sin^2 \alpha(x))$  можна  
зробити заміну  $t = \sin \alpha(x) \in [-1; 1]$ . В  
результаті виходить квадратне або в  
крайньому випадку лінійне рівняння.

У рівняннях виду

$$a \cos^2 \alpha(x) + b \cos \alpha(x) + c =$$

$$= d \sin^2 \alpha(x) + e \cos(2\alpha(x))$$

після перетворень правій частині  
 $d(1 - \cos^2 \alpha(x)) + e(2\cos^2 \alpha(x) - 1)$  можна  
зробити заміну  $t = \cos \alpha(x) \in [-1; 1]$ .

У рівняннях виду

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha(x) + b \operatorname{tg} \alpha(x) + c = d / \cos^2 \alpha(x)$$

після перетворень правій частині  
 $d(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x))$  можна зробити заміну  
 $t = \operatorname{tg} \alpha(x)$ . У рівняннях виду

$$a \operatorname{ctg}^2 \alpha(x) + b \operatorname{ctg} \alpha(x) + c = d / \sin^2 \alpha(x)$$

після перетворень правій частині  
 $d(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha(x))$  можна зробити заміну  
 $t = \operatorname{ctg} \alpha(x)$ .

$$a) \frac{x}{3} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n;$$

$$\frac{x}{3} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; \quad x = -3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 3\pi n;$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$b) 3x = \operatorname{arccctg}(-3) + \pi n;$$

$$3x = \pi - \operatorname{arccctg}3 + \pi n;$$

$$3x = -\operatorname{arccctg}3 + \pi(n+1); \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Заміна: } l = n + 1. \quad 3x = -\operatorname{arccctg}3 + \pi l;$$

$$x = -\frac{1}{3}\operatorname{arccctg}3 + \frac{\pi l}{3}; \quad l \in \mathbb{Z}. \quad \text{Відповідь:}$$

$$a) x = -3\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = -\frac{1}{3}\operatorname{arccctg}3 + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 14.5.** Розв'язати рівняння  
 $5 \sin x - \cos 2x + 3 = 0.$

$$5 \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) + 3 = 0.$$

$$\text{Заміна: } t = \sin x \in [-1; 1].$$

$$5t - (1 - 2t^2) + 3 = 0; \quad 2t^2 + 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = -1/2; \quad t_2 = -2 \notin [-1; 1].$$

$$\text{Зворотна заміна: } \sin x = -1/2;$$

$$x = (-1)^n \arcsin(-1/2) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 14.6.** Розв'язати рівняння  
 $\operatorname{tg}x + 3 \operatorname{ctg}x = 4.$

$$\operatorname{tg}x + 3/\operatorname{tg}x = 4.$$

$$\text{Заміна: } t = \operatorname{tg}x \neq 0; \quad t + 3/t = 4;$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = 3.$$

$$\text{Зворотна заміна:}$$

**14.7.** Розв'язати рівняння:

$$a) \operatorname{tg}2x = -\sqrt{3};$$

$$b) \operatorname{ctg}(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}.$$

(Відповідь:

$$a) x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = 30^\circ + 90^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z})$$

**14.8.** Знайти суму коренів

$$\text{рівняння } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(x-1)}{2}\right) = 0$$

на проміжку  $-3 < x < 3.$

(Відповідь: 0)

**14.9.** Розв'язати рівняння:

$$a) 2 \sin x - \cos^2 x = 2;$$

$$b) 8 \sin^2 2x + 2 \cos 2x = 5.$$

(Відповідь:

$$a) x = \pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + \pi n,$$

$$x = \pm 5\pi/12 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z})$$

**14.10.** Розв'язати рівняння:

$$a) 1/\sin^2 x - 3 \operatorname{ctg}x + 1 = 0;$$

$$b) 1/\cos^2 3x - \operatorname{ctg}3x = 3.$$

(Відповідь:

$$a) x = \operatorname{arccctg}2 + \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}2 + \frac{\pi n}{3},$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z})$$

У рівняннях виду

$$a \operatorname{tg} \alpha(x) + b \operatorname{ctg} \alpha(x) + c = 0$$

можна зробити заміну  $t = \operatorname{tg} \alpha(x) \neq 0$ . В результаті вийде рівняння, яке зводиться до квадратного. Існують і інші рівняння, які зводяться до квадратних. Але вони мають свої назви. Про них мова піде нижче.

Метод  
універсальної  
підстановки

Розв'язання рівняння виду

$$F(\sin \alpha(x), \cos \alpha(x)) = 0$$

можна звести до розв'язання алгебраїчного рівняння, застосовуючи *формули універсальної підстановки*:

$$\sin \alpha(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

де  $t = \operatorname{tg}(\alpha(x)/2)$ .

Цей метод має «підводний камінь»: залучення формул універсальної підстановки звужує область допустимих значень (ОДЗ). З'являється додаткове обмеження:  $\cos(\alpha(x)/2) \neq 0$ ,  $\alpha(x) \neq \pi + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  – умова існування  $\operatorname{tg}(\alpha(x)/2)$ , якого немає у початкового рівняння. Тому треба обов'язково робити перевірку: чи є розв'язки рівняння  $\alpha(x) = \pi + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  розв'язками заданого рівняння. Іншим недоліком цього методу є те, що часто виходить алгебраїчне рівняння високого порядку, розв'язання якого проблематично. Тому, якщо є можливість залучити більш простий метод, то треба це робити. Наприклад, для рівняння виду

$$F(\sin^2 \alpha(x), \cos^2 \alpha(x)) = 0$$

залучення *формул пониження ступеня*  $\sin^2 \alpha(x) = (1-c)/2$ ,  $\cos^2 \alpha(x) = (1+c)/2$ , де  $c = \cos(2\alpha(x))$ , дає алгебраїчне рівняння значно меншого порядку.

- 1)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;  
 2)  $\operatorname{tg} x = 3$ ;  $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .  
 Відповідь:  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  
 $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.7.** Розв'язати рівняння:

- а)  $\sin 2x - 5 \cos 2x = 5$ ;  
 б)  $2 \sin 2x - \cos 2x = (\operatorname{tg} x + 1)/\operatorname{tg} x$ .

а) ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$ .

Застосуємо універсальну підстановку:

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

де  $t = \operatorname{tg} x$ .  $\frac{2t}{1+t^2} - 5 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5$ ;  $t = 5$ .

$\operatorname{tg} x = 5$ ;  $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Ця підстановка виконується при обмеженні:  $\cos x \neq 0$ ;  $x \neq \pi/2 + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Тому перевіримо, чи є  $x = \pi/2 + \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  розв'язками заданого рівняння:

$\sin(\pi + 2\pi l) - 5 \cos(\pi + 2\pi l) = 5$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;

$0 - 5 \cdot (-1) = 5$ ;  $5 = 5$ . Розв'язки.

б) ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ ;  $\operatorname{tg} x \neq 0$ . Застосуємо

ту ж підстановку:  $\frac{2 \cdot 2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{t+1}{t}$ ,

де  $t = \operatorname{tg} x \neq 0$ ;  $3t^2 - 2t - 1 = 0$ ;  $t_1 = 1$ ;

$t_2 = -1/3$ . 1)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $\operatorname{tg} x = -1/3$ ;  $x = -\operatorname{arctg}(1/3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Перевірку тут робити не треба, так як обмеження  $\cos x \neq 0$  присутній в ОДЗ рівняння. Відповідь: а)  $x = \pi/2 + \pi n$ ,  
 $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  
 $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

- 14.11.** Розв'язати рівняння  
 $\sqrt{3} \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} + 1$ .  
 (Відповідь:  $x = \pi/6 + \pi n/2$ ,  
 $x = \pi/8 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$ )

- 14.12.** Розв'язати рівняння  
 $\operatorname{ctg} x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}$ .

Зауваження: при розв'язанні цього рівняння методом універсальної підстановки зазначена перевірка обов'язкова.  
 (Відповідь:  $x = -\pi/4 + \pi n$ ,  
 $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ )

- 14.13.** Розв'язати рівняння

а)  $2 \sin 2x - \cos 2x = \frac{\operatorname{tg} x + 3}{\operatorname{tg} x + 1}$

б)  $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{1}{3} \cos 2x$ .

(Відповідь:

а)  $x = \pi/4 + \pi n$ ,

$x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $x = \pi n - \pi/4, n \in \mathbb{Z}$ )

- 14.14.** Розв'язати рівняння

$2 \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 2$ .

Зауваження: рекомендуємо застосувати формули пониження степеня для  $\sin^2 x$  і  $\cos^2 x$ .  
 (Відповідь:  $x = \pi/4 + 2\pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ )

Однорідні рівняння 1-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$

Вони мають вигляд

$$a \sin \alpha(x) + b \cos \alpha(x) = 0$$

і зводяться до рівняння

$$\operatorname{tg} \alpha(x) = -b/a.$$

Неоднорідні рівняння 1-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$

Вони мають вигляд

$$a \sin \alpha(x) \pm b \cos \alpha(x) = c,$$

де  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c \neq 0$ .

Розв'язуються трьома способами: 1) методом універсальної підстановки, який був описаний вище; 2) методом зведення до однорідного рівняння 2-го порядку відносно функцій  $\sin(\alpha(x)/2)$  і  $\cos(\alpha(x)/2)$ ; 3) методом введення допоміжного кута.

Другий метод за обсягом і формою перетворень подібний до першого. Ми його розглянемо пізніше. Зараз опишемо третій метод. Відзначимо: форма відповідей, що отримується з його допомогою, помітно відрізняється від форми відповідей, яку дають перший і другий методи.

У ньому обчислюється  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

$$a \sin \alpha(x) \pm b \cos \alpha(x) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha(x) \pm \beta) = c/A,$$

де  $\beta$  – допоміжний кут, який дорівнює

$$\beta = \arcsin \frac{b}{A} = \arccos \frac{a}{A} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arcctg} \frac{a}{b}.$$

Також

$$a \sin \alpha(x) \pm b \cos \alpha(x) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha(x) \mp \gamma) = \pm c/A,$$

де  $\gamma$  – інший допоміжний кут, який дорівнює

$$\gamma = \arcsin \frac{a}{A} = \arccos \frac{b}{A} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \operatorname{arcctg} \frac{b}{a}.$$

Відзначимо, що зазвичай у відповідях вказують одну з форм запису значення допоміжного кута.

**Приклад 14.8.** Розв'язати рівняння  $\sin x - \cos x = 0$ .

Ділимо рівняння на  $\cos x$  і отримуємо:  $\operatorname{tg} x - 1 = 0$ ;  $\operatorname{tg} x = 1$ .

Відповідь:  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.9.** Розв'язати рівняння:

а)  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ ;

б)  $3 \cos 3x - 4 \sin 3x = 5$ .

а)  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Розділимо дане рівняння на  $\sqrt{2}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -1.$$

Зведемо ліву частину рівняння до синусу суми:

$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = -1;$$

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -1; \quad x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б)  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

Розділимо дане рівняння на 5:

$$\frac{3}{5} \cos 3x - \frac{4}{5} \sin 3x = 1.$$

Зведемо ліву частину до косинусу суми:

$$\cos 3x \cos \gamma - \sin 3x \sin \gamma = 1,$$

де  $\gamma = \arcsin(4/5)$ ;  $\cos(3x + \gamma) = 1$ ;

$$3x + \gamma = 2\pi n; \quad x = -\frac{\gamma}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: а)  $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $x = -\frac{1}{3} \arcsin 0,8 + \frac{2\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**14.15.** Розв'язати рівняння:

а)  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$ ;

б)  $\sin x + 2 \cos x = 0$ .

(Відповідь: а)  $-\pi/6 + \pi n/2$ ,

б)  $-\arctg 2 + \pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ )

**14.16.** Розв'язати рівняння:

а)  $\sin 4x + \cos 4x = 3/2$ ;

б)  $\sin x - \cos x = \sqrt{3/2}$ ;

в)  $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2$ ;

г)  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1$ .

(Відповідь:

а)  $x \in \emptyset$ ;

б)  $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ;

в)  $x = \frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{30}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

г)  $x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ )

**14.17.** Розв'язати рівняння:

а)  $4 \cos 7x - 3 \sin 7x = \sqrt{26}$ ;

б)  $2 \sin x + 7 \cos x = \sqrt{53}/2$ ;

в)  $12 \sin 2x - 5 \cos 2x = 13$ .

(Відповідь:

а)  $x \in \emptyset$ ;

б)  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \arctg 3,5 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

в)  $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2,4 + \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ )

Однорідні рівняння 2-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$

Вони мають вигляд:  $a \sin^2 \alpha(x) + b \sin \alpha(x) \cos \alpha(x) + c \cos^2 \alpha(x) = 0$ .

Якщо  $a = 0$ , то

$$\begin{aligned} b \sin \alpha(x) \cos \alpha(x) + c \cos^2 \alpha(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \alpha(x) (b \sin \alpha(x) + c \cos \alpha(x)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha(x) = 0, \\ b \sin \alpha(x) + c \cos \alpha(x) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

У сукупності одне з рівнянь є однорідним 1-го порядку.

Аналогічно, якщо  $c = 0$ .

Якщо  $a \neq 0$  і  $c \neq 0$ , то синус або косинус не виносяться за дужки. У цьому випадку рівняння ділять на  $\cos^2 \alpha(x)$ . В результаті виходить квадратне рівняння відносно тангенса:  $a \operatorname{tg}^2 \alpha(x) + b \operatorname{tg} \alpha(x) + c = 0$ . Далі заміна  $t = \operatorname{tg} \alpha(x)$ .

Неоднорідні рівняння 2-го порядку відносно функцій  $\sin \alpha(x)$  і  $\cos \alpha(x)$

Вони мають вигляд

$$a \sin^2 \alpha(x) + b \sin \alpha(x) \cos \alpha(x) + c \cos^2 \alpha(x) = d, \text{ де } d \neq 0.$$

Неоднорідне рівняння 2-го порядку зводять в однорідне 2-го порядку, перетворюючи праву частину наступним чином:

$$d \left( \sin^2 \alpha(x) + \cos^2 \alpha(x) \right).$$

Перетворення неоднорідного рівняння 1-го порядку в однорідне 2-го порядку

$$\begin{aligned} a \sin \alpha(x) + b \cos \alpha(x) &= c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a \sin \frac{\alpha(x)}{2} \cos \frac{\alpha(x)}{2} + \\ + b \left( \cos^2 \frac{\alpha(x)}{2} - \sin^2 \frac{\alpha(x)}{2} \right) &= \\ = c \left( \sin^2 \frac{\alpha(x)}{2} + \cos^2 \frac{\alpha(x)}{2} \right). \end{aligned}$$

**Приклад 14.10.** Розв'язати рівняння  $\sin^2 x - 7 \sin x \cos x = 0$ .  
 $\sin x (\sin x - 7 \cos x) = 0$ ;

$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ \sin x - 7 \cos x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x = 7. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = \pi n$ ,  $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.11.** Розв'язати рівняння  $\sin^2 x + \sin 2x = 3 \cos^2 x$ .

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$$

Розділимо рівняння на  $\cos^2 x$ .

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x = 3. \quad \text{Заміна: } t = \operatorname{tg} x;$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = -3.$$

1)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\operatorname{tg} x = -3$ ;  $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Відповідь:  $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$ ,  
 $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.12.** Розв'язати рівняння

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 4.$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0;$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0. \quad \text{Заміна: } t = \operatorname{tg} x;$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = 1/2.$$

1)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;  $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\operatorname{tg} x = 0,5$ ;  $x = \operatorname{arctg} 0,5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Відповідь:  $x = \operatorname{arctg} 0,5 + \pi n$ ,  
 $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**14.18.** Розв'язати рівняння  $\sqrt{3} \sin x \cos x = \cos^2 x$ .

(Відповідь:

$$x = \pi/2 + \pi n, \quad x = \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z})$$

**14.19.** Розв'язати рівняння

$$\sin^2 3x + 5 \sin 3x \cos 3x + 6 \cos^2 3x = 0.$$

(Відповідь:

$$x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{3},$$

$$x = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z})$$

**14.20.** Розв'язати рівняння:

а)  $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$ ;

б)  $20 \cos^2 2x + 1 = 5 \sin 4x$ .

(Відповідь:

а)  $x = \pi n$ ,  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{2}$ ,

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 7 + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z})$$

**14.21.** Розв'язати рівняння  $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3$ .

Зауваження: рекомендуємо звести дане рівняння до однорідного рівняння 2-го порядку.

(Відповідь:  $x = \pi/4 + \pi n$ ,  
 $x = \operatorname{arctg} 0,2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ )

Рівняння виду  $\sin \alpha(x) \pm \sin \beta(x) = 0$  У таких рівняннях застосовуються формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток. В результаті виходить сукупність рівнянь.

$$\begin{aligned} \sin \alpha(x) \pm \sin \beta(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha(x) \pm \beta(x)}{2} \cos \frac{\alpha(x) \mp \beta(x)}{2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{\alpha(x) \pm \beta(x)}{2} = 0, \\ \cos \frac{\alpha(x) \mp \beta(x)}{2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Рівняння виду  $\cos \alpha(x) \pm \cos \beta(x) = 0$  У таких рівняннях також застосовуються формули перетворення суми функцій у добуток. А далі розв'язують сукупність рівнянь.

Рівняння виду  $\sin \alpha(x) \pm \cos \beta(x) = 0$  У таких рівняннях, використовуючи одну з формул приведення, тригонометричні функції роблять однаковими.

$$\begin{aligned} \sin \alpha(x) \pm \cos \beta(x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \alpha(x) \pm \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta(x) \right) &= 0. \end{aligned}$$

А далі застосовуються формули перетворення суми функцій у добуток.

Зустрічаються і рівняння з більшим числом доданків, в яких доводиться неодноразово використовувати формули перетворення суми в добуток.

Також зустрічаються рівняння, в яких доводиться використовувати формули перетворення добутоків в суми.

**Приклад 14.13.**

Рівняння:

б)  $\sin 5x = \cos 3x$ .

а)  $\sin 5x - \sin 3x = 0$ ;

$$2 \sin \frac{5x-3x}{2} \cos \frac{5x+3x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ \cos 4x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 4x = \pi/2 + \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б)  $\sin 5x - \cos 3x = 0$ ;

$\sin 5x - \sin(\pi/2 - 3x) = 0$ ;

$$2 \sin \frac{5x - \pi/2 + 3x}{2} \cos \frac{5x + \pi/2 - 3x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin(4x - \pi/4) = 0; \\ \cos(x + \pi/4) = 0; \end{cases}$$

$4x - \pi/4 = \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x + \pi/4 = \pi/2 + \pi l, l \in \mathbb{Z}.$

Відповідь:

а)  $x = \pi n, \quad x = \pi/8 + \pi n/4, \quad n \in \mathbb{Z};$

б)  $x = \pi/16 + \pi n/4; \quad x = \pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 14.14.**Розв'язати рівняння  $\cos 3x \cos x = \cos 8x \cos 4x$ .

$$\frac{1}{2} (\cos(3x-x) + \cos(3x+x)) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(8x-4x) + \cos(8x+4x));$$

$\cos 2x + \cos 4x = \cos 4x + \cos 12x$ ;

$\cos 12x - \cos 2x = 0$ ;

$$-2 \sin \frac{12x+2x}{2} \sin \frac{12x-2x}{2} = 0;$$

$$\begin{cases} \sin 7x = 0; \\ \sin 5x = 0; \end{cases} \begin{cases} 7x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ 5x = \pi l, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = \pi n/7, \quad x = \pi n/5, \quad n \in \mathbb{Z}.$ 

Розв'язати

а)  $\sin 5x = \sin 3x$ ;

14.22. Розв'язати рівняння  $\cos 5x + \cos 3x = 0$ .

(Відповідь:  $x = \pi/8 + \pi n/4$ ,

$x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ )

14.23. Розв'язати рівняння:  $\sin 5x + \sin 3x = 0$ .

Зауваження.

При розв'язанні даного рівняння виходять дві формули коренів. Однак виявляється, що множина коренів, яка описується однією формулою, є підмножиною множини коренів, що описується іншою формулою.

(Відповідь:  $x = \pi n/4$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ )

14.24. Розв'язати рівняння  $\sin 4x + \sin x = \cos 5x - \cos 3x$ 

(Відповідь:  $x = \pi n/4$ ,

$x = 3\pi/8 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$ )

14.25. Розв'язати рівняння

$\sin^2 3x + \sin^2 4x =$

$= \sin^2 5x + \sin^2 6x.$

Зауваження: спочатку

треба понизити ступеня.

(Відповідь:  $x = \pi n/9$ ,

$x = \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$ )

14.26. Розв'язати рівняння  $\sin(70^\circ + x) \cos(20^\circ - x) = 0,5$ 

(Відповідь:  $x = 25^\circ + 90^\circ n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ )

Тригонометричні  
нерівності

Розв'язання  
найпростіших  
тригонометричних  
нерівностей з  
функцією  $\sin x$

*Тригонометричними нерівностями* називають нерівності, які містять невідомі величини під знаком тригонометричних функцій. Розглянемо *найпростіші тригонометричні нерівності* виду:  $\sin x \vee a$ ,  $\cos x \vee a$ ,  $\operatorname{tg} x \vee a$ ,  $\operatorname{ctg} x \vee a$ , де  $x$  – невідома величина,  $a$  – задане число, замість знака « $\vee$ » може бути будь-який із знаків:  $\geq$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $<$ .

Підкреслимо, що розуміння (і запам'ятовування) наступних формул без тригонометричної діаграми вельми складно.

При  $a > 1$   $\sin x \geq$  ( або  $>$  )  $a \Leftrightarrow x \in \emptyset$  ;

$\sin x \leq$  ( або  $<$  )  $a \Leftrightarrow x \in R$  .

При  $a = 1$   $\sin x \geq 1 \Leftrightarrow x \in \{\pi/2 + 2\pi n \mid n \in Z\}$  ;

$\sin x > 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$  ;

$\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x \in R$  ;

$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \in R \setminus \{\pi/2 + 2\pi n \mid n \in Z\}$  .

При  $-1 < a < 1$

$\sin x \geq a \Leftrightarrow x \in [\arcsin a + 2\pi n$  ;

$\pi - \arcsin a + 2\pi n]$ ,  $n \in Z$  (див. рис. 14.3);

$\sin x > a \Leftrightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi n$  ;

$\pi - \arcsin a + 2\pi n)$ ,  $n \in Z$  ;

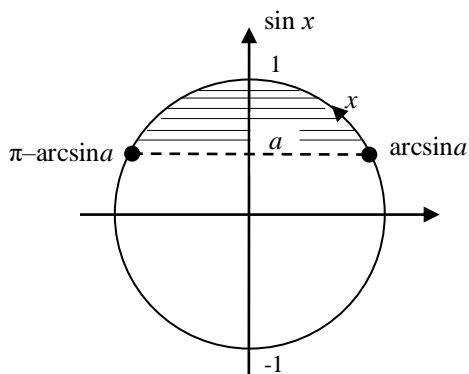
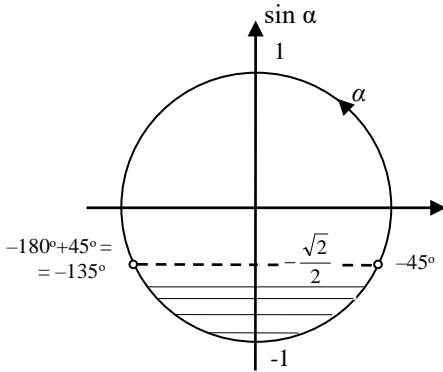


Рис. 14.3.

**Приклад 14.15.** Розв'язати нерівність  $\sin(5x - 10^\circ) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Заміна:  $\alpha = 5x - 10^\circ$ ;  $\sin \alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



$$\begin{aligned} -135^\circ + 360^\circ n < \alpha < -45^\circ + 360^\circ n; \\ -135^\circ + 360^\circ n < 5x - 10^\circ < -45^\circ + 360^\circ n; \\ -125^\circ + 360^\circ n < 5x < -35^\circ + 360^\circ n; \\ -25^\circ + 72^\circ n < x < -7^\circ + 72^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $x \in (72^\circ n - 25^\circ; 72^\circ n - 7^\circ)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.16.** Розв'язати нерівність  $\sin^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$ .

Заміна:  $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ .

$$\sin^2 \alpha \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\sin \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sin \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**14.27.** Розв'язати нерівність  $\sin 4x < -\sqrt{3}/2$ . (Відповідь:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$ . Зауваження: вірною є також відповідь

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$ . Чому?)

**14.28.** Розв'язати нерівність

$$-\sin\left(2 - \frac{x}{3}\right) > \frac{1}{3}.$$

(Відповідь:

$$x \in \left(6 + 3 \arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n;$$

$$3\pi + 6 - 3 \arcsin \frac{1}{3} + 6\pi n\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$ )

**14.29.** Розв'язати нерівність  $\sin 3x \cos x -$

$$-\cos 3x \sin x < 1/\sqrt{2}.$$

(Відповідь:

$$x \in \left(n\pi - \frac{5\pi}{8}; n\pi + \frac{\pi}{8}\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

**14.30.** Розв'язати нерівність

$$\sin(3x + 45^\circ) \geq -0,5.$$

(Відповідь:

$$x \in [-25^\circ + 180^\circ n;$$

$$55^\circ + 180^\circ n], \quad n \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x \leq a \Leftrightarrow x \in [-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z} \text{ (див. рис. 14.4);}$$

$$\sin x < a \Leftrightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

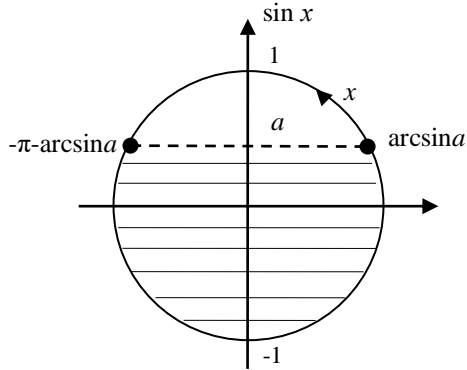


Рис. 14.4.

Відзначимо, що рис. 14.3 і 14.4 зроблені для випадку  $0 \leq a < 1$ , однак формули залишаються справедливими і при  $-1 < a < 0$ .

При  $a = -1$

$$\sin x \geq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2 + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\};$$

$$\sin x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \{-\pi/2 + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\};$$

$$\sin x < -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

При  $a < -1$   $\sin x \geq$  (або  $>$ )  $a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$

$$\sin x \leq$$
 (або  $<$ )  $a \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей з функцією  $\cos x$

При  $a > 1$   $\cos x \geq$  (або  $>$ )  $a \Leftrightarrow x \in \emptyset;$

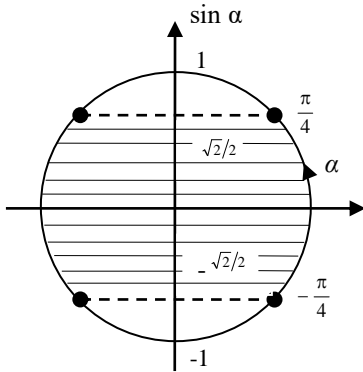
$$\cos x \leq$$
 (або  $<$ )  $a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

При  $a = 1$   $\cos x \geq 1 \Leftrightarrow x \in \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\};$

$$\cos x > 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$\cos x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$



Якщо дугу, що виділена штриховкою справа, повернути на  $\pi$  радіан, то вона зіллється з дугою, що виділена штриховкою ліворуч. Тому візьмемо праву дугу, додаючи до її граничним точкам  $\pi n$ .

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{x}{2} \leq \pi n; \quad -\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n.$$

Відповідь:  $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.17.**

Розв'язати

нерівність  $\cos(3x + 15^\circ) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Заміна:  $\alpha = 3x + 15^\circ$ ;

$$\cos \alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**14.31.** Розв'язати нерівність  $|\sin x| > 0,5$ .

(Відповідь:

$$x \in (\pi/6 + \pi n; 5\pi/6 + \pi n), \\ n \in \mathbb{Z})$$

**14.32.** Розв'язати нерівність  $\sin^2 x \leq 0,75$ .

(Відповідь:

$$x \in [-\pi/3 + \pi n; \pi/3 + \pi n], \\ n \in \mathbb{Z})$$

**14.33.** Розв'язати нерівність  $\cos(2x - 20^\circ) \geq 1$ .

(Відповідь:

$$x \in \{10^\circ + 180^\circ n \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

**14.34.** Розв'язати нерівність

$$2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > -1.$$

(Відповідь:

$$x \in \left(4\pi n - \frac{5\pi}{6}; 4\pi n + \frac{11\pi}{6}\right), \\ n \in \mathbb{Z})$$

**14.35.** Розв'язати нерівність

$$-\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Відповідь:

$$x \in \left[\frac{11\pi}{24} + \pi n; \frac{17\pi}{24} + \pi n\right], \\ n \in \mathbb{Z})$$

При  $-1 < a < 1$

$$\cos x \geq a \Leftrightarrow x \in [-\arccos a + 2\pi n;$$

$$\arccos a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z} \text{ (див. рис. 14.5);}$$

$$\cos x > a \Leftrightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi n;$$

$$\arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z};$$

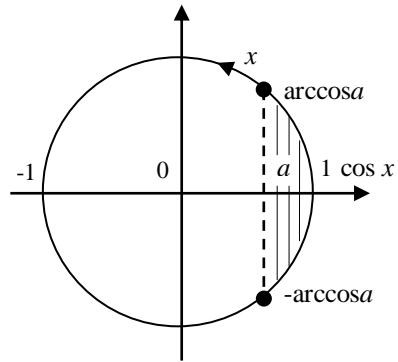


Рис. 14.5.

$$\cos x \leq a \Leftrightarrow x \in [\arccos a + 2\pi n;$$

$$2\pi - \arccos a + 2\pi n], n \in \mathbb{Z} \text{ (див. рис. 14.6);}$$

$$\cos x < a \Leftrightarrow x \in (\arccos a + 2\pi n;$$

$$2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$$

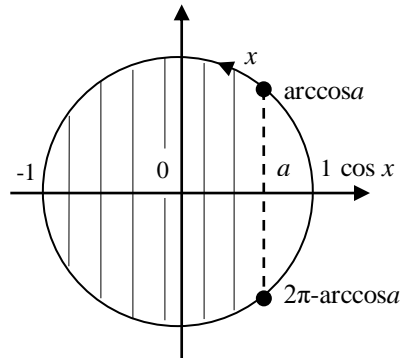
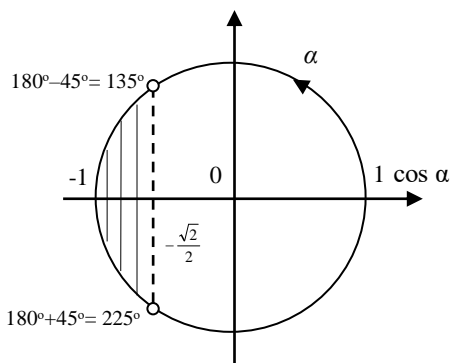


Рис. 14.6.



$$135^\circ + 360^\circ n < \alpha < 225^\circ + 360^\circ n;$$

$$135^\circ + 360^\circ n < 3x + 15^\circ < 225^\circ + 360^\circ n;$$

$$120^\circ + 360^\circ n < 3x < 210^\circ + 360^\circ n;$$

$$40^\circ + 120^\circ n < x < 70^\circ + 120^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь:

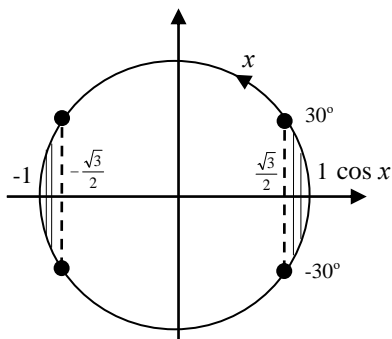
$$x \in (120^\circ n + 40^\circ; 120^\circ n + 70^\circ), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 14.18.**

Розв'язати

нерівність  $\cos^2 x \geq 3/4$ .

$$|\cos x| \geq \sqrt{3}/2; \quad \begin{cases} \cos x \geq \sqrt{3}/2; \\ \cos x \leq -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$



**14.36.** Розв'язати  
нерівність  $\cos\left(2 - \frac{x}{3}\right) > \frac{1}{3}$ .

(Відповідь:

$$x \in \left(6 - 3 \arccos \frac{1}{3} + 6\pi n;$$

$$6 + 3 \arccos \frac{1}{3} + 6\pi n\right),$$

$$n \in \mathbb{Z})$$

**14.37.** Розв'язати  
нерівність  $\sin 3x \sin x -$   
 $-\cos 3x \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(Відповідь:

$$x \in \left(\frac{\pi n}{2} - \frac{5\pi}{24}; \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$n \in \mathbb{Z})$$

**14.38.** Розв'язати  
нерівність  $|\cos x| \leq \frac{1}{2}$ .

(Відповідь:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right],$$

$$n \in \mathbb{Z})$$

**14.39.** Розв'язати  
нерівність  $2 \cos^2\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{2} > 0$ .

(Відповідь:

$$x \in \left(4\pi n - \frac{5\pi}{6}; 4\pi n + \frac{11\pi}{6}\right),$$

$$n \in \mathbb{Z})$$

При  $a = -1$   $\cos x \geq -1 \Leftrightarrow x \in R$ ;  
 $\cos x > -1 \Leftrightarrow x \in R \setminus \{\pi + 2\pi n \mid n \in Z\}$ ;  
 $\cos x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \{\pi + 2\pi n \mid n \in Z\}$ ;  
 $\cos x < -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .  
 При  $a < -1$   $\cos x \geq (\text{або } >) a \Leftrightarrow x \in R$ ;  
 $\cos x \leq (\text{або } <) a \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Розв'язання  
 найпростіших  
 тригонометричних  
 нерівностей з  
 функцією  $\operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x \geq a \Leftrightarrow x \in [\operatorname{arctg} a + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in Z$   
 (див. рис. 14.7);  
 $\operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow x \in (\operatorname{arctg} a + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in Z$ ;  
 $\operatorname{tg} x \leq a \Leftrightarrow x \in (-\pi/2 + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n], n \in Z$ ;  
 $\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow x \in (-\pi/2 + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n), n \in Z$ .

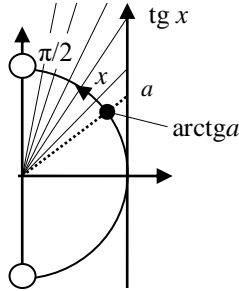


Рис. 14.7.

Розв'язання  
 найпростіших  
 тригонометричних  
 нерівностей з  
 функцією  $\operatorname{ctg} x$

$\operatorname{ctg} x \geq a \Leftrightarrow x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n], n \in Z$   
 (див. рис. 14.8);  
 $\operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in Z$ ;  
 $\operatorname{ctg} x \leq a \Leftrightarrow x \in [\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in Z$ ;  
 $\operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in Z$ .

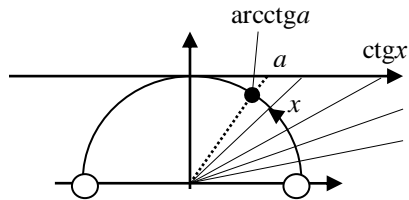
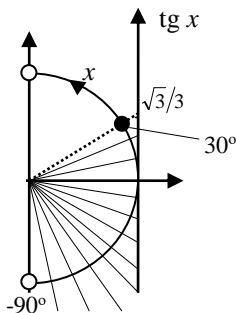


Рис. 14.8. 0

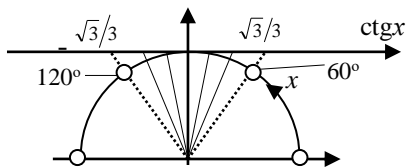
Тут знову ж дуга, що виділена штриховкою справа, при повороті на  $180^\circ$  збігається з дугою, що виділена штриховкою ліворуч. Тому  $-30^\circ + 180^\circ n < x < 30^\circ + 180^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Відповідь:  $x \in (180^\circ n - 30^\circ; 180^\circ n + 30^\circ)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.19.** Розв'язати нерівність  $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}/3$ .



$-90^\circ + 180^\circ n < x \leq 30^\circ + 180^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Відповідь:  $x \in (180^\circ n - 90^\circ; 180^\circ n + 30^\circ]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 14.20.** Розв'язати нерівність  $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}/3$ .  
 $-\sqrt{3}/3 < \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}/3$ .



Відповідь:  
 $x \in (180^\circ n + 60^\circ; 180^\circ n + 120^\circ)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**14.40.** Розв'язати нерівність

$$-\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1.$$

(Відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$ )

**14.41.** Розв'язати нерівність

$$-\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Відповідь:

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$ )

**14.42.** Розв'язати нерівність  $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$ .

(Відповідь:

$$x \in \left(\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{4}\right) \cup$$

$$\cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$ )

**14.43.** Розв'язати нерівність  $|\operatorname{ctg} x| \leq \sqrt{3}$ .

(Відповідь:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right],$$

$n \in \mathbb{Z}$ )

## 15 АРИФМЕТИЧНА ТА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ

Арифметична прогресія (АП)

*Арифметичною прогресією* називають послідовність чисел, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того самого числа. Це число називають *різницею* АП.

З визначення випливає:

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

де  $n \in N$ ,  $n \geq 2$ ,  $a_n$  –  $n$ -ий член,  $d$  – різниця.

Формула загального члена АП

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$

узагальнення цієї формули –

$$a_n = a_k + (n-k)d,$$

де  $k \in N$ .

Властивості членів АП

1) Кожен член АП, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Узагальнення –

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2},$$

де  $k < n$ .

2) Якщо  $i + j = k + l$ , то  $a_i + a_j = a_k + a_l$ .

Якщо  $i + j + k = l + m + n$ , то

$a_i + a_j + a_k = a_l + a_m + a_n$ . І т. д.

Суми членів АП

Сума  $n$  перших членів АП дорівнює

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Сума членів з номерами від  $k$  до  $n$  дорівнює

$$S_{k,n} = S_n - S_{k-1} = \frac{a_k + a_n}{2} \cdot (n - k + 1).$$

**Приклад 15.1.** Дано:  $a_6 = 6,2$ ;  
 $d = 0,6$ . Знайти  $a_{31}$ .

$$a_{31} = a_6 + (31 - 6)d =$$
$$= 6,2 + 25 \cdot 0,6 = 21,2.$$

Відповідь: 21,2.

**Приклад 15.2.** Дано:  $a_3 + a_7 = 12$ .  
Знайти  $S_9$ .

На перший погляд, здається, що для отримання певного результату тут мало даних. Насправді їх досить.

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9. \text{ Але } a_1 + a_9 = a_3 + a_7,$$

тому що  $1 + 9 = 3 + 7$ .

$$S_9 = \frac{12}{2} \cdot 9 = 54.$$

Відповідь: 54.

**Приклад 15.3.** Знайти суму всіх трицифрових натуральних чисел, які при діленні на 5 дають залишок 1.

Трицифрові натуральні числа знаходяться в межах від 100 до 999. З них першим числом, що дає при діленні на 5 залишок 1, є 101, другим – 106, а останнім – 996. Вони складають арифметичну прогресію, у якій  $a_1 = 101$ ;  
 $d = 5$ ;  $a_n = 996$ .

Знайдемо  $n$  з рівності  
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ;  $996 = 101 + 5 \cdot (n - 1)$ ;  
 $n = 180$ .

$$S_{180} = \frac{101 + 996}{2} \cdot 180 = 98730.$$

Відповідь: 98730.

**15.1.** Дано:  $a_1 = 4$ ;  $a_2 = 2$ .  
Знайти  $a_{13}$ .

(Відповідь:  $-20$ )

**15.2.** Дано:  $a_1 = -3,5$ ;  
 $d = 4$ ;  $a_n = 48,5$ . Знайти  $n$ .

(Відповідь: 14)

**15.3.** Дано:  $a_6 = 15/22$ .  
Знайти  $S_{11}$ .

(Відповідь: 7,5)

**15.4.** Обчислити суму  
 $7,5 + 9,8 + 12,1 + \dots + 53,5$ .

(Відповідь: 640,5)

**15.5.** Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 12. Яке число можна однозначно визначити і чому воно дорівнює?

(Відповідь:  $a_2 = 4$ )

**15.6.** Розв'язати рівняння:

а)  $x^2 - 500499x =$   
 $= 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ ;  
б)  $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$ .

(Відповідь:

а)  $\{-1; 500500\}$ ; б)  $\{55\}$ )

**15.7.** В арифметичній прогресії 1002; 995; 998; ... знайти номер і величину першого від'ємного члена.

(Відповідь: 145;  $-6$ )

Геометрична прогресія (ГП)

*Геометричною прогресією* називають послідовність чисел, що не рівні нулю, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється множенням попереднього члена на одне й те ж саме число. Це число називають *знаменником* ГП.

З визначення випливає:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q,$$

де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $b_n$  –  $n$ -ий член,  $q$  – знаменник. Причому має бути  $b_{n-1} \neq 0$ ,  $q \neq 0$ .

Формула загального члена ГП

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

де  $b_1 \neq 0$ ,  $q \neq 0$ . Узагальнення цієї формули –

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k},$$

де  $k \in \mathbb{N}$ .

Властивості членів ГП

1) Якщо  $q > 0$ , то всі члени ГП мають один і той же знак. Вони або тільки додатні, або тільки від'ємні. Якщо  $q < 0$ , то в послідовності знаки чергуються.

2) Кожен член ГП, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному сусідніх з ним членів, який взятий з «+» або «-»:

$$b_n = \pm \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Але в будь-якому випадку –

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Узагальнення цієї формули –

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k},$$

де  $k < n$ .

3) Якщо  $i + j = k + l$ , то  $b_i \cdot b_j = b_k \cdot b_l$ . Якщо  $i + j + k = l + m + n$ , то  $b_i \cdot b_j \cdot b_k = b_l \cdot b_m \cdot b_n$ .  
І т. д.

**Приклад 15.4.** Дано:  $b_1 = 6$ ;  $b_4 = 162$ . Знайти  $q$ .

$$b_4 = b_1 \cdot q^3; \quad q = \sqrt[3]{b_4/b_1} = \sqrt[3]{162/6} = 3. \text{ Відповідь: } 3.$$

**Приклад 15.4.** Дано:  $b_5 = 200$ ;  $q = 0,1$ . Знайти  $b_8$ .

$$b_8 = b_5 \cdot q^{8-5} = 200 \cdot 0,1^3 = 0,2. \text{ Відповідь: } 0,2.$$

**Приклад 15.5.** Знайти всі значення змінної  $x$ , при яких числа  $3^x$ ;  $\sqrt{6}$ ;  $(3^x - 1)$  в вказаному порядку утворюють геометричну прогресію.

Для складання рівняння щодо  $x$  скористаємося властивістю

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3. \\ (\sqrt{6})^2 = 3^x \cdot (3^x - 1); \quad x \in \{1\}.$$

Відповідь:  $x \in \{1\}$ .

**Приклад 15.6.** Спростити вираз

$$R = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[512]{a}. \\ R = a^{1/2} \cdot a^{1/4} \cdot a^{1/8} \cdot \dots \cdot a^{1/512} = a^{1/2+1/4+1/8+\dots+1/512}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q} = \frac{1 - \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{256}. \quad R = a^{\frac{511}{256}}.$$

Відповідь:  $R = \sqrt[256]{a^{511}}$ .

**15.8.** Дано:  $b_7 = 7/32$ ;  $q = 0,5$ . Знайти  $b_1$ .

(Відповідь: 14)

**15.9.** Дано:  $b_6 = 64$ ;  $b_4 = 16$ . Знайти  $q$ .

(Відповідь:  $\pm 2$ )

**15.10.** Добуток трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 64. Яке число можна однозначно визначити і чому воно дорівнює?

(Відповідь:  $b_2 = 4$ )

**15.11.** Знайти всі значення змінної  $x$ , при яких числа  $(2^x - 15)$ ; 4;  $2^x$  в вказаному порядку утворюють геометричну прогресію.

(Відповідь:  $x \in \{4\}$ )

**15.12.** Дано:  $b_1 = 32$ ;  $b_2 = 64$ . Знайти  $S_5$ .

(Відповідь: 992)

**15.13.** Дано:  $q = -2$ ;  $b_2 = 6$ . Знайти  $S_5$ .

(Відповідь: -33)

**15.14.** Обчислити суму  $1+3+9+\dots+729$ .

(Відповідь: 1093)

Сума  $n$  перших членів ГП При  $q \neq 1$  сума  $n$  перших членів ГП дорівнює

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Звернемо увагу, що при використанні першого виразу знати кількість  $n$  доданків не обов'язково. Досить знати знаменник, перший й останній доданки.

При  $q = 1$  всі члени ГП однакові і суму можна знайти за формулою  $S_n = n \cdot b_1$ .

Нескінченно спадна ГП *Нескінченно спадною* геометричною прогресією називається *нескінченна* геометрична прогресія, у якій  $|q| < 1$ .

У такій послідовності зі зростанням номера  $n$  до нескінченності модуль члена зменшується, необмежено наближуючись до нуля.

Сума нескінченно спадної ГП У нескінченно спадної ГП границя сум  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$  приймає скінченно значення:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Це значення  $S$  називають *сумою нескінченно спадної* ГП. Воно дорівнює

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

**Приклад 15.7.** Дано:  $b_n = 3 \cdot 5^{-n}$ .  
Знайти  $S$ .

$$b_n = 3/5^n; \quad b_1 = 3/5^1; \quad q = 1/5;$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{3/5}{1-1/5} = \frac{3}{4}.$$

Відповідь: 0,75.

**Приклад 15.8.** Розв'язати рівняння  
 $2x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = 3$ , де  $|x| < 1$ .

Треба розібратися, з якого доданка починається нескінченно спадна геометрична прогресія. Видно що  $b_1 = x^2$ ,  $q = -x$ .

Отже,  $2x + \frac{x^2}{1+x} = 3$ ;  $3x^2 - x - 3 = 0$ ;

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{37}}{6}; \quad |x_1| < 1; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{37}}{6} > 1.$$

Відповідь:  $x = (1 - \sqrt{37})/6$ .

**Приклад 15.9.** Вивести формулу, що зв'яже суму  $S$  членів нескінченно спадної геометричної прогресії з сумою  $S^{(2)}$  квадратів її членів.

Якщо  $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots$  – нескінченна геометрична прогресія з  $|q| < 1$ , то  $b_1^2, b_1^2q^2, b_1^2q^4, \dots$  – теж нескінченна геометрична прогресія зі знаменником  $q^2 < 1$ , у якій сума всіх членів дорівнює

$$S^{(2)} = \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{b_1 \cdot b_1}{(1+q)(1-q)} = \frac{b_1}{1+q} \cdot S.$$

Відповідь:  $S^{(2)} = b_1 \cdot S / (1+q)$ .

**15.15.** Дано:  $b_1 = 3$ ;  $b_2 = 1$ .  
Знайти  $S$ .

(Відповідь: 4,5)

**15.16.** Розв'язати рівняння

$$x^2 - x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

(Відповідь:  $\{-1; 2\}$ )

**15.17.** Дана нескінченно спадна геометрична прогресія: 45; 15; 5; ...  
Знайти суму всіх членів, що менше 1.

(Відповідь: 5/6)

**15.18.** Знайти  $b_1$  і  $q$  нескінченно спадної геометричної прогресії, у якій сума членів дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

(Відповідь:  $b_1 = 12$ ;  $q = 0,5$ )

**15.19.** Три числа, сума яких дорівнює 15, утворюють арифметичну прогресію. Якщо друге число зменшити на 1, то нова трійка чисел складе геометричну прогресію. Знайти початкову трійку чисел, якщо вона представляє собою зростаючу послідовність.

(Відповідь: 2; 5; 8)

## 16 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика		<p><i>Комбінаторика</i> – розділ математики, в якому вивчаються питання (поряд з іншими) про те, скільки різних комбінацій, точніше <i>комбінаторних конфігурацій</i>, підпорядкованих певним вимогам, можна скласти з наявних елементів. Елементи можуть бути будь-якої природи: числами, фігурами, предметами, людьми та ін.</p> <p>Найпростішими комбінаторними конфігураціями є <i>перестановки, розміщення та комбінації без повторень</i>. «Без повторень» означає, що всі елементи в конфігурації різні.</p>
Правила суми й добутку	й	<p>Нехай об'єкт <math>A</math> можна вибрати <math>m</math> способами, а об'єкт <math>B</math> – <math>n</math> способами. Тоді: вибір <math>A</math> або <math>B</math> можна здійснити <math>m + n</math> способами (<i>правило суми</i>), а вибір пари <math>A</math> і <math>B</math> можна здійснити <math>m \cdot n</math> способами (<i>правило добутку</i>).</p>
Факторіал		<p>Позначення <math>n!</math>, де <math>n</math> – ціле невід'ємне число, називається <i>n-факторіалом</i>. За визначенням воно дорівнює: <math>0! = 1</math>; <math>1! = 1</math>; <math>2! = 1 \cdot 2 = 2</math>; <math>3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6</math>; ...; <math>n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n</math>.</p> <p>Справедливі рівності: <math>(n + 1)! = n!(n + 1)</math>; <math>(n + 2)! = n!(n + 1)(n + 2)</math>, тощо.</p>
Впорядкована множина		<p><i>Впорядкована множина</i> – множина з встановленим порядком розташування (слідкування) її елементів.</p>
Перестановки без повторень	без	<p>Нехай є <math>n</math> різних елементів. Беруться всі ці елементи та з них складається впорядкована множина, яку називають <i>перестановкою</i>. Кількість усіх можливих перестановок з <math>n</math> елементів позначають <math>P_n</math>. Вона дорівнює</p> $P_n = n!.$

**Приклад 16.1.** У групі 4 дівчинки і 6 хлопчиків. Скількома способами можна здійснити вибір: а) одного чергового; б) пари чергових, яка обов'язково складається з дівчинки і хлопчика.

а)  $4 + 6 = 10$ ;                      б)  $4 \cdot 6 = 24$ .

Відповідь: а) 10; б) 24.

**Приклад 16.2.** Скільки всього є натуральних трицифрових парних чисел?

Можна це порахувати звичайним арифметичним способом, однак зробимо це, залучаючи правило добутку.

На 1-й позиції може бути одна з 9 цифр: від 1 до 9. На 2-й позиції – одна з 10 цифр: від 0 до 9. На останній позиції – одна з 5 цифр: 0, 2, 4, 6, 8.

$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ .

Відповідь: 450.

**Приклад 16.3.** Нехай є 5 карток, які пронумеровані від 2 до 6. Скільки з них можна скласти: а) п'ятицифрових чисел, б) трицифрових чисел?

а)  $P_5 = 5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ ;

б)  $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 60$ .

Відповідь: а) 120; б) 60.

**Приклад 16.4.** З 10 осіб треба вибрати: а) пару чергових (що мають однакові обов'язки); б) президіум, який складається з голови та секретаря. Скільки таких різних пар може бути?

**16.1.** В їдальні 5 видів салату, 3 види першого і 4 види другого. Скільки всього можна скласти різних меню із зазначених трьох страв?

(Відповідь: 60)

**16.2.** Скільки є трицифрових натуральних чисел з цифрами, що не повторюються?

Відповідь: 648)

**16.3.** У змаганнях бере участь 20 осіб. Скільки всього трійок призерів може бути, якщо вони завжди показують різний результат?

(Відповідь: 6840)

**16.4.** У футбольній лізі 16 команд. Скільки всього матчів проходить в лізі за сезон, якщо проводиться два кола?

(Відповідь: 240)

**16.5.** Двадцять карток для гри в лото роздають 4 гравцям по 5 карток кожному. Скількома способами це можна зробити?

(Відповідь:  $20! / (5!)^4$ )

Розміщення без повторень

Нехай є  $n$  різних елементів. З них береться  $k$  елементів ( $k \leq n$ ) і з обраних елементів складається впорядкована множина, яку називають *розміщенням*. Розміщення відрізняються одне від одного або складом елементів, або порядком їх розташування, або тим та іншим. Кількість усіх можливих розміщень по  $k$  з  $n$  позначають  $A_n^k$ . Вона дорівнює

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Причому  $A_n^n = P_n$ .

Комбінації без повторень

Нехай є множина, що складається із  $n$  різних елементів. Підмножина, що складається з  $k$  елементів ( $k \leq n$ ), які взяті з цієї множини, називають *комбінацією*. Комбінації відрізняються одна від одної тільки складом елементів. Кількість усіх можливих комбінацій по  $k$  з  $n$  позначають  $C_n^k$ . Вона дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Причому справедлива рівність  $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ .

Біном Ньютона

Величини  $C_n^k$  називають також *біноміальними коефіцієнтами*, так як вони є коефіцієнтами одночленів *бінома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \\ + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

$$\text{а) } C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 45;$$

$$\text{б) } A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 90.$$

Відповідь: а) 45; б) 90.

**Приклад 16.5.** У класі на прибирання території школи треба вибрати 7 осіб, серед яких має бути 4 хлопчика і 3 дівчинки. Скільки таких сімок може бути, якщо в класі 12 хлопчиків і 8 дівчаток?

Згідно з правилом добутку треба кількість можливостей вибору хлопчиків помножити на кількість можливостей вибору дівчаток:

$$C_{12}^4 \cdot C_8^3 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 27720.$$

Відповідь: 27720.

**Приклад 16.6.** З 10 осіб вибирають комісію, що складається з голови, секретаря та 3 рядових членів. Скільки всього різних комісій може бути?

Припустимо, що спочатку обирають голову і секретаря, а потім рядових членів. Голову та секретаря обирають з 10 осіб, а рядових членів з решти: 8.

$$A_{10}^2 \cdot C_8^3 = \frac{10!}{8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{10!}{3! \cdot 5!}.$$

Тепер припустимо, що спочатку вибирають рядових членів, а потім голову і секретаря. Результат повинен бути тим же самим.

$$C_{10}^3 \cdot A_7^2 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{5!} = \frac{10!}{3! \cdot 5!}.$$

Відповідь: 5040.

**16.6.** У класі на прибирання території треба вибрати 2 трійки, в кожній з яких має бути 2 хлопчика і одна дівчинка. Скільки таких можливостей, якщо в класі 10 хлопчиків і 5 дівчаток? (Відповідь:

$$C_{10}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_8^2 \cdot C_4^1 = 25200)$$

**16.7.** На полиці стоїть 8 книг: 5 з математики і 3 з фізики. Скількома способами можна їх розставити на полиці так, щоб книги по одному предмету були поруч?

(Відповідь:

$$P_2 \cdot P_5 \cdot P_3 = 1440)$$

**16.8.** Розв'язати рівняння

$$A_{x-1}^2 = 20.$$

(Відповідь:  $x \in \{6\}$ )

**16.9.** Знайти член розкладу

$$\text{степеня } \left( \sqrt{\frac{b}{a}} + 10\sqrt{\frac{a^7}{b^3}} \right)^n,$$

якій містить  $ab$ .

(Відповідь:  $252ab$ )

## 17 НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ НА ПЛОЩИНІ. АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Геометрія	Наука про геометричні фігури та їх властивості.
Планіметрія	Розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур на площині.
Основні фігури на площині	Точка, пряма.
Позначення основних фігур	Точки позначають великими латинськими буквами: $A, B, C, \dots$ . Прямі позначають малими латинськими буквами: $a, b, c, \dots$ . Якщо точка $A$ належить (не належить) прямій $a$ , то пишуть: $A \in a$ ( $A \notin a$ ). Якщо прямій належать точки $A$ і $B$ , то кажуть, що ця <i>пряма проходить через точки <math>A</math> і <math>B</math></i> . Позначення: $AB$ . На рис. 17.1 зображено точки $A, B, C, D$ та пряму $a$ , $A \in a, B \in a, C \notin a, D \notin a$ .

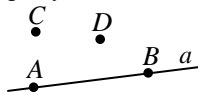


Рис. 17.1.

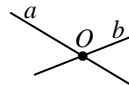


Рис. 17.2.



Рис. 17.3.

Прямі, що перетинаються	Дві прямі, які мають спільну точку. На рис. 17.2 прямі $a$ і $b$ перетинаються в точці $O$ . Позначення: $a \cap b = O$ .
Відрізок	Частина прямої, яка складається з двох точок на прямій та всіх її точок, що лежать між даними точками. Ці точки називають <i>кінцями відрізка</i> . Усі інші точки цього відрізка називають його <i>внутрішніми точками</i> . Відрізок позначають двома великими латинськими буквами, якими позначено його кінці. Відрізок, зображений на рис. 17.3, позначають так: $AB$ або $BA$ . Відстань між кінцями відрізка.
Довжина відрізка	

**Приклад 17.1.**

Користуючись

рис. 17.4, вказати:

- 1) які з позначених точок належать прямій  $d$ , а які не належать;
- 2) яким прямим належить точка  $A$ ; точка  $B$ ; точка  $C$ ; точка  $D$ ; точка  $E$ ;
- 3) які прямі проходять через точку  $A$ ; точку  $C$ ; точку  $D$ ;
- 4) у якій точці перетинаються прямі  $c$  і  $d$ ; прямі  $b$  і  $d$ ;
- 5) у якій точці перетинаються три з чотирьох зображених на рисунку прямих.

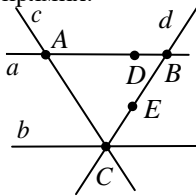


Рис. 17.4.

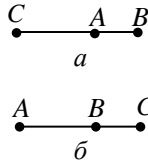


Рис.17.5.

- 1)  $B \in d$ ,  $C \in d$ ,  $E \in d$ ;  $A \notin d$ ,  $D \notin d$ ;
- 2)  $A \in a$ ,  $A \in c$ ,  $A \in AE$ ;  $B \in a$ ,  $B \in d$ ;  $C \in b$ ,  $C \in c$ ,  $C \in d$ ,  $C \in CD$ ;  $D \in a$ ,  $D \in DE$ ,  $D \in CD$ ;  $E \in d$ ,  $E \in DE$ ,  $E \in AE$ ;
- 3) через точку  $A$  проходять прямі:  $a$ ,  $c$ ,  $AE$ ; через точку  $C$  проходять прямі:  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $CD$ ; через точку  $D$  проходять прямі:  $a$ ,  $DC$ ,  $DE$ ;
- 4) прямі  $c$  і  $d$  перетинаються в точці  $C$ ; прямі  $b$  і  $d$  перетинаються в точці  $C$ ;
- 5) три із чотирьох зображених на рисунку прямих перетинаються в точці  $C$ .

**17.1.** Користуючись

рис. 17.6, вказати:

- 1) які з позначених точок належать прямій  $a$ , а які не належать;
- 2) яким прямим належить точка  $A$ ; точка  $B$ ; точка  $C$ ; точка  $D$ ; точка  $E$ ;
- 3) які прямі проходять через точку  $A$ ; точку  $B$ ; точку  $C$ ;
- 4) у якій точці перетинаються прямі  $c$  і  $d$ ; прямі  $b$  і  $d$ ;
- 5) у якій точці перетинаються три з чотирьох зображених на рисунку прямих.

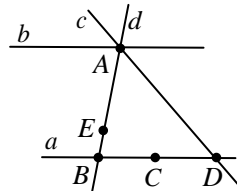


Рис. 17.6.

- 1) Провели чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходять тільки дві прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?  
(Відповідь: 6)

Одиниці вимірювання відрізків

Довжину відрізків вимірюють у міліметрах, сантиметрах, метрах, кілометрах тощо.  
 $1\text{ см} = 10\text{ мм}$ ,  $1\text{ м} = 100\text{ см}$ ,  $1\text{ км} = 1000\text{ м}$ .

Рівні відрізки

Відрізки, які суміщаються при накладанні. Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні і самі відрізки.  
 Рівні відрізки на рисунках позначають однаковою кількістю рисок.

Середина відрізка

Внутрішня точка відрізка, яка розбиває його на дві рівні частини.

Основна властивість довжини відрізка

Якщо точка  $C$  – внутрішня точка відрізка  $AB$ , то відрізок  $AB$  дорівнює сумі відрізків  $AC$  і  $CB$ :  $AB = AC + CB$ .

Взаємне розміщення трьох точок на прямій

Якщо точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій, то виконується одна з рівностей:  $AB = AC + CB$ ,  $AC = AB + BC$ ,  $BC = BA + AC$ .

Промінь

Частина прямої, яка складається з точки на прямій та усіх її точок, що лежать з одного боку від даної точки. Ця точка називається *початком променя*.  
 Промінь позначають двома великими латинськими буквами. Перша буква позначає початок променя, а друга буква – будь-яку точку на промені. На рис. 17.7  $OA$  – промінь.

Доповняльні промені

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої.  
 На рис. 17.8 зображено промінь  $OA$  – доповняльний до променя  $OB$ .

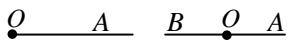


Рис. 17.7.

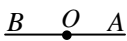


Рис. 17.8.

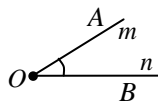


Рис. 17.9.

**Приклад 17.2.** Точка  $C$  належить відрізку  $AB$ , довжина якого дорівнює 32 см. Знайти відрізки  $AC$  і  $BC$ , якщо відрізок  $AC$  у 3 рази менший від відрізка  $BC$ .

Нехай  $AC = x$  см, тоді  $BC = 3x$  см. Оскільки  $C$  – внутрішня точка відрізка  $AB$ , то  $AC + BC = AB$ ,  $x + 3x = 32$ ,  $4x = 32$ ,  $x = 8$ . Маємо:  $AC = 8$  (см),  $BC = 3 \cdot 8 = 24$  (см).  
Відповідь: 8 см, 24 см.

**Приклад 17.3.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій. Знайти відрізок  $BC$ , якщо  $AB = 30$  см,  $AC = 42$  см.

Можливі два випадки:

1) точка  $A$  лежить між точками  $B$  і  $C$  (рис. 17.5 а), тоді

$$BC = AB + AC = 30 + 42 = 72 \text{ (см);}$$

2) точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$  (рис. 17.5 б), тоді

$$BC = AC - AB = 42 - 30 = 12 \text{ (см).}$$

Відповідь: 72 см або 12 см.

**Приклад 17.4.** Відрізок, довжина якого дорівнює 36 см, поділили на три нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 22 см. Знайти довжину середнього відрізка.

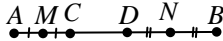


Рис. 17.10.

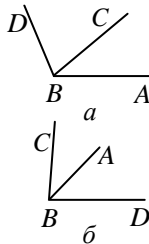


Рис.17.11.

**17.3.** Точка  $C$  належить відрізку  $AB$ , довжина якого дорівнює 36 см. Знайти відрізки  $AC$  і  $BC$ , якщо:

- 1) відрізок  $AC$  на 6 см більший за відрізок  $BC$ ;
- 2) відрізок  $AC$  у 8 разів менший від відрізка  $BC$ ;
- 3)  $AC : BC = 5 : 4$ .

(Відповідь: 1) 21 см, 15 см;  
2) 32 см, 4 см; 3) 20 см, 16 см)

**17.4.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій. Знайти відрізок  $BC$ , якщо  $AB = 22$  см,  $AC = 36$  см.

(Відповідь: 58 см або 14 см)

**17.5.** Відрізок, довжина якого дорівнює 42 см, поділили на три нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 36 см. Обчислити довжину середнього відрізка.  
(Відповідь: 30 см)

**17.6.** Скільки різних променів визначаються трьома точками, які лежать на одній прямій?  
(Відповідь: 6)

Кут Частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком.

Елементи кута Промені, що обмежують кут, називають *сторонами кута*, а їх спільний початок – *вершиною кута*.

Позначення кута Кути позначають або назвою його вершини, або назвою променів (його сторін), або назвою трьох точок: вершини і двох точок, які лежать на сторонах кута. Якщо кут позначають трьома буквами, то середня в записі буква відповідає вершині кута. Записують:  $\angle O$ ,  $\angle AOB$ ,  $\angle BOA$ ,  $\angle(m, n)$  (рис.17.9). Знак  $\angle$  заміняє слово «кут». Кути можна позначати маленькими буквами грецького алфавіту:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... . Розглядаючи кілька кутів, їх можна позначати цифрами:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ ,  $\angle 3$ , ... .

Одиниці вимірювання кутів Кути вимірюють у градусах, мінутах, секундах, радіанах.

Мінута –  $\frac{1}{60}$  частина градуса. Позначення:  $1'$  .

Секунда –  $\frac{1}{60}$  частина мінути.

Позначення:  $1''$  .

1 радіан  $\approx 57^\circ 18'$  .

Розгорнутий кут Кут, сторони якого є доповняльними променями (рис. 17.12 а).

Градусна міра розгорнутого кута становить  $180^\circ$  .

Прямий кут Кут, який дорівнює  $90^\circ$  (рис. 17.12 б).

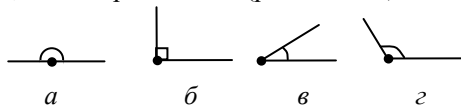


Рис. 17.12.

Нехай відрізок  $AB$  поділено точками  $C$  і  $D$  на три нерівні відрізки  $AC$ ,  $CD$ ,  $DB$ , точки  $M$  і  $N$  – середини відрізків  $AC$  і  $DB$  (рис.17.10),  $AB = 36$  см,  $MN = 22$  см.  $AM + NB = AB - MN = 36 - 22 = 14$  (см).  $AC + DB = 2AM + 2NB = 2(AM + NB) = 2 \cdot 14 = 28$  (см).  $CD = AB - (AC + DB) = 36 - 28 = 8$  (см).  
Відповідь: 8 см.

**Приклад 17.5.** Кут  $EDN$  дорівнює  $132^\circ$ . Промінь  $DA$  проходить між його сторонами. Знайти кути  $EDA$  і  $NDA$ , якщо кут  $EDA$  у 5 разів менший від кута  $NDA$ .

Нехай  $\angle EDA = x^\circ$ , тоді  $\angle NDA = 5x^\circ$ . Оскільки промінь  $DA$  проходить між сторонами  $\angle EDN$ , то  $\angle EDA + \angle NDA = \angle EDN$ ,  $x + 5x = 132$ ,  $6x = 132$ ,  $x = 22$ . Отже,  $\angle EDA = 22^\circ$ ,  $\angle NDA = 110^\circ$ . Відповідь:  $22^\circ$ ,  $110^\circ$ .

**Приклад 17.6.** Кут  $ABC$  дорівнює  $40^\circ$ , кут  $CBD = 85^\circ$ . Знайти кут  $ABD$ .

Задача має два розв'язки:

1) промінь  $BC$  лежить між сторонами кута  $ABD$  (рис. 17.11 а), тоді  $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 125^\circ$ ;

2) промінь  $BA$  лежить між сторонами кута  $CBD$  (рис. 17.11 б), тоді  $\angle ABD = \angle CBD - \angle ABC = 45^\circ$ .

Відповідь:  $125^\circ$  або  $45^\circ$ .

**Приклад 17.7.** Знайти кути  $AOC$  і  $COB$ , якщо їх сторони  $OA$  і  $OB$  є доповняльними променями і  $\angle AOC = 4\angle COB$ .

**17.7.** Кут  $EDN$  дорівнює  $156^\circ$ . Промінь  $DA$  проходить між його сторонами. Знайти кути  $EDA$  і  $NDA$ , якщо кут  $EDA$  у 2 рази менший від кута  $NDA$ .  
(Відповідь:  $52^\circ$ ,  $104^\circ$ )

**17.8.** Промінь  $OC$  проходить між сторонами кута  $AOB$ . Знайти кути  $AOC$  і  $BOC$ , якщо  $\angle AOB = 80^\circ$ , а градусні міри кутів  $AOC$  і  $BOC$  відносяться як 1:7.  
(Відповідь:  $10^\circ$ ,  $70^\circ$ )

**17.9.**  $\angle ABC = 42^\circ$   
 $\angle CBD = 82^\circ$ . Знайти  $\angle ABD$ . Скільки розв'язків має задача?  
(Відповідь:  $124^\circ$  або  $40^\circ$ )

**17.10.** Знайти кути  $AOC$  і  $COB$ , якщо їх сторони  $OA$  і  $OB$  – доповняльні промені,  
 $\angle AOC = 0,8\angle COB$ .  
(Відповідь:  $80^\circ$ ,  $100^\circ$ )

**17.11.** Із вершини розгорнутого кута  $ABC$  проведено два промені  $BD$  і  $BE$  так, що  $\angle ABE = 156^\circ$ ,  
 $\angle DBC = 132^\circ$ . Знайти кут  $DBE$ . (Відповідь:  $108^\circ$ )

Гострий кут Кут, менший від прямого (рис. 17.12 в).

Тупий кут Кут більший від прямого, але менший від розгорнутого (рис. 17.12 з).

Рівні кути Два кути, які можна сумістити накладанням. Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути. Рівні кути на рисунку позначають однаковою кількістю дужок.

Бісектриса Промінь, що проходить між сторонами кута та поділяє кут на два рівні кути. На рис. 17.13 промінь  $OC$  – бісектриса  $\angle AOB$

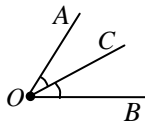


Рис. 17.13.

Основна властивість величини кута Якщо промінь  $OC$  ділить кут  $AOB$  на два кути  $AOC$  і  $COB$ , то  $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$ .

Аксиома Твердження справедливості якого приймається без доведення.

Аксиоми належності точок і прямих на площині  $I_1$ . Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

$I_2$ . Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Аксиоми розміщення точок на прямій та на площині  $II_1$ . З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

$II_2$ . Пряма розбиває площину на дві півплощини.

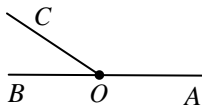


Рис. 17.14.

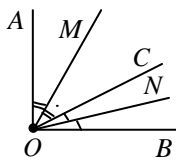


Рис. 17.15.

Оскільки  $OA$  і  $OB$  є доповняльними променями, то  $\angle AOB$  – розгорнутий (рис. 17.14), тому  $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ .

Нехай  $\angle COB = x^\circ$ , тоді  $\angle AOC = 4x^\circ$ .  
 $x + 4x = 180$ ,  $x = 36$ . Отже,

$\angle COB = 36^\circ$ ,  $\angle AOC = 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$ .

Відповідь:  $36^\circ$ ,  $144^\circ$ .

**Приклад 17.8.** Промінь проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Довести, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює  $45^\circ$ .

Нехай  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $OM$  і  $ON$  – бісектриси кутів  $AOC$  і  $BOC$  (рис. 17.15). За означенням бісектриси:

$$\angle MOC = \frac{1}{2} \angle AOC, \angle CON = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

$$\angle MON = \angle MOC + \angle CON =$$

$$= \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle BOC =$$

$$= \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOC) = \frac{1}{2} \angle AOB = 45^\circ.$$

**Приклад 17.9.** Дві точки відрізка  $AB$  лежать на відрізку  $CD$ . Довести, що ці відрізки лежать на одній прямій.

Нехай відрізок  $AB$  лежить на прямій  $a$ , а відрізок  $CD$  лежить на прямій  $b$ .

**17.12.** Прямий кут поділено на три кути, градусні міри яких відносяться як  $1:2:3$ . Знайти величини цих кутів. (Відповідь:  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ )

**17.13.** Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін дорівнює  $126^\circ$ . Знайти даний кут. (Відповідь:  $108^\circ$ )

**17.14.** Промінь  $DC$  проходить між сторонами кута  $ADK$ . Промінь  $DM$  – бісектриса кута  $ADC$ , промінь  $DP$  – бісектриса кута  $CDK$ . Знайти кут  $ADK$ , якщо  $\angle MDP = 86^\circ$ . (Відповідь:  $172^\circ$ )

**17.15.** Із чотирьох точок  $A, B, C, D$  точки  $A, B, C$  лежать на одній прямій і точки  $B, C, D$  також лежать на одній прямій. Довести, що всі чотири точки лежать на одній прямій.

Аксиоми  
вимірювання  
відрізків та кутів

$III_1$ . Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

$III_2$ . Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює  $180^\circ$ . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Аксиоми  
відкладання  
відрізків та кутів

$IV_1$ . На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один.

$IV_2$ . Від будь-якого променя в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою  $180^\circ$ , і до того ж тільки один.

$IV_3$ . Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у заданому розміщенні відносно даного променя.

Аксиома  
паралельності

$V$ . Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Оскільки за умовою ці два відрізки мають дві спільні точки, то прямі  $a$  і  $b$  також мають дві спільні точки. За аксіомою  $I_2$  прямі  $a$  і  $b$  збігаються. Отже, відрізки  $AB$  і  $CD$  лежать на одній прямій.

**Приклад 17.10.** Три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежать на одній прямій,  $AB = 4,6$  см,  $AC = 7,8$  см,  $BC = 3,2$  см.

- 1) Чи може точка  $A$  лежати між точками  $B$  і  $C$ ?
- 2) Чи може точка  $C$  лежати між точками  $A$  і  $B$ ?
- 3) Яка з трьох точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежить між двома іншими?

1) Якщо точка  $A$  лежить між точками  $B$  і  $C$ , то за аксіомою  $III_1$  має виконуватись рівність:  $AB + AC = BC$ . Оскільки  $4,6 + 7,8 \neq 3,2$ , то точка  $A$  не лежить між точками  $B$  і  $C$ .

2) Якщо точка  $C$  лежить між точками  $A$  і  $B$ , то за аксіомою  $III_1$  має виконуватись рівність:  $AC + BC = AB$ . Оскільки  $7,8 + 3,2 \neq 4,6$ , то точка  $C$  не лежить між точками  $A$  і  $B$ .

3) Оскільки  $AB + BC = AC$ , то за аксіомою  $III_1$  точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ .  
Відповідь: 1) ні; 2) ні; 3) точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ .

**17.16.** Три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежать на одній прямій,  $AB = 5,2$  см,  $AC = 3,3$  см,  $BC = 8,5$  см.

- 1) Чи може точка  $B$  лежати між точками  $A$  і  $C$ ?
- 2) Чи може точка  $C$  лежати між точками  $A$  і  $B$ ?
- 3) Яка з трьох точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежить між двома іншими? (Відповідь: 1) ні; 2) ні; 3) точка  $A$  лежить між точками  $B$  і  $C$ )

**17.17.** Чи може промінь  $c$  проходити між сторонами  $\angle(a, b)$ , якщо:

- 1)  $\angle(a, c) = 22^\circ$ ,  
 $\angle(c, b) = 76^\circ$ ,  $\angle(a, b) = 98^\circ$ ;
  - 2)  $\angle(a, c) = 28^\circ$ ,  
 $\angle(c, b) = 88^\circ$ ,  $\angle(a, b) = 60^\circ$ .
- (Відповідь: 1) так; 2) ні)

**17.18.** На прямій  $AB$  позначено точку  $C$ , яка лежить між точками  $A$  і  $B$ . Скільки кутів даної градусної міри можна відкласти:

- 1) від променя  $CA$  в один бік від нього;
- 2) від доповняльних променів із початком у точці  $C$  в один бік від них? (Відповідь: 1) один; 2) два)

## 18 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Суміжні кути

Два кути, у яких одна сторона спільна, а інші сторони є доповняльними променями.

На рис. 18.1  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  – суміжні кути.

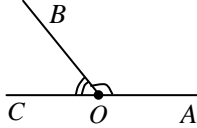


Рис. 18.1.

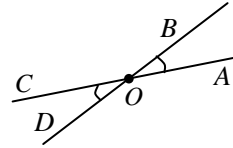


Рис. 18.2.

*Теорема 18.1.* Сума суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

Вертикальні кути

Два кути, у яких дві сторони одного є доповняльними променями сторін другого.

На рис. 18.2  $\angle AOB$  і  $\angle COD$ ,  $\angle BOC$  і  $\angle AOD$  – вертикальні кути.

*Теорема 18.2.* Вертикальні кути рівні.

Кут між двома прямими

Менший з кутів, утворених при перетині двох прямих.

На рис. 18.3 кут  $\alpha$  – кут між прямими  $a$  і  $b$ .

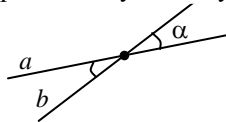


Рис. 18.3.

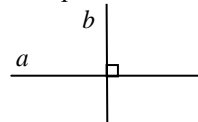


Рис. 18.4.

Перпендикулярні прямі

Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом.

Перпендикулярність прямих  $a$  і  $b$  позначають символом « $\perp$ ».

На рис. 18.4  $a \perp b$ .

*Теорема 18.3.* Через будь-яку точку на прямій проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

**Приклад 18.1.** Кути  $AOD$  і  $BOD$  – суміжні, промінь  $OC$  – бісектриса кута  $AOD$ , кут  $BOD$  на  $36^\circ$  менший за кут  $COD$ . Знайти кути  $AOD$  і  $BOD$ .

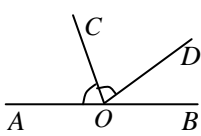


Рис. 18.5.

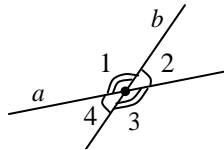


Рис. 18.6.

Нехай  $\angle BOD = x^\circ$ , тоді  $\angle COD = (x + 36)^\circ$  (рис. 18.5). За теоремою 18.1  $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$ . За властивістю бісектриси  $\angle AOD = 2\angle COD$ . Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$2\angle COD + \angle BOD = 180^\circ,$$

$$2(x + 36) + x = 180, \quad 3x = 108, \quad x = 36.$$

Отже,  $\angle BOD = 36^\circ$ ,  
 $\angle AOD = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ .

Відповідь:  $36^\circ, 144^\circ$ .

**Приклад 18.2.** Знайти кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює  $312^\circ$ .

Нехай  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 312^\circ$  (рис. 18.6). Оскільки  $\angle 1$  і  $\angle 2$  – суміжні, то за теоремою 18.1  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ , тому  $\angle 3 = 312^\circ - 180^\circ = 132^\circ$ . Оскільки  $\angle 1$  і  $\angle 3$  – вертикальні, то за теоремою 18.2  $\angle 1 = \angle 3 = 132^\circ$ .  $\angle 1$  і  $\angle 2$  – суміжні,  $\angle 2 = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$ . Оскільки  $\angle 2$  і  $\angle 4$  – вертикальні, то за теоремою 18.2  $\angle 2 = \angle 4 = 48^\circ$ . Відповідь:  $132^\circ, 48^\circ, 132^\circ, 48^\circ$ .

**18.1.** Знайти суміжні кути, якщо:

- 1) один з них у 5 разів менший за інший;
  - 2) один з них на  $48^\circ$  менший від другого;
  - 3) їх градусні міри відносяться як  $7:11$ .
- (Відповідь: 1)  $30^\circ, 150^\circ$ ;  
 2)  $66^\circ, 114^\circ$ ; 3)  $70^\circ, 110^\circ$ )

**18.2.** Знайти кут між бісектрисами суміжних кутів. (Відповідь:  $90^\circ$ )

**18.3.** Кути  $AOD$  і  $BOD$  – суміжні, промінь  $OC$  – бісектриса кута  $AOD$ , кут  $BOD$  на  $27^\circ$  менший за кут  $COD$ . Знайти кути  $AOD$  і  $BOD$ . (Відповідь:  $138^\circ, 42^\circ$ )

**18.4.** Знайти кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо:

- 1) сума двох із них дорівнює  $112^\circ$ ;
  - 2) сума трьох із них дорівнює  $302^\circ$ .
- (Відповідь: 1)  $56^\circ, 124^\circ, 56^\circ, 124^\circ$ ; 2)  $122^\circ, 58^\circ, 122^\circ, 58^\circ$ )

**18.5.** Знайти кут між бісектрисами вертикальних кутів. (Відповідь:  $180^\circ$ )

Перпендикуляр Відрізок прямої, перпендикулярної до даної, який має одним зі своїх кінців точку їх перетину. Ця точка називається *основою перпендикуляра*.

Відстань від точки до прямої Довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

На рис. 18.7 відрізок  $AO$  – перпендикуляр до прямої  $a$ , точка  $O$  – основа перпендикуляра.

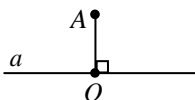


Рис. 18.7.

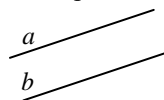


Рис. 18.8.

Паралельні прямі Дві прямі, які не перетинаються. Паралельність прямих позначають знаком « $\parallel$ ». На рис. 18.8  $a \parallel b$ .

Відстань між двома паралельними прямими Відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Січна пряма Пряма, яка перетинає дві задані прямі, називається *січною* цих прямих.

Кути, які утворюються при перетині двох прямих січною При перетині прямих  $a$  і  $b$  січною  $c$  утворюються такі види кутів (рис. 18.11):

$\angle 2$  і  $\angle 5$ ,  $\angle 3$  і  $\angle 8$  – *внутрішні односторонні кути*;

$\angle 2$  і  $\angle 8$ ,  $\angle 3$  і  $\angle 5$  – *внутрішні різносторонні кути*;

$\angle 1$  і  $\angle 5$ ,  $\angle 2$  і  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  і  $\angle 7$ ,  $\angle 4$  і  $\angle 8$  – *відповідні кути*;

$\angle 1$  і  $\angle 6$ ,  $\angle 4$  і  $\angle 7$  – *зовнішні односторонні кути*;

$\angle 1$  і  $\angle 7$ ,  $\angle 4$  і  $\angle 6$  – *зовнішні різносторонні кути*.

**Приклад 18.3.** Прямі  $AB$  і  $a$  перпендикулярні. Відстані від точок  $A$  і  $B$  до прямої  $a$  відповідно дорівнюють 10 см і 8 см. Знайти довжину відрізка  $AB$  та відстань від середини відрізка  $AB$  до прямої  $a$ .

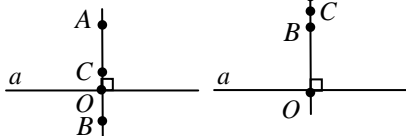


Рис. 18.9.

Рис. 18.10.

Можливі два випадки: точки  $A$  і  $B$  лежать з різних боків від прямої  $a$  (рис. 18.9); точки  $A$  і  $B$  лежать з одного боку від прямої  $a$  (рис. 18.10).

1-й випадок.  $OA = 10$  см,  $OB = 8$  см,  $AB = OA + OB = 10 + 8 = 18$  (см).

Нехай  $C$  – середина відрізка  $AB$ , тоді  $CA = CB = AB/2 = 9$  (см).

$OC = OA - CA = 10 - 9 = 1$  (см).

2-й випадок.  $OA = 10$  см,  $OB = 8$  см,  $AB = OA - OB = 10 - 8 = 2$  (см).

Нехай  $C$  – середина відрізка  $AB$ , тоді  $CA = CB = AB/2 = 1$  (см).

$OC = OB + CB = 8 + 1 = 9$  (см).

Відповідь: 18 і 1 см або 1 і 9 см.

**Приклад 18.4.** Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній відносяться як 1:3. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює: 1)  $70^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ .

Нехай  $\angle 1$  і  $\angle 2$  – внутрішні односторонні кути при  $a \parallel b$  та січній  $c$  (рис.18.15). Нехай  $\angle 1 = x^\circ$ , тоді  $\angle 2 = 3x^\circ$ . За теоремою 18.5  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ .

**18.6.** Кут  $ABC$  дорівнює  $130^\circ$ , промені  $BN$  і  $BM$  проходять між сторонами цього кута і перпендикулярні до них. Знайти кут  $MBN$ . (Відповідь:  $50^\circ$ )

**18.7.** Із вершини кута  $ABC$ , який дорівнює  $60^\circ$ , проведено промені  $BD$  і  $BF$  так, що  $BD \perp BA$ ,  $BF \perp BC$ , промені  $BD$  і  $BC$  належать куту  $ABF$ . Знайти кут  $ABF$ . (Відповідь:  $150^\circ$ )

**18.8.** Прямі  $AB$  і  $a$  перпендикулярні. Відстані від точок  $A$  і  $B$  до прямої  $a$  відповідно дорівнюють 12 см і 18 см. Знайти довжину відрізка  $AB$  та відстань від середини відрізка  $AB$  до прямої  $a$ . (Відповідь: 30 і 3 см або 6 і 15 см)

**18.9.** Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній відносяться як 1:3. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює: 1)  $80^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ . (Відповідь: 1) ні; 2) так)

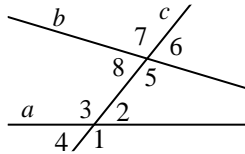


Рис. 18.11.

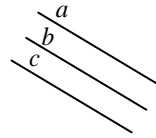


Рис. 18.12.

*Теорема 18.4.* Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні (рис.18.12):

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b.$$

Ознаки паралельності прямих

*Теорема 18.5.* Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює  $180^\circ$ , то прямі паралельні (рис.18.13):

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b.$$

*Теорема 18.6.* Якщо внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні (рис. 18.13):

$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow a \parallel b.$$

*Теорема 18.7.* Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні (рис. 18.13):

$$\angle 1 = \angle 4 \Rightarrow a \parallel b.$$

*Теорема 18.8.* Якщо дві прямі перпендикулярні до третьої прямої, то вони паралельні (рис. 18.14):

$$a \perp c, b \perp c \Rightarrow a \parallel b.$$

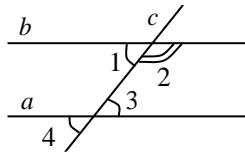


Рис. 18.13.

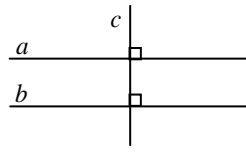


Рис. 18.14.

Властивості паралельних прямих

*Теорема 18.9.* Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює  $180^\circ$ .

*Теорема 18.10.* Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то внутрішні різносторонні кути рівні.

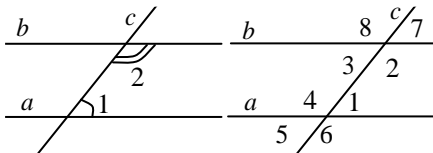


Рис. 18.15.

Рис. 18.16.

Маємо:  $x + 3x = 180$ ,  $x = 45$ .  $\angle 1 = 45^\circ$ ,  
 $\angle 2 = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$ . Знайдемо різницю  
данних кутів:  $\angle 2 - \angle 1 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ .

Отже, прямі  $a$  і  $b$  паралельні, якщо  
різниця внутрішніх односторонніх кутів  
дорівнює  $90^\circ$ , тому у випадку 1) прямі  
не паралельні, а у випадку 2) прямі  
паралельні. Відповідь: 1) ні; 2) так.

**Приклад 18.5.** Один із внутрішніх  
односторонніх кутів при двох  
паралельних прямих і січній дорівнює  
 $54^\circ$ . Знайти решту кутів.

Позначимо менший із двох  
внутрішніх односторонніх кутів  
цифрою 1, а решту кутів так, як на  
рис. 18.16. За умовою  $\angle 1 = 54^\circ$ . За  
властивостями паралельних прямих  
дістаємо:

- 1)  $\angle 1$  і  $\angle 2$  – внутрішні односторонні,  
тому  $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$ ;
- 2)  $\angle 1$  і  $\angle 3$  – внутрішні різносторонні,  
тому  $\angle 1 = \angle 3 = 54^\circ$ ;
- 3)  $\angle 2$  і  $\angle 4$  – внутрішні різносторонні,  
тому  $\angle 2 = \angle 4 = 126^\circ$ ;
- 4)  $\angle 3$  і  $\angle 5$  – відповідні, тому  
 $\angle 3 = \angle 5 = 54^\circ$ ;
- 5)  $\angle 2$  і  $\angle 6$  – відповідні, тому  
 $\angle 2 = \angle 6 = 126^\circ$ ;
- 6)  $\angle 1$  і  $\angle 7$  – відповідні, тому  
 $\angle 1 = \angle 7 = 54^\circ$ ;
- 7)  $\angle 4$  і  $\angle 8$  – відповідні, тому  
 $\angle 4 = \angle 8 = 126^\circ$ .

**18.10.** Кути  $\alpha$  і  $\beta$  –  
внутрішні різносторонні  
при двох прямих та січній.  
Чи паралельні прямі,  
якщо:

- 1)  $\alpha - \beta > 0^\circ$ ;
- 2)  $\alpha - \beta = 0^\circ$ ;
- 3)  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

(Відповідь: 1) ні; 2) так;  
3) прямі паралельні, якщо  
 $\alpha = \beta = 90^\circ$ , в інших  
випадках ні)

**18.11.** Сума меншого із  
внутрішніх односторонніх  
кутів і половини більшого  
кута дорівнює  $110^\circ$ .  
Якою має бути градусна  
міра меншого кута, щоб  
прямі були паралельними?  
(Відповідь:  $40^\circ$ )

**18.12.** Знати усі кути,  
утворені при перетині двох  
паралельних прямих  
січною, якщо:

- 1) один із них дорівнює  
 $42^\circ$ ;
  - 2) різниця внутрішніх  
односторонніх кутів  
дорівнює  $30^\circ$ ;
  - 3) різниця внутрішніх  
односторонніх кутів  
відноситься до їх суми як  
2:3.
- (Відповідь: 1)  $42^\circ$  і  $138^\circ$ ;  
2)  $75^\circ$  і  $105^\circ$ ; 3)  $30^\circ$  і  
 $150^\circ$ )

Властивості  
паралельних прямих

*Теорема 18.11.* Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то відповідні кути рівні.

*Теорема 18.12.* Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

Теорема Фалеса

*Теорема 18.13.* Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

На рис. 18.17: якщо  $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ ,  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ , то  $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ .

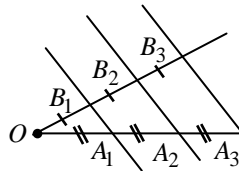


Рис. 18.17.

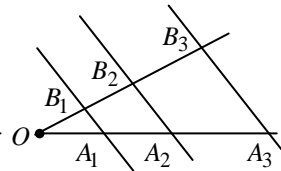


Рис. 18.18.

Теорема  
про пропорційні  
відрізки

*Теорема 18.14.* Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.

На рис. 18.18  $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$ .

**Приклад 18.6.** Поділити даний відрізок на три частини, пропорційні числам 1, 2 і 3.

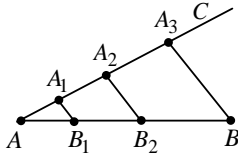


Рис. 18.19.

З точки  $A$  даного відрізка  $AB$  під довільним кутом до нього проведемо промінь  $AC$  і відкладемо на ньому послідовно 1, 2, 3 довільних, але рівних відрізків (рис. 18.19). Отримаємо відрізки  $AA_1$ ,  $A_1A_2$  і  $A_2A_3$ , пропорційні даним числам 1, 2 і 3. Проведемо пряму  $A_3B$ . Через точки  $A_1$  і  $A_2$  проведемо прямі, паралельні прямій  $A_3B$ . Вони перетнуть даний відрізок  $AB$  у точках  $B_1$  і  $B_2$  відповідно. За теоремою 18.14 відрізки  $AB_1$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_2B$  пропорційні відрізкам  $AA_1$ ,  $A_1A_2$  і  $A_2A_3$ , які пропорційні числом 1, 2 і 3.

**18.13.** Поділити даний відрізок на три частини, пропорційні числам 2, 3 і 5.

**18.14.** На рис. 18.20  $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$   
 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$   
 Знайти  $OB_2$ , якщо  $B_1B_4 = 27$  см.

(Відповідь: 18 см)

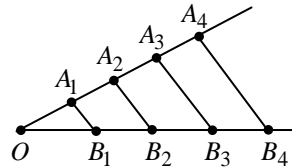


Рис. 18.20.

**18.15.** На рис. 18.21  $MN \parallel AC$ ,  $BN = 15$  см, відрізок  $BM$  у 3 рази більший за відрізок  $AM$ . Знайти  $BC$ .

(Відповідь: 20 см)

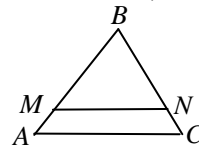


Рис. 18.21.

**18.16.** На стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  позначено точку  $K$  таку, що  $AK = 12$  м,  $KB = 6$  м. Знайти відношення відстаней від точок  $K$  і  $B$  до прямої  $AC$ .

(Відповідь: 2:3)

## 19 ТРИКУТНИКИ

Трикутник

Геометрична фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що сполучають ці точки, та обмеженої ними частини площини.

Елементи трикутника

Вказані точки називаються *вершинами трикутника*, а відрізки – його *сторонами*.

Трикутник називають і позначають за його вершинами.

Трикутник зображений на рис. 19.1, позначають так:  $\triangle ABC$ . У  $\triangle ABC$ : точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – вершини;  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  – сторони трикутника.

Кути  $\triangle ABC$  позначають так:  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle ACB$  або  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ .

Сторони  $\triangle ABC$ , які лежать проти кутів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  позначають малими літерами латинського алфавіту  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 19.1).

Кут  $A$  називають *протилежним* до сторони  $BC$ , а кути  $B$  і  $C$  – *прилеглими* до цієї сторони.

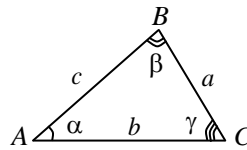


Рис. 19.1.

Гострокутний трикутник

Трикутник, у якого всі кути гострі (рис. 19.2).

Прямокутний трикутник

Трикутник, у якого один з кутів прямий (рис. 19.3).

Тупокутний трикутник

Трикутник, у якого один з кутів тупий (рис. 19.4).

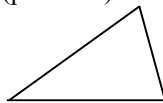


Рис. 19.2.

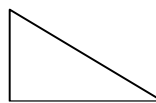


Рис. 19.3.

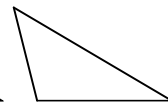


Рис. 19.4.

**Приклад 19.1.** Одна зі сторін трикутника в 5 разів менша від другої та на 37 см менша від третьої. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  
 $AB = x$  см, тоді  $BC = 5x$  см,  
 $AC = x + 37$  см. За умовою

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 72,$$

$$x + 5x + x + 37 = 72, \quad x = 5.$$

Отже,  $AB = 5$  (см),  $BC = 25$  (см),  
 $AC = 42$  (см). Відповідь: 5 см, 25 см,  
42 см.

**Приклад 19.2.** Сторони трикутника відносять як 3:4:5, а сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 88 м. Знайти периметр трикутника.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  
 $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  
 $AB = 3x$  м,  $BC = 4x$  м,  $AC = 5x$  м. За  
умовою  $AB + AC = 88$  м. Маємо:  
 $3x + 5x = 88$ ,  $x = 11$ . Отже,  $AB = 33$  (м),  
 $BC = 44$  (м),  $AC = 55$  (м).  
Відповідь: 33 м, 44 м, 55 м.

**Приклад 19.3.** Медіана  $BD$  трикутника  $ABC$  розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 20 см і 18 см. Знайти периметр трикутника  $ABC$ , якщо  $BD = 7$  см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  
 $BD$  – медіана (рис. 19.10). За умовою  
 $P_{\triangle ABD} = 20$  см,  $P_{\triangle DBC} = 18$  см,  
 $BD = 7$  см.

**19.1.** Одна зі сторін трикутника в 4 рази менша від другої та на 30 см менша від третьої. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 96 см. (Відповідь: 11 см, 44 см, 41 см)

**19.2.** Сторони трикутника відносять як 2:5:7, а сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 36 см. Знайти периметр трикутника. (Відповідь: 56 см)

**19.3.** Медіана  $BD$  трикутника  $ABC$  розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 22 см і 16 см. Знайти периметр трикутника  $ABC$ , якщо  $BD = 8$  см. (Відповідь: 22 см)

**19.4.** Медіана трикутника, периметр якого дорівнює 100 см, розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 44 см і 76 см. Знайти довжину цієї медіани. (Відповідь: 10 см)

Різносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони мають різні довжини (рис.19.5).

Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні (рис.19.6).

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю сторону – *основою*.

Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони рівні (рис.19.7).



Рис. 19.5.



Рис. 19.6.

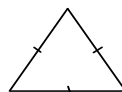


Рис. 19.7.

Периметр трикутника  
Нерівність трикутника

Сума довжин усіх його сторін:  $P = a + b + c$ .

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших сторін і більша за їх різницю:

$$c - b < a < b + c, \quad b < c.$$

Сума внутрішніх кутів трикутника

*Теорема 19.1.* Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ .

Зовнішній кут трикутника

Кут, суміжний з кутом трикутника. При кожній вершині трикутника є два зовнішні кути. На рис. 19.8 при вершині  $A$  зовнішніми є  $\angle 1$  і  $\angle 4$ .

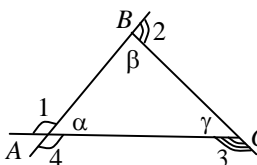


Рис. 19.8.

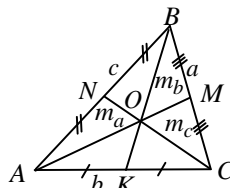


Рис. 19.9.

Сума зовнішніх кутів трикутника

*Теорема 19.2.* Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $360^\circ$ .

На рис. 19.8  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$ .

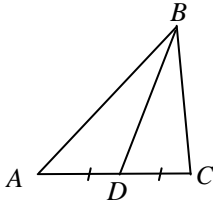


Рис. 19.10.

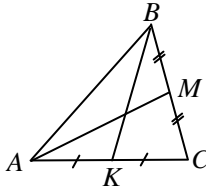


Рис. 19.11.

$$P_{\triangle ABD} = AB + BD + AD,$$

$$P_{\triangle DBC} = BC + CD + BD,$$

$$P_{\triangle ABD} + P_{\triangle DBC} = AB + AD + BC + CD + 2BD$$

Оскільки  $AC = AD + CD$ , то

$$P_{\triangle ABD} + P_{\triangle DBC} = P_{\triangle ABC} + 2BD,$$

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle DBC} - 2BD,$$

$$P_{\triangle ABC} = 20 + 18 - 2 \cdot 7 = 24 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 24 см.

**Приклад 19.4.** Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 4 см та 8 см. Чи може периметр цього трикутника дорівнювати 20 см?

Нехай  $a = 4$  см,  $b = 8$  см – довжини відомих сторін трикутника. Використовуючи нерівність трикутника, оцінимо довжину сторони  $c$ :  $b - a < c < a + b$ ,  $4 < c < 12$ . Тому  $16 < P_{\triangle ABC} < 24$ . Отже, периметр трикутника може дорівнювати 20 см.

Відповідь: може.

**Приклад 19.5.** Знайти кути трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 4:5:6.

Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $\angle 1 = 4x^\circ$ ,  $\angle 2 = 5x^\circ$ ,  $\angle 3 = 6x^\circ$ . Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$4x + 5x + 6x = 180, 15x = 180, x = 12.$$

**19.5.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 31 см, а бічна сторона – 10 см. Знайти основу трикутника.

(Відповідь: 11 см)

**19.6.** Знайти сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 42 см, а основа на 6 см більша за бічну сторону.

(Відповідь: 12 см, 12 см, 18 см)

**19.7.** Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 6 м та 10 м. Чи може його периметр дорівнювати:

1) 26 м; 2) 32 м; 3) 18 м?

(Відповідь: 1) так; 2) ні; 3) ні)

**19.8.** Знайти кути трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3:7:8. (Відповідь:  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ )

**19.9.** Один з кутів трикутника в 4 рази менший від другого кута та на  $30^\circ$  менший від третього. Знайти кути трикутника.

(Відповідь:  $25^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $55^\circ$ )

*Теорема 19.3.* Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

На рис. 19.8  $\angle 1 = \beta + \gamma$ ,  $\angle 2 = \alpha + \gamma$ ,  
 $\angle 3 = \alpha + \beta$ .

Медіана трикутника

Відрізок, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони.

Кожен трикутник має три медіани. Медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься всередині трикутника. Точка перетину медіан трикутника – *центр мас*.

Медіани проведені до сторін  $a$ ,  $b$ ,  $c$  позначають  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  відповідно (рис. 19.9).

На рис. 19.9  $AM$ ,  $BK$ ,  $CN$  – медіани,  $O$  – центр мас.

Властивість медіан трикутника

*Теорема 19.4.* Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника (рис. 19.9):

$$AO : OM = BO : OK = CO : ON = 2 : 1.$$

Формули для обчислення медіан трикутника

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2},$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Висота трикутника

Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить протилежну сторону трикутника.

Кожен трикутник має три висоти.

Тоді  $\angle 1 = 4 \cdot 12 = 48^\circ$ ,  
 $\angle 2 = 5 \cdot 12 = 60^\circ$ ,  $\angle 3 = 6 \cdot 12 = 72^\circ$ .  
 Відповідь:  $48^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $72^\circ$ .

**Приклад 19.6.**  $AM$  та  $BK$  – медіани  $\triangle ABC$ ,  $AK = 10$  см,  $BM = 14$  см. Знайти периметр  $\triangle ABC$ , якщо  $AB = 30$  см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $AM$  та  $BK$  – медіани (рис. 19.11).  
 За означенням медіани  $BM = MC$ ,  
 $AK = KC$ , тому  $BC = 2BM = 28$  (см),  
 $AC = 2AK = 20$  (см). Периметр  $\triangle ABC$ :  
 $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 78$  (см).  
 Відповідь: 78 см.

**Приклад 19.7.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 23 см і 30 см. Знайти довжину медіани, проведеної до найбільшої сторони.

Нехай  $a = 11$  см,  $b = 23$  см,  $c = 30$  см. Медіану, проведеної до найбільшої, обчислимо за формулою:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(11^2 + 23^2) - 30^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10 см.

**Приклад 19.8.** Висоти  $AM$  і  $BK$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ ,  $\angle ABC = 75^\circ$  (рис. 19.14). Знайти кут  $AOB$ .

З  $\triangle ABC$ :

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC,$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 40^\circ - 75^\circ = 65^\circ.$$

З  $\triangle KBC$ :

$$\angle KBC = 180^\circ - \angle BKC - \angle ACB.$$

**19.10.** Градусні міри зовнішніх кутів трикутника  $ABC$  при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$  відносяться як 3:4:5. Як відносяться градусні міри внутрішніх кутів трикутника при вершинах  $A$ ,  $B$  і  $C$ .  
 (Відповідь: 3:2:1)

**19.11.** Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює  $153^\circ$ . Знайти кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один з них на  $41^\circ$  більший за другий.  
 (Відповідь:  $56^\circ$ ,  $97^\circ$ )

**19.12.** Медіана  $CD$  трикутника  $ABC$  дорівнює 9 см. Знайти довжини відрізків  $CO$  і  $OD$ , де  $O$  – точка перетину медіан трикутника  $ABC$ .  
 (Відповідь: 6 см, 3 см)

**19.13.** Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см, 6 см. Знайти довжину медіани, проведеної до сторони довжиною 5 см.  
 (Відповідь:  $\sqrt{79}/2$  см)

Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці, яка називається *ортоцентром*.

У гострокутному трикутнику ортоцентр знаходиться всередині трикутника; у прямокутному – у вершині прямого кута; у тупокутному – поза трикутником.

Висоти проведені з вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  позначають  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  відповідно (рис. 19.12).

На рис. 19.12  $AD$ ,  $BF$ ,  $CE$  – висоти,  $O$  – ортоцентр.

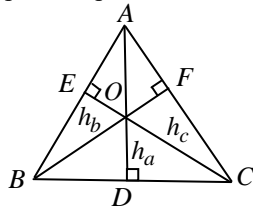


Рис. 19.12.

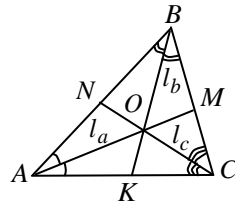


Рис. 19.13.

Бісектриса

Відрізок бісектриси кута трикутника, що лежить всередині трикутника.

Кожний трикутник має три бісектриси. Вони перетинаються в одній точці, яка лежить всередині трикутника (рис. 19.13). Точка перетину бісектрис трикутника називається *інцентром*.

Позначення:  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$  – бісектриси кутів, проведені з вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  відповідно (рис. 19.13).

На рис. 19.13  $AM$ ,  $BK$ ,  $CN$  – бісектриси  $\triangle ABC$ .

Властивість бісектриси трикутника

*Теорема 19.5.* Бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

На рис. 19.13  $\frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}$ .

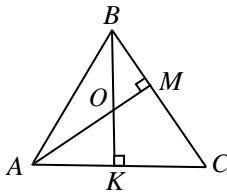


Рис. 19.14.

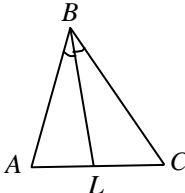


Рис. 19.15.

$$\angle KBC = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

$\angle AOB$  – зовнішній кут  $\triangle BOM$  при вершині  $O$ . За теоремою 19.3 маємо:

$$\angle AOB = \angle OBM + \angle BMO,$$

$$\angle AOB = 25^\circ + 90^\circ = 115^\circ.$$

Відповідь:  $115^\circ$ .

**Приклад 19.9.** У трикутнику  $ABC$ ,  $AB = k$ ,  $BC = m$ ,  $AC = n$ ,  $BL$  – бісектриса трикутника. Знайти довжину відрізка  $AL$ .

Нехай дано  $\triangle ABC$ , у якого  $AB = k$ ,  $BC = m$ ,  $AC = n$ ,  $BL$  – його бісектриса (рис. 19.15).

Використовуючи властивість бісектриси трикутника, отримуємо:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{LA}{LC}, \quad \frac{k}{m} = \frac{AL}{n - AL}, \quad AL = \frac{kn}{k + m}.$$

Відповідь:  $kn/(k + m)$ .

**Приклад 19.10.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 14 см і 16 см. Знайти периметр трикутника, вершини якого – середини сторін даного трикутника.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник, точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  – середини сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  відповідно (рис. 19.18).

Оскільки точки  $M$  і  $N$  – середини сторін  $AB$  і  $BC$ , то  $MN$  – середня лінія  $\triangle ABC$ .

**19.14.** Висоти  $AM$  і  $BK$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ ,  $\angle BAC = 50^\circ$ ,  $\angle ABC = 85^\circ$ . Знайти кут  $AOB$ . (Відповідь:  $135^\circ$ )

**19.15.** Продовження висот, проведених з вершин  $A$  і  $B$  трикутника  $ABC$ , перетинаються в точці  $H$ ,  $\angle A = 14^\circ$ ,  $\angle B = 22^\circ$ . Знайти кут  $AHB$ . (Відповідь:  $36^\circ$ )

**19.16.** Знайти висоту  $BH$  трикутника  $ABC$ , якщо периметри трикутників  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BHC$  відповідно дорівнюють 28 см, 16 см і 20 см. (Відповідь: 4 см)

**19.17.**  $CH$  і  $CL$  – висота і бісектриса прямокутного  $\triangle ABC$  проведені з вершини прямого кута. Знайти  $\angle HCL$ , якщо  $\angle A : \angle B = 5 : 1$ . (Відповідь:  $30^\circ$ )

**19.18.** У  $\triangle ABC$   $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ . Знайти гострий кут, що утворений бісектрисами даних кутів. (Відповідь:  $60^\circ$ )

Для нерівнобедреного трикутника має місце нерівність:  $h_a < l_a < m_a$ .

Середня лінія  
трикутника

Відрізок, який з'єднує середини двох сторін трикутника.

У кожному трикутнику можна провести три середні лінії.

На рис. 19.16  $MN$ ,  $NP$ ,  $MP$  – середні лінії  $\triangle ABC$ .

Властивість  
середньої лінії  
трикутника

*Теорема 19.6.* Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює її половині.

На рис. 19.16  $MN \parallel AC$ ,  $MN = \frac{1}{2} AC$ .

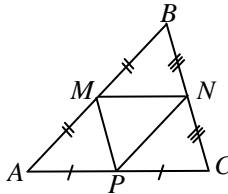


Рис. 19.16.

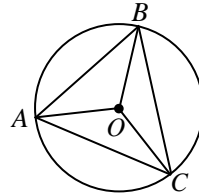


Рис.19.17.

Коло, описане  
навколо трикутника,  
та трикутник,  
вписаний у коло

Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називається *колом описаним навколо трикутника*. У цьому разі говорять, що *трикутник вписаний у коло*.

Центр кола, описаного навколо трикутника, рівновіддалений від усіх його вершин.

На рис. 19.17 зображено трикутник вписаний у коло з центром  $O$ ,  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  – радіуси цього кола,  $OA = OB = OC$ .

*Теорема 19.7.* Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, і до того ж тільки одне.

*Теорема 19.8.* Центр кола, описаного навколо трикутника, – це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника (рис. 19.20).

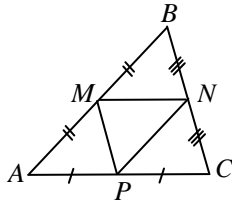


Рис. 19.18.

За властивістю середньої лінії трикутника  $MN = \frac{1}{2} AC$ . Аналогічно,

$$NP = \frac{1}{2} AB, \quad MP = \frac{1}{2} BC.$$

$$\begin{aligned} P_{\Delta MNP} &= MN + NP + MP = \\ &= \frac{1}{2}(AC + AB + BC), \end{aligned}$$

$$P_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}(12 + 14 + 16) = 21 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 21 см.

**Приклад 19.11.** Довести, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник – прямокутний.

Нехай  $\Delta ABC$  – заданий трикутник,  $O$  – центр описаного кола  $\Delta ABC$ ,  $O \in AC$  (рис. 19.19). Оскільки  $OA = OB$ , то  $\Delta AOB$  – рівнобедрений. Отже,  $\angle ABO = \angle BAO = \angle BAC$ .

Оскільки  $OB = OC$ , то  $\Delta BOC$  – рівнобедрений, тому  $\angle OBC = \angle BCO = \angle BCA$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABO + \angle OBC = \\ &= \angle BAC + \angle BCA, \end{aligned}$$

$$\angle BAC + \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC,$$

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle ABC,$$

$$2\angle ABC = 180^\circ, \quad \angle ABC = 90^\circ.$$

Отже,  $\Delta ABC$  – прямокутний.

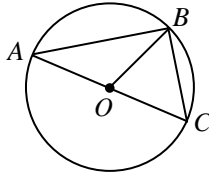


Рис. 19.19.

**19.19.** У  $\Delta ABC$   
 $AB = 4$  см,  $BC = 5$  см,  
 $AC = 6$  см,  $BL$  –  
 бісектриса трикутника.  
 Знайти довжину відрізка  
 $AL$ . (Відповідь:  $8/3$ )

**19.20.** Через вершину  $C$  трикутника  $ABC$  проведено пряму, яка паралельна бісектрисі  $AM$  трикутника та перетинає пряму  $AB$  у точці  $D$ . Знайти кути трикутника  $ADC$ , якщо  $\angle BAC = 40^\circ$ .  
 (Відповідь:  $140^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $20^\circ$ )

**19.21.** Сторони трикутника дорівнюють 14 см, 16 см і 18 см. Знайти периметр трикутника, вершини якого – середини сторін даного трикутника.  
 (Відповідь: 24 см)

**19.22.** Сторони трикутника дорівнюють 18 см, 10 см, 14 см. Знайти сторони трикутника, вершини якого є серединами середніх ліній даного трикутника.  
 (Відповідь: 10,5 см)

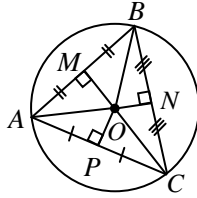


Рис. 19.20.

Коло, вписане в трикутник, та трикутник, описаний навколо кола

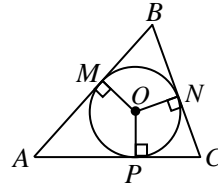


Рис. 19.21.

Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, називають *колом вписаним у трикутник*. У цьому разі говорять, що *трикутник описаний навколо кола*.

Центр кола вписаного в трикутник рівновіддалений від усіх його сторін.

На рис. 19.21 зображено трикутник описаний навколо кола з центром  $O$ ,  $OM$ ,  $ON$ ,  $OP$  – радіуси цього кола, проведені в точки дотику сторін трикутника з колом,  $OM = ON = OP$ .

*Теорема 19.9.* У будь-який трикутник можна вписати коло, і до того ж тільки одне.

*Теорема 19.10.* Центр кола, вписаного в трикутник, – це точка перетину бісектрис трикутника (рис. 19.22).

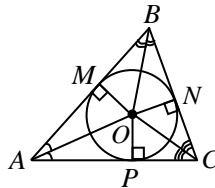


Рис. 19.22.

Властивості рівнобедреного трикутника

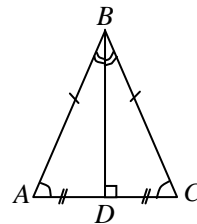


Рис. 19.23.

На рис. 19.23 зображено рівнобедрений  $\triangle ABC$ , у якого  $AB$ ,  $BC$  – бічні сторони,  $AC$  – основа,  $BD$  – висота проведена до основи.

**Приклад 19.12.** Точка дотику вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону у відношенні 5:3, рахуючи від вершини трикутника. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник, описаний навколо кола, точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  – точки дотику вписаного кола до сторін трикутника (рис. 19.24).

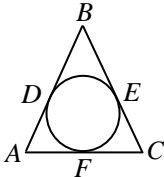


Рис. 19.24.

Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $AD = 3x$  см,  $BD = 5x$  см. За властивістю дотичних проведених з однієї точки (теорема 22.5):  $AD = AF$ ,  $BD = BE$ ,  $CE = CF$ .  $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 2(AD + BD + AF) = 22x$ .

За умовою  $22x = 88$ ,  $x = 4$ .  
 $AB = AD + BD = 8x = 32$  (см).  
 $BC = AB = 32$  (см).  
 $AC = AF + CF = 6x = 24$  (см).  
 Відповідь: 32 см, 32 см, 24 см.

**Приклад 19.13.** У трикутнику  $ABC$  бісектриса  $BD$  є його висотою. Знайти периметр трикутника  $ABC$ , якщо периметр трикутника  $ABD$  дорівнює 24 см і  $BD = 8$  см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $BD$  – його бісектриса та висота (рис. 19.25).

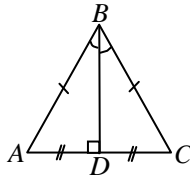


Рис. 19.25.

**19.23.** Довести, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті, то він рівнобедрений.

**19.24.** Довести, що коли центри вписаного й описаного кіл трикутників збігаються, то цей трикутник рівносторонній.

**19.25.** Коло, вписане в трикутник  $ABC$ , дотикається до сторін  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$  у точках  $K$ ,  $L$  і  $M$  відповідно.  $AB = 11$  м,  $AC = 13$  м,  $BK = 3$  м. Знайти сторону  $BC$ .

(Відповідь: 8 м)

**19.26.** Точка дотику вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону у відношенні 7:6, рахуючи від вершини трикутника. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 114 см. (Відповідь: 39 см, 39 см, 36 см)

Властивості  
рівнобедреного  
трикутника

1. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота та медіана, проведені до основи збігаються.

На рис. 19.23  $BD$  – медіана, висота та бісектриса.

2. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

На рис. 19.23  $\angle BAC = \angle BCA$ .

3. Медіани, бісектриси та висоти, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника рівні.

Ознаки  
рівнобедреного  
трикутника

Трикутник є рівнобедреним, якщо:

- 1) у нього є два рівні кути;
- 2) одна з медіан є висотою або бісектрисою;
- 3) одна з висот є бісектрисою або медіаною;
- 4) одна з бісектрис є медіаною або висотою;
- 5) дві медіани (висоти, бісектриси) рівні.

Властивості  
рівностороннього  
трикутника

На рис. 19.26 зображено рівносторонній трикутник  $ABC$ , у якого  $AB = BC = AC = a$ .

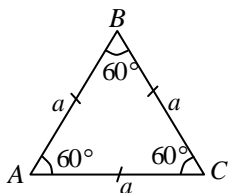


Рис. 19.26.

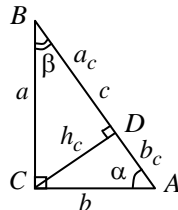


Рис. 19.27.

1. Будь-який рівносторонній трикутник має усі властивості рівнобедреного трикутника.

2. Усі кути рівностороннього трикутника рівні та дорівнюють  $60^\circ$ .

3. Будь-яка медіана рівностороннього трикутника є одночасно його бісектрисою та висотою.

4. Ортоцентр, центр мас, центр вписаного та описаного кіл збігаються.

Оскільки бісектриса  $BD$  є його висотою, то  $\triangle ABC$  – рівнобедрений, тому  $AB = BC$ ,  $BD$  – медіана,  $AC = 2AD$ . Маємо:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABD} &= AB + BD + AD, \\ AB + 8 + AD &= 24, \quad AB + AD = 16, \\ P_{\triangle ABC} &= 2AB + AC = \\ &= 2(AB + AD) = 32 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 32 см.

**Приклад 19.14.** Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 18 см. На його сторонах у зовнішню частину побудовано рівні рівнобедрені трикутники, сума периметрів яких дорівнює 84 см. Знайти сторони цих рівнобедрених трикутників.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий рівносторонній трикутник,  $\triangle ADB$  ( $AD = DB$ ),  $\triangle BEC$  ( $BE = EC$ ),  $\triangle AFC$  ( $CF = FA$ ) – рівні трикутники, побудовані на сторонах  $\triangle ABC$  (рис. 19.28).

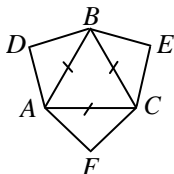


Рис. 19.28.

Оскільки  $\triangle ABC$  рівносторонній, то  $AB = BC = AC$ ,  $P_{\triangle ABC} = 3AB = 18$ ,  $AB = 6$  (см).  $P_{\triangle ADB} = AB + AD + DB = AB + 2AD$ .

Оскільки  $\triangle ADB = \triangle BEC = \triangle AFC$ , то  $P_{\triangle ADB} = P_{\triangle BEC} = P_{\triangle AFC}$ . За умовою  $P_{\triangle ADB} + P_{\triangle BEC} + P_{\triangle AFC} = 84$ ,

**19.27.** У  $\triangle ABC$  відомо, що  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ,  $CH$  – висота. Знайти сторону  $AB$ , якщо  $CH = 8$  см. (Відповідь: 16 см)

**19.28.** У трикутнику  $ABC$  бісектриса  $BD$  є його медіаною. Знайти периметр трикутника  $ABC$ , якщо периметр трикутника  $ABD$  дорівнює 26 см і  $BD = 9$  см. (Відповідь: 34 см)

**19.29.** Трикутник  $ABC$  рівнобедрений з основою  $AC$ . На стороні  $BC$  позначено точку  $D$  так, що  $AD = BD = AC$ . Знайти кути трикутника  $ABC$ . (Відповідь:  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ )

**19.30.** Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 24 см. На його сторонах у зовнішню частину побудовано рівні рівнобедрені трикутники, сума периметрів яких дорівнює 66 см. Знайти сторони цих трикутників. (Відповідь: 7 см, 7 см, 8 см)

Гіпотенуза прямокутного трикутника	Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту.
Катети прямокутного трикутника	Сторони прямокутного трикутника, прилеглі до прямого кута.
	На рис. 19.27 зображено прямокутний трикутник $ABC$ , у якого $\angle C = 90^\circ$ , $AB$ – гіпотенуза, $BC$ і $AC$ – катети
Властивості прямокутного трикутника	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює <math>90^\circ</math>.</li> <li>2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.</li> <li>3. Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута величиною в <math>30^\circ</math>, дорівнює половині гіпотенузи.</li> <li>4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює <math>30^\circ</math>.</li> </ol>
Теорема Піфагора	<i>Теорема 19.11.</i> У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 19.27).
Обернена теорема Піфагора	<i>Теорема 19.12.</i> Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник прямокутний.
Синус гострого кута прямокутного трикутника	Відношення протилежного катета до гіпотенузи. Синус кута $A$ позначають так: $\sin A$ .
Косинус гострого кута прямокутного трикутника Тангенс гострого кута прямокутного трикутника	Відношення прилеглого катета до гіпотенузи. Косинус кута $A$ позначають так: $\cos A$ . Відношення протилежного катета до прилеглого. Тангенс кута $A$ позначають так: $\operatorname{tg} A$ .

$3(AB + 2AD) = 84$ ,  $3(6 + 2AD) = 84$ ,  
 $AD = 11$  (см). Отже,  $AD = DB = BE =$   
 $= EC = CF = FA = 11$  (см).  
 Відповідь: 6 см, 11 см, 11 см.

**Приклад 19.15.** У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . На катеті  $BC$  позначено точку  $D$  таку, що  $\angle ADC = 60^\circ$  (рис. 19.29). Знайти довжину катета  $BC$ , якщо  $CD = 12$  см.

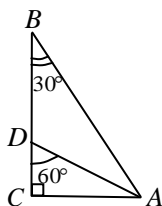


Рис. 19.29.

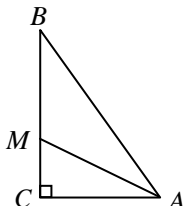


Рис. 19.30.

У  $\triangle ACD$   $\angle DAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .  
 За властивістю катета, який лежить проти кута величиною в  $30^\circ$ , отримуємо, що  $AD = 24$  см.  
 $\angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .  
 $\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 30^\circ$ . Оскільки  $\angle BAD = \angle ABD = 30^\circ$ , то  $\triangle ABD$  – рівнобедрений, тому  $AD = BD = 24$  (см)  
 $BC = BD + CD = 24 + 12 = 36$  (см)  
 Відповідь: 36 см.

**Приклад 19.16.** На катеті  $BC$  прямокутного  $\triangle ABC$  з гіпотенузою  $AB = 50$  см взято точку  $M$  таку, що  $AM = 41$  см і  $CM : MB = 3 : 7$ . Знайти катети трикутника.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий прямокутний трикутник, з гіпотенузою  $AB$ , точка  $M \in BC$  (рис. 19.30).

**19.31.** У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . На катеті  $BC$  позначено точку  $D$  таку, що  $\angle ADC = 60^\circ$ . Знайти довжину катета  $BC$ , якщо  $CD = 6$  см.  
 (Відповідь: 18 см)

**19.32.** У трикутнику  $ABC$   $AB = BC = 10$  см,  $\angle A = 75^\circ$ . Знайти висоту  $AD$ . (Відповідь: 5 см)

**19.33.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, а різниця двох інших сторін – 8 см. Знайти периметр трикутника.  
 (Відповідь: 126 см)

**19.34.** На катеті  $BC$  прямокутного  $\triangle ABC$  з гіпотенузою  $AB = 20$  см взято точку  $M$  таку, що  $AM = 13$  см,  $CM : MB = 5 : 11$ . Знайти катети трикутника.  
 (Відповідь: 16 см, 12 см)

**19.35.** Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб по ній можна було піднятися на дах будинку заввишки 10 м, якщо ставити її під кутом  $60^\circ$ .  
 (Відповідь:  $\approx 11,55$  м)

Котангенс гострого кута прямокутного трикутника

Відношення прилеглого катета до протилежного.

Котангенс кута  $A$  позначають так:  $\operatorname{ctg} A$ .

Для прямокутного трикутника, зображеного на рис. 19.27:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \text{ або } \sin \alpha = \frac{a}{c},$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \text{ або } \cos \alpha = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} \text{ або } \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Проекція катета на гіпотенузу

На рис. 19.27 відрізок  $CD$  – висота трикутника  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ), проведена до гіпотенузи. Відрізки  $AD$  і  $DB$  називають *проекціями на гіпотенузу катетів  $AC$  і  $CB$*  відповідно. Позначення:  $AD = b_c$ ,  $DB = a_c$ .

Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

1. Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу:  $h_c^2 = a_c \cdot b_c$ .

2. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи і проєкції цього катета на гіпотенузу:  $a^2 = c \cdot a_c$ ,  $b^2 = c \cdot b_c$ .

Рівні трикутники

Два трикутники, які можна сумістити накладанням.

У позначенні вершин рівних трикутників має значення порядок літер: літери, які відповідають рівним кутам, потрібно записувати в обох трикутниках на однакових місцях.

Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $CM = 3x$  см,  $MB = 7x$  см,  $BC = 10x$  см. З  $\triangle ACM$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора:

$$AC^2 = AM^2 - CM^2, \quad AC^2 = 1681 - 9x^2.$$

З  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) за теоремою Піфагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2,$$

$$2500 = 100x^2 + 1681 - 9x^2, \quad 91x^2 = 819,$$

$$x^2 = 9, \quad x = 3 \quad (x > 0).$$

Отже,  $BC = 30$  (см),

$$AC = \sqrt{1681 - 9 \cdot 9} = 40 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 30 см, 40 см.

**Приклад 19.17.** Дано прямокутний  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Знайти:

1)  $BC$ , якщо  $AB = 4$  см,  $\sin A = 0,2$ ;

2)  $BC$ , якщо  $AC = 6$  см,  $\operatorname{tg} B = \frac{2}{3}$ .

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий прямокутний трикутник (рис. 19.31).

1)  $\sin A = \frac{BC}{AB}$ ,  $BC = AB \sin A = 0,8$  (см);

2)  $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$ ,  $BC = \frac{AC}{\operatorname{tg} B} = 9$  (см).

Відповідь: 1) 0,8 см; 2) 9 см.

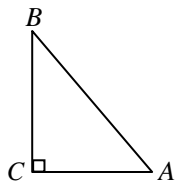


Рис. 19.31.

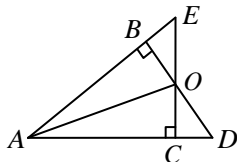


Рис. 19.32.

**19.36.** Дано прямокутний  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ).

Знайти:

1)  $BC$ , якщо  $AB = 6$  см,  $\sin A = 0,3$ ;

2)  $AB$ , якщо  $BC = 5$  см,  $\cos B = \frac{2}{5}$ ;

3)  $BC$ , якщо  $AC = 8$  см,  $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$ .

(Відповідь: 1) 1,8 см; 2) 12,5 см; 3) 6 см)

**19.37.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює  $b$ , а кут при вершині –  $\alpha$ . Знайти основу та висоти.

(Відповідь:  $2b \sin \frac{\alpha}{2}$ ,

$b \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $b \sin \alpha$ ,  $b \sin \alpha$ )

**19.38.** Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 20 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу – 40 см. Знайти сторони даного трикутника.

(Відповідь: 50 см,  $10\sqrt{5}$  см,  $20\sqrt{5}$  см)

На рис. 19.33  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  
 $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  
 $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ .

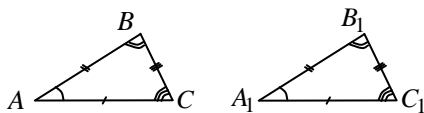


Рис. 19.33.

Ознаки рівності  
трикутників

Два трикутники рівні між собою, якщо в них відповідно рівні:

- 1) дві сторони і кут між ними;
- 2) сторона і прилеглі до неї кути;
- 3) три сторони.

Ознаки рівності  
прямокутних  
трикутників

1. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (*за двома катетами*).

2. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету та прилеглому до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (*за катетом і гострим кутом*).

3. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні (*за гіпотенузою та гострим кутом*).

4. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і катету другого, то такі трикутники рівні (*за гіпотенузою та катетом*).

Відповідні сторони

Сторони двох трикутників, що мають рівні кути, які лежать проти рівних кутів.

Подібні трикутники

Два трикутники, у яких рівні кути й відповідні сторони пропорційні.

**Приклад 19.18.** На сторонах кута  $A$  розміщено точки  $B$  і  $C$  так, що  $AB = AC$ . З точок  $B$  і  $C$  проведено перпендикуляри до сторін кута. Довести, що точка перетину цих перпендикулярів лежить на бісектрисі кута  $A$ .

Нехай  $BD \perp AB$  і  $CE \perp AD$  (рис. 19.32),  $O = BD \cap CE$ . За другою ознакою рівності трикутників  $\triangle ABD = \triangle ACE$  ( $AB = AC$ ,  $\angle DBA = \angle ECA = 90^\circ$ ,  $\angle A$  – спільний) Отже,  $AD = AE$ . Оскільки  $AB = AC$ , то  $AD - AC = AE - AB$ , тобто  $CD = BE$ . За другою ознакою рівності трикутників  $\triangle OCD = \triangle OBE$  ( $CD = BE$ ,  $\angle OCD = \angle OBE = 90^\circ$ ,  $\angle ODC = \angle OEB$ ) Звідси випливає, що  $OC = OB$ . За першою ознакою рівності трикутників  $\triangle AOC = \triangle AOB$  ( $OC = OB$ ,  $AB = AC$ ,  $\angle OCA = \angle OBA = 90^\circ$ ). Отже,  $\angle CAO = \angle BAO$ , тобто точка  $O$  лежить на бісектрисі кута  $A$ . Що й треба було довести.

**Приклад 19.19.** Відомо, що  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , причому  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $AB = 9$  м,  $BC = 12$  м,  $A_1B_1 = 15$  м,  $A_1C_1 = 18$  м. Знайти  $AC$  і  $B_1C_1$ .

Оскільки  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  та  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , то має місце рівність  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ . Маємо:  

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \frac{9}{15} = \frac{12}{B_1C_1}, B_1C_1 = 20 \text{ (м)}$$

**19.39.** На продовженні медіани  $AM$  трикутника  $ABC$  за точку  $M$  відкладено відрізок  $MK$ , який дорівнює  $AM$ . Знайти відстань від точки  $K$  до вершини  $C$ , якщо  $AB = 7$  см.  
(Відповідь: 7 см)

**19.40.** Довести, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, є рівними.

**19.41.** Довести, що висоти рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, є рівними.

**19.42.** У рівнобедреному трикутнику  $DEF$  ( $DF = EF$ ) на сторонах  $DF$  і  $EF$  відкладено рівні відрізки  $FM$  і  $FK$ . Довести:  $\angle DME = \angle DKE$ .

**19.43.** Рівні відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $OA = OD$ . Довести:  $\triangle ABC = \triangle DCB$ .

**19.44.** Висоти  $AM$  і  $CK$   $\triangle ABC$  перетинаються в точці  $H$ ,  $HK = HM$ . Довести, що  $\triangle ABC$  рівнобедрений.

Подібність двох трикутників  $\triangle ABC$  і  $\triangle A_1B_1C_1$  позначають так:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

На рис. 19.34 зображено два трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , у яких  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$ , тобто за означенням  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

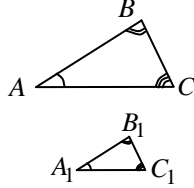


Рис. 19.34.

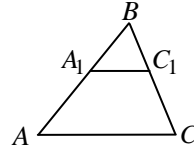


Рис. 19.35.

Якщо  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то справедливі такі рівності:

- 1)  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ;
- 2)  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ .

Коефіцієнт подібності

Число  $k$ , яке дорівнює відношенню відповідних сторін трикутників.

Якщо відомий коефіцієнт подібності, то подібність  $\triangle ABC$  і  $\triangle A_1B_1C_1$  записують так:

$$\triangle ABC \overset{k}{\sim} \triangle A_1B_1C_1.$$

Відношення периметрів та відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \frac{9}{15} = \frac{AC}{18}, AC = 10,8 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 10,8 м, 20 м.

**Приклад 19.20.** У  $\triangle ABC$   $AB = 12$  см,  $BC = 6$  см,  $AC = 9$  см. Із точки  $D$  сторони  $AB$  проведено прямі  $DE$  і  $DF$  ( $E \in BC, F \in AC$ ), паралельні  $AC$  і  $BC$ . Знайти  $DE$ ,  $DF$ ,  $AF$ , якщо  $AD = 8$  см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $DE \parallel AC$ ,  $DF \parallel BC$  (рис. 19.36).

Розглянемо  $\triangle ADF$  і  $\triangle ABC$ . Оскільки  $DF \parallel BC$ , то за теоремою 19.13

$$\triangle ADF \sim \triangle ABC, \text{ тому } \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC}.$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC}, \frac{8}{12} = \frac{DF}{6}, DF = 4 \text{ (см)}.$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}, \frac{8}{12} = \frac{AF}{9}, AF = 6 \text{ (см)}.$$

Розглянемо  $\triangle DBE$  і  $\triangle ABC$ . Оскільки  $DE \parallel AC$ , то за теоремою 19.13

$$\triangle DBE \sim \triangle ABC, \text{ тому } \frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB},$$

$$DB = AB - AD = 12 - 8 = 4 \text{ (см)},$$

$$\frac{DE}{9} = \frac{4}{12}, DE = 3 \text{ (см)}. \text{ Відповідь: } 3 \text{ см,}$$

4 см, 6 см.

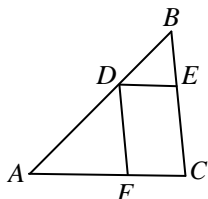


Рис. 19.36.

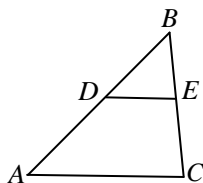


Рис. 19.37.

**19.45.** Трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  подібні, причому сторонам  $AB$  і  $BC$  відповідають сторони  $A_1B_1$  і  $B_1C_1$ ,  $BC = 4$  см,  $AB = 8$  см,  $B_1C_1 = 16$  см,  $A_1C_1 = 28$  см. Знайти невідомі сторони цих трикутників.

(Відповідь: 7 см, 32 см)

**19.46.** Сторони трикутника пропорційні числам 3, 5 і 6. Знайти сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 42 см.

(Відповідь: 9 см, 15 см, 18 см)

**19.47.** Сторони трикутника відносяться як 3:5:7. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо його менша сторона дорівнює 9 см.

(Відповідь: 9 см, 15 см, 21 см)

**19.48.** Продовження бічних сторін  $AB$  і  $CD$  трапеції  $ABCD$  перетинаються в точці  $M$ ,  $DC : CM = 3 : 5$ ,  $BC$  – менша основа трапеції. Знайти основи трапеції, якщо їх сума дорівнює 26 см.

(Відповідь: 10 см, 16 см)

*Теорема 19.13.* Пряма, яка паралельна до сторони трикутника та перетинає дві інші його сторони, відтинає від нього подібний йому трикутник.

На рис. 19.35 зображено  $\triangle ABC$ ,  $A_1C_1 \parallel AC$ , тому  $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ .

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні, якщо:

- 1) два кути одного трикутника відповідно рівні двом кутам другого трикутника;
- 2) дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні;
- 3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника.

Ознаки подібності прямокутних трикутників

Два прямокутні трикутники подібні між собою якщо:

- 1) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого (за *гострим кутом*);
- 2) катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам другого (за *двома пропорційними катетами*);
- 3) катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника пропорційні катету та гіпотенузі іншого (за *пропорційними катетом і гіпотенузою*).

Теорема косинусів

*Теорема 19.14.* Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C ,$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – сторони  $\triangle ABC$ , які лежать проти  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  відповідно (рис. 19.1).

**Приклад 19.21.** У  $\triangle ABC$  відрізок  $DE$  з кінцями на сторонах  $AB$  і  $BC$  паралельний до сторони  $AC$ .  $S_{\triangle DBE} = 9 \text{ см}^2$ ,  $S_{ADEC} = 16 \text{ см}^2$ ,  $DE = 18 \text{ см}$  (рис. 19.37). Знайти довжину  $AC$ .

Розглянемо  $\triangle DBE$  та  $\triangle ABC$ . Оскільки  $DE \parallel AC$ , то за теоремою 19.13  $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ , тому  $\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$ ,  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBE} + S_{ADEC}$ ,  $\frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{25}$ ,  $k^2 = \frac{9}{25}$ ,  $k = \frac{3}{5}$ .  $k = \frac{DE}{AC}$ ,  $\frac{3}{5} = \frac{18}{AC}$ ,  $AC = 30 \text{ (см)}$ .  
Відповідь: 30 см.

**Приклад 19.22.** Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює  $60^\circ$ , відносяться як 5:8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайти невідомі сторони трикутника.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $AB:AC = 5:8$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $BC = 21 \text{ см}$  (рис. 19.38). Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $AB = 5x \text{ см}$ ,  $AC = 8x \text{ см}$ . За теоремою косинусів маємо:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A,$$

$$441 = 25x^2 + 64x^2 - 80x^2 \cos 60^\circ,$$

$$49x^2 = 441, \quad x^2 = 9, \quad x = 3 \quad (x > 0).$$

Отже,  $AB = 15 \text{ (см)}$ ,  $AC = 24 \text{ (см)}$ .

Відповідь: 15 см, 24 см.

**19.49.** Кінці відрізка  $DE$  лежать на сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$ ,  $DE \parallel AC$ ,  $S_{\triangle DBE} = 4 \text{ м}^2$ ,  $S_{ADEC} = 5 \text{ м}^2$ ,  $DE = 7 \text{ м}$ . Знайти довжину  $AC$ .  
(Відповідь: 10,5 м)

**19.50.** У  $\triangle ABC$   $AB = 15 \text{ м}$ ,  $BC = 9 \text{ м}$ ,  $AC = 12 \text{ м}$ . З точки  $D$  сторони  $AB$  проведено прями  $DE$  і  $DF$  ( $E \in BC$ ,  $F \in AC$ ), паралельні  $AC$  і  $BC$ . Знайти  $DE$ ,  $DF$ ,  $AF$ , якщо  $AD = 5 \text{ м}$ .  
(Відповідь: 8 м, 3 м, 4 м)

**19.51.** У трикутнику  $ABC$   $AC = 10 \text{ м}$ ,  $BC = 12 \text{ м}$ . На стороні  $BC$  взято точку  $M$  так, що  $\angle AMC = \angle BAC$ . Знайти  $MB$  і  $MC$ .

(Відповідь:  $8\frac{1}{3} \text{ м}$ ,  $3\frac{2}{3} \text{ м}$ )

**19.52.** У  $\triangle ABC$   $AB = 5 \text{ см}$ ,  $BC = 8 \text{ см}$ ,  $\angle B = 60^\circ$ .

Знайти  $AC$ .

(Відповідь: 7 см)

**19.53.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см, 28 см. Знайти найбільший кут трикутника.

(Відповідь:  $120^\circ$ )

Теорема синусів

*Теорема 19.15.* Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

де  $a, b, c$  – сторони  $\triangle ABC$ , які лежать проти кутів  $\angle A, \angle B, \angle C$  відповідно (рис. 19.1).

*Теорема 19.16.* Радіус кола, описаного навколо трикутника можна обчислити за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

де  $a$  – сторона трикутника,  $\alpha$  – протилежний їй кут.

Формули  
для обчислення  
площі трикутника

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a h_a, \quad S = \frac{1}{2} b h_b, \quad S = \frac{1}{2} c h_c, \\ S &= \frac{1}{2} a b \sin C, \quad S = \frac{1}{2} a c \sin B, \quad S = \frac{1}{2} b c \sin A, \\ S &= \frac{a b c}{4 R}, \quad S = p r, \end{aligned}$$

Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – півпериметр,  $R$  – радіус описаного кола,  $r$  – радіус вписаного кола.

Формула  
для обчислення  
площі правильного  
трикутника

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

де  $a$  – довжина сторони.

Формули  
для обчислення  
площі прямокутного  
трикутника

$$S = \frac{1}{2} a b, \quad S = \frac{1}{2} c h_c,$$

де  $a, b$  – катети,  $c$  – гіпотенуза,  $h_c$  – висота проведена до гіпотенузи.

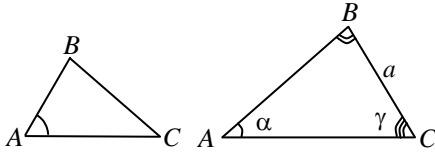


Рис. 19.38.

Рис. 19.39.

**Приклад 19.23.** У  $\triangle ABC$  відомо, що  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$ . Знайти  $AB$ ,  $AC$  та радіус кола описаного навколо трикутника.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$  (рис. 19.39).

За теоремою синусів отримуємо:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}; \quad \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \gamma}, \quad AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha};$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}, \quad \angle B = 180^\circ - (\alpha + \gamma),$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma))},$$

$$AC = \frac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}.$$

Знайдемо радіус кола, описаного навколо заданого трикутника. За теоремою 19.16:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

Відповідь:  $\frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ ,  $\frac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}$ ,

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

**19.54.** Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює  $30^\circ$ , відносяться як  $1:2\sqrt{3}$ , а третя сторона дорівнює  $2\sqrt{7}$  см. Знайти невідомі сторони трикутника.

(Відповідь: 2 см,  $4\sqrt{3}$  см)

**19.55.** У трикутнику  $ABC$   $AC = 4\sqrt{6}$  см,  $\angle B = 120^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ . Знайти  $AB$ .

(Відповідь: 8 см)

**19.56.** У трикутнику  $ABC$

$$AC = 2\sqrt{2} \text{ см},$$

$$BC = \sqrt{3} \text{ см}, \quad \angle B = 135^\circ.$$

Знайти  $\angle A$ .

(Відповідь:  $\arcsin(\sqrt{3}/4)$ )

**19.57.** Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, – 4 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

(Відповідь: 9 см)

**19.58.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 26 см, а основа – 48 см. Знайти площу трикутника.

(Відповідь:  $240 \text{ см}^2$ )

Радіуси описаного та вписаного кіл трикутника

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Радіуси описаного та вписаного кіл правильного трикутника

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

де  $a$  – сторона правильного трикутника.

Радіуси описаного та вписаного кіл прямокутного трикутника

$$R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

де  $a, b$  – катети,  $c$  – гіпотенуза.

**Приклад 19.24.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 13 см і 20 см. Знайти найменшу висоту трикутника.

Нехай  $a = 11$  см,  $b = 13$  см,  $c = 20$  см – довжини сторін заданого трикутника. Використовуючи формулу Герона, обчислимо площу заданого трикутника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \sqrt{22 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 2} = 66 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найменша висота трикутника – висота проведена до найдовшої сторони трикутника, тобто до  $c$ . Оскільки

$$S = \frac{1}{2} ch_c, \quad h_c = \frac{2S}{c} = 6,6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6,6 см.

**Приклад 19.25.** Знайти площу правильного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює  $12\sqrt{3}$  см.

За умовою  $r = 12\sqrt{3}$  см. Маємо:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 72 \text{ (см)},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{72^2\sqrt{3}}{4} = 1296\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $1296\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

**19.59.** У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 8 см і 5 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайти площу трикутника.

(Відповідь: 78 см<sup>2</sup>)

**19.60.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 50 см і 58 см. Знайти найбільшу висоту трикутника.

(Відповідь: 40 см)

**19.61.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, – 8 см. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

(Відповідь: 3 см)

**19.62.** Знайти площу правильного трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює  $2\sqrt{3}$  см.

(Відповідь:  $36\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>)

**19.63.** Радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а катет – 16 см. Знайти радіус вписаного кола. (Відповідь: 4 см)

## 20 ЧОТИРИКУТНИКИ

Чотирикутник

Фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій та чотирьох відрізків, які послідовно з'єднують ці точки.

Елементи чотирикутника

Вказані точки називаються *вершинами чотирикутника*, а відрізки – його *сторонами*. Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини.

На рис. 20.1 зображено чотирикутник  $ABCD$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – вершини,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  – сторони чотирикутника, кути  $DAB$ ,  $ABC$ ,  $BCD$  і  $ADC$  – кути чотирикутника.

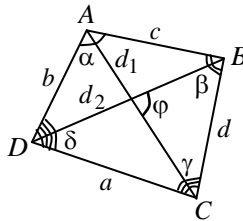


Рис. 20.1.

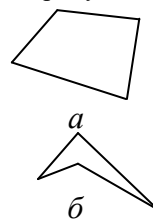


Рис. 20.2.

Опуклий чотирикутник

Чотирикутник, який лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону (рис. 20.2 *a*).

Неопуклий чотирикутник

Чотирикутник, який не лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону (рис. 20.2 *б*).

Сусідні вершини

Дві вершини чотирикутника, які є кінцями однієї сторони.

Протилежні вершини

Дві несусідні вершини.

Сусідні сторони

Сторони чотирикутника, які виходять з однієї вершини.

Протилежні сторони

Сторони чотирикутника, які не мають спільної вершини.

**Приклад 20.1.** Довести, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.

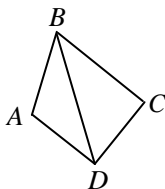


Рис. 20.3.

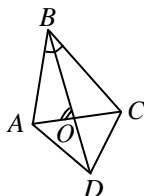


Рис. 20.4.

Розглянемо довільний чотирикутник  $ABCD$  (рис. 20.3). Доведемо, наприклад, що  $AB < AD + DC + CB$ .

Проведемо діагональ  $BD$ . З  $\triangle ABD$  за нерівністю трикутника отримуємо:  $AB < AD + DB$ . Аналогічно з  $\triangle BCD$ :  $DB < DC + CB$ . Отже,  $AB < AD + DB < AD + DC + CB$ . Аналогічні нерівності можна довести для решти сторін чотирикутника.

**Приклад 20.2.** У чотирикутнику  $ABCD$  сторони  $BC$  та  $AD$  більші за  $AB$  на 2 см та 8 см відповідно. Знайти периметр чотирикутника, якщо довжина сторони  $CD$  є середнім арифметичним сторін  $AB$  та  $AD$ ,  $CD = 6$  см.

Нехай  $AB = x$  см, тоді  $BC = (x + 2)$  см,  $AD = (x + 8)$  см. За умовою  $CD = (AB + AD)/2$ , тоді

$\frac{1}{2}(x + x + 8) = 6$ ,  $x + 4 = 6$ ,  $x = 2$ . Маємо:  $AB = 2$  (см),  $BC = 4$  (см),  $AD = 10$  (см).  $P = AB + BC + CD + AD = 22$  (см).

Відповідь: 22 см.

**20.1.** У чотирикутнику  $ABCD$  сторона  $BC$  та  $AD$  більші за  $AB$  на 3 см та 10 см відповідно. Знайти периметр чотирикутника, якщо довжина сторони  $CD$  є середнім арифметичним сторін  $AB$  та  $AD$ ,  $CD = 8$  см.  
(Відповідь: 30 см)

**20.2.** Одна зі сторін чотирикутника дорівнює середньому арифметичному трьох інших сторін, які пропорційні числам 2, 3 і 6. Знайти сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.  
(Відповідь: 6 см, 9 см, 11 см, 18 см)

**20.3.** Знайти довжину діагоналі чотирикутника, якщо його периметр дорівнює  $c$ , а периметри трикутників, на які ця діагональ ділить даний чотирикутник, дорівнюють  $a$  і  $b$ .  
(Відповідь:  $(a + b - c)/2$ )

**20.4.** Довести, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за його периметр.

Діагональ чотирикутника

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника.

На рис. 20.1  $A$  і  $B$ ,  $B$  і  $C$ ,  $C$  і  $D$ ,  $D$  і  $A$  – сусідні вершини;  $A$  і  $C$ ,  $B$  і  $D$  – протилежні вершини;  $AB$  і  $BC$ ,  $BC$  і  $CD$ ,  $CD$  і  $AD$ ,  $AD$  і  $AB$  – сусідні сторони;  $AB$  і  $CD$ ,  $BC$  і  $AD$  – протилежні сторони;  $AC$  і  $BD$  – діагоналі.

Периметр чотирикутника

Сума довжин усіх сторін чотирикутника:

$$P = a + b + c + d .$$

Властивості сторін чотирикутника

Кожна сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін.

Сума кутів чотирикутника

*Теорема 20.1.* Сума кутів чотирикутника дорівнює  $360^\circ$ .

Зовнішній кут чотирикутника

Кут, суміжний з кутом чотирикутника.

Сума зовнішніх кутів чотирикутника

*Теорема 20.2.* Сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $360^\circ$ .

Площа чотирикутника

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi ,$$

де  $d_1, d_2$  – діагоналі,  $\varphi$  – кут між діагоналями (рис. 20.1).

Чотирикутник, вписаний у коло, та коло, описане навколо чотирикутника

Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називається *вписаним у це коло*, а коло – *описаним навколо цього чотирикутника* (рис. 20.5).

*Теорема 20.3.* Навколо чотирикутника можна описати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють  $180^\circ$ :  
 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$  (рис. 20.5).

**Приклад 20.3.** Зовнішні кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 8, 9, 10 і 13. Знайти його внутрішні кути.

Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді зовнішні кути заданого опуклого чотирикутника відповідно дорівнюють  $8x^\circ$ ,  $9x^\circ$ ,  $10x^\circ$  і  $13x^\circ$ . За теоремою 20.2 складемо та розв'яжемо рівняння:

$$8x + 9x + 10x + 13x = 360, \quad x = 9.$$

Тоді зовнішні кути заданого чотирикутника:  $8x = 72^\circ$ ,  $9x = 81^\circ$ ,  $10x = 90^\circ$ ,  $13x = 117^\circ$ . Отже, відповідні внутрішні кути чотирикутника дорівнюють  $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ,  $180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$ ,  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ,  $180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$ . Відповідь:  $108^\circ$ ,  $99^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $63^\circ$ .

**Приклад 20.4.** У чотирикутника  $ABCD$   $AB = \sqrt{3}$  см,  $BC = 2$  см,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $BD = 8$  см. Знайти площу чотирикутника, якщо кут між діагоналями дорівнює  $60^\circ$ .

Нехай  $ABCD$  – заданий чотирикутник (рис. 20.4). З  $\triangle ABC$  за теоремою косинусів отримуємо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

$$AC = 1 \text{ (см)}. \quad S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $2\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>.

**20.5.** У чотирикутника  $ABCD$  діагональ  $AC$  утворює зі сторонами  $AB$  і  $AD$  рівні кути та зі сторонами  $CB$  і  $CD$  теж рівні кути,  $AB = 10$  см,  $BC = 12$  см. Знайти периметр чотирикутника  $ABCD$ . (Відповідь: 44 см)

**20.6.** У  $\triangle ABC$   $\angle A = 46^\circ$ ,  $\angle B = 54^\circ$ . Бісектриси  $AK$  і  $BM$  трикутника перетинаються в точці  $O$ . Знайти кути:

- 1) чотирикутника  $МОКС$  ;
  - 2) чотирикутника  $АОВС$  .
- (Відповідь: 1)  $73^\circ$ ,  $77^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $130^\circ$ ; 2)  $23^\circ$ ,  $27^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $230^\circ$ )

**20.7.** Зовнішні кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 7, 9, 8 і 12. Знайти міри його внутрішніх кутів. (Відповідь:  $110^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $60^\circ$ )

**20.8.** У чотирикутника  $ABCD$   $AB = 5$  см,  $BC = 8$  см,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $BD = 16\sqrt{2}$  см. Знайти площу чотирикутника, якщо кут між його діагоналями дорівнює  $45^\circ$ . (Відповідь:  $56$  см<sup>2</sup>)

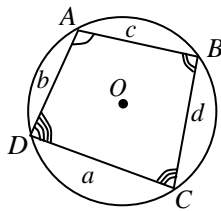


Рис. 20.5.

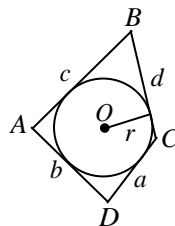


Рис. 20.6.

Площа  
чотирикутника,  
який можна вписати  
в коло

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де  $a, b, c, d$  – довжини сторін  
чотирикутника,  $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ .

Чотирикутник,  
описаний навколо  
кола та коло,  
вписане в  
чотирикутник

Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називається *описаним навколо цього кола*, а коло – *вписаним у цей чотирикутник* (рис. 20.6).

*Теорема 20.4.* У чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні:  $a + c = b + d$  (рис. 20.6).

Площа  
чотирикутника,  
який можна описати  
навколо кола

$$S = p \cdot r,$$

де  $a, b, c, d$  – довжини сторін  
чотирикутника,  $r$  – радіус вписаного кола,  
 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ .

Паралелограм

Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні (рис. 20.7).

На рис. 20.7  $ABCD$  – паралелограм,  $AB \parallel CD$ ,  
 $BC \parallel AD$ .

Висота  
паралелограма

Перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

**Приклад 20.5.** Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 7:3:5 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

Нехай чотирикутник  $ABCD$  вписаний у коло. За умовою  $\angle A : \angle B : \angle C = 7 : 3 : 5$ . Оскільки навколо чотирикутника можна описати коло, то за теоремою 20.3:  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ,  $\angle B + \angle D = 180^\circ$ . Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $\angle A = 7x^\circ$ ,  $\angle B = 3x^\circ$ ,  $\angle C = 5x^\circ$ . Маємо:  $7x + 5x = 180$ ;  $12x = 180$ ,  $x = 15$ . Отже,  $\angle A = 7 \cdot 15 = 105^\circ$ ,  $\angle B = 3 \cdot 15 = 45^\circ$ ,  $\angle C = 5 \cdot 15 = 75^\circ$ ,  $\angle D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .  
Відповідь:  $105^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $135^\circ$ .

**Приклад 20.6.** Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 2, 6 і 7, а його периметр 36 см. Знайти довжину четвертої сторони.

Нехай  $ABCD$  – заданий чотирикутник, описаний навколо кола. Нехай  $AD = y$  см,  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $AB = 2x$  см,  $BC = 6x$  см,  $CD = 7x$  см. Оскільки в чотирикутник можна вписати коло, то за теоремою 20.4  $AB + CD = BC + AD$ , тому  $9x = 6x + y$ . Периметр  $ABCD$ :  $P = 15x + y = 36$ . Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9x = 6x + y, \\ 15x + y = 36. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 6. \end{cases}$$

Отже довжина четвертої сторони  $AD = 6$  (см). Відповідь: 6 см.

**20.9.** Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 9:8:1 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.  
(Відповідь:  $162^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $36^\circ$ )

**20.10.** Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, пропорційні числам: 1) 3, 8, 11, 6; 2) 4, 5, 4, 2?  
(Відповідь: 1) можна; 2) не можна)

**20.11.** У чотирикутнику  $KLMN$ , у який можна вписати коло,  $KL = 7$  см,  $LM = 9$  см,  $MN = 13$  см. Знайти сторону  $KN$ .  
(Відповідь: 11 см)

**20.12.** Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 7 і 6, а його периметр 45 м. Знайти довжину четвертої сторони. (Відповідь: 5 м)

**20.13.** У паралелограмі  $ABCD$   $\angle ABC = 114^\circ$ ,  $\angle BDC = 52^\circ$ . Знайти кути  $ADB$  і  $BAD$ .  
(Відповідь:  $62^\circ$ ,  $66^\circ$ )

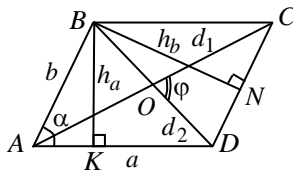


Рис. 20.7.

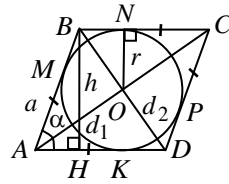


Рис. 20.8.

Властивості  
паралелограма

У паралелограма протилежні сторони рівні.  
У паралелограма протилежні кути рівні.  
У паралелограма діагоналі точкою перетину діляться навпіл.  
Сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює  $180^\circ$ .  
У паралелограма сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів сторін:  
 $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$  (рис. 20.7).

Ознаки  
паралелограма

Чотирикутник буде паралелограмом, якщо:  
1) кожна сторона дорівнює протилежній стороні;  
2) дві протилежні сторони рівні та паралельні;  
3) дві діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл;  
4) протилежні кути рівні.

Площа  
паралелограма

$$S = ah_a, S = bh_b,$$

$$S = absin \alpha, S = \frac{1}{2} d_1 d_2 sin \varphi,$$

де  $a, b$  – довжини сторін паралелограма,  $h_a, h_b$  – висоти проведені до сторін  $a$  і  $b$  відповідно,  $\alpha$  – кут між сусідніми сторонами паралелограма,  $d_1, d_2$  – діагоналі паралелограма,  $\varphi$  – кут між діагоналями паралелограма (рис. 20.7).

Ромб

Паралелограм, у якого всі сторони рівні.  
На рис. 20.8  $ABCD$  – ромб,  
 $AB = BC = CD = DA$ .

**Приклад 20.7.** Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 5:3, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 69 см. Знайти його сторони.

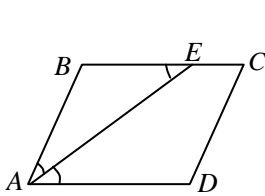


Рис. 20.9.

Нехай  $ABCD$  – заданий паралелограм, у якого  $AE$  – бісектриса гострого кута  $A$  (рис. 20.9).  $\angle AEB = \angle DAE$  як внутрішні різносторонні при  $BC \parallel AD$  та січній  $AE$ . Оскільки  $AE$  – бісектриса кута  $A$ , то  $\angle BAE = \angle DAE$ . Отже,  $\angle BAE = \angle AEB$ , тому  $\triangle ABE$  – рівнобедрений з основою  $AE$ . Отже,  $AB = BE$ . Нехай  $x$  – коефіцієнт пропорційності, тоді  $AB = BE = 5x$ ,  $BC = BE + EC = 8x$ . Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC), \quad 2(5x + 8x) = 78, \\ 13x = 39, \quad x = 3.$$

Отже,  $AB = CD = 5 \cdot 3 = 15$  (см),

$BC = AD = 8 \cdot 3 = 24$  (см).

Відповідь: 15 см, 15 см, 24 см, 24 см.

**Приклад 20.8.** Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ – 15 см. Знайти площу ромба.

Нехай  $ABCD$  – заданий ромб,  $AC$  – менша діагональ,  $CH$  – висота ромба (рис. 20.10).

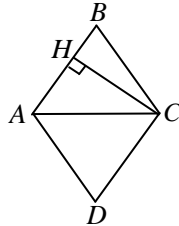


Рис. 20.10.

**20.14.** Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2:3, рахуючи від вершини тупого кута. Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Знайти його сторони. (Відповідь: 6 см, 6 см, 15 см, 15 см)

**20.15.** Одна сторона паралелограма на 2 см більша за іншу, діагоналі дорівнюють 8 см і 14 см. Знайти його периметр. (Відповідь: 32 см)

**20.16.** Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а висота, яка проведена до меншої сторони, – 4 см. Знайти іншу висоту паралелограма. (Відповідь: 3 см)

**20.17.** Периметр паралелограма дорівнює 24 см, в висоти – 10 см і 14 см. Знайти площу паралелограма. (Відповідь:  $70 \text{ см}^2$ )

**20.18.** Висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 см і 15 см, кут між ними  $30^\circ$ . Знайти площу паралелограма. (Відповідь:  $360 \text{ см}^2$ )

Властивості ромба Ромб має всі властивості паралелограма.  
 Діагоналі ромба перпендикулярні.  
 Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Ознаки ромба Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.  
 Паралелограм, діагоналі якого є бісектрисами його кутів, є ромбом.

Коло, вписане в ромб У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, – точка перетину його діагоналей.

Радіус кола, вписаного в ромб

$$h = 2r, \quad r = \frac{h}{2}.$$

Площа ромба

$$S = ah, \quad S = a^2 \sin \alpha, \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \quad S = 2a \cdot r,$$

де  $a$  – довжина сторони,  $h$  – висота,  $\alpha$  – кут між сусідніми сторонами,  $d_1, d_2$  – діагоналі,  $r$  – радіус вписаного кола (рис. 20.8).

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі.  
 На рис. 20.11  $ABCD$  – прямокутник,  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ .

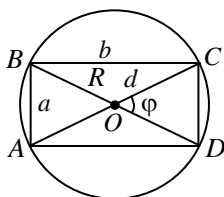


Рис. 20.11.

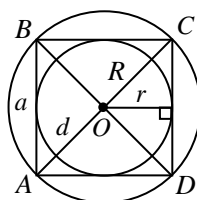


Рис. 20.12.

Властивості прямокутника

Прямокутник має всі властивості паралелограма.  
 Діагоналі прямокутника рівні.

Ознака прямокутника

Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм є прямокутником.

З  $\triangle AHC$  ( $\angle H = 90^\circ$ ) маємо:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2},$$

$$AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (см).}$$

Нехай  $HB = x$  см, тоді

$$BC = AB = AH + HB = (9 + x) \text{ см.}$$

З  $\triangle BHC$  ( $\angle H = 90^\circ$ ) за теоремою

Піфагора маємо:  $BC^2 = HB^2 + CH^2$ ,

$$(9 + x)^2 = x^2 + 12^2, \quad x = 3,5.$$

Отже,  $HB = 3,5$  (см),  $AB = 9 + 3,5 = 12,5$  (см).

$$S_{ABCD} = AB \cdot CH = 12,5 \cdot 12 = 150 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $150 \text{ см}^2$ .

**Приклад 20.9.** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки довжиною 2 см і 6 см. Знайти площу даного прямокутника.

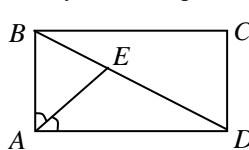


Рис. 20.13.

Нехай  $ABCD$  – заданий прямокутник,  $BD$  – діагональ,  $AE$  – бісектриса ( $E \in BD$ ),  $BE = 2$  см,  $ED = 6$  см (рис. 20.13).  $BD = BE + ED$ ,  $BD = 8$  см. За властивістю бісектриси

кута трикутника  $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{ED}$ ,  $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$ .

Нехай  $AB = x$  см,  $AD = 3x$  см. З

$\triangle ABD$  за теоремою Піфагора маємо:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2, \quad x^2 + 9x^2 = 64,$$

$$x^2 = 32/5, \quad x = 4\sqrt{10}/5 \quad (x > 0).$$

**20.19.** Діагональ ромба утворює з однією з сторін кут, що дорівнює  $58^\circ$ . Знайти менший кут ромба. (Відповідь:  $64^\circ$ )

**20.20.** Діагоналі ромба відносяться як 3:4. Знайти висоту ромба, якщо периметр дорівнює 80 см. (Відповідь: 19,2 см)

**20.21.** Висота ромба дорівнює 36 см, а менша діагональ – 45 см. Знайти площу ромба. (Відповідь:  $1350 \text{ см}^2$ )

**20.22.** Знайти гострий кут між діагоналями прямокутника, якщо різниця між кутами, які утворює діагональ з його меншою та більшою сторонами відповідно, дорівнює  $20^\circ$ . (Відповідь:  $70^\circ$ )

**20.23.** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки довжиною 2 см і 3 см. Знайти площу даного прямокутника. (Відповідь:  $150/13 \text{ см}^2$ )

Коло, описане навколо прямокутника Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо прямокутника, – точка перетину діагоналей.

Радіус кола, описаного навколо прямокутника

$$R = \frac{1}{2}d, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

Площа прямокутника

$$S = ab, \quad S = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi,$$

де  $a, b$  – довжини сторін,  $d$  – діагональ,  $\varphi$  – кут між діагоналями (рис. 20.11).

Квадрат

Ромб, у якого всі кути прямі. На рис. 20.12  $ABCD$  – квадрат,  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ,  $AB = BC = CD = DA$ .

Ознака квадрата

Якщо діагоналі чотирикутника рівні та є бісектрисами його кутів, то такий чотирикутник – квадрат.

Коло, вписане та описане навколо квадрата

У будь-який квадрат можна вписати коло та навколо будь-якого квадрата можна описати коло.

Центром вписаного та описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата.

Радіуси вписаного та описаного кіл навколо квадрата

$$r = \frac{1}{2}a, \quad R = \frac{1}{2}d, \quad R = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

Площа квадрата

$$S = a^2, \quad S = \frac{1}{2}d^2,$$

де  $a$  – довжина сторони,  $d$  – діагональ.

Трапеція

Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Основи трапеції

Паралельні сторони трапеції.

$$AB = \frac{4\sqrt{10}}{5} \text{ (см)}, \quad AD = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{ (см)}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD,$$

$$S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{12\sqrt{10}}{5} = 19,2 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $19,2 \text{ см}^2$ .

**Приклад 20.10.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 16 см і 36 см. Знайти периметр трапеції.

Нехай  $ABCD$  – задана трапеція, у якої  $\angle BAD = 90^\circ$ , точка  $O$  – центр вписаного кола, точки  $K, L, M, N$  – точки дотику цього кола до сторін  $AB, BC, CD$  та  $AD$  відповідно,  $CM = 16$  см,  $MD = 36$  см (рис. 20.14).  $CD = CM + MD = 52$  (см). За

властивістю дотичних проведених з однієї точки (теорема 22.5):

$$LC = CM = 16 \text{ (см)}, \quad ND = MD = 36 \text{ (см)}.$$

Проведемо  $CH \perp AD$ .

$$NH = LC = 16 \text{ (см)},$$

$$HD = ND - NH = 36 - 16 = 20 \text{ (см)}.$$

З  $\triangle HCD$  ( $\angle H = 90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{CD^2 - HD^2} = \\ &= \sqrt{52^2 - 20^2} = 48 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

$$AB = CH = 48 \text{ (см)}.$$

За умовою в дану трапецію можна вписати коло, тому за теоремою 20.4 маємо:  $BC + AD = AB + CD$ .

Периметр даної трапеції:

$$P_{ABCD} = 2(AB + CD) = 200 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 200 см.

**20.24.** Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на діагональ, дорівнює 4 см і поділяє її на відрізки, різниця яких дорівнює 6 см. Знайти площу прямокутника.

(Відповідь:  $40 \text{ см}^2$ )

**20.25.** У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 18 см вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші – на катетах. Знайти периметр квадрата. (Відповідь: 24 см)

**20.26.** Площа квадрата дорівнює  $S$ . Знайти радіуси вписаного та описаного кіл цього квадрата.

$$\text{(Відповідь: } \frac{\sqrt{S}}{2}, \frac{\sqrt{2S}}{2}\text{)}$$

**20.27.** Два кути трапеції дорівнюють  $32^\circ$  і  $143^\circ$ . Знайти решту кутів трапеції.

(Відповідь:  $148^\circ, 37^\circ$ )

**20.28.** Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 5 см, а менша її основа – 4 см. Знайти середню лінію трапеції. (Відповідь: 9 см)

Бічні сторони трапеції  
 Висота трапеції

Непаралельні сторони трапеції.  
 Перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить другу основу.

На рис. 20.15  $ABCD$  – трапеція,  $BC \parallel AD$ ,  $BC$  і  $AD$  – основи,  $AB$  і  $CD$  – бічні сторони,  $BK \perp AD$ ,  $CL \perp AD$ ,  $BK$  і  $CL$  – висоти.

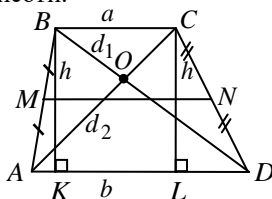


Рис. 20.15.

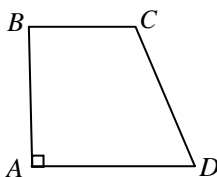


Рис. 20.16.

Середня лінія трапеції

Відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.  
 Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.  
 На рис. 20.15  $MN$  – середня лінія.

Властивість кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони  
 Прямокутна трапеція

Сума градусних мір кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює  $180^\circ$ .  
 Трапеція, один з кутів якої прямий (рис. 20.16).

Рівнобічна трапеція

Трапеція, у якої бічні сторони рівні (рис. 20.19).

Властивості рівнобічної трапеції

У рівнобічній трапеції:  
 1) сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ :  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ,  $\angle B + \angle D = 180^\circ$  (рис. 20.19);  
 2) діагоналі рівні:  $AC = BD$  (рис. 20.19);  
 3) кути при кожній основі рівні;

**Приклад 20.11.** Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 30 см, а бічні сторони – 13 см і 15 см.

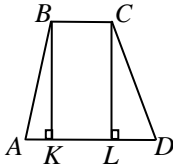


Рис. 20.17.

Нехай  $ABCD$  – задана трапеція (рис. 20.17),  $BC = 16$  см,  $AD = 30$  см,  $AB = 13$  см,  $CD = 15$  см. Проведемо висоти  $BK$  та  $CL$ . Нехай  $AK = x$  см, тоді  $LD = (14 - x)$  см. З  $\triangle ABK$  ( $\angle K = 90^\circ$ ):

$$BK^2 = AB^2 - AK^2 = 169 - x^2.$$

З  $\triangle CDL$  ( $\angle L = 90^\circ$ ):

$$CL^2 = CD^2 - LD^2 = 225 - (14 - x)^2.$$

Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2, \quad 28x = 140,$$

$$x = 5. \text{ Отже, } AK = 5 \text{ (см),}$$

$$BK = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см).}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BK =$$

$$= \frac{16 + 30}{2} \cdot 12 = 276 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 276 см<sup>2</sup>.

**Приклад 20.12.** У трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$  діагоналі перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо діагональ  $AC$  дорівнює 20 см, а висота трапеції – 12 см.

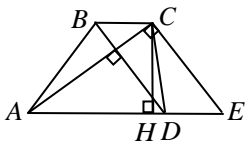


Рис. 20.18.

**20.29.** У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а одна з основ на 8 см більша за іншу. Знайти середню лінію трапеції, якщо її периметр дорівнює 80 см. (Відповідь: 22 см)

**20.30.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайти периметр трапеції. (Відповідь: 196 см)

**20.31.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 18 см, а діагональ – 13 см. Знайти радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

(Відповідь:  $13\sqrt{61}/10$  см)

**20.32.** Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайти радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а її висота – 12 см.

(Відповідь: 12,5 см)

**20.33.** Знайти площу трапеції, основи якої дорівнюють 15 м і 36 м, а бічні сторони – 13 м і 20 м.

(Відповідь: 306 м<sup>2</sup>)

4) якщо  $BK$  і  $CM$  – висоти рівнобічної трапеції  $ABCD$  (рис. 20.19), то:

$$\triangle ABK = \triangle DCM ;$$

$$AK = DM = \frac{AD - BC}{2} ;$$

$$KD = MA = \frac{AD + BC}{2} .$$

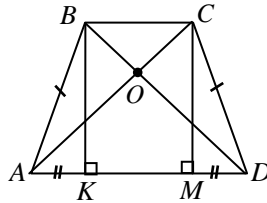


Рис. 20.19.

Ознаки рівнобічної трапеції

Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює  $180^\circ$ , то трапеція рівнобічна.

Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

Площа трапеції

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h, \quad S = l \cdot h .$$

де  $a$ ,  $b$  – основи трапеції,  $h$  – висота,  $l$  – середня лінія.

Нехай  $ABCD$  – задана трапеція,  $AC \perp BD$ ,  $CH$  – висота (рис. 20.18),  $AC = 20$  см,  $CH = 12$  см. З  $\triangle ACH$  ( $\angle H = 90^\circ$ ):

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 16 \text{ (см)}.$$

Проведемо  $CE \parallel BD$ .  $CE \perp AC$ , тому  $\triangle ACE$  – прямокутний. З  $\triangle ACE$  маємо:  
 $CH^2 = AH \cdot HE$ ,  $12^2 = 16 \cdot HE$ ,  
 $HE = 9$  (см). Оскільки  $BC \parallel DE$  і  $BD \parallel CE$ , то чотирикутник  $BCED$  – паралелограм (за означенням), тому  $BC = DE$ .  $BC + AD = AD + DE = AE$ ,  
 $AE = AH + HE = 16 + 9 = 25$  (см).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH =$$

$$= \frac{AE}{2} \cdot CH = \frac{25}{2} \cdot 12 = 150 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $150 \text{ см}^2$ .

**20.34.** Площа прямокутної трапеції дорівнює  $32\sqrt{3} \text{ см}^2$ , а гострий кут –  $60^\circ$ . Знайти більшу бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в неї можна вписати коло.

(Відповідь:  $16\sqrt{2-\sqrt{3}}$  см)

**20.35.** Знайти площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

(Відповідь:  $54 \text{ см}^2$ )

**20.36.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона дорівнює її меншій основі. Знайти площу трапеції.

(Відповідь:  $2187 \text{ см}^2$ )

**20.37.** У трапеції  $ABCD$  з основами  $BC$  та  $AD$ ,  $AC \perp BD$ . Знайти площу трапеції, якщо діагональ  $AC$  дорівнює 48 см, а висота трапеції – 13,44 см.

(Відповідь:  $336 \text{ см}^2$ )

## 21 МНОГОКУТНИКИ

- Ламана Фігура, що складається з точок  $A_1, A_2, \dots, A_n$  та відрізків  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ , що їх сполучають.
- Елементи ламаної Точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – *вершини*,  $A_1, A_n$  – *кінці*, відрізки  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  – *ланки* ламаної.

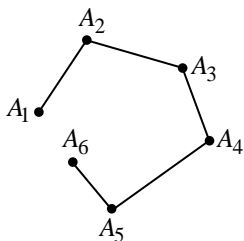


Рис. 21.1.

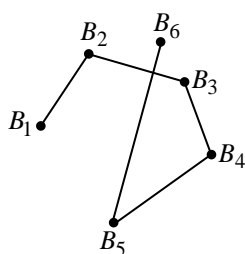


Рис. 21.2.

- Проста ламана Ламана, яка не має самоперетинів і ніякі дві її сусідні ланки не лежать на одній прямій.
- На рис. 21.1 зображено просту ламану  $A_1A_2 \dots A_6$ , а на рис. 21.2 – ламану з самоперетином  $B_1B_2 \dots B_6$ .

- Довжина ламаної Сума довжин усіх ланок ламаної.  
Довжина ламаної не менше відстані між її кінцями.
- Замкнена ламана Ламана, кінці якої збігаються.
- Многокутник Проста замкнена ламана (рис. 21.5).
- Плоский многокутник Фігура, яка складається з многокутника та обмеженої ним скінченної частини площини (рис. 21.6).

**Приклад 21.1.** Довести, що довжина ламаної не менше відстані між її кінцями.

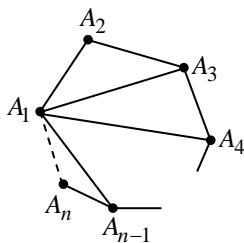


Рис. 21.3.

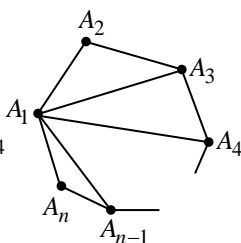


Рис. 21.4.

Нехай  $A_1A_2 \dots A_n$  – задана ламана (рис. 21.3). За нерівністю трикутника отримуємо:

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3,$$

$$A_1A_3 + A_3A_4 > A_1A_4,$$

...

$$A_1A_{n-1} + A_{n-1}A_n > A_1A_n.$$

Додавши усі ці нерівності, отримаємо:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n > A_1A_n.$$

Що й треба було довести.

**Приклад 21.2.** Довести, що сума кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ(n-2)$ .

Нехай  $A_1A_2 \dots A_n$  – заданий опуклий  $n$ -кутник (рис. 21.4). Діагоналі  $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$  розбивають його на  $(n-2)$  трикутники. Сума кутів кожного трикутника дорівнює  $180^\circ$ , а сума кутів  $n$ -кутника – сумі кутів цих  $(n-2)$  трикутників. Отже, сума кутів  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ(n-2)$ .

**21.1.** Довести на прикладі ламаної з п'яти ланок, що довжина простої ламаної більша від відстані між її кінцями.

**21.2.** Довжина ламаної 90 см. Знайти довжини її ланок, якщо вони пропорційні числам 3, 4, 5 і 6. (Відповідь: 15 см, 20 см, 25 см і 30 см)

**21.3.** Чи існує замкнена ламана з п'яти ланок, довжини яких дорівнюють 1 см, 2 см, 3 см, 4 см і 12 см? (Відповідь: не існує)

**21.4.** Знайти суму кутів опуклого:

1) п'ятикутника;

2) шестикутника.

(Відповідь: 1)  $540^\circ$ ;

2)  $720^\circ$ )

**21.5.** Чи існує опуклий багатокутник, сума кутів якого дорівнює:

1)  $720^\circ$ ; 2)  $1860^\circ$ .

(Відповідь: 1) існує;

2) не існує)

**21.6.** Скільки вершин має опуклий багатокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює  $1980^\circ$ . (Відповідь: 13)

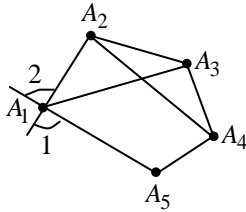


Рис. 21.5.

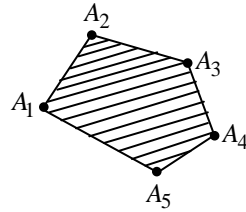


Рис. 21.6.

Елементи  
многокутника

Вершини і ланки ламаної, яка утворює многокутник, називають відповідно *вершинами* і *сторонами* многокутника.

Сусідні сторони  
многокутника

Сторони многокутника, які виходять з однієї вершини.

Сусідні вершини  
многокутника

Вершини, які є кінцями однієї сторони.

Несусідні вершини

Вершини многокутника, які не є кінцями однієї сторони.

Діагональ  
многокутника

Відрізок, який сполучає дві несусідні вершини многокутника.

Кут (внутрішній  
кут) многокутника

Кут, утворений сторонами многокутника, які сходяться в одній вершині.

Зовнішній кут  
многокутника

Кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника.

$n$ -кутник

Многокутник, який має  $n$  вершин (сторін).

Многокутник позначають послідовно записуючи його вершини.

На рис. 21.5  $A_1A_2A_3A_4A_5$  – п'ятикутник,  $A_1$  і  $A_2$ ,  $A_2$  і  $A_3$  – сусідні вершини,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  – сусідні сторони,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_4$  – діагоналі,  $\angle A_1$ ,  $\angle A_2$ , ...,  $\angle A_5$  – кути п'ятикутника,  $\angle 1$  та  $\angle 2$  – зовнішні кути при вершині  $A_1$ .

**Приклад 21.3.** Кожний із трьох внутрішніх кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $80^\circ$ , а кожний з решти кутів –  $150^\circ$ . Знайти кількість кутів  $n$ -кутника.

Нехай  $\angle A_1, \angle A_2, \dots, \angle A_n$  – кути заданого опуклого  $n$ -кутника,  $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = 80^\circ$ , тоді  $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 80^\circ \cdot 3 = 240^\circ$ , а сума решти  $(n-3)$ -х кутів дорівнює  $150^\circ \cdot (n-3)$ . Сума кутів заданого  $n$ -кутника –  $240^\circ + 150^\circ \cdot (n-3)$ , з іншого боку вона має бути рівною  $180^\circ(n-2)$ . Складемо та розв'яжемо рівняння:

$$240 + 150 \cdot (n-3) = 180 \cdot (n-2), \quad n = 5.$$

Відповідь: 5.

**Приклад 21.4.** Як зміниться сума кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшити на 7?

Сума кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ(n-2)$ . Якщо число сторін збільшити на 7, то й число його кутів збільшиться на 7. Сума кутів дорівнюватиме

$$180^\circ \cdot ((n+7) - 2) = 180^\circ \cdot (n+5).$$

Отже, сума кутів опуклого  $n$ -кутника збільшиться на

$$180^\circ \cdot (n+5) - 180^\circ \cdot (n-2) = 1260^\circ.$$

Відповідь: збільшиться на  $1260^\circ$ .

**Приклад 21.5.** Чому дорівнює сума зовнішніх кутів довільного опуклого  $n$ -кутника, взятих по одному при кожній вершині.

**21.7.** Знайти кути опуклого дев'ятикутника, якщо їх градусні міри відносяться як  $5:6:7:8:8:9:9:9:9$ .

(Відповідь:  $90^\circ, 108^\circ, 126^\circ, 144^\circ, 144^\circ, 162^\circ, 162^\circ, 162^\circ, 162^\circ$ )

**21.8.** Кожний з трьох внутрішніх кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $80^\circ$ , а кожний з решти кутів –  $160^\circ$ . Знайти кількість кутів  $n$ -кутника.

(Відповідь: 6)

**21.9.** На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5? (Відповідь:  $900^\circ$ )

**21.10.** Один із кутів опуклого чотирикутника дорівнює  $60^\circ$ , другий і третій відносяться як  $7:3$ , а четвертий дорівнює півсумі другого і третього. Знайти невідомі кути чотирикутника.

(Відповідь:  $140^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ )

**21.11.** Чи можна опуклий 32-кутник розрізати на 20 трикутників, 3 опуклих чотирикутника та один опуклий п'ятикутник?

(Відповідь: не можна)

Опуклий многокутник	Многокутник, який лежить з одного боку від будь-якої прямої, що містить його сторону.
Властивість сторін многокутника	Довжина кожної сторони многокутника менша за суму довжин усіх інших сторін.
Периметр многокутника	Сума довжин усіх його сторін.
Сума кутів $n$ -кутника	<i>Теорема 21.1.</i> Сума кутів опуклого $n$ -кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$ .
Сума зовнішніх кутів $n$ -кутника	<i>Теорема 21.2.</i> Сума зовнішніх кутів опуклого $n$ -кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360^\circ$ .
Кількість діагоналей опуклого $n$ -кутника	<i>Теорема 21.3.</i> Кількість діагоналей опуклого $n$ -кутника дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$ , $n \in \mathbb{N}$ , $n > 3$ .
Многокутник, вписаний у коло	Многокутник, всі вершини якого лежать на цьому колі. Це коло називають <i>описаним навколо цього многокутника</i>
Многокутник, описаний навколо кола	Многокутник, всі сторони якого дотикаються до цього кола. Це коло називають <i>вписаним в цей многокутник</i> .
Площа описаного многокутника	<i>Теорема 21.4.</i> Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.
Правильний многокутник	Опуклий многокутник, у якого всі сторони й усі кути рівні.
Величина правильного $n$ -кутника	Величина кута $\alpha_n$ правильного $n$ -кутника дорівнює $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-3)}{n}$ .
Центр правильного многокутника	Точка, яка є центром описаного і вписаного кіл правильного многокутника.

Сума внутрішнього кута многокутника та суміжного з ним зовнішнього дорівнює  $180^\circ$ , тому сума всіх зовнішніх і внутрішніх кутів многокутника дорівнює  $180^\circ \cdot n$ . Оскільки сума всіх внутрішніх кутів многокутника за теоремою 21.1 дорівнює  $180^\circ(n-2)$ , то сума всіх зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює  $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ$ .  
Відповідь:  $360^\circ$ .

**Приклад 21.6.** Довести, що кількість діагоналей опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $\frac{n(n-3)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 3$ .

З однієї вершини  $n$ -кутника можна провести  $(n-3)$  діагоналі (не можна провести діагоналі в обрану вершину та дві сусідні вершини). У нього  $n$  вершин, тому всього можна провести  $n(n-3)$  діагоналей. Оскільки кожну діагональ було враховано двічі, тому кількість діагоналей дорівнює  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

**Приклад 21.7.** В опуклому многокутнику сума кутів дорівнює  $1620^\circ$ . Знайти кількість його сторін і діагоналей.

За теоремою 21.1 сума кутів опуклого  $n$ -кутника дорівнює  $180^\circ \cdot (n-2)$ , тому  $180 \cdot (n-2) = 1620$ ,  $n = 11$ . Отже, кількість сторін заданого многокутника дорівнює 11.

**21.12.** Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині. Знайти кількість сторін многокутника.  
(Відповідь: 6)

**21.13.** Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума всіх його внутрішніх кутів і усіх зовнішніх дорівнює  $2520^\circ$ ? (Відповідь: 12)

**21.14.** Скільки діагоналей можна провести з однієї вершини опуклого дев'ятикутника? Знайти загальну кількість діагоналей опуклого дев'ятикутника.  
(Відповідь: 6; 27)

**21.15.** В опуклому многокутнику сума кутів дорівнює  $2340^\circ$ . Знайти кількість його сторін і діагоналей.  
(Відповідь: 15; 90)

**21.16.** Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний з його зовнішніх кутів дорівнює:  
1)  $36^\circ$ ; 2)  $24^\circ$ .  
(Відповідь: 1) 10; 2) 15)

Радіус кола, описаного навколо правильного  $n$ -кутника

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

Радіус кола, вписаного в правильний  $n$ -кутник

$$r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}},$$

де  $R_n$  – радіус описаного кола правильного  $n$ -кутника,  $r_n$  – радіус вписаного кола правильного  $n$ -кутника,  $a_n$  – сторона правильного  $n$ -кутника.

Формули, які пов'язують радіуси описаного та вписаного кіл деяких многокутників з їх сторонами

$$R_3 = \frac{a_3 \sqrt{3}}{3}, \quad r_3 = \frac{a_3 \sqrt{3}}{6}.$$

$$R_4 = \frac{a_4 \sqrt{2}}{2}, \quad r_4 = \frac{a_4}{2}.$$

$$R_6 = a_6, \quad r_6 = \frac{a_6 \sqrt{3}}{2}.$$

Апофема правильного многокутника

Перпендикуляр, проведений з центра правильного многокутника до його сторони. Апофема є радіусом вписаного кола.

Центральний кут правильного многокутника

Кут, утворений двома радіусами, проведеними до сусідніх вершин. Центральний кут правильного  $n$ -кутника дорівнює  $\frac{360^\circ}{n}$ .

Площа правильного  $n$ -кутника

$$S = \frac{na_n^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}, \quad S = nr_n^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

$$S = \frac{nR_n^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n},$$

де  $n$  – кількість вершин многокутника,  $R_n$  – радіус описаного кола,  $r_n$  – радіус вписаного кола,  $a_n$  – сторона правильного  $n$ -кутника.

За теоремою 21.3 кількість діагоналей  $n$ -кутника дорівнює  $\frac{n(n-3)}{2}$ , тому кількість діагоналей заданого многокутника дорівнює  $\frac{11 \cdot (11-3)}{2} = 44$ . Відповідь: 44.

**Приклад 21.8.** У коло вписано квадрат зі стороною  $18\sqrt{2}$  см. Знайти сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола (рис. 21.7).

Радіус кола, описаного навколо квадрата, обчислюється за формулою  $R_4 = \frac{a_4 \sqrt{2}}{2}$ , де  $a_4$  – сторона квадрата.

Отже,  $R_4 = \frac{18\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 18$  (см).

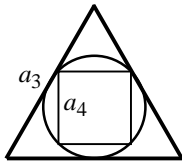


Рис. 21.7.

За умовою радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо квадрата, тобто  $r_3 = R_4 = 18$  (см).

Оскільки  $r_3 = \frac{a_3 \sqrt{3}}{6}$ , де  $a_3$  – сторона трикутника, то

$$a_3 = \frac{6 \cdot r_3}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 18}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Відповідь:  $36\sqrt{3}$  см.

**21.17.** Кути квадрата зрізали так, що отримали правильний восьмикутник зі стороною  $2\sqrt{2}$  см. Знайти сторону квадрата. (Відповідь:  $(4 + 2\sqrt{2})$  см)

**21.18.** У коло вписано та навколо нього описано правильні шестикутники. Знайти відношення сторін цих шестикутників. (Відповідь:  $\sqrt{3} : 2$ )

**21.19.** У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайти сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола. (Відповідь: 12 см)

**21.20.** Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною  $8\sqrt{6}$  см. Знайти сторону квадрата, вписаного в це коло. (Відповідь: 24 см)

**21.21.** У коло вписано квадрат зі стороною  $12\sqrt{2}$  см. Знайти сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

(Відповідь:  $24\sqrt{3}$  см)

## 22 КОЛО, КРУГ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТИ

Геометричне місце точок      Множина всіх точок, які мають певну властивість.

Коло      Геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки, яку називають *центром* кола.

Радіус кола      Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. Позначення:  $r$ .

Хорда      Відрізок, який сполучає дві точки кола.

Діаметр      Хорда яка проходить через центр кола.  
Позначення:  $d$ .  
Діаметр дорівнює двом радіусам:  $d = 2r$ .

На рис. 22.1 зображено коло, у якого  $O$  – центр,  $OA = r$  – радіус,  $BC$  – хорда,  $DE = d$  – діаметр кола.

Довжина кола

$$C = 2 \pi r = \pi d, \text{ де } \pi = 3,1415 \dots$$

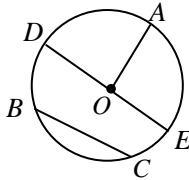


Рис. 22.1.

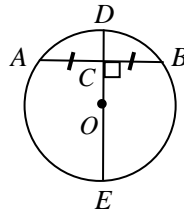


Рис. 22.2.

Круг      Геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число. Задану точку називають *центром* круга, а дане число – *радіусом* круга.

Хорда (діаметр) круга      Хорда (діаметр) кола, яке обмежує круг.

Площа круга

$$S = \pi r^2, S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

**Приклад 22.1.** На рис. 22.3  $\angle ABC = 34^\circ$ , точка  $O$  – центр кола. Знайти кут  $AOC$ .

Оскільки  $OB = OC$  (як радіуси), то  $\triangle BOC$  – рівнобедрений. Отже,  $\angle OBC = \angle OCB = 34^\circ$ .  
 $\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot \angle OBC = 112^\circ$ ,  
 $\angle AOC = 180^\circ - \angle BOC = 68^\circ$ .  
 Відповідь:  $68^\circ$ .

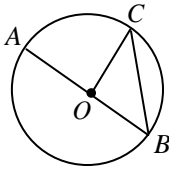


Рис. 22.3.

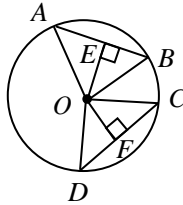


Рис. 22.4.

**Приклад 22.2.** Довести, що якщо хорди рівновіддалені від центра кола, то вони рівні.

За умовою  $AB$  і  $CD$  – хорди,  $OE = OF$  (рис. 22.4). Треба довести, що  $AB = CD$ . Оскільки відстань від точки до прямої дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, то  $OE \perp AB$ ,  $OF \perp CD$ . Розглянемо  $\triangle OEB$  і  $\triangle OFC$ , у них  $OE = OF$  (за умовою),  $OB = OC = R$ ,  $\angle OEB = \angle OFC = 90^\circ$ . Отже,  $\triangle OEB = \triangle OFC$  (за катетом та гіпотенузою), тому  $EB = FC$ . Аналогічно доводимо, що  $\triangle OEA = \triangle OFD$ , тому  $EA = FD$ . Отже,  $AB = CD$ , оскільки  $AB$  і  $CD$  складаються з рівних відрізків. Що й треба було довести.

**22.1.** У колі з центром  $O$  проведено діаметр  $AB$  і хорду  $BC$ . Знайти кут  $AOC$ , якщо  $\angle ABC = 36^\circ$ . (Відповідь:  $72^\circ$ )

**22.2.** Довести, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

**22.3.** Знайти кут між радіусами  $OA$  і  $OB$  кола, якщо відстань від центра  $O$  кола до хорди  $AB$  у два рази менша від:  
 1) довжини хорди  $AB$ ;  
 2) радіуса кола.  
 (Відповідь: 1)  $90^\circ$ ;  
 2)  $120^\circ$ )

**22.4.** Знайти радіус кола, якщо довжина кола дорівнює  $72\pi$  см. (Відповідь: 36 см)

**22.5.** Знайти довжину кола, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 12 см та 16 см. (Відповідь:  $9,6\pi$  см)

**22.6.** Довжина кола дорівнює  $16\pi$  см. Знайти площу круга, обмеженого цим колом. (Відповідь:  $64\pi$  см<sup>2</sup>)

Властивість хорди та діаметра *Теорема 22.1.* Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл (рис. 22.2).  
*Теорема 22.2.* Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди (рис. 22.2).

Взаємне розміщення прямої та кола Пряма та коло можуть не мати спільних точок (рис. 22.5), мати одну спільну точку (рис. 22.6), мати дві спільні точки (рис. 22.7).

Січна Пряма, що перетинає коло у двох точках.  
 На рис. 22.7 пряма  $a$  – січна.

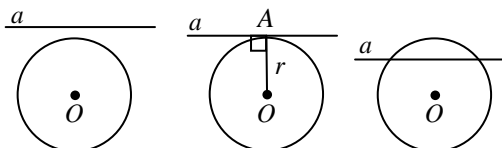


Рис. 22.5.

Рис. 22.6.

Рис. 22.7.

Дотична до кола Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку.  
 На рис. 22.6 пряма  $a$  – дотична до кола,  $A$  – точка дотику.

Властивість дотичної *Теорема 22.3.* Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику (рис. 22.6).

Ознака дотичної *Теорема 22.4.* Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки *Теорема 22.5.* Якщо через точку, яка знаходиться поза колом, проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.  
 На рис. 22.10 зображено коло,  $CM$  і  $CK$  – дотичні до кола,  $CM = CK$ .

**Приклад 22.3.** Знайти площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною  $a$  і кутом  $\alpha$  при основі.

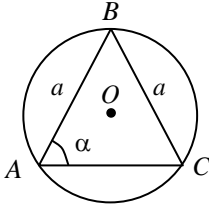


Рис. 22.8.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий рівнобедрений трикутник, вписаний у коло,  $AB = BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$  (рис. 22.8). За теоремою 19.16 отримуємо:

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \sin \alpha}. \quad \text{Площа круга,}$$

описаного навколо  $\triangle ABC$ :

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \alpha}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \alpha}$  кв. од.

**Приклад 22.4.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 9:8, рахуючи від вершини трикутника. Знайти площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

Нехай  $\triangle ABC$  – заданий трикутник,  $AB = BC$ ,  $O$  – центр вписаного кола (рис. 22.9). Проведемо  $OK \perp AB$ , за умовою  $OK = 16$  см,  $AK : KB = 8 : 9$ . Нехай  $AK = 8x$  см,  $KB = 9x$  см.

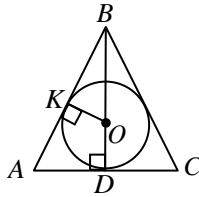


Рис. 22.9.

**22.7.** Знайти площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною 6 см і кутом  $30^\circ$  при основі.

(Відповідь:  $36 \pi \text{ см}^2$ )

**22.8.** При збільшенні радіуса круга його площа збільшилась у 16 разів. У скільки разів збільшилась довжина кола цього круга. (Відповідь: у 4 рази)

**22.9.** У колі проведено діаметр  $AB$  та хорди  $AC$  і  $CD$  так, що  $AC = 12$  см,  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AB \perp CD$ . Знайти довжину хорди  $CD$ . (Відповідь: 12 см)

**22.10.** Через кінці хорди  $AB$ , яка дорівнює радіусу кола, проведено дві дотичні, що перетинаються в точці  $C$ . Знайти кут  $ACB$ . (Відповідь:  $120^\circ$ )

**22.11.** З точки  $A$  до кола проведено дві дотичні, довжини яких дорівнюють по 12 см, а відстань між точками дотику – 14,4 см. Знайти радіус кола. (Відповідь: 9 см)

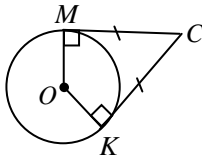


Рис. 22.10.

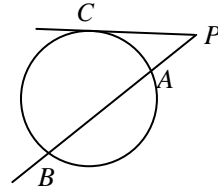


Рис. 22.11.

Властивості  
дотичної та січної

1. Якщо з точки  $P$ , яка знаходиться поза колом, провести січну, яка перетинає коло в точках  $A$  і  $B$ , та дотичну  $PC$ , де  $C$  – точка дотику (рис. 22.11), то  $PC^2 = PA \cdot PB$ .

2. Якщо з точки  $P$ , яка знаходиться поза колом, провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках  $A$  і  $B$ , а друга – в точках  $C$  і  $D$  (рис. 22.12), то  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

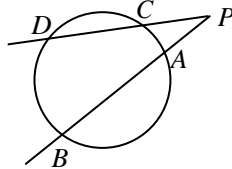


Рис. 22.12.

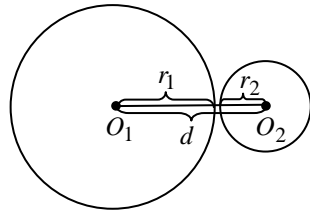


Рис. 22.13.

Взаємне  
розміщення двох кіл

Нехай  $r_1$  і  $r_2$  – радіуси двох даних кіл,  $d$  – відстань між їх центрами.

1. Якщо  $d > r_1 + r_2$ , то кола не мають спільних точок (рис. 22.13).

2. Якщо  $d < r_1 + r_2$ , то кола не мають спільних точок (рис. 22.14).

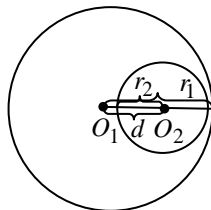


Рис. 22.14.

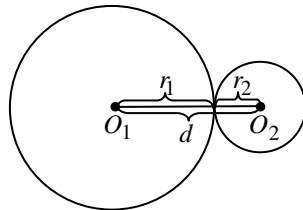


Рис. 22.15.

Точка  $D$  – точка дотику кола до сторони  $AC$ , тоді  $AK = AD$  (за властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки). З  $\triangle ABD$  ( $\angle ADB = 90^\circ$ ):

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(17x)^2 - (8x)^2} = 15x \text{ (см)}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 120x^2 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$OK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{240x^2}{2 \cdot 17x + 16x} = 4,8x \text{ (см)}.$$

Оскільки  $OK = 16$  см, то  $4,8x = 16$ ,

$$x = \frac{10}{3} \cdot S_{\triangle ABC} = 120 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{400}{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь:  $400/3$  см<sup>2</sup>.

**Приклад 22.5.** З точки поза колом проведено січну до кола завдовжки 12 см і дотичну, довжина якої складає  $2/3$  внутрішнього відрізка січної. Знайти довжину дотичної.

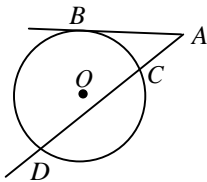


Рис. 22.16.

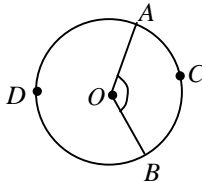


Рис. 22.17.

Нехай задано коло з центром у точці  $O$ , із точки  $A$  проведені дотична  $AB$  ( $B$  – точка дотику) і січна  $AD$ , яка перетинає коло в точках  $C$  і  $D$ ,

$$AD = 12 \text{ см, } AB = \frac{2}{3} CD \text{ (рис. 22.16)}.$$

**22.12.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 25:12, рахуючи від вершини трикутника. Знайти площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює  $120/7$  см.

(Відповідь:  $1680$  см<sup>2</sup>)

**22.13.** Із зовнішньої точки проведено до кола січну та дотичну. Дотична на 20 см менша від внутрішнього відрізка січної та на 8 см більша від зовнішнього відрізка січної. Знайти довжину дотичної.

(Відповідь: 12 см)

**22.14.** З точки  $P$ , що знаходиться поза колом, проведено січну до кола, яка перетинає коло в точках  $A$  і  $B$ . Відстань від точки  $P$  до центра кола дорівнює 13 см. Знайти радіус кола, якщо  $PA = 8$  м,  $PB = 15$  м.

(Відповідь: 7 м)

**22.15.** Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 11 см. Знайти відстань між їх центрами, якщо кола мають:

- 1) внутрішній дотик;
  - 2) зовнішній дотик
- (Відповідь: 1) 4 см; 2) 18 см)

Взаємне  
розміщення двох кіл

3. Якщо  $d = r_1 + r_2$ , то кола мають одну спільну точку (рис. 22.15). У цьому випадку говорять, що кола мають *зовнішній дотик*.

4. Якщо  $d = r_1 - r_2$ , то кола мають одну спільну точку (рис. 22.18). У цьому випадку говорять, що кола мають *внутрішній дотик*.

5. Якщо  $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ , то кола мають дві спільні точки (рис. 22.19).

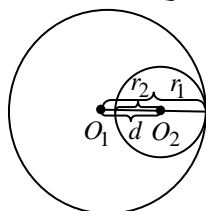


Рис. 22.18.

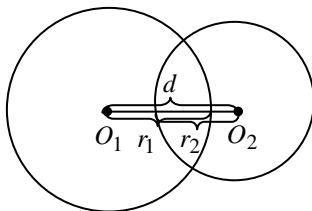


Рис. 22.19.

Центральний кут

Кут з вершиною в центрі кола.

На рис. 22.20  $\angle AOB$  – центральний.

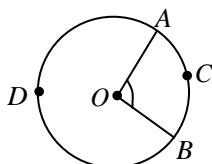


Рис. 22.20.

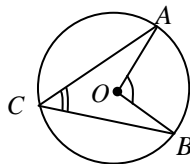


Рис. 22.21.

Дуга

Частина кола розміщена всередині центрального кута.

Центральному куту відповідає дві дуги. Щоб конкретизувати, яка дуга мається на увазі на дузі позначають проміжну точку.

Дугу позначають знаком « $\cup$ ».

На рис. 22.20  $\angle AOB$  – центральний кут, який відповідає дузі (спирається на дугу)  $\cup AB$  або  $\cup ACB$ .

Градусна міра дуги

Градусна міра відповідного центрального кута.

На рис. 22.20  $\cup ACB = \angle AOB$ .

За властивістю дотичної та січної:

$$AB^2 = AC \cdot AD. \text{ Нехай } CD = x \text{ см, тоді}$$

$$AC = (12 - x) \text{ см, } AB = \frac{2}{3}x \text{ см. Маємо:}$$

$$\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 12 \cdot (12 - x), \quad x^2 + 27x - 324 = 0,$$

$$x = 9 \quad (x > 0). \text{ Отже, } CD = 9 \text{ (см),}$$

$$AC = 12 - 9 = 3 \text{ (см),}$$

$$AB = \sqrt{12 \cdot 3} = 6 \text{ (см). Відповідь: 6 см.}$$

**Приклад 22.6.** Знайти градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на  $80^\circ$  більша за градусну міру другої.

Нехай точки  $A$  і  $B$  поділяють коло на дві дуги:  $\cup ACB$  і  $\cup ADB$  (рис. 22.17). Нехай  $\cup ACB = x^\circ$ , тоді  $\cup ADB = (x + 80)^\circ$ . Маємо:

$$\cup ACB + \cup ADB = 360^\circ, \quad x + x + 80 = 360,$$

$$2x = 280, \quad x = 140. \text{ Отже, } \cup ACB = 140^\circ,$$

$$\cup ADB = 220^\circ. \text{ Відповідь: } 140^\circ, 220^\circ.$$

**Приклад 22.7.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  ділять коло на дуги у відношенні 3:4:8. Знайти кути трикутника  $ABC$ .

Нехай задано коло з центром  $O$ , точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на цьому колі (рис. 22.22).

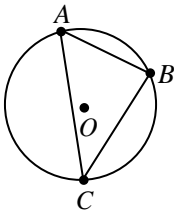


Рис. 22.22.

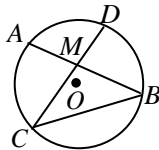


Рис. 22.23.

**22.16.** Відстань між центрами двох кіл дорівнює 9 см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо їх радіуси дорівнюють:

- 1) 6 см і 4 см;
- 2) 4,5 см і 4,5 см;
- 3) 2 см і 6 см.

(Відповідь:

- 1) перетинаються у двох точках;
- 2) зовнішній дотик;
- 3) не перетинаються)

**22.17.** Знайти градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на  $100^\circ$  більша за градусну міру другої.

(Відповідь:  $230^\circ, 130^\circ$ )

**22.18.** Кінці хорди  $MN$  поділяють коло на дві дуги. Градусна міра меншої з них дорівнює  $140^\circ$ , а більша ділиться точкою  $K$  у відношенні 5:6, рахуючи від точки  $M$ . Знайти  $\angle NMK$ .

(Відповідь:  $60^\circ$ )

**22.19.** Знайти довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 10 см, якщо її градусна міра дорівнює  $60^\circ$ . (Відповідь:  $\frac{10\pi}{3}$  см)

Довжина дуги

$$l_n = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ},$$

де  $n^\circ$  – градусна міра відповідного центрального кута.

Градусна міра вписаного кута

*Теорема 22.6.* Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.

На рис. 22.21  $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$ .

Властивості вписаних кутів

*Теорема 22.7.* Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні (рис. 22.24).

*Теорема 22.8.* Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо) – прямий (рис. 22.25).

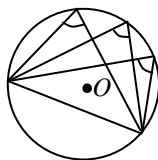


Рис. 22.24.

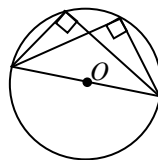


Рис. 22.25.

*Теорема 22.9.* Кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний з ним.

На рис.22.26  $\angle ABC = \frac{\cup AC + \cup DK}{2}$ .

*Теорема 22.10.* Кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої та меншої дуг, які містяться між його сторонами.

На рис. 22.27  $\angle ABC = \frac{\cup AC - \cup DK}{2}$ .

Нехай  $\cup AB = 3x^\circ$ ,  $\cup BC = 4x^\circ$ ,  
 $\cup AC = 8x^\circ$ .  $\cup AB + \cup BC + \cup AC = 360^\circ$ ,  
 $3x + 4x + 8x = 360$ ,  $15x = 360$ ,  $x = 24$ .  
 $\cup AB = 72^\circ$ ,  $\cup BC = 96^\circ$ ,  $\cup AC = 192^\circ$ .

Кути  $\triangle ABC$ :  $\angle A = \frac{1}{2} \cup BC = 48^\circ$ ,

$\angle B = \frac{1}{2} \cup AC = 96^\circ$ ,  $\angle C = \frac{1}{2} \cup AB = 36^\circ$ .

Відповідь:  $48^\circ$ ,  $96^\circ$ ,  $36^\circ$ .

**Приклад 22.8.** Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний з ним.

Нехай задано коло з центром  $O$ , хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$  (рис. 22.23). Треба довести,

що  $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$ .

$\angle AMC$  – зовнішній кут  $\triangle CMB$ , за теоремою 19.3

$\angle AMC = \angle MBC + \angle MCB$ . Оскільки  $\angle MBC$  і  $\angle MCB$  – вписані кути, які спираються на дуги  $AC$  і  $BD$  відповідно, то за теоремою 22.6 маємо:

$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$ . Що й треба було довести.

**Приклад 22.9.** Довести, що кут вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої та меншої дуг, які містяться між його сторонами..

Нехай задано коло з центром  $O$ , промені  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$ , яка лежить поза колом (рис. 22.31).

**22.20.** Коло, радіус якого дорівнює 9 см, розігнуто в дугу, радіус кола якої дорівнює 24 см. Знайти центральний кут, який стягує утворену дугу. (Відповідь:  $135^\circ$ )

**22.21.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  ділять коло на дуги у відношенні 2:3:4. Знайти кути трикутника  $ABC$ . (Відповідь:  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ )

**22.22.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $72^\circ$ . Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника як на діаметрі, поділяється іншими сторонами на три дуги. Знайти градусні міри цих дуг. (Відповідь:  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ )

**22.23.** Хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$ ,  $\cup AC = 50^\circ$ ,  $\cup BD = 70^\circ$ . Знайти  $\angle AMC$ . (Відповідь:  $60^\circ$ )

**22.24.** Хорди  $AB$  і  $CD$  кола не перетинаються, а прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$ ,  $\cup AC = 100^\circ$ ,  $\cup BD = 30^\circ$ . Знайти  $\angle AMC$ . (Відповідь:  $35^\circ$ )

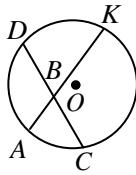


Рис. 22.26.

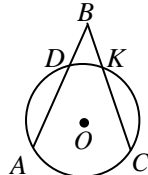


Рис. 22.27.

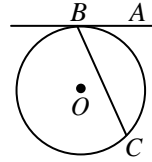


Рис. 22.28.

*Теорема 22.11.* Кут між дотичною і хордою, яка проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, що лежить між його сторонами.

На рис. 22.28  $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BC$ .

Круговий сектор

Частина круга, що лежить всередині центрального кута (рис. 22.29).

На рис. 22.29 сектор  $AOB$  заштриховано,  $\cup AB$  – дуга сектора,  $\angle AOB$  – центральний кут, який відповідає сектору  $AOB$ .

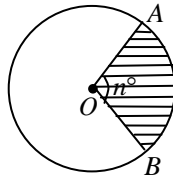


Рис. 22.29.

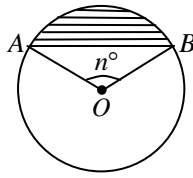


Рис. 22.30.

Площа кругового сектора

$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ},$$

де  $n^\circ$  – градусна міра сектора.

Круговий сегмент

Частина круга, яка лежить з одного боку від прямої, що перетинає даний круг (рис. 22.30).

Площа кругового сегмента

$$S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} \pm S_{\triangle AOB},$$

де  $n^\circ$  – градусна міра сектора.

Треба довести, що

$$\angle AMC = \frac{\cup AC - \cup BD}{2}.$$

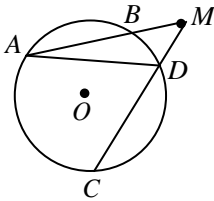


Рис. 22.31.

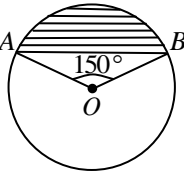


Рис. 22.32.

$\angle ADC$  – зовнішній кут  $\triangle ADM$ , тоді за теоремою 19.3

$$\angle ADC = \angle DAM + \angle DMA,$$

$$\angle DMA = \angle ADC - \angle DAM.$$

$\angle ADC$  і  $\angle DAB = \angle DAM$  – вписані кути, які спираються на дуги  $AC$  і  $BD$  відповідно, тому

$$\begin{aligned} \angle AMC &= \frac{1}{2} \cup AC - \frac{1}{2} \cup BD = \\ &= \frac{1}{2} (\cup AC - \cup BD). \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

**Приклад 22.10.** Знайти площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює  $150^\circ$  (рис. 22.32).

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} - S_{\triangle AOB} = \\ &= \frac{\pi OA^2 n^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} AO^2 \sin \angle AOB = \\ &= \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 150^\circ}{360^\circ} - 9 = 3(4\pi - 3) \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Відповідь:  $3(4\pi - 3) \text{ см}^2$ .

**22.25.** Кінці хорди ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться, як 5:4. Через один з кінців хорди проведено дотичну до даного кола. Знайти гострий кут між цією дотичною та даною хордою. (Відповідь:  $80^\circ$ )

**22.26.** Радіус круга дорівнює 9 см. Знайти площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює  $200^\circ$ .

(Відповідь:  $45\pi \text{ см}^2$ )

**22.27.** Площа сектора дорівнює  $48\pi \text{ м}^2$ . Знайти градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 24 м. (Відповідь:  $30^\circ$ )

**22.28.** Знайти площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 3 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює:

1)  $30^\circ$ ; 2)  $330^\circ$ .

(Відповідь:

1)  $0,75(\pi - 3) \text{ см}^2$ ;

2)  $0,75(11\pi + 3) \text{ см}^2$ )

## 23 АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

Стереометрія

Розділ геометрії, в якому вивчаються фігури в просторі.

Основні фігури в просторі

Точка, пряма, площина.

Позначення

Площини позначаються малими грецькими буквами:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .

Якщо точка  $A$  *лежить* у площині  $\alpha$ , то кажуть, що площина  $\alpha$  проходить через точку  $A$ , пишуть:  $A \in \alpha$ .

Якщо точка  $A$  *не лежить* у площині  $\alpha$ , то пишуть:  $A \notin \alpha$ .

Якщо кожна точка прямої  $a$  належить площині  $\alpha$ , то кажуть, що *пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$* , а *площина  $\alpha$  проходить через пряму  $a$* , пишуть:  $a \subset \alpha$ .

Якщо пряма  $a$  *не лежить* у площині  $\alpha$ , то пишуть:  $a \not\subset \alpha$ .

Якщо пряма  $a$  і площина  $\alpha$  мають тільки одну спільну точку  $A$ , то вони перетинаються в точці  $A$ , пишуть:  $a \cap \alpha = A$ .

На рис. 23.1  $A \in \alpha, B \notin \alpha, a \subset \alpha, b \not\subset \alpha, b \cap \alpha = C$ .

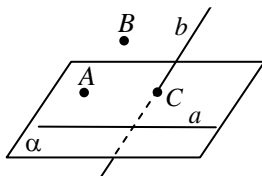


Рис. 23.1.

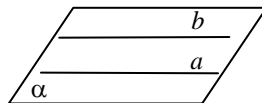


Рис. 23.2.

Аксіоми стереометрії

Для будь-якої площини виконуються аксіоми планіметрії.

$S_1$ . Як б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належить їй.

**Приклад 23.1.** Прямі  $AB$  і  $CD$  не лежать в одній площині. Довести, що прямі  $AC$  і  $BD$  також не лежать в одній площині.

Припустимо, що  $AC \subset \alpha$  і  $BD \subset \alpha$ , тоді точки  $A, B, C, D$  лежать у площині  $\alpha$ . З теореми 23.1 випливає, що  $AB \subset \alpha$  і  $CD \subset \alpha$ . Отримали суперечність з умовою задачі. Отже,  $AC$  і  $BD$  не лежать в одній площині.

**Приклад 23.2.** Три вершини трикутника лежать у площині  $\alpha$ . Довести, що кожна точка цього трикутника лежить у площині  $\alpha$ .

Згідно з теоремою 23.4 три вершини трикутника задають площину і тільки одну. Оскільки  $A \in \alpha, B \in \alpha$ , то  $AB \subset \alpha$  (за теоремою 23.1). Аналогічно,  $BC \subset \alpha, AC \subset \alpha$ . З теореми 23.1 випливає, що будь-який відрізок, що з'єднує вершину трикутника з довільною точкою протилежної сторони, належить площині  $\alpha$ . Будь-яка точка цього відрізка, а, отже, і трикутника належить площині  $\alpha$ .

**Приклад 23.3.** Точки  $A, B, C, D$  не лежать в одній площині. Довести, що ніякі три з них не лежать на одній прямій.

Припустимо, що три точки з даних, наприклад,  $A, B, C$ , лежать на одній прямій. За теоремою 23.2 через цю пряму та точку можна провести тільки одну площину. Усі чотири задані точки лежать у цій площині.

**23.1.** Дано пряму  $a$  і точку  $B$ , що не лежить на ній. Довести, що всі прямі, які проходять через точку  $B$  і перетинають пряму  $a$ , лежать в одній площині.

**23.2.** Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $a$ . У площині  $\beta$  взято пряму  $b$ , яка перетинає площину  $\alpha$  у точці  $B$ . Довести, що  $B \in a$ .

**23.3.** Довести, що в просторі існує пряма, яка перетинає дану площину та площина, що перетинає дану площину.

**23.4.** Чи можна провести площину через три точки, якщо відомо, що вони лежать на одній прямій?

**23.5.** Точки  $A, B, C$  не лежать на одній прямій.  $M \in AB, K \in AC, X \in MK$ . Довести, що точка  $X$  лежить у площині  $(ABC)$ .

**23.6.** Вершини  $A$  і  $B$  ромба  $ABCD$  і точка перетину його діагоналей лежать у площині  $\alpha$ . Довести, що  $C \in \alpha, D \in \alpha$ .

Аксиоми  
стереометрії

$C_2$ . Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають і спільну пряму, що проходить через цю точку.

$C_3$ . Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну.

Наслідки з аксіом  
стереометрії

*Теорема 23.1.* Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма лежить у цій площині.

*Теорема 23.2.* Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.

*Теорема 23.3.* Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.

*Теорема 23.4.* Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Паралельні прямі  
у просторі

Дві прямі, які лежать в одній площині та не перетинаються.

Позначення:  $a \parallel b$ .

На рис. 23.2 зображено паралельні прямі  $a$  і  $b$ .

Властивості  
паралельних прямих

*Теорема 23.5.* Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній і до того ж тільки одну (рис. 23.3).

*Теорема 23.6.* Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою (рис. 23.4):

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b.$$

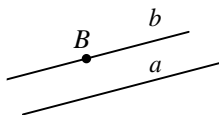


Рис. 23.3.

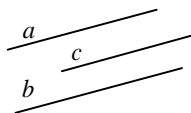


Рис. 23.4.

Це суперечить умові задачі. Отже, ніякі три з даних точок не можуть лежати на одній прямій.

**Приклад 23.4.** Прямі  $AB$  і  $AC$  перетинаються в точці  $A$ . Доведіть, що всі прямі, які їх перетинають, але не проходять через точку  $A$ , лежать в одній площині. Чи можна через точку  $A$  провести пряму, яка не лежить у цій площині?

За теоремою 23.3 через прямі  $AB$  і  $AC$  можна провести тільки одну площину  $\alpha$ . Маємо:  $AB \subset \alpha$ ,  $AC \subset \alpha$ . З теореми 23.1 випливає, що прямі, які перетинають  $AB$  і  $AC$ , також лежать у площині  $\alpha$ . Що й треба було довести.

Через точку  $A$  можна провести пряму, яка не буде лежати в площині  $\alpha$ . Ця пряма буде перетинати площину  $\alpha$  у точці  $A$ .

**Приклад 23.5.** Довести, що всі паралельні між собою прямі, які перетинають задану пряму, лежать в одній площині.

Нехай  $a_1 \parallel a_2 \parallel \dots \parallel a_n$ ,  $a_1 \cap b = B_1$ ,  $a_2 \cap b = B_2$ , ...,  $a_n \cap b = B_n$  (рис. 23.5). За аксіомою  $C_3$  прямі  $a_1$  і  $b$  задають деяку площину  $\alpha$ .

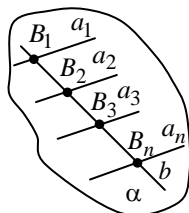


Рис. 23.5.

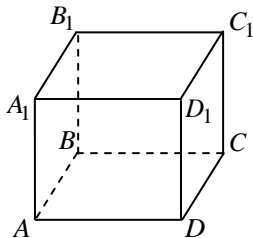


Рис. 23.6.

**23.7.** Вершина  $A$  і медіана  $BM$  трикутника  $ABC$  належать площині  $\alpha$ . Чи належить цій площині висота  $CN$ ?

**23.8.** Прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  проходять через точку  $S$ . Площина, яка не проходить через точку  $S$ , перетинає прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  в точках, які не лежать на одній прямій. Довести, що прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  не лежать в одній площині.

**23.9.** Прямі  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині. Прямі  $c$  і  $d$  перетинають кожен з прямих  $a$  і  $b$ . Довести, що прямі  $c$  і  $d$  не перетинаються.

**23.10.** Довести, що якщо площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

**23.11.** Відрізки  $OA$  і  $OB$  перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A_1$  і  $B_1$ , які є серединами цих відрізків. Знайти відстань  $AB$ , якщо  $A_1B_1 = 5,6$  см.

(Відповідь: 11,2 см)

*Теорема 23.7.* Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга перетинає цю площину (рис. 23.7).

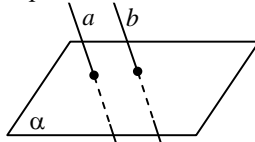


Рис. 23.7.

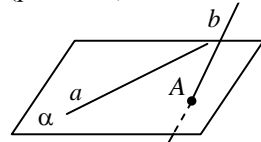


Рис. 23.8.

Мимобіжні прямі

Прямі, які не лежать в одній площині та не перетинаються.

На рис. 23.8 прямі  $a$  і  $b$  – мимобіжні.

Ознака мимобіжності прямих

*Теорема 23.8.* Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні (рис. 23.8).

Паралельність прямої та площини

Пряма та площина називаються *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. Позначення:  $a \parallel \alpha$ .

На рис. 23.9 зображена пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ .

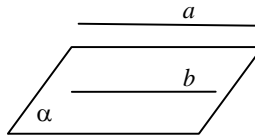


Рис. 23.9.

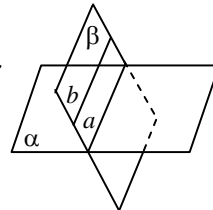


Рис. 23.10.

Ознака паралельності прямої та площини

*Теорема 23.9.* Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині (рис. 23.9):  $a \not\subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ;  $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$ .

Властивість паралельних прямої та площини

*Теорема 23.10.* Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій (рис. 23.10):

$$b \not\subset \alpha, b \parallel \alpha, b \subset \beta, \beta \cap \alpha = a \Rightarrow a \parallel b.$$

Через точку  $B_2$  проведемо пряму  $a'_2$ , паралельну  $a_1$ . За теоремою 23.5 в площині  $\alpha$  така пряма єдина, тому прямі  $a_2$  і  $a'_2$  співпадають. Аналогічні міркування показують, що  $a_3, \dots, a_n$  також лежать в площині  $\alpha$ .

**Приклад 23.6.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Довести, що пряма  $AB$  мимобіжна з прямою  $CC_1$  (рис. 23.6).

Оскільки  $CC_1 \subset (BCC_1)$ ,  $AB \cap (BCC_1) = B$ ,  $B \notin CC_1$ , то згідно з ознакою мимобіжності прямих (теорема 23.8) прямі  $AB$  і  $CC_1$  мимобіжні.

**Приклад 23.7.** Через дану точку провести пряму, паралельну даній площині.

Якщо задана точка  $A$  лежить у заданій площині  $\alpha$ , то задача не має розв'язку. Нехай точка  $A$  не належить заданій площині  $\alpha$  (рис. 23.11).

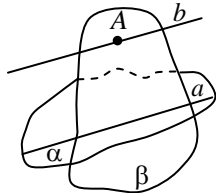


Рис. 23.11.

Проведемо в площині  $\alpha$  довільну пряму  $a$ . Через пряму  $a$  і точку  $A$  проведемо площину  $\beta$ . У площині  $\beta$  проведемо через точку  $A$  пряму  $b$ , паралельну прямій  $a$ .  $b \parallel \alpha$  за теоремою 23.9.

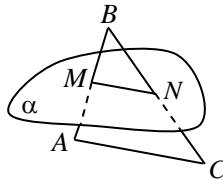


Рис. 23.12.

**23.12.** Через кінець  $A$  відрізка  $AB$  проведено площину  $\alpha$ . Через кінець  $B$  і точку  $C$  цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $B_1$  і  $C_1$ . Знайти довжину відрізка  $CC_1$ , якщо  $AC_1 : C_1 B_1 = 2 : 1$ ,  $BB_1 = 24$  см. (Відповідь: 16 см)

**23.13.** Через вершину  $A$  паралелограма  $ABCD$  проведено пряму  $a$ , яка не лежить у площині паралелограма, а через точку  $C$  – пряму  $b$ , яка паралельна  $BD$ . Довести, що  $a$  і  $b$  – мимобіжні.

**23.14.** Дано  $\triangle ABC$  і площину  $\alpha$ , яка паралельна прямій  $AC$  та перетинає сторони  $AB$  та  $BC$  заданого трикутника у точках  $M$  і  $N$  відповідно (рис. 23.12). Знайти  $MN$ , якщо  $AM : MB = 7 : 5$ ,  $MN + AC = 34$  см. (Відповідь: 10 см)

Паралельні  
площини

Дві площини, які не мають спільних точок.  
Позначення:  $\alpha \parallel \beta$ .

На рис. 23.13 зображено паралельні площини  $\alpha$  і  $\beta$ .



Рис. 23.13.

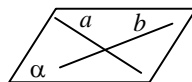


Рис. 23.14.

Ознака  
паралельності  
площин

*Теорема 23.11.* Якщо дві прямі однієї площини, які перетинаються, відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються, другої площини, то ці площини паралельні (рис. 23.14).

Властивості  
паралельних  
площин

*Теорема 23.12.* Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

*Теорем 23.13.* Якщо дві паралельні площини перетнуто третьою, то прямі перетину паралельні (рис.23.15):

$$\alpha \parallel \beta, \gamma \parallel \alpha = a, \gamma \parallel \beta = b \Rightarrow a \parallel b.$$

*Теорема 23.14.* Відрізки паралельних прямих, обмежені двома паралельними площинами, рівні (рис. 23.16).

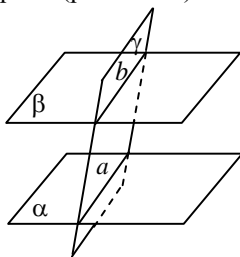


Рис. 23.15.

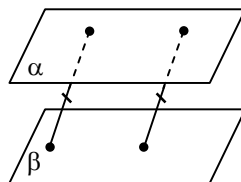


Рис. 23.16.

**Приклад 23.8.** Дано  $\triangle ABC$  і площину  $\alpha$ , яка паралельна прямій  $AC$  та перетинає сторони  $AB$  та  $BC$  заданого трикутника у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Знайти  $MN$ , якщо  $AM : MB = 5 : 3$ ,  $MN + AC = 22$  см (рис. 23.12).

Оскільки  $AC \parallel \alpha$ ,  $AC \subset (ABC)$ , то за теоремою 23.10  $MN \parallel AC$ .  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$  (за першою ознакою подібності трикутників). Маємо:

$$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB}, \quad \frac{MN}{22 - MN} = \frac{3}{8},$$

$$8MN = 3(22 - MN), \quad MN = 6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6 см.

**Приклад 23.9.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  паралельних прямих розміщені між паралельними площинами  $\alpha$  і  $\beta$  так, що точки  $A$  і  $C$  лежать у площині  $\alpha$ , а  $B$  і  $D$  – у площині  $\beta$ ,  $CB = 15$  см,  $AD = 10$  см. Знайти  $AB$  і  $BD$ , якщо відрізок  $CD$  на 6 см більший, ніж  $AC$ .

Прямі  $AB \parallel CD$  задають площину  $(ABC)$  (рис. 23.17).

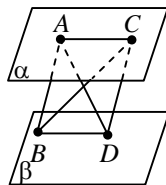


Рис. 23.17.

За теоремою 23.13  $AC \parallel BD$ .  $ABCD$  – паралелограм (за означенням), тому  $AB = CD$ ,  $BD = AC$ . За властивістю діагоналей паралелограма:

**23.15.** Через точку  $M$  – середину гіпотенузи  $AB$  прямокутного трикутника  $\triangle ABC$  – проведено площину  $\alpha$ , паралельну катету  $BC$ , яка перетинає катет  $AC$  у точці  $N$ . Знайти  $CM$ , якщо  $BC : AC = 5 : 7$ ,

$$S_{\triangle AMN} = 140 \text{ см}^2.$$

(Відповідь:  $4\sqrt{37}$  см)

**23.16.** Два промені з початком у точці  $O$ , яка лежить поза паралельними площинами  $\alpha$  і  $\beta$ , перетинають площину  $\alpha$  у точках  $A$  і  $B$ , а площину  $\beta$  у точках  $A_1$  і  $B_1$  відповідно. Знайти  $A_1B_1$ , якщо  $OA : AA_1 = 3 : 4$ ,  $AB = 9$  см.

(Відповідь: 21 см)

**23.17.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  паралельних прямих розміщені між паралельними площинами  $\alpha$  і  $\beta$  так, що точки  $A$  і  $C$  лежать у площині  $\alpha$ , а  $B$  і  $D$  – у площині  $\beta$ ,  $CB = 23$  см,  $AD = 19$  см. Знайти  $AB$  і  $BD$ , якщо  $CD$  на 7 см більший, ніж  $AC$ . (Відповідь: 18 см, 11 см)

Паралельна  
проекція точки  
на площину

Нехай дано довільну площину  $\alpha$  та точку  $A$  (рис. 23.18). Проведемо через точку  $A$  пряму  $a$ , яка перетинає площину  $\alpha$  у деякій точці  $A_1$ . Знайдену таким способом точку  $A_1$  називають *проекцією точки  $A$  на площину  $\alpha$* . Пряму  $a$  називають *проектуючою прямою*, а площину  $\alpha$  – *площиною проєкцій*.

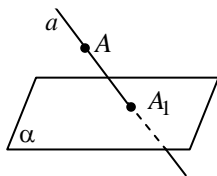


Рис. 23.18.

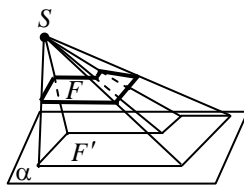


Рис. 23.19.

Проекція фігури  
на площину

Множина проєкцій всіх точок фігури на площину.

Центральне  
проекткування

Вид проектування, при якому проектуючі прямі проходять через одну точку – *центр проєкцій*.

На рис. 23.19 фігура  $F'$  – центральна проєкція фігури  $F$ .

Паралельне  
проекткування

Проектування, яке здійснюється паралельними прямими.

Паралельна  
проекція фігури

Фігура отримана з заданої в результаті паралельного проектування.

На рис. 23.20 фігура  $F'$  – паралельна проєкція фігури  $F$ .

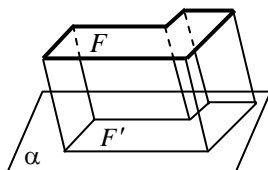


Рис. 23.20.

$$AD^2 + CB^2 = 2AB^2 + 2BD^2,$$

$$10^2 + 15^2 = 2(BD + 6)^2 + 2BD^2,$$

$$4BD^2 + 24BD - 253 = 0, \quad BD = 5,5 \text{ (см).}$$

$$AB = BD + 6 = 5,5 + 6 = 11,5 \text{ (см).}$$

Відповідь: 5,5 см, 11,5 см.

**Приклад 23.10.** Трапеція  $A_1B_1C_1D_1$  – паралельна проєкція прямокутної трапеції  $ABCD$ . Побудувати проєкцію висоти  $CH$  цієї трапеції.

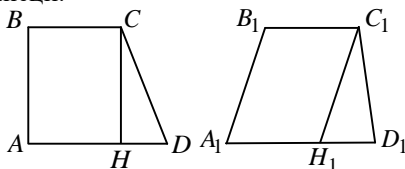


Рис. 23.21.

Рис. 23.22.

Нехай у трапеції  $ABCD$  кути  $A$  і  $B$  прямі (рис. 23.21). Проведемо висоту  $CH$ ,  $CH \parallel AB$ . Оскільки при паралельному проєктуванні паралельні прямі переходять у паралельні прямі (теорема 23.15), то для побудови проєкції висоти  $CH$  треба через точку  $C_1$  трапеції  $A_1B_1C_1D_1$  провести пряму  $C_1H_1$ , паралельну  $A_1B_1$  (рис. 23.22). Відрізок  $C_1H_1$  – шукана проєкція.

**Приклад 23.11.** Паралелограм  $A_1B_1C_1D_1$  – паралельна проєкція ромба  $ABCD$ , у якого  $\angle B = 120^\circ$ . Побудувати проєкцію висоти ромба, проведеної з точки  $B$  до сторони  $AD$ .

Нехай  $ABCD$  – заданий ромб,  $BH$  – висота ромба (рис. 23.25).

**23.18.** Точка  $O$  лежить між паралельними площинами  $\alpha$  і  $\beta$ . Через точку  $O$  проведені прямі  $a$  і  $b$ , які перетинають площину  $\alpha$  в точках  $A$  і  $A_1$ , а площину  $\beta$  – в точках  $B$  і  $B_1$  відповідно. Знайти  $AA_1$ , якщо  $AO = 2$  см,  $B_1B = 12$  см,  $AA_1 = AB$ . (Відповідь: 6 см)

**23.19.** Трикутник  $A_1B_1C_1$  – паралельна проєкція рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Побудувати проєкцію перпендикуляра, проведеного з середини бічної сторони до основи трикутника.

**23.20.**  $\Delta A_1B_1C_1$  – проєкція  $\Delta ABC$ . Побудувати проєкції середніх ліній і медіан трикутника  $ABC$ .

**23.21.** Паралелограм  $A_1B_1C_1D_1$  – паралельна проєкція прямокутника  $ABCD$ . Побудувати проєкції прямих, які проходять через точку перетину діагоналей прямокутника, паралельно його сторонам.

Правила  
паралельного  
проектування

*Проекція точки* – точка.  
*Проекція прямої*, яка не паралельна  
проектуючій прямій, – пряма.

*Теорема 23.15.* Якщо відрізки, які  
проектуються, не паралельні проектуючій  
прямій, то при паралельному проектуванні:  
1) відрізки фігури зображуються відрізками;  
2) паралельні відрізки – паралельними  
відрізками або відрізками однієї прямої;  
3) довжини проекцій паралельних відрізків або  
відрізків однієї прямої відносяться як довжини  
проектованих відрізків.

Кут між прямими,  
що перетинаються

Кутова міра меншого з кутів, утворених при  
перетині двох прямих.  
Позначають кут між прямими  $a$  і  $b$  символом  
 $\angle(ab)$ .

$$0 \leq \angle(ab) \leq 90^\circ.$$

Кут між паралельними прямими вважають  
рівним  $0^\circ$ .

Перпендикулярні  
прямі  
Кут між  
мимобіжними  
прямими

Дві прямі, кут між якими дорівнює  $90^\circ$ .

Кут між двома прямими, які перетинаються і  
паралельні відповідно даним мимобіжним  
прямим.

На рис. 23.23 прямі  $a$  і  $b$  – мимобіжні,  $a_1 \parallel a$ ,  
 $b_1 \parallel b$ ,  $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$ .

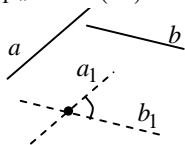


Рис. 23.23.

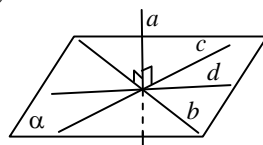


Рис. 23.24.

Пряма  
перпендикулярна до  
площини

Пряма, яка перетинає цю площину та  
перпендикулярна до будь-якої прямої, яка  
лежить у цій площині та проходить через  
точку перетину.

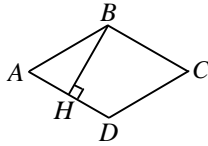


Рис. 23.25.

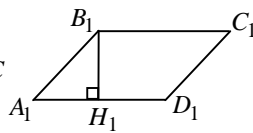


Рис. 23.26.

$\angle A = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ , тому у  $\triangle ABH$   $\angle ABH = 30^\circ$ . За властивістю катета, який лежить проти кута  $30^\circ$ ,

$AH = \frac{1}{2} AB$ . Оскільки  $AB = AD$ , то

$AH = HD$ . За теорема 23.15 довжини паралельних проєкцій відрізків однієї прямої відносяться як довжини проєктованих відрізків, тому на проєкції ромба  $A_1H_1 = H_1D_1$ . Тобто необхідно побудувати середину відрізка  $A_1D_1$  точку  $H_1$  та з'єднати її з точкою  $B_1$ . Відрізок  $B_1H_1$  – шукана проєкція (рис. 23.26).

**Приклад 23.12.** Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 23.27). Знайти

кут між прямими:

- 1)  $B_1 A$  і  $D_1 C$ ; 2)  $A_1 D$  і  $D_1 C$ .

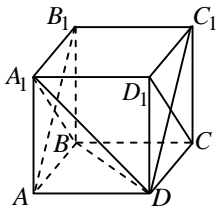


Рис. 23.27.

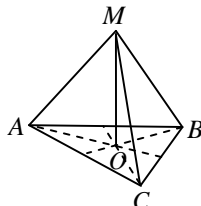


Рис. 23.28.

- 1) Прямі  $B_1 A$  і  $D_1 C$  мимобіжні.

Оскільки  $C_1 D \parallel B_1 A$ , то за означенням кута між мимобіжними прямими кут

**23.22.**  $\triangle A_1 B_1 C_1$  – паралельна проєкція  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) з катетами 5 см і 12 см. Побудувати проєкції центрів вписаного та описаного навколо нього кіл.

**23.23.** Побудувати проєкцію правильного трикутника  $ABC$ , знаючи проєкції його вершини  $B$  і середин  $M$  та  $N$  сторін  $AB$  і  $AC$ :  $B_1, M_1$  і  $N_1$ .

**23.24.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $O$  – точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$ . Знайти кут між прямими:

- 1)  $OB_1$  і  $DD_1$ ;  
2)  $OB_1$  і  $A_1 C_1$ ;  
3)  $B_1 O$  і  $BC$ .

(Відповідь: 1)  $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

2)  $90^\circ$ ; 3)  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{6}$ )

**23.25.** Кут між мимобіжними діагоналями суміжних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнює  $45^\circ$ . Знайти кут між діагоналями цих граней, які виходять з однієї вершини.

(Відповідь:  $45^\circ$ )

Позначення:  $a \perp \alpha$ .

На рис. 23.24 пряма  $a$  перпендикулярна до площини  $\alpha$ .

Ознака перпендикулярності прямої та площини

*Теорема 23.16.* Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини (рис. 23.29):

$$a \perp b, a \perp c, b \subset \alpha, c \subset \alpha \Rightarrow a \perp \alpha.$$

Властивості прямої та площини, які перпендикулярні між собою

*Теорема 23.17.* Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини (рис. 23.30):

$$a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha.$$

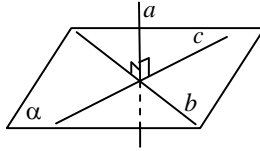


Рис. 23.29.

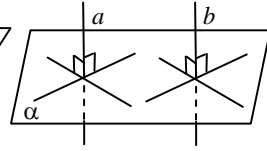


Рис. 23.30.

*Теорема 23.18.* Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні (рис. 23.30):

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b.$$

*Теорема 23.19.* Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої (рис. 23.31):

$$\alpha \parallel \beta, a \perp \alpha \Rightarrow a \perp \beta.$$

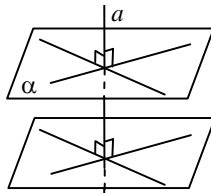


Рис. 23.31.

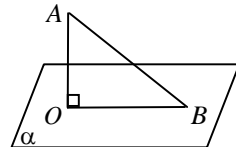


Рис. 23.32.

між прямими  $B_1A$  і  $D_1C$  дорівнює куту між прямими  $C_1D$  і  $D_1C$ .  $C_1D \perp D_1C$ , тому кут між  $B_1A$  і  $D_1C$  дорівнює  $90^\circ$ .

2) Прямі  $A_1D$  і  $D_1C$  мимобіжні. Оскільки  $A_1B \parallel D_1C$ , то за означенням кута між мимобіжними прямими кут між прямими  $A_1D$  і  $D_1C$  дорівнює куту між прямими  $A_1D$  і  $A_1B$ .  $\Delta A_1BD$  – рівносторонній, бо відрізки  $A_1B$ ,  $BD$  і  $A_1D$  – діагоналі рівних квадратів. Отже, кут між прямими  $A_1B$  і  $A_1D$  дорівнює  $60^\circ$ . Кут між прямими  $A_1D$  і  $D_1C$  дорівнює  $60^\circ$ .  
Відповідь: 1)  $90^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ .

**Приклад 23.13.** Точка  $M$  рівновіддалена від вершин трикутника  $ABC$ ,  $MO$  – перпендикуляр до площини трикутника,  $O \in (ABC)$ . Довести, що  $O$  – центр кола, описаного навколо трикутника.

Оскільки  $MO \perp (ABC)$  (рис. 23.28), то за означенням прямої перпендикулярної до площини маємо  $MO \perp OA$ ,  $MO \perp OB$ ,  $MO \perp OC$ .  $\Delta AMO = \Delta BMO = \Delta CMO$  за гіпотенузою та катетом ( $MA = MB = MC$  за умовою,  $MO$  – спільний катет), тому  $OA = OB = OC$ . Отже, точка  $O$  – центр кола описаного навколо  $\Delta ABC$ .

**23.26.** Задано квадрат, точка  $O$  – його центр. Точка  $M$  рівновіддалена від вершин квадрата. Довести, що пряма  $MO$  перпендикулярна до площини квадрата.

**23.27.** Задано квадрат  $ABCD$ , точка  $M$  рівновіддалена від його вершин. Знайти довжину перпендикуляра, проведеного з точки  $M$  до площини квадрата, якщо  $AM = 13$  см,  $AB = 5\sqrt{2}$  см. (Відповідь: 12 см)

**23.28.** З кінців відрізка  $AB$  та точки  $M$ ,  $M \in AB$ , до площини, яка не перетинає відрізок  $AB$ , проведено перпендикуляри  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $MM_1$ . Знайти  $MM_1$ , якщо  $AA_1 = 6$  см,  $BB_1 = 10$  см,  $AM : MB = 1 : 3$ . (Відповідь: 7 см)

**23.29.** З вершин паралелограма  $ABCD$  на площину, яка не перетинає паралелограм, опущено перпендикуляри  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ . Знайти  $DD_1$ , якщо  $AA_1 = 11$  см,  $BB_1 = 22$  см,  $CC_1 = 15$  см. (Відповідь: 4 см)

Перпендикуляр, опущений з даної точки на дану площину

Відрізок прямої, перпендикулярної до даної площини, що сполучає дану точку з точкою площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині називається *основою перпендикуляра*.

Похила, проведена з даної точки до даної площини

Будь-який відрізок, який з'єднує дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називається *основою похилої*.

Проекція похилої

Відрізок, що з'єднує основи перпендикуляра та похилої, які проведені з однієї і тієї самої точки.

На рис. 23.32 з точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведені перпендикуляр  $AO$  і похила  $AB$ ,  $O$  – основа перпендикуляра,  $B$  – основа похилої,  $OB$  – проекція похилої  $AB$  на площину  $\alpha$ .

Співвідношення між похилими, проведеними з однієї точки, та їх проекціями

*Теорема 23.20.* Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до неї перпендикуляр і похилі, то:

- 1) дві похилі, які мають рівні проекції, рівні;
- 2) з двох похилих більшою є та, у якій проекція більша, і навпаки;
- 3) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу.

Теорема про три перпендикуляри

*Теорема 23.21.* Пряма, проведена на площині через основу похилої перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої (рис. 23.35):  $l \perp OB \Leftrightarrow l \perp AB$ .

Кут між площинами, які перетинаються

Кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до лінії їх перетину.

**Приклад 23.14.** З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 13 см і 15 см. Різниця проєкцій цих похилих дорівнює 4 см. Знайти проєкції похилих і відстань від точки до площини.

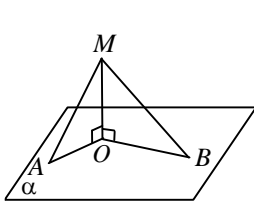


Рис. 23.33.

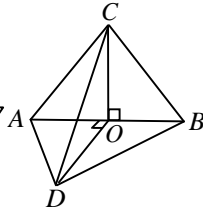


Рис. 23.34.

Нехай  $MA$  і  $MB$  – похилі, проведені з точки  $M$  до площини  $\alpha$ ,  $MO \perp \alpha$  (рис. 23.33). За умовою  $MA = 13$  см,  $MB = 15$  см. Нехай  $AO = x$  см, тоді  $BO = (x + 4)$  см. З  $\triangle AMO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$MO^2 = MA^2 - AO^2 = 13^2 - x^2.$$

З  $\triangle BMO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$MO^2 = MB^2 - BO^2 = 15^2 - (x + 4)^2.$$

Маємо

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (x + 4)^2, \quad x = 5.$$

Отже,  $AO = 5$  (см),  $BO = 9$  (см),

$$MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 5 см, 9 см і 12 см.

**Приклад 23.15.** Два рівносторонні трикутники  $ABC$  і  $ABD$  лежать у різних площинах. Знайти  $CD$ , якщо  $AB = 6$  см і кут між площинами дорівнює: 1)  $90^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ .

На рис. 23.34 зображено задані трикутники. Проведемо  $CO \perp AB$ ,  $DO \perp AB$ ;  $CO$  і  $DO$  – висоти та

**23.30.** Через вершину  $B$  тупого кута ромба  $ABCD$  до площини ромба проведено перпендикуляр  $MB$ . Знайти  $MD$ , якщо різниця діагоналей ромба дорівнює 4 см,

$$AB = 10 \text{ см},$$

$$AM = 2\sqrt{89} \text{ см}.$$

(Відповідь: 20 см)

**23.31.** З точки  $A$  до площини проведені похилі  $AB$  і  $AC$  довжиною 12 см і 18 см. Знайти довжини проєкцій похилих, якщо одна з них на 10 см більше другої. (Відповідь: 4 см, 14 см)

**23.32.** З точки  $A$  до площини  $\alpha$  проведені дві похилі  $AB = AC = 6$  см. Кут між ними дорівнює  $60^\circ$ , а між їх проєкціями –  $90^\circ$ . Знайти відстань від точки  $A$  до площини  $\alpha$ .

$$\text{(Відповідь: } 3\sqrt{2} \text{ см)}$$

**23.33.** Два рівносторонні трикутники  $ABC$  і  $ABD$  лежать у різних площинах. Знайти  $CD$ , якщо  $AB = 8\sqrt{3}$  см і кут між площинами дорівнює: 1)  $90^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ .

Відповідь: 1)  $12\sqrt{2}$  см; 2) 12 см)

Кут між площинами, які перетинаються

Кут між паралельними площинами вважають рівним  $0^\circ$ .

Кут між площинами  $\alpha$  і  $\beta$  позначають так:  $\angle(\alpha\beta)$ .

$$0 \leq \angle(\alpha\beta) \leq 90^\circ.$$

На рис. 23.36  $\alpha \cap \beta = c$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $a \perp c$ ,  $b \subset \beta$ ,  $b \perp c$ ,  $\angle(\alpha\beta) = \angle(ab)$ .

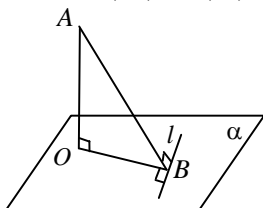


Рис. 23.35.

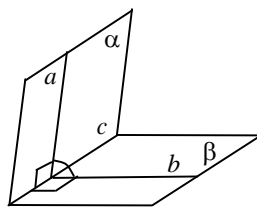


Рис. 23.36.

Перпендикулярні площини

Дві площини, кут між якими дорівнює  $90^\circ$ .

Якщо площини  $\alpha$  і  $\beta$  перпендикулярні, то пишуть:  $\alpha \perp \beta$ .

Ознака перпендикулярності двох площин

*Теорема 23.22.* Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні (рис. 23.37):

$$b \perp \alpha \text{ і } b \subset \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha.$$

Властивість перпендикулярних площин

*Теорема 23.23.* Пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини (рис. 23.37):

$$\beta \perp \alpha, \beta \cap \alpha = a, b \perp a, b \subset \beta \Rightarrow b \perp \alpha.$$

Ортогональне проектування

Паралельне проектування, при якому проєктуючі прямі перпендикулярні до площини проєкцій.

медіани  $\triangle ABC$  та  $\triangle ABD$  відповідно. За означенням кута між двома площинами кут між площинами трикутників  $ABC$  і  $ABD$  є  $\angle COD$ .  $\triangle ABC = \triangle ABD$ ,

тому  $CO = DO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$  (см).

1) З  $\triangle COD$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$CD = \sqrt{CO^2 + DO^2} = 3\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

2) Оскільки  $CO = DO$ ,  $\angle COD = 60^\circ$ , тому  $\triangle COD$  – правильний,  $CO = DO = CD = 3\sqrt{3}$  (см).

Відповідь: 1)  $3\sqrt{6}$  см; 2)  $3\sqrt{3}$  см.

**Приклад 23.16.** Ортогональною проекцією правильного трикутника є рівнобедрений трикутник, основа та бічна сторона якого дорівнюють 12 см і 10 см відповідно. Кут між площинами трикутників дорівнює  $30^\circ$ . Знайти сторону заданого трикутника.

Нехай  $\triangle A_1B_1C_1$  ( $A_1B_1 = B_1C_1$ ) – проекція заданого правильного  $\triangle ABC$ . Використовуючи формулу Герона, знайдемо площу  $\triangle A_1B_1C_1$ :

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

За теоремою 23.24 отримуємо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{\cos 30^\circ} = 32\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки  $\triangle ABC$  правильний, то  $S_{\triangle ABC} = AB^2 \sqrt{3}/4$ .  $AB^2 \sqrt{3}/4 = 32\sqrt{3}$ ,  $AB = 8\sqrt{2}$  (см). Відповідь:  $8\sqrt{2}$  см.

**23.34.** Кінці відрізка  $AB$  лежать у перпендикулярних площинах.  $AC$  і  $BD$  – перпендикуляри проведені до лінії перетину цих площин,  $AC = 5$  см,  $BD = 6$  см,  $\angle DBC = 60^\circ$ . Знайти довжину  $AB$ .

(Відповідь: 13 см)

**23.35.** Площини рівностороннього трикутника  $ABC$  та квадрата  $BCDE$  перпендикулярні. Знайти відстань між їх вершинами  $A$  і  $D$ , якщо висота трикутника  $ABC$  дорівнює 3 см.

(Відповідь:  $2\sqrt{6}$  см)

**23.36.** Ортогональною проекцією правильного трикутника є рівнобедрений трикутник, основа та бічна сторона якого дорівнюють 24 см і 20 см відповідно. Кут між площинами трикутників  $30^\circ$ . Знайти сторону заданого трикутника.

(Відповідь:  $16\sqrt{2}$  см)

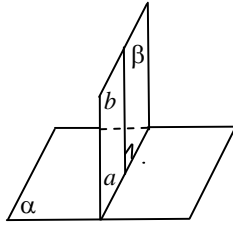


Рис. 23.37.

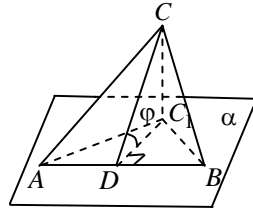


Рис. 23.38.

Площа  
ортогональної  
проекції  
многокутника

*Теорема 23.24.* Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі  $S$  на косинус кута  $\varphi$  між площиною многокутника і площиною проекції:  $S_{np} = S \cdot \cos \varphi$ .

На рис. 23.38  $\triangle ABC_1$  – ортогональна проекція  $\triangle ABC$  на площину  $\alpha$ ,  $\varphi$  – кут між площиною  $\triangle ABC$  і площиною проекції  $\alpha$ .

Проекція прямої на  
площину

Нехай задано площину  $\alpha$  та пряму  $a$ , яка перетинає цю площину. Основи перпендикулярів, опущених з точок прямої  $a$  на площину  $\alpha$ , лежать на прямій  $a_1$  (рис. 23.39). Ця пряма називається *проекцією прямої  $a$  на площину  $\alpha$* .

Кут між прямою і  
площиною

Кут між прямою та її проекцією на площину.

На рис. 23.40  $AO \perp \alpha$ ,  $OB$  – проекція  $AB$  на площину  $\alpha$ ,  $\angle ABO = \varphi$  – кут між прямою  $AB$  і площиною  $\alpha$ .

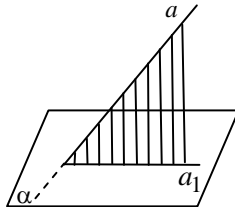


Рис. 23.39.

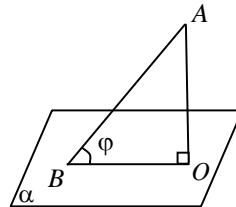


Рис. 23.40.

**Приклад 23.17.** Сторона квадрата  $ABCD$  дорівнює 2 см, точка  $M$  знаходиться на відстані 2 см від кожної з його вершин. Знайти кут між прямою  $MA$  і площиною квадрата.

Проведемо  $MO \perp (ABC)$  (рис. 23.41). Точка  $O$  – проєкція точки  $M$  на площину  $(ABC)$ .

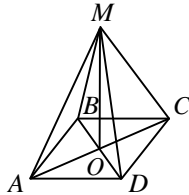


Рис. 23.41.

$\triangle AOM = \triangle BOM = \triangle COM = \triangle DOM$  за катетом та гіпотенузою ( $MA = MB = MC = MD$  за умовою,  $MO$  – спільний катет), тому  $OA = OB = OC = OD$ . Отже, точка  $O$  рівновіддалена від вершин квадрата, тобто є точкою перетину діагоналей квадрата.  $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$  (см).

$$OA = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Оскільки  $MO \perp (ABC)$ ,  $MA$  – похила,  $OA$  – проєкція похилої  $MA$  на площину  $(ABC)$ , то  $\angle MAO$  – шуканий кут. З  $\triangle AOM$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$\cos \angle MAO = \frac{AO}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle MAO = 45^\circ.$$

Відповідь:  $45^\circ$ .

**23.37.** Через гіпотенузу  $AB$  прямокутного  $\triangle ABC$  проведена площина  $\alpha$ , яка утворює з площиною трикутника кут  $30^\circ$ . Відстань від вершини  $C$  до площини  $\alpha$  дорівнює 4 см. Знайти площу трикутника, якщо відомо, що  $\angle A = 60^\circ$ .

(Відповідь:  $128\sqrt{3}/3$  см<sup>2</sup>)

**23.38.** Сторона квадрата  $ABCD$  дорівнює  $4\sqrt{6}$  см, точка  $M$  знаходиться на відстані 8 см від кожної з його вершин. Знайти кут між прямою  $MA$  і площиною квадрата. (Відповідь:  $30^\circ$ )

**23.39.** Через вершину тупого кута ромба  $ABCD$  до його площини проведено перпендикуляр  $DK$ , довжиною 2 см,  $AB = 2$  см,  $\angle A = 60^\circ$ . Знайти:

- кути між площиною ромба та прямими  $AK$ ,  $BK$ ,  $CK$ ;
  - кут між прямою  $AC$  і площиною  $DKB$ .
- (Відповідь: 1)  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ )

Якщо  $\varphi$  – кут між прямою і площиною, то  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .

Кут між паралельними прямою і площиною дорівнює  $0^\circ$ .

Кут між перпендикулярними прямою і площиною дорівнює  $90^\circ$ .

### Двогранний кут

Фігура, утворена двома півплощинами – *гранями двогранного кута*, із спільною прямою, яка їх обмежує – *ребром двогранного кута* (рис. 23.42).

Двогранний кут позначається двома буквами, які позначають дві точки взяті на його ребрі, або чотирма буквами, з яких дві середні – точки взяті на ребрі, а дві крайні – на гранях.

Двогранний кут, зображений на рис. 23.42, позначають так: кут  $AB$  або кут  $MABN$ .

### Лінійний кут двогранного кута

Кут між променями, по яких площина перпендикулярна ребру двогранного кута, перетинає його грані.

Площина лінійного кута перпендикулярна кожній грані двогранного кута.

На рис. 23.42  $\angle CFD$  – лінійний кут двогранного кута  $MABN$ .

Величина двогранного кута дорівнює величині його лінійного кута.

Якщо  $\varphi$  – величина двогранного кута, то  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ .

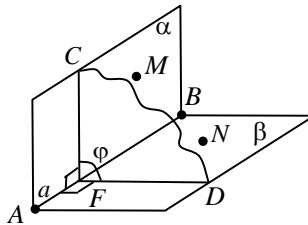


Рис. 23.42.

**Приклад 23.18.** З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у різних гранях двогранного кута, опущені перпендикуляри  $AA_1$  та  $BB_1$  на його ребро,  $AA_1 = 3$  см,  $BB_1 = 5$  см,  $A_1B_1 = \sqrt{17}$  см, двогранний кут дорівнює  $60^\circ$ . Знайти відрізок  $AB$ .

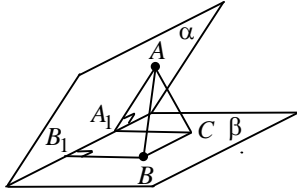


Рис. 23.43.

Проведемо  $A_1C \parallel B_1B$ ,  $BC \parallel A_1B_1$ .  $A_1B_1BC$  – паралелограм (за означенням), тому  $A_1B_1 = BC = \sqrt{17}$  см.  $\angle AA_1C$  – лінійний кут двогранного кута,  $\angle AA_1C = 60^\circ$ .  $A_1B_1 \perp A_1C$ ,  $A_1B_1 \perp AA_1$ . За ознакою перпендикулярності прямої та площини (теорема 23.16)  $A_1B_1 \perp (AA_1C)$ . Оскільки  $BC \parallel A_1B_1$ , то  $BC \perp (AA_1C)$ .  $\triangle ABC$  – прямокутний. З  $\triangle AA_1C$  за теоремою косинусів:

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos 60^\circ = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 19 \text{ (см)}.$$

З  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{19 + 17} = 6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6 см.

**23.40.** З вершини  $C$  прямокутника  $ABCD$  проведено перпендикуляр  $CK$  до його площини,  $AB = 16$  см,  $BC = 12$  см. Пряма  $BK$  утворює з площиною прямокутника кут  $30^\circ$ . Знайти кут між прямою  $AK$  і площиною прямокутника.

(Відповідь:  $\arctg(3\sqrt{3}/5)$ )

**23.41.** З точок  $A$  і  $B$  однієї грані гострого двогранного кута опущено перпендикуляри  $AA_1$  і  $BB_1$  на другу грань і перпендикуляри  $AA_2$  і  $BB_2$  – на ребро. Знайти довжину  $BB_2$ , якщо  $AA_1 = 16$  м,  $AA_2 = 20$  м,  $BB_1 = 5$  м.

(Відповідь: 6,25 м)

**23.42.** З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у різних гранях двогранного кута, опущені перпендикуляри  $AA_1$  та  $BB_1$  на його ребро,  $AA_1 = 4$  см,  $BB_1 = 7$  см,

$$A_1B_1 = 3\sqrt{3} \text{ см,}$$

двогранний кут дорівнює  $60^\circ$ . Знайти відрізок  $AB$ .

(Відповідь: 8 см)

## 24 ПРИЗМА

Многогранник	Геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників.
Грані, ребра та вершини многогранника	Ці многокутники, їх сторони та вершини називаються відповідно <i>гранями</i> , <i>ребрами</i> та <i>вершинами</i> многогранника.
Діагональ многогранника	Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані многогранника.
Опуклий многогранник	Многогранник, який лежить по один бік від кожної з площин, які його обмежують.
Призма	Многогранник, який складається з двох рівних плоских многокутників ( <i>основ</i> ), які лежать у паралельних площинах, та всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих многокутників.
Бічні ребра призми	Відрізки, які сполучають відповідні вершини основ призми.
Бічні грані призми	Грані, відмінні від основ призми.
Висота призми	Відстань між площинами основ.
Діагональ призми	Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані.
Діагональний переріз призми	Переріз призми площиною, що проходить через два бічні ребра, що не належать одній грані.

На рис. 24.3  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  – призма,  $ABCDE$ ,  $A_1B_1C_1D_1E_1$  – основи,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ ,  $EE_1$  – бічні ребра,  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$ ,  $DD_1C_1C$ ,  $EE_1D_1D$ ,  $AA_1E_1E$  –

**Приклад 24.1.** Основою прямої призми є ромб. Діагоналі призми дорівнюють 8 см і 5 см, висота дорівнює 2 см. Знайти сторону основи.

Нехай  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – задана пряма призма,  $ABCD$  – ромб,  $CA_1$ ,  $DB_1$  – діагоналі призми,  $AA_1$  – висота (рис. 24.1),  $CA_1 = 8$  см,  $DB_1 = 5$  см,  $AA_1 = 2$  см.

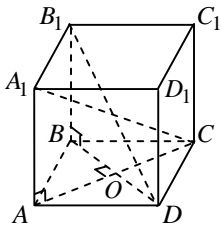


Рис. 24.1.

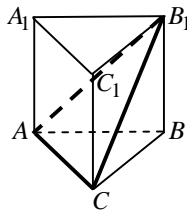


Рис. 24.2.

З  $\triangle AA_1 C$  ( $\angle A = 90^\circ$ ):

$$AC = \sqrt{CA_1^2 - AA_1^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} =$$

$$= 2\sqrt{15} \text{ (см). З } \triangle BB_1 D \text{ } (\angle B = 90^\circ):$$

$$BD = \sqrt{DB_1^2 - BB_1^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} =$$

$= \sqrt{21}$  (см). За властивістю діагоналей ромба  $\angle AOB = 90^\circ$ ,

$$AO = \frac{1}{2} AC = \sqrt{15} \text{ (см),}$$

$$BO = \frac{1}{2} BD = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (см).}$$

З  $\triangle AOB$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{15})^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2} = 4,5 \text{ (см).}$$

Відповідь: 4,5 см.

**24.1.** Основою прямої призми є правильний трикутник. Площа бічної грані призми дорівнює  $56 \text{ см}^2$ , а периметр основи – 21 см. Знайти бічне ребро призми. (Відповідь: 8 см)

**24.2.** У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, висота призми – 18 см. Знайти площу перерізу, який проходить через бічне ребро і меншу висоту основи.

(Відповідь:  $144 \text{ см}^2$ )

**24.3.** Основою прямої призми є ромб. Діагоналі призми дорівнюють 13 см і 20 см, висота дорівнює 12 см. Знайти сторону основи.

(Відповідь:  $\frac{\sqrt{281}}{2}$  см)

**24.4.** Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює  $50 \text{ см}^2$ , а висота – 24 см. Знайти діагональ призми та площу діагонального перерізу.

(Відповідь: 26 см,

$240 \text{ см}^2$ )

бічні грані,  $A_1D$  – діагональ,  $AA_1D_1D$  – діагональний переріз,  $OO_1$  – висота.

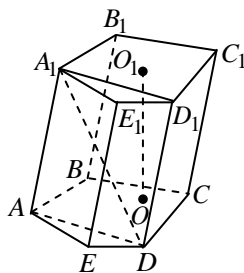


Рис. 24.3.

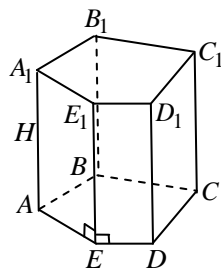


Рис. 24.4.

$n$ - кутна призма	Призма, в основі якої лежить $n$ - кутник.
Пряма призма	Призма, у якої бічні ребра перпендикулярні до площини основи (рис. 24.4).
Властивості прямої призми	Висота прямої призми дорівнює бічному ребру. Усі бічні грані прямої призми прямокутники.
Правильна призма	Пряма призма, основою якої є правильний багатокутник. Усі бічні грані правильної призми – рівні прямокутники.
Площа бічної поверхні прямої призми	$S_{\sigma} = P_o \cdot H$ ,
Площа повної поверхні прямої призми	$S_n = S_{\sigma} + 2S_o$ ,
Об'єм прямої призми	$V = S_o \cdot H$ ,
	де $H$ – висота, $P_o$ – периметр основи, $S_o$ – площа основи.
Похила призма	Призма, у якої бічні ребра не перпендикулярні до площини основи (рис. 24.5).

**Приклад 24.2.** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а висота призми – 6 см. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи та протилежну вершину верхньої основи.

Нехай  $ABCA_1B_1C_1$  – задана правильна трикутна призма, у якій  $AB=12$  см,  $AA_1=6$  см.  $\triangle AB_1C$  – переріз, площу якого треба знайти (рис. 24.2). Оскільки  $AB=BC$ , то прямокутники  $AA_1B_1B$  і  $CC_1B_1B$  рівні, тому вони мають рівні діагоналі  $AB_1=CB_1$ . З  $\triangle CB_1B$  ( $\angle B=90^\circ$ ):

$$\begin{aligned} CB_1 &= \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \\ &= \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5} \text{ (см)}. \end{aligned}$$

Отже, в  $\triangle AB_1C$   $AB_1=CB_1=6\sqrt{5}$  (см). За формулою Герона знаходимо площу перерізу:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AB_1C} &= \sqrt{(6\sqrt{5} + 6) \cdot (6\sqrt{5} - 6) \cdot 6 \cdot 6} = \\ &= 72 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Відповідь: } 72 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

**Приклад 24.3.** В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину дорівнюють 8 см і утворюють між собою кут  $60^\circ$ . Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом  $15^\circ$ . Знайти об'єм призми.

Нехай  $ABCA_1B_1C_1$  – задана пряма призма,  $\triangle ABC$  – рівнобедрений ( $AB=BC$ ) (рис. 24.7).

**24.5.** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 16 см, а висота призми – 12 см. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи та протилежну вершину верхньої основи.

(Відповідь:  $32\sqrt{21}$  см<sup>2</sup>)

**24.6.** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює  $a$ . Діагональ призми нахилена до площини бічної грані під кутом  $30^\circ$ . Знайти висоту призми та кут нахилу діагоналі призми до площини основи.

(Відповідь:  $a\sqrt{2}$ ,  $45^\circ$ )

**24.7.** Сторона основи призми дорівнює  $a$ , а бічне ребро  $b$ . Знайти повну поверхню та об'єм правильної призми:

- трикутної;
- чотирикутної;
- шестикутної.

(Відповідь:

а)  $3ab + a^2\sqrt{3}/2$ ,  $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$ ;

б)  $4ab + 2a^2$ ,  $a^2b$ ;

в)  $6ab + 3\sqrt{3}a^2$ ,  $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$ .)

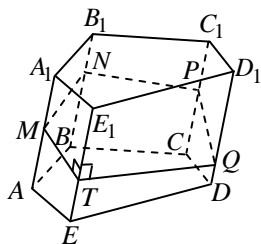


Рис. 24.5.

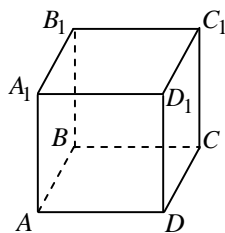


Рис. 24.6.

Перпендикулярний переріз

Многокутник, площина якого перпендикулярна до бічних ребер призми, а вершини лежать на прямих, що проходять через бічні ребра.

На рис. 24.5 п'ятикутник  $MNPQT$  – перпендикулярний переріз призми  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ .

Площа бічної поверхні похилої призми

$$S_{\sigma} = P_{nep} \cdot l,$$

Площа повної поверхні похилої призми

$$S_n = S_{\sigma} + 2S_o,$$

Об'єм похилої призми

$$V = S_{nep} \cdot l = S_o \cdot H,$$

де  $l$  – бічне ребро,  $H$  – висота,  $P_{nep}$  – периметр перпендикулярного перерізу,  $P_o$  – периметр основи,  $S_o$  – площа основи,  $S_{nep}$  – площа перпендикулярного перерізу.

Паралелепіпед

Призма, в основі якої лежить паралелограм.

Властивості паралелепіпеда

У паралелепіпеда всі грані – паралелограми. У паралелепіпеда протилежні грані паралельні та рівні. Усі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

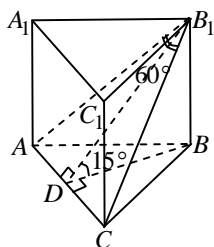


Рис. 24.7.

За умовою  $AB_1 = CB_1 = 8$  см,  $\angle AB_1C = 60^\circ$ . З точки  $B_1$  проведемо перпендикуляр  $B_1D$  до сторони  $AC$ , тоді за теоремою 23.21  $BD \perp AC$ . Тому  $\angle B_1DB$  – лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами  $AB_1C$  та  $ABC$ . За умовою  $\angle B_1DB = 15^\circ$ . Висота  $B_1D$  рівнобедреного  $\triangle AB_1C$  є його бісектрисою та медіаною, Тому  $\angle AB_1D = 30^\circ$ ,  $AD = DC$ . З  $\triangle AB_1D$  ( $\angle D = 90^\circ$ ):

$$B_1D = AB_1 \cdot \cos \angle AB_1D = 8 \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (см)}, AD = \frac{1}{2} AB_1 = 4 \text{ (см)}.$$

З  $\triangle DB_1B$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):

$$BB_1 = B_1D \cdot \sin 15^\circ = 4\sqrt{3} \sin 15^\circ.$$

$$BD = B_1D \cdot \cos 15^\circ = 4\sqrt{3} \cos 15^\circ.$$

$$S_o = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 16\sqrt{3} \cos 15^\circ \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$V = S_o \cdot BB_1 = 16\sqrt{3} \cos 15^\circ \cdot 4\sqrt{3} \sin 15^\circ = 48 \text{ см}^3.$$

Відповідь:  $48 \text{ см}^3$ .

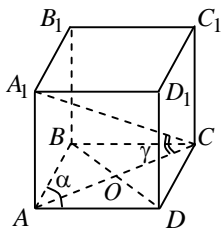


Рис. 24.8.

**24.8.** Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см та 14 см і кутом між ними  $30^\circ$ . Висота призми – 15 см. Знайти об'єм призми. (Відповідь:  $945 \text{ см}^3$ )

**24.9.** В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину дорівнюють 12 см і утворюють між собою кут  $60^\circ$ . Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом  $15^\circ$ . Знайти об'єм призми. (Відповідь:  $162 \text{ см}^3$ )

**24.10.** У похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний бічним ребрам, який перетинає всі бічні ребра. Знайти бічну поверхню призми, якщо периметр перерізу дорівнює 24 см, а бічні ребра дорівнюють 6 см. (Відповідь:  $144 \text{ см}^2$ )

Прямий паралелепіпед

Паралелепіпед, у якого бічні ребра перпендикулярні до площин основ (рис. 24.6).

Похилий паралелепіпед

Паралелепіпед, у якого бічні ребра не перпендикулярні площинам основ (24.9).

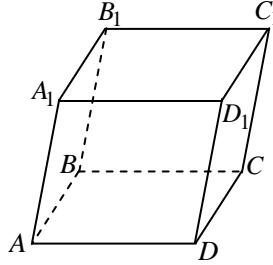


Рис. 24.9.

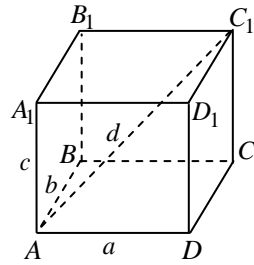


Рис. 24.10.

Прямокутний паралелепіпед

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник (рис. 24.10).

Виміри прямокутного паралелепіпеда  
Властивості прямокутного паралелепіпеда

Три ребра, що виходять з однієї вершини прямокутного паралелепіпеда.

У прямокутного паралелепіпеда всі грані – прямокутники.

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів (рис. 24.10):  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

Площа бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда  
Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда  
Об'єм прямокутного паралелепіпеда

$$S_{\delta} = 2(a+b)c,$$

$$S_n = 2(ac + bc + ab),$$

$$V = abc,$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – виміри прямокутного паралелепіпеда.

**Приклад 24.4.** Основою прямого паралелепіпеда є ромб із стороною  $a$  і гострим кутом  $\alpha$ . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $\gamma$ . Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

Нехай  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – заданий прямий паралелепіпед,  $ABCD$  – ромб,  $AC$  – більша діагональ ромба  $ABCD$ , тому  $A_1 C$  – більша діагональ паралелепіпеда (рис. 24.8).  $AC$  – проекція діагоналі  $A_1 C$  на площину основи, тому  $\angle CA A_1 = \gamma$ .

З  $\triangle AOB$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$AO = AB \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$AC = 2AO = 2a \cos \frac{\alpha}{2}.$$

З  $\triangle A_1 AC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ):

$$A_1 A = AC \cdot \operatorname{tg} \gamma = 2a \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Знаходимо площу повної поверхні паралелепіпеда:

$$S_{\bar{o}} = 4AB \cdot A_1 A = 8a^2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \gamma,$$

$$\begin{aligned} S_n &= S_{\bar{o}} + 2S_o = \\ &= 8a^2 \cos(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg} \gamma + 2a^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Відповідь:  $2a^2(4 \cos(\alpha/2) \cdot \operatorname{tg} \gamma + \sin \alpha)$ .

**Приклад 24.5.** Основа похилого паралелепіпеда – квадрат зі стороною  $a$ . Вершина  $A_1$  верхньої основи проектується в центр нижньої основи. Висота паралелепіпеда дорівнює  $H$ . Знайти бічну поверхню паралелепіпеда.

**24.11.** У прямому паралелепіпеді сторони основи 3 см і 5 см, а одна з діагоналей основи – 4 см. Знайти більшу діагональ паралелепіпеда, якщо менша діагональ утворює з площиною основи кут  $60^\circ$ . (Відповідь: 10 см)

**24.12.** Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 5 м, сторони основи рівні 6 м і 8 м, а одна з діагоналей основи – 12 м. Знайти діагоналі паралелепіпеда. (Відповідь: 13 м, 9 м)

**24.13.** У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 6 м і 8 м та утворюють кут  $30^\circ$ , а бічне ребро – 5 м. Знайти повну поверхню цього паралелепіпеда.

(Відповідь:  $188 \text{ м}^2$ )

**24.14.** Основою прямого паралелепіпеда є ромб із стороною 6 см і гострим кутом  $60^\circ$ . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

(Відповідь:  $36(4 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$ )



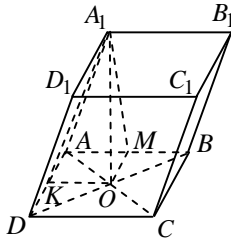


Рис. 24.12.

Нехай  $ABCA_1B_1C_1D_1$  – заданий похилий паралелепіпед, основою якого є квадрат  $ABCD$ ,  $AB = a$ ,  $O$  – центр цього квадрата,  $A_1O = H$  – висота паралелепіпеда (рис. 24.12). Проведемо  $OK \perp AD$ ,  $OM \perp AB$ . Тоді за теоремою 23.21

$$A_1K \perp AD,$$

$A_1M \perp AB$ , тобто  $A_1K$ ,  $A_1M$  – висоти бічних граней  $ADD_1A_1$  та  $ABB_1A_1$  відповідно. Прямокутні трикутники  $A_1OK$  та  $A_1OM$  рівні за двома катетами ( $A_1O$  – спільний катет і

$$OK = OM = \frac{a}{2}), \text{ звідки } A_1K = A_1M.$$

Оскільки,  $AD = AB$ , то  $S_{ADD_1A_1} = S_{ABB_1A_1}$ ,  $S_{\sigma} = 4S_{ABB_1A_1}$ .

З  $\Delta A_1OM$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$A_1M = \sqrt{A_1O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{4H^2 + a^2}}{2}.$$

$$\text{Отже, } S_{ABB_1A_1} = \frac{a\sqrt{4H^2 + a^2}}{2},$$

$$S_{\sigma} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}.$$

Відповідь:  $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$ .

**24.15.** Основа похилого паралелепіпеда – квадрат зі стороною 5 см. Вершина  $A_1$  верхньої основи проектується в центр нижньої. Висота паралелепіпеда дорівнює 6 см. Знайти бічну поверхню паралелепіпеда.

(Відповідь:  $130 \text{ см}^2$ )

**24.16.** Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 м і 4 м. Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5 м, а інша – 7 м. Знайти об'єм паралелепіпеда.

(Відповідь:  $36 \text{ м}^3$ )

**24.17.** Менша сторона основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює  $3\sqrt{3}$  см, діагональ більшої бічної грані дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайти об'єм паралелепіпеда.

(Відповідь:  $144 \text{ см}^2$ )

**24.18.** Три мідних куба з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавили в один куб. Знайти довжину ребра утвореного куба.

(Відповідь: 6 см)

## 25 ПІРАМІДА

Піраміда	Многогранник, який складається з плоского многокутника – <i>основи піраміди</i> , точки, що не лежить у площині основи, – <i>вершини піраміди</i> , та всіх відрізків, які з'єднують вершину піраміди з точками основи.
Бічні грані	Грані піраміди, відмінні від основи.
Бічні ребра піраміди	Ребра, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи.
Висота піраміди	Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди на площину основи.
Діагональний переріз	Переріз піраміди площиною, що проходить через вершину і діагональ основи.

На рис. 25.1 зображено піраміду  $SABCDE$ , у якої  $\triangle ASB$ ,  $\triangle BSC$ ,  $\triangle CSCD$ ,  $\triangle DSE$ ,  $\triangle ESA$  – бічні грані;  $S$  – вершина піраміди;  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$ ,  $SE$  – бічні ребра;  $SO = H$  – висота піраміди,  $\triangle ASC$  – діагональний переріз.

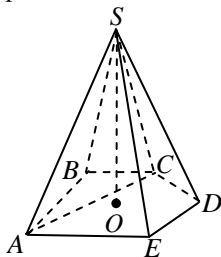


Рис. 25.1.

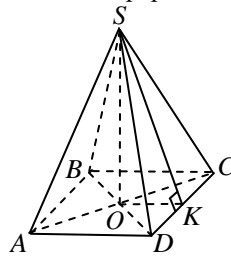


Рис. 25.2.

$n$ -кутна піраміда	Піраміда, основою якої є $n$ -кутник.
Тетраедр	Трикутна піраміда.

**Приклад 25.1.** Основою піраміди є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 см і 7 см, а одна з діагоналей – 6 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 4 см. Знайти бічні ребра піраміди.

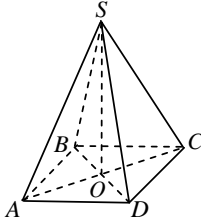


Рис. 25.3.

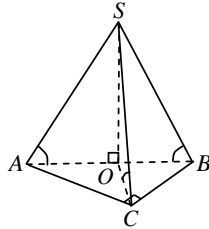


Рис. 25.4.

Нехай  $SABCD$  – задана піраміда,  $ABCD$  – паралелограм,  $SO$  – висота,  $AB = 3$  см,  $BC = 7$  см,  $BD = 6$  см,  $SO = 4$  см (рис. 25.3). Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то

$$BO = \frac{1}{2} BD = 3 \text{ см. З } \triangle BOS (\angle O = 90^\circ):$$

$$SB = \sqrt{BO^2 + SO^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см).}$$

$\triangle SBO = \triangle SDO$  (за двома катетами), тому  $SD = SB = 5$  (см). Знайдемо  $AC$ :

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2),$$

$$AC^2 + 36 = 2(9 + 49), \quad AC = 4\sqrt{5} \text{ (см).}$$

$$AO = \frac{1}{2} AC = 2\sqrt{5} \text{ (см).}$$

З  $\triangle SAO (\angle O = 90^\circ)$ :

$$SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6 \text{ (см)}$$

$\triangle SAO = \triangle SCO$  (за двома катетами), тому  $SC = SA = 6$  (см). Відповідь: 5 см, 5 см, 6 см, 6 см.

**25.1.** Основою піраміди є паралелограм, сторони якого дорівнюють

$\sqrt{142}$  см і 14 см, а одна з діагоналей – 10 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і дорівнює 12 см. Знайти бічні ребра піраміди.

(Відповідь: 13 см,

$$12\sqrt{2} \text{ см})$$

**25.2.** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює  $5\sqrt{3}$  см. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $60^\circ$ . Знайти сторону основи піраміди.

(Відповідь: 10 см)

**25.3.** У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює  $12\sqrt{3}$  см, а висота – 5 см. Знайти:

а) довжину бічного ребра та кут його нахилу до площини основи;

б) двогранний кут між площиною бічної грані та основою.

(Відповідь: а) 13 см,

$$\arctg\left(\frac{5}{12}\right); \text{ б) } \arctg\left(\frac{5}{6}\right)$$

Правильна піраміда Піраміда, основа якої – правильний багатокутник, а основа висоти співпадає з центром цього багатокутника.

Апофема Висота бічної грані правильної піраміди.  
 На рис. 25.2  $SABCD$  – правильна чотирикутна піраміда,  $SK$  – апофема.

Положення висоти в деяких видах пірамід

1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні або утворюють однакові кути з площиною основи, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо її основи (рис. 25.5).
2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом або всі висоти бічних граней рівні, то висота піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу (рис. 25.6).

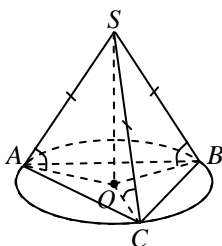


Рис. 25.5.

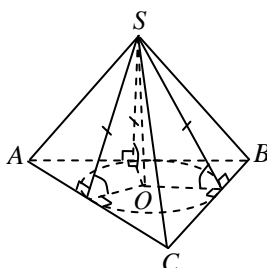


Рис. 25.6.

3. Якщо тільки одна бічна грань перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди є висота цієї бічної грані (рис. 25.7).

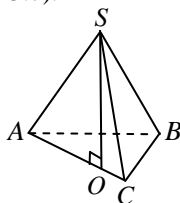


Рис. 25.7.

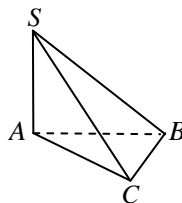


Рис. 25.8.

**Приклад 25.2.** В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотезою  $a$ . Кожне бічне ребро утворює кут  $\beta$  з площиною основи. Знайти висоту піраміди.

Нехай  $SABC$  – задана піраміда,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = a$ . Оскільки всі бічні ребра піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи. У прямокутному трикутнику – це середина гіпотенузи. Отже, точка  $O$  – середина гіпотенузи  $AB$  та основа висоти піраміди  $SO$  (рис. 25.4),  $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$ .

З  $\triangle ASO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$SO = AO \operatorname{tg} \beta = (a \operatorname{tg} \beta) / 2.$$

Відповідь:  $(a \operatorname{tg} \beta) / 2$ .

**Приклад 25.3.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник  $ABC$ , у якого  $BC = a$ ,  $AB = AC = b$  (рис. 25.10). Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $\gamma$  і висота проходить усередині піраміди. Знайти висоту і площу повної поверхні піраміди.

Нехай  $SABC$  – задана піраміда,  $SO$  – висота (рис. 25.10). Оскільки всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в  $\triangle ABC$ . Нехай  $D$  – середина ребра  $BC$ ,  $AD$  – висота  $\triangle ABC$ , тоді  $OD = r$  – радіус кола, вписаного в  $\triangle ABC$ .

**25.4.** За даною стороною основи  $a$  і бічним ребром  $b$ . Знайти висоту правильної піраміди:

- а) трикутної;
- б) чотирикутної;
- в) шестикутної.

(Відповідь: а)  $\sqrt{b^2 - a^2} / 3$  ;

б)  $\sqrt{b^2 - a^2} / 2$  ;

в)  $\sqrt{b^2 - a^2}$  )

**25.5.** За даною стороною основи  $a$  і висотою  $h$  знайти апофему правильної піраміди:

- а) трикутної;
- б) чотирикутної;
- в) шестикутної.

(Відповідь:

а)  $\sqrt{h^2 + a^2} / 12$  ;

б)  $\sqrt{h^2 + a^2} / 4$  ;

в)  $\sqrt{h^2 + 3a^2} / 4$  )

**25.6.** В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотезою  $4\sqrt{3}$  см. Кожне бічне ребро утворює кут  $60^\circ$  з площиною основи. Знайти висоту піраміди.

(Відповідь: 6 см)

Положення висоти в деяких видах пірамід

4. Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде їх спільне ребро (рис. 25.8).

5. Якщо дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде відрізок прямої, по якому перетинаються площини цих граней (рис. 25.9).

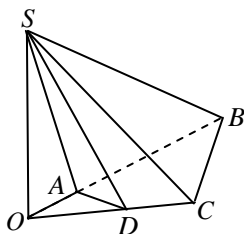


Рис. 25.9.

Площа бічної поверхні піраміди

Площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди

$$S_{\sigma} = \frac{1}{2} P_o \cdot l,$$

де  $P_o$  – периметр основи,  $l$  – апофема.

$$S_{\sigma} = \frac{nb^2 \sin \alpha}{2},$$

де  $n$  – число сторін основи,  $b$  – бічне ребро,  $\alpha$  – плоский кут при вершині піраміди.

Площа бічної поверхні піраміди, всі бічні грані якої нахилені під однаковими кутами до площини основи

*Теорема 25.1.* Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом  $\varphi$  (рис. 25.6), то

$$S_{\sigma} = \frac{S_o}{\cos \varphi},$$

де  $S_o$  – площа основи піраміди,  $\varphi$  – кут нахилу бічних граней до основи.

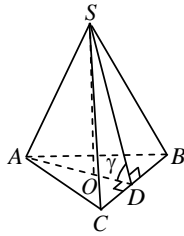


Рис. 25.10.

Знайдемо  $OD$  :

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 - a^2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{4},$$

$$OD = r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}.$$

Оскільки  $AD \perp BC$ , то за теоремою 23.21  $SD \perp BC$ . Отже,  $\angle SDO$  – лінійний кут двогранного кута  $BC$ . За умовою  $\angle SDO = \gamma$ .

З  $\Delta SDO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$SO = DO \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} \operatorname{tg} \gamma.$$

За теоремою 25.1 маємо:  $S_{\sigma} = \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos \gamma}$ .

Отже,  $S_n = S_{\Delta ABC} + \frac{S_{\Delta ABC}}{\cos \gamma} =$

$$= \frac{a(1 + \cos \gamma) \sqrt{4b^2 - a^2}}{4 \cos \gamma}.$$

Відповідь:  $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}} \operatorname{tg} \gamma$ ;

$$\frac{a(1 + \cos \gamma) \sqrt{4b^2 - a^2}}{4 \cos \gamma}.$$

**25.7.** Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см; бічні ребра рівні, а довжина кожного з них дорівнює 9 см. Знайти висоту піраміди.

(Відповідь:  $\frac{18\sqrt{5}}{5}$  см)

**25.8.** Основою піраміди є ромб з гострим кутом  $\alpha$  і радіусом вписаного кола  $r$ . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють  $\beta$ . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

(Відповідь:  $\frac{4r^2}{\sin \alpha \cos \beta}$ )

**25.9.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник  $ABC$ , у якого  $BC = 12$  см,  $AB = AC = 10$  см. Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом  $60^\circ$ , а висота проходить усередині піраміди. Знайти висоту та площу повної поверхні піраміди.

(Відповідь:  $3\sqrt{3}$  см,

$96$  см<sup>2</sup>)

Площа повної  
поверхні піраміди

$$S_n = S_{\sigma} + S_o,$$

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3} S_o H,$$

де  $S_o$  – площа основи піраміди,  $H$  – висота піраміди.

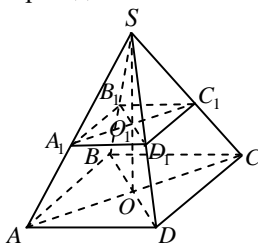


Рис. 25.11.

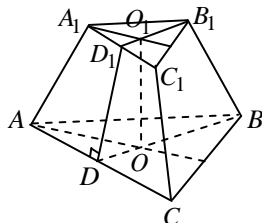


Рис. 25.12.

Зрізана піраміда

Частина піраміди, що лежить між основою та паралельним основі перерізом (рис. 25.11).

Елементи зрізаної  
піраміди

Паралельні грані зрізаної піраміди називають *основами*, а всі інші грані – *бічними гранями*. Бічні грані зрізаної піраміди – трапеції. Основи зрізаної піраміди – подібні багатокутники.

Висота зрізаної  
піраміди  
Правильна зрізана  
піраміда

Спільний перпендикуляр до площин її основ.  
Зрізана піраміда, яка є частиною правильної піраміди.

Апофема правильної зрізаної  
піраміди

Частина апофема повної піраміди, обмежена площинами основ зрізаної піраміди, тобто відрізок, що сполучає середини паралельних сторін бічної грані.  
На рис. 25.12 зображено зрізану трикутну піраміду  $ABCA_1B_1C_1$ . Трапеції  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$ ,  $AA_1C_1C$  – бічні грані,  $\triangle ABC$  та  $\triangle A_1B_1C_1$  – нижня та верхня основи,  $OO_1$  – висота,  $DD_1$  – апофема.

**Приклад 25.4.** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут  $60^\circ$ . Знайти об'єм даної зрізаної піраміди.

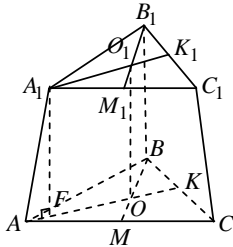


Рис. 25.13.

Нехай  $ABC A_1 B_1 C_1$  – задана правильна трикутна зрізана піраміда,  $\triangle ABC$  – нижня основа,  $\triangle A_1 B_1 C_1$  – верхня основа,  $AB=12$  см,  $A_1 B_1 = 8$  см (рис. 25.13). Проведемо медіани  $AK$  і  $BM$   $\triangle ABC$ ,  $AK \cap BM = O$ . Аналогічно проведемо медіани  $A_1 K_1$  і  $B_1 M_1$   $\triangle A_1 B_1 C_1$ ,  $A_1 K_1 \cap B_1 M_1 = O_1$ . Тоді  $OO_1$  висота піраміди,  $OO_1 \perp (ABC)$ . Проведемо в площині  $A_1 AK$  висоту піраміди  $A_1 F$ ,  $A_1 F \perp AK$ , тому  $A_1 F \perp (ABC)$ ,  $A_1 A$  – похила,  $AF$  – її проекція на  $(ABC)$ , тому  $\angle A_1 A F = 60^\circ$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = \frac{A_1 B_1^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Точки  $O$  і  $O_1$  – центри кіл описаних навколо  $\triangle ABC$  і  $\triangle A_1 B_1 C_1$  відповідно.

**25.10.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною  $a$  і кутом  $\alpha$  при вершині. Бічна грань, що містить основу цього трикутника, перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом  $\beta$ . Знайти об'єм піраміди.

(Відповідь:  $\frac{a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{12}$ )

**25.11.** Основа піраміди – ромб з гострим кутом  $45^\circ$ . Дві бічні грані, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом  $30^\circ$ , а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює  $4\sqrt{6}$  см. Знайти об'єм піраміди.

(Відповідь:  $2048 \text{ см}^3$ )

**25.12.** Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 4 см, сторони основ дорівнюють 2 см і 8 см. Знайти площі діагональних перерізів.

(Відповідь:  $20\sqrt{2} \text{ см}^2$ )

Площа  
поверхні  
піраміди

бічної  
зрізаної

$$S_{\text{б}} = \frac{(P_1 + P_2)l}{2},$$

де  $P_1, P_2$  – периметри основ,  $l$  – апофема зрізаної піраміди.

Об'єм  
піраміди

зрізаної

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)H,$$

де  $S_1, S_2$  – площі основ,  $H$  – висота зрізаної піраміди.

Знайдемо радіуси цих кіл:

$$R_1 = AO = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$R_2 = A_1O_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}.$$

Оскільки  $A_1F \parallel OO_1$  і  $A_1F = OO_1$ , то

$$A_1O_1 = FO. AF = AO - FO = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}.$$

З  $\triangle AFA_1$  ( $\angle F = 90^\circ$ ):

$$A_1F = AF \operatorname{tg} \angle A_1AF = \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} 60^\circ = 4 \text{ (см)}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } V &= \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) H = \\ &= \frac{1}{3} \left( 36\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + \sqrt{36\sqrt{3} \cdot 16\sqrt{3}} \right) \cdot 4 = \\ &= \frac{304\sqrt{3}}{3} \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{304\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2.$$

**25.13.** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди 2 см і 6 см. Бічна грань утворює з більшою основою кут  $60^\circ$ . Знайти висоту зрізаної піраміди. (Відповідь: 2 см)

**25.14.** Діагоналі основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 2 см, а двогранний кут при ребрі більшої основи –  $60^\circ$ . Знайти площу бічної поверхні зрізаної піраміди. (Відповідь: 32 см<sup>2</sup>)

**25.15.** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 12 см і 18 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут  $60^\circ$ . Знайти об'єм даної зрізаної піраміди. (Відповідь:  $342\sqrt{3}$  см<sup>3</sup>)

**25.16.** Знайти об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 4 см і 8 см, а діагональ – 11 см.

$$\text{(Відповідь: } \frac{784}{3} \text{ см}^3\text{)}$$

## 26 ЦИЛІНДР

Циліндр (круговий циліндр)

Тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині та суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів. Круги називаються *основами* циліндра.

Циліндр як тіло обертання

Тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо його сторони як осі. На рис. 26.1 показано прямий круговий циліндр, який отримали внаслідок обертання прямокутника  $AA_1O_1O$  навколо сторони  $OO_1$ .

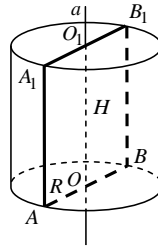


Рис. 26.1.

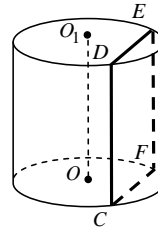


Рис. 26.2.

Радіус циліндра

Радіус круга основи циліндра.

Твірні циліндра

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ.

Висота циліндра

Відстань між площинами основ циліндра.

Вісь циліндра

Пряма, яка проходить через центри основ циліндра.

Осьовий переріз циліндра

Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь. Усі осьові перерізи циліндра – рівні прямокутники.

Властивості циліндра

Основи циліндра рівні та паралельні.  
Твірні циліндра рівні та паралельні.  
Висота циліндра дорівнює твірній.

**Приклад 26.1.** Висота циліндра дорівнює  $h$ , радіус основи  $R$ . Знайти площу перерізу циліндра площиною, яка проведена паралельно його осі на відстані  $a$  від неї.

Перерізом циліндра площиною, паралельною до його осі  $OO_1$ , є прямокутник  $AA_1B_1B$  (рис. 26.3).

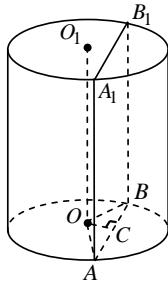


Рис. 26.3.

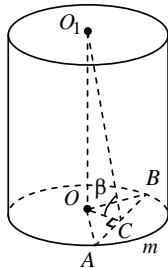


Рис. 26.4.

Сторона  $AA_1$  цього прямокутника дорівнює висоті циліндра  $h$ . Проведемо  $OC \perp AB$ , тоді  $OC$  – відстань від осі циліндра до площини перерізу. За умовою  $OC = a$ . З  $\triangle OCB$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):

$$BC = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Оскільки  $\triangle AOB$  рівнобедрений ( $OA = OB = R$ ), то  $OC$  – висота та медіана, тому  $AC = BC$ .

$$AB = 2BC = 2\sqrt{R^2 - a^2}.$$

Площа перерізу:

$$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = 2h\sqrt{R^2 - a^2}$$

Відповідь:  $2h\sqrt{R^2 - a^2}$ .

**26.1.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює  $d$  і утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайти радіус циліндра.

(Відповідь:  $\frac{d \cos \alpha}{2}$ )

**26.2.** Висота циліндра дорівнює 6 см, радіус основи – 5 см. Знайти площу перерізу, проведеного паралельно до осі циліндра на відстані 4 см від неї.

(Відповідь:  $36 \text{ см}^2$ )

**26.3.** Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу  $90^\circ$ . Висота циліндра дорівнює 6 см. Знайти відстань від осі циліндра до цього перерізу.

(Відповідь: 3 см)

**26.4.** У циліндрі проведено два перерізи  $ABCD$  і  $ABEF$ , де  $AB$  – твірна циліндра. Площа кожного з цих перерізів дорівнює половині площі осьового перерізу. Знайти кут між площинами  $(ABC)$  і  $(ABE)$ .

(Відповідь:  $120^\circ$ )

На рис. 26.1 пряма  $a$  – вісь симетрії циліндра,  $H = OO_1$  – висота,  $AA_1$  – твірна,  $OA$ ,  $O_1A_1$  – радіуси нижньої та верхньої основ відповідно, прямокутник  $AA_1B_1B$  – осьовий переріз.

Рівносторонній циліндр

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі

Переріз циліндра площиною, паралельною його основам

Циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат.

Прямокутник, у якого дві сторони – твірні циліндра, а інші дві – паралельні хорди основ (рис. 26.2).

Круг, який дорівнює основам циліндра (рис. 26.5).

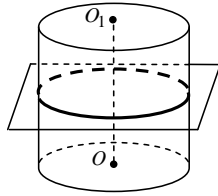


Рис. 26.5.

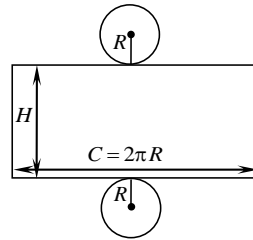


Рис. 26.6.

Дотична площина до циліндра

Площина, яка містить твірну циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу, який проходить через цю твірну.

Розгортка бічної поверхні циліндра

Прямокутник зі сторонами  $H$  і  $C$ , де  $H$  – висота циліндра,  $C = 2\pi R$  – довжина кола основи (рис. 26.6).

Площа бічної поверхні циліндра

$$S_{\delta} = 2\pi RH,$$

Площа повної поверхні циліндра

$$S_n = S_{\delta} + 2S_o = 2\pi R(R + H),$$

Об'єм циліндра

$$V = \pi R^2 H,$$

де  $R$  – радіус циліндра,  $H$  – висота циліндра,  $S_o$  – площа основи циліндра.

**Приклад 26.2.** В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу  $2\alpha$ . Відрізок, який сполучає центр іншої основи з серединою цієї хорди, дорівнює  $a$  і утворює з площиною основи кут  $\beta$ . Знайти площу бічної поверхні та об'єм циліндра.

Нехай у циліндрі з віссю  $OO_1$ :  $AB$  – задана хорда,  $\cup AmB = 2\alpha$ , точка  $C$  – середина хорди  $AB$ ,  $O_1C = a$  (рис. 26.4).  $OC$  – проекція похилої  $O_1C$  на площину основи, тому  $\angle O_1CO = \beta$ . З  $\triangle O_1OC$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $OO_1 = a \sin \beta$ ,  $OC = a \cos \beta$ . Оскільки  $\triangle AOB$  рівнобедрений ( $OA = OB$  як радіуси), то медіана  $OC$  – висота та бісектриса, тому  $\angle OCA = 90^\circ$ ,  $\angle AOC = \alpha$ . З  $\triangle OCA$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):

$$R = OA = \frac{OC}{\cos \angle AOC} = \frac{a \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Знаходимо площу бічної поверхні циліндра:

$$S_{\text{б}} = 2\pi RH = \frac{\pi a^2 \sin 2\beta}{\cos \alpha}.$$

Знаходимо об'єм циліндра:

$$V = \pi R^2 H = \frac{\pi a^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi a^2 \sin 2\beta}{\cos \alpha}$ ,

$$\frac{\pi a^3 \sin \beta \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}.$$

**26.5.** Із квадрата, діагональ якого дорівнює  $6\sqrt{\pi}$  см, згорнута бічна поверхня циліндра. Знайти площу основи циліндра.

(Відповідь:  $4,5 \text{ см}^2$ )

**26.6.** Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює 8 см й утворює з висотою розгортки кут  $30^\circ$ . Знайти радіус циліндра.

(Відповідь:  $2/\pi$  см)

**26.7.** В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу  $120^\circ$ . Відрізок, який сполучає центр іншої основи з серединою цієї хорди, дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут  $30^\circ$ . Знайти площу бічної поверхні та об'єм циліндра.

(Відповідь:  $16\sqrt{3}\pi \text{ см}^2$ ,  $96\pi \text{ см}^3$ )

**26.8.** Діагоналі осьового перерізу циліндра взаємно перпендикулярні.

Периметр перерізу дорівнює 24 см. Знайти об'єм циліндра і площу його бічної поверхні.

(Відповідь:  $54\pi \text{ см}^3$ ,  $36\pi \text{ см}^2$ )

## 27 КОНУС

Конус (круговий конус) Тіло, яке складається з круга – *основи конуса*, точки, яка не лежить у площині цього круга, – *вершини конуса*, та всіх відрізків, що сполучають задану точку з точками круга.

Конус як тіло обертання Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один з його катетів.  
На рис. 27.1 зображено конус, утворений обертанням прямокутного трикутника  $AOS$  навколо катета  $SO$ .

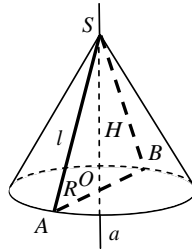


Рис. 27.1.

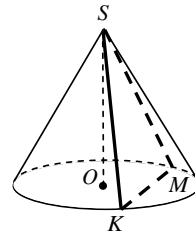


Рис. 27.2.

Радіус конуса Радіус основи конуса.  
Твірні конуса Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи.  
Твірні конуса рівні.

Висота конуса Перпендикуляр, опущений з вершини конуса на його основу.

Вісь конуса Пряма, яка проходить через вершину конуса та центр основи конуса.

Осьовий переріз конуса Переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь.

На рис. 27.1  $a$  – вісь,  $S$  – вершина,  $SO = H$  – висота,  $OA = R$  – радіус,  $SA = l$  – твірна,  $\triangle ASB$  – осьовий переріз конуса.

**Приклад 27.1.** Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом  $\alpha$ . Висота конуса дорівнює  $h$ , а радіус –  $R$ . Знайти площу перерізу конуса цією площиною та площу бічної поверхні.

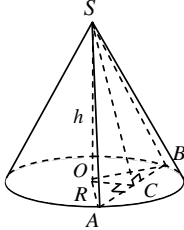


Рис. 27.3.

Через вершину конуса  $S$  проведемо площину, що перетинає його основу по хорді  $AB$ , яку видно з центра основи  $O$  під кутом  $AOB$  (рис. 27.3). Отже,  $\triangle ASB$  – переріз, площу якого треба знайти. За умовою  $\angle AOB = \alpha$ ,  $AO = R$ ,  $SO = h$ . Проведемо  $SC \perp AB$ , тоді за теоремою 23.21  $OC \perp AB$ . Оскільки  $\triangle AOB$  – рівнобедрений ( $OA = OB = R$ ), то  $OC$  – висота та бісектриса,  $\angle AOC = \alpha/2$ . З  $\triangle AOC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):

$$OC = R \cos(\alpha/2), AC = R \sin(\alpha/2).$$

З  $\triangle SOC$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$SC = \sqrt{h^2 + R^2 \cos^2(\alpha/2)}.$$

$\triangle ASB$  – рівнобедрений ( $SA = SB$  як твірні конуса). Площа  $\triangle ASB$ :

$$S_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SC = AC \cdot SC,$$

**27.1.** Твірна конуса  $l$  нахилена до площини основи під кутом  $30^\circ$ . Знайти висоту конуса. (Відповідь:  $l/2$ )

**27.2.** Площа основи конуса дорівнює  $144\pi \text{ см}^2$ . Знайти твірну конуса, якщо його висота дорівнює 5 см. (Відповідь: 13 см)

**27.3.** Радіус основи конуса дорівнює  $r$ . Визначити площу перерізу, який проходить через вершину конуса та хорду основи, яка стягує дугу  $60^\circ$ , якщо площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут  $30^\circ$ . (Відповідь:  $r^2/2$ )

**27.4.** Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом  $120^\circ$ . Висота конуса дорівнює 3 см, а радіус – 4 см. Знайти площу перерізу конуса цією площиною та площу бічної поверхні. (Відповідь:  $2\sqrt{39} \text{ см}^2$ ,  $20\pi \text{ см}^2$ )

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину

Рівнобедрений трикутник, у якого бічні сторони – твірні конуса, а основа – хорда кола основи.

На рис. 27.2  $\triangle KSM$  – переріз конуса площиною, що проходить через його вершину.

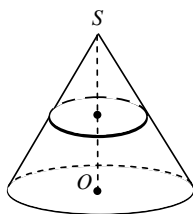


Рис. 27.5.

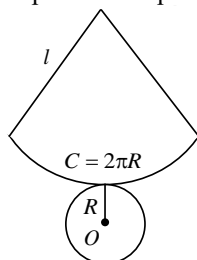


Рис. 27.6.

Переріз конуса площиною, паралельною його основі

Площина паралельна площині основи конуса, перетинає конус по колу, а бічну поверхню по колу з центром на осі конуса (рис. 27.5).

Дотична площина до конуса

Площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Розгортка конуса

Круговий сектор, радіус якого дорівнює твірній конуса  $l$ , а довжина дуги – довжині кола основи, і круг, радіус якого дорівнює радіусу основи конуса (рис. 27.6)

Площа бічної поверхні конуса

$$S_{\text{б}} = \pi R l,$$

Площа повної поверхні конуса

$$S_n = S_{\text{б}} + S_o = \pi R(l + R),$$

Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

де  $R$  – радіус,  $l$  – твірна,  $H$  – висота конуса.

Зрізаний конус

Частина конуса, обмежена його основою і перерізом, площина якого паралельна площині його основи.

$$S_{\Delta ASB} = R \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{h^2 + R^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

З  $\Delta AOS$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):  $l = \sqrt{h^2 + R^2}$ .

Площа бічної поверхні:

$$S_{\delta} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi R \sqrt{h^2 + R^2}.$$

Відповідь:  $R \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{h^2 + R^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2},$   
 $\pi R \sqrt{h^2 + R^2}.$

**Приклад 27.2.** Центральний кут у розгортці бічної поверхні конуса дорівнює  $120^\circ$ . Площа бічної поверхні дорівнює  $3\pi$  см<sup>2</sup>. Знайти об'єм конуса.

На рис. 27.4 зображено заданий конус та розгортку його бічної поверхні. Знайдемо довжину твірної конуса. Для цього скористаємося тим, що площа сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса, дорівнює площі бічної поверхні конуса:

$$S_{сек} = \frac{\pi l^2 n^\circ}{360^\circ}, \quad S_{\delta} = 3\pi, \quad S_{сек} = S_{\delta},$$

$$\frac{\pi l^2 120}{360} = 3\pi, \quad l = 3 \text{ (см)}.$$

Знайдемо радіус конуса:

$$S_{\delta} = \pi R l = 3\pi, \quad 3\pi R = 3\pi, \quad R = 1 \text{ (см)}.$$

З  $\Delta ASO$  ( $\angle O = 90^\circ$ ):

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 2\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь:  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$  см<sup>3</sup>.

**27.5.** Кут між висотою і твірною конуса дорівнює  $45^\circ$ , а висота конуса –  $3\sqrt{2}$  см. Знайти площу бічної поверхні конуса.

(Відповідь:  $18\sqrt{2}\pi$  см<sup>2</sup>)

**27.6.** В основі конуса проведено хорду, яку видно з центра основи під кутом  $\alpha$ , а з вершини конуса – під кутом  $\varphi$ . Визначити бічну поверхню конуса, якщо його радіус дорівнює  $R$ .

(Відповідь:  $\frac{\pi R^2 \sin \alpha/2}{\sin \varphi/2}$ )

**27.7.** Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого  $36$  м<sup>2</sup>. Знайти об'єм конуса.

(Відповідь:  $72\pi$  м<sup>3</sup>)

**27.8.** Центральний кут у розгортці бічної поверхні конуса дорівнює  $240^\circ$ . Площа бічної поверхні дорівнює  $6\pi$ . Знайти об'єм конуса.

(Відповідь:  $\frac{4\sqrt{5}\pi}{3}$  см<sup>3</sup>)

Зрізаний конус може бути утворений у результаті обертання прямокутної трапеції навколо бічної сторони, яка перпендикулярна до основ.

На рис. 27.7 зображено зрізаний конус, який отримано в результаті обертання прямокутної трапеції  $AA_1O_1O$  ( $\angle AOO_1 = 90^\circ$ ) навколо бічної сторони  $OO_1$ .

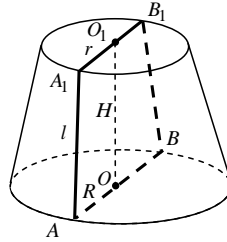


Рис. 27.7.

Висота зрізаного конуса      Відстань між площинами його основ.  
 Осьовий переріз зрізаного конуса      Рівнобічна трапеція.

На рис. 27.7  $OO_1 = H$  – висота,  $OA = R$  – радіус нижньої основи,  $O_1A_1 = r$  – радіус верхньої основи,  $AA_1 = l$  – твірна, трапеція  $AA_1B_1B$  – осьовий переріз зрізаного конуса.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса  
 Площа повної поверхні зрізаного конуса  
 Об'єм зрізаного конуса

$$S_{\sigma} = \pi(R+r)l,$$

$$S_n = \pi(Rl + rl + R^2 + r^2),$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2),$$

де  $R$  та  $r$  – радіуси нижньої та верхньої основ відповідно,  $l$  – твірна,  $H$  – висота зрізаного конуса.

**Приклад 27.3.** Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом  $\alpha$ . Радіуси основ  $R$  і  $r$  ( $R > r$ ). Знайти об'єм зрізаного конуса.

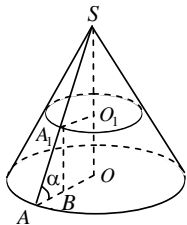


Рис. 27.8.

Доповнимо зрізаний конус до повного конуса з вершиною  $S$  (рис. 27.8). Оскільки прямі  $A_1A$  та  $O_1O$  перетинаються в точці  $S$ , то точки  $A, A_1, O_1, O$  лежать в одній площині. Ця площина перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по паралельним прямим  $AO, A_1O_1$  і містить висоту  $O_1O$ . Отже,  $AA_1O_1O$  – прямокутна трапеція з висотою  $O_1O$ . Проведемо висоту  $A_1B$  цієї трапеції.  $A_1B \parallel O_1O$ , тому  $A_1B$  перпендикулярна до площини нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної  $A_1A$  на площину нижньої основи є відрізок  $AB$ , тому  $\angle A_1AB = \alpha$ .  $AB = AO - A_1O_1 = R - r$ .

З  $\triangle ABA_1$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $A_1B = (R - r) \operatorname{tg} \alpha$ .

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot O_1O \cdot (R^2 + Rr + r^2) = \\ = \pi (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha / 3.$$

Відповідь:  $\pi (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha / 3$ .

**27.9.** Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна – 5 см. Знайти площу осевого перерізу.

(Відповідь:  $30 \text{ см}^2$ )

**27.10.** У зрізаному конусі діагоналі осевого перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна  $l$  утворює з площиною більшої основи кут  $\alpha$ . Знайти площу бічної поверхні.

(Відповідь:  $\pi l^2 \sin \alpha$ )

**27.11.** Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом  $60^\circ$ . Радіуси основ дорівнюють  $6\sqrt{3}$  см і  $2\sqrt{3}$  см. Знайти об'єм зрізаного конуса.

(Відповідь:  $624\pi \text{ см}^3$ )

**27.12.** Площа осевого перерізу зрізаного конуса дорівнює різниці площ основ, а радіуси основ  $R$  і  $r$  ( $R > r$ ). Знайти об'єм цього конуса.

(Відповідь:  $\frac{\pi^2 (R^3 - r^3)}{3}$ )

## 28 КУЛЯ

Куля

Тіло, яке складається з усіх точок простору, що знаходяться від заданої точки (*центр кулі*), на відстані, не більшій за дану (*радіус кулі*).

Куля  
як тіло обертання

Тіло, отримане в результаті обертання півкруга навколо його діаметра.

На рис. 28.1 зображено кулю, яка утворена внаслідок обертання півкруга навколо його діаметра  $AB$ ,  $O$  – центр кулі.

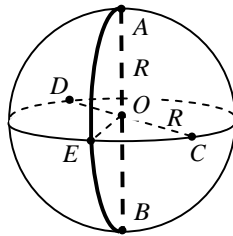


Рис. 28.1.

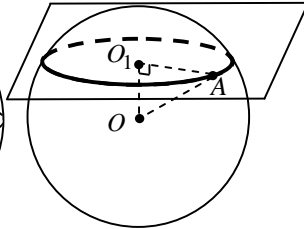


Рис. 28.2.

Сфера

Тіло, яке складається з усіх точок простору, що знаходяться на даній відстані (*радіус*) від заданої точки (*центр*).

Сфера  
як тіло обертання

Тіло, отримане в результаті обертання півкола навколо його діаметра.

Радіус сфери (кулі)

Відрізок, який сполучає центр кулі (сфери) з будь-якою точкою її поверхні.

На рис. 28.1 відрізок  $OA = R$  – радіус.

Хорда сфери (кулі)

Відрізок, який сполучає дві точки на поверхні кулі (сфери).

Діаметр сфери  
(кулі)

Хорда, що проходить через центр кулі (сфери).  
На рис. 28.1 відрізки  $AB$  та  $CD$  – діаметри.

Вісь кулі

Пряма, яка містить діаметр кулі.

Діаметральна  
площина

Площина, яка проходить через центр кулі.

**Приклад 28.1.** Площина перетинає кулю. Діаметр кулі, проведений з однієї з точок лінії перетину, утворює з площиною кут  $60^\circ$ . Знайти площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює 8 см.

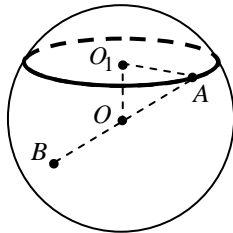


Рис. 28.3.

Нехай площина перетинає кулю по колу з центром у точці  $O_1$ ,  $O$  – центр кулі,  $AB$  – її діаметр (рис. 28.3). За умовою  $AB = 8$  см. Центр кола  $O_1$  є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину, тому проекцією прямої  $OA$  на січну площину є пряма  $O_1A$ ,  $\angle OAO_1 = 60^\circ$ .

$$OA = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ (см)}. \quad \text{З } \triangle OO_1A \text{ (} \angle O_1 = 90^\circ \text{): } O_1A = OA \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ (см)}.$$

$$\text{Площа кола: } S = \pi \cdot O_1A^2 = 4\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $4\pi \text{ см}^2$ .

**Приклад 28.2.** Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини  $10\pi$  см і  $24\pi$  см. Знайти площу сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см, а центри перерізів лежать на одному радіусі сфери.

**28.1.** Кулю, радіус якої дорівнює 5 см, перетнуто площиною, яка розміщена на відстані 3 см від центра. Знайти площу перерізу. (Відповідь:  $16\pi \text{ см}^2$ )

**28.2.** Площина перетинає кулю. Діаметр кулі, проведений з однієї з точок лінії перетину, утворює з площиною кут  $45^\circ$ . Знайти площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює  $4\sqrt{3}$  см. (Відповідь:  $6\pi \text{ см}^2$ )

**28.3.** Вершини трикутника лежать на сфері радіуса 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. (Відповідь: 12 см)

**28.4.** Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 14 см і 13 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, дотичної до сторін трикутника, якщо радіус кулі дорівнює 5 см. (Відповідь: 3 см)

Великий круг (коло) кулі (сфери) Переріз кулі (сфери) діаметральною площиною.

Перерізи кулі площиною Будь-який переріз кулі є кругом. Центр цього круга – основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину (рис. 28.2).

Дотична площина (пряма) Площина (пряма), яка має з кулею тільки одну спільну точку, яку називають *точкою дотику*. Дотична до кулі площина (пряма) перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

На рис. 28.4  $\alpha$  – дотична площина,  $a$  – дотична пряма.

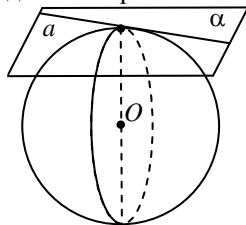


Рис. 28.4.

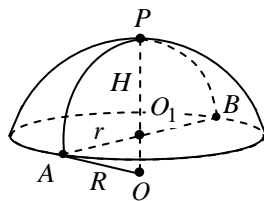


Рис. 28.5.

Площа сфери

$$S = 4\pi R^2,$$

де  $R$  – радіус сфери.

Об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

де  $R$  – радіус кулі.

Кульовий сегмент

Частина кулі, яку відтинає від неї площина. Кульовий сегмент обмежується частиною сфери і кругом, який називають *основою кульового сегмента*.

Висота кульового сегмента

Відрізок перпендикуляра, який проведений з центра основи кульового сегмента до перетину з поверхнею кулі.

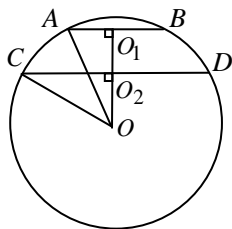


Рис. 28.6.

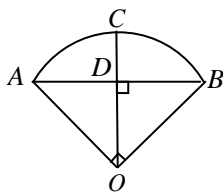


Рис. 28.7.

На рис. 28.6. зображено переріз сфери діаметральною площиною. За умовою  $C_1 = 10\pi$  см,  $C_2 = 24\pi$  см – довжини кіл заданих паралельних перерізів,  $O_1O_2 = 7$  см. Відрізки  $O_1A$  та  $O_2C$  – радіуси заданих перерізів.

Знайдемо  $O_1A$  і  $O_2C$  :

$$C_1 = 2\pi \cdot O_1A = 10\pi, \quad O_1A = 5 \text{ (см)},$$

$$C_2 = 2\pi \cdot O_2C = 24\pi, \quad O_2C = 12 \text{ (см)}.$$

Нехай  $OO_2 = x$  см,  $OO_1 = (7+x)$  см.

З  $\triangle AO_1O$  ( $\angle O_1 = 90^\circ$ ):

$$OA^2 = AO_1^2 + OO_1^2 = 25 + (7+x)^2.$$

З  $\triangle CO_2O$  ( $\angle O_2 = 90^\circ$ ):

$$OC^2 = CO_2^2 + OO_2^2 = 144 + x^2.$$

Оскільки  $OA$  та  $OC$  – радіуси сфери, то

$$OA^2 = OC^2, \quad 25 + (7+x)^2 = 144 + x^2,$$

$$x = 5, \quad OO_2 = 5 \text{ (см)}.$$

Радіус сфери:

$$R = OC = \sqrt{CO_2^2 + OO_2^2} = 13 \text{ (см)}.$$

Площа сфери:

$$S = 4\pi \cdot OC^2 = 676\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь:  $676\pi$  см<sup>2</sup>.

**28.5.** Куля дотикається до усіх сторін прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см та 8 см. Знайти радіус кулі, якщо відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 14 см.

(Відповідь:  $10\sqrt{2}$  см)

**28.6.** Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої становить 10 см, дорівнює 12 см. Знайти площу кожного з цих перерізів.

(Відповідь:  $64\pi$  см<sup>2</sup>)

**28.7.** Лінія перерізу сфери та площини, віддаленої від центра сфери на 8 см, має довжину  $12\pi$  см. Знайти площу поверхні сфери.

(Відповідь:  $400\pi$  см<sup>2</sup>)

**28.8.** Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини  $24\pi$  см і  $32\pi$  см. Знайти площу сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 4 см, а центри перерізів лежать на одному радіусі сфери.

(Відповідь:  $1600\pi$  см<sup>2</sup>)

На рис. 28.5 зображено кульовий сегмент.  
 $OA = R$  – радіус кулі,  $O_1A = r$  – радіус основи сегмента,  $O_1P = H$  – висота сегмента.

Площа кульового сегмента  
 Об'єм кульового сегмента

$$S = 2\pi RH,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H),$$

де  $R$  – радіус кулі,  $H$  – висота кульового сегмента.

Кульовий сектор

Тіло, яке складається з кульового сегмента та конуса, вершина якого – центр кулі, а основа – основа кульового сегмента (рис. 28.8).

Площа кульового сектора

$$S = \pi R \left( 2H + \sqrt{2RH - H^2} \right),$$

Об'єм кульового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

де  $R$  – радіус кулі,  $H$  – висота кульового сегмента.

Кульовий шар

Частина кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами (рис. 28.9).  
 Круги паралельних перерізів називаються *основами кульового шару*, а відстань між ними – *висотою кульового шару*.

Кульовий пояс

Поверхня кульового шару.

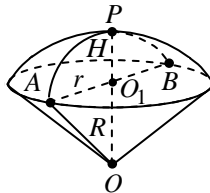


Рис. 28.8.

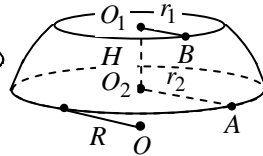


Рис. 28.9.

**Приклад 28.3.** Радіус кулі дорівнює  $R$ . Визначити об'єм кульового сектора, якщо дуга в осьовому перерізі сектора дорівнює  $90^\circ$ .

На рис. 28.7 зображено осьовий переріз заданого сектора. За умовою  $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ ,  $OA = R$ . З  $\triangle AOB$

( $\sphericalangle O = 90^\circ$ ):  $AB = R\sqrt{2}$ . Проведемо в  $\triangle AOB$  висоту  $OD$ . Оскільки  $\triangle AOB$  – прямокутний рівнобедрений, то  $OD$  – висота та медіана, тому

$$AD = DB = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

У прямокутному

трикутнику медіана проведена до гіпотенузи дорівнює радіусу описаного

кола, тому  $AD = DB = OD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

Знайдемо висоту кульового сектора:

$$CD = H = CO - OD = \frac{R(2 - \sqrt{2})}{2}$$

Об'єм кульового сектора:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot CD =$$

$$= \frac{R^3(2 - \sqrt{2})\pi}{3}.$$

Відповідь:  $\frac{R^3(2 - \sqrt{2})\pi}{3}$ .

**28.9.** Знайти площу меншого кульового сегмента кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 3 см, а радіус кулі – 5 см.

(Відповідь:  $10\pi \text{ см}^2$ )

**28.10.** На якій відстані від центра кулі радіуса 6 см повинна міститися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала  $\frac{1}{3}$  її поверхні?

(Відповідь: 18 см)

**28.11.** Радіус кулі дорівнює  $R$ . Визначити об'єм кульового сектора, якщо дуга в осьовому перерізі сектора дорівнює  $60^\circ$ .

(Відповідь:  $\frac{R^3(2 - \sqrt{3})\pi}{3}$ )

**28.12.** Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 10 см і 12 см, а його висота – 11 см. Знайти поверхню кульового пояса, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені по різні боки від центра кулі.

(Відповідь:  $275\pi \text{ см}^2$ )

## ПІСЛЯМОВА

Зібрані у навчальному посібнику матеріали з елементарної математики запропоновано розглядати як мінімальний, але міцний базовий фундамент для подальшого вивчення математики бакалаврами. Розв'язування математичних і науково-технічних задач суттєво спрощується внаслідок застосування математичних пакетів з такими потужними й ефективними редакторами, що не вимагають навіть знання мов програмування. Універсальні математичні програмні засоби символічної математики такі, як Mathcad, MatLab, Maple, Mathematica рекомендовано для розв'язування задач арифметики, алгебри й геометрії, що спряжені з громіздкими чисельними та аналітичними обчисленнями.

*Методичні зауваження.*

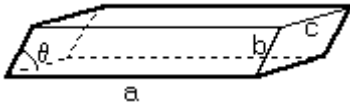
Задачі і вправи з блоку «Числа. Функції. Рівняння» мають швидке розв'язання за допомогою специфічної мови та наборів алгоритмів спілкування вказаних програмних засобів (див. приклади).

Задача	Розв'язання засобами MathCad
Спростити вираз $\frac{\sqrt{5} + \ln(e^{17})}{\sqrt{\sqrt{5} + 17}}$	$\frac{\sqrt{5} + \ln(e^{17})}{\sqrt{\sqrt{5} + 17}} \text{ simplify } \rightarrow \sqrt{\sqrt{5} + 17}$
Обчислити $\sqrt{\sqrt{5} + 17}$ .	$\sqrt{\sqrt{5} + 17} = 4.38589$
Спростити вираз $\frac{(a+1) \cdot (a^2 - a + 1)}{a^3 + 1}$	$\frac{(a+1) \cdot (a^2 - a + 1)}{a^3 + 1} \text{ simplify } \rightarrow 1$
Обчислити $x = \frac{\sqrt{2} - \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln(e^{\sqrt{2}}) - \sqrt{2} + \text{tg } 0}$	$x - \frac{\sqrt{2} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\ln(e^{\sqrt{2}}) + \sqrt{2} + \tan(0)} \text{ solve } \rightarrow \frac{1}{2}$

<p>Побудувати графіки функцій:</p> <p>1) <math>y_1 = -(x-2)^2 + 4</math>;</p> <p>2) <math>y_2 = \ln(x)</math>;</p> <p>3) <math>y_3 = -1</math>;</p> <p>4) <math>y_4 = y_1 + y_2 + y_3</math>.</p>	<p>1: <math>-(x-2)^2 + 4</math></p> <p>2: <math>\ln(x)</math></p> <p>3: <math>-1</math></p> <p>4: <math>-(x-2)^2 + 4 + \ln(x) - 1</math></p>
<p>Розв'язати рівняння <math>x - 1 = 0</math>.</p>	<p><math>x - 1 \text{ solve } \rightarrow 1</math></p>
<p>Розв'язати рівняння <math>3x^2 + 2x - 5 = 0</math>.</p>	<p><math>3x^2 + 2x - 5 \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}</math></p>
<p>Розв'язати рівняння <math>\frac{(x-5)^3}{\frac{1}{17}x-5} = 0</math></p>	<p><math>\frac{(x-5)^3}{\frac{1}{17} \cdot (x-5)} \text{ solve } \rightarrow 5</math></p>
<p>Розв'язати рівняння <math>-(x-2)^2 + 3 + \ln(x) = 0</math>.</p>	<p><math>-(x-2)^2 + 3 + \ln(x) \text{ solve, } x \rightarrow 0.4887</math></p>

<p>Розв'язати систему лінійних рівнянь:</p> $\begin{cases} 3 \cdot w + 2 \cdot x + 6 \cdot y - 1 \cdot z = 1, \\ 4,5 \cdot w - 1,8 \cdot x - 0,3 \cdot y + 6,5 \cdot z = 0,1, \\ -7,3 \cdot w + 9,7 \cdot x + 10,9 \cdot y - 4,1 \cdot z = 0,01, \\ 8,1 \cdot w - 2,7 \cdot x + 8,7 \cdot y + 8,9 \cdot z = 1 \cdot 10^{-3}. \end{cases}$ <p>Вводимо таблицю коефіцієнтів біля невідомих <b>M</b> та правих частин <b>v</b>.</p> $M := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & -1 \\ 4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5 \\ -7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1 \\ 8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9 \end{pmatrix}$	$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 1 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$ $\text{soln} := \text{lsolve}(M, v)$ $\text{soln} = \begin{pmatrix} 0.274 \\ 0.235 \\ -0.067 \\ -0.112 \end{pmatrix}$
<p>Розв'язати систему нелінійних рівнянь</p> $\begin{cases} 2 \cdot x + y = 6 - 2 \cdot z^2, \\ y^3 + 4 \cdot z = 4, \\ x \cdot y + z = e^z. \end{cases}$ <p>Вводимо імовірні значення невідомих:</p> $x := 1 \quad y := 1 \quad z := 0$ <p>Вводимо систему рівнянь:</p>	<p>Given</p> $2 \cdot x + y = 6 - 2 \cdot z^2$ $y^3 + 4 \cdot z = 4$ $x \cdot y + z = e^z$ $\text{vec} := \text{Find}(x, y, z)$ $\text{vec} = \begin{pmatrix} 1.846 \\ 0.817 \\ 0.864 \end{pmatrix}$

Застосування систем комп'ютерної математики актуалізується також і у зв'язку з освітянським курсом на створення інтегративних природничих дисциплін як у середній, так і у вищій школі для моделювання розв'язків складних задач фізики, хімії, біології, історії та суспільствознавства. Геометричні моделі конструюються на основі з розглянутого мінімуму у блоку «Планіметрія. Стереометрія» і легко вводяться в алгоритмічні приписи розв'язування таких задач за допомогою засобів MathCad.



$$a := 14 \text{ mm}$$

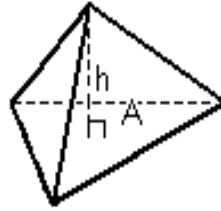
$$b := 3 \text{ mm}$$

$$c := 4 \text{ mm}$$

$$\theta := \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Volume} := a b c \sin(\theta)$$

$$\text{Volume} \rightarrow 84 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{mm}^3$$



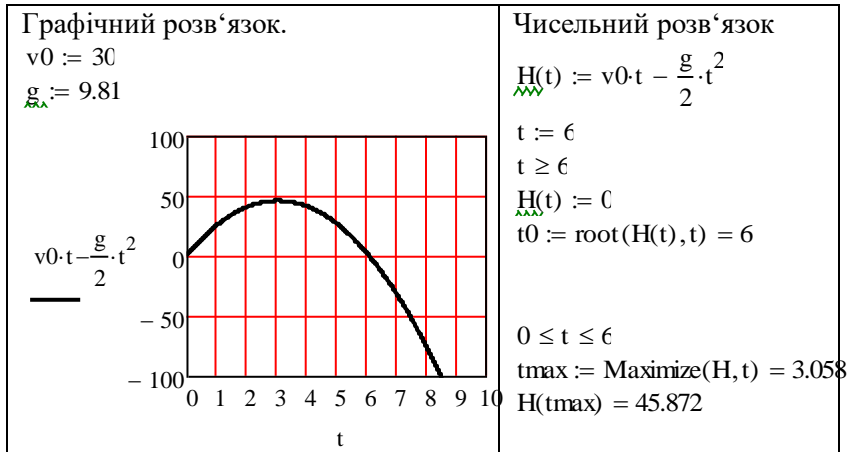
$$A := 38.7 \cdot \text{mm}^2$$

$$h := 9.2 \text{ mm}$$

$$\text{Volume} := \frac{1}{3} A h$$

$$\text{Volume} = 118.68 \cdot \text{mm}^3$$

Фізичну задачу про визначення моменту часу  $t_{\max}$ , за який підкинута вертикально вгору тіло з початковою швидкістю  $v_0$  досягне максимальної висоти, у математичному формулюванні засобами MathCad можна розглядати як оптимізаційну задачу про досягнення функцією висоти  $H(t) = v_0 t - \frac{g t^2}{2}$  максимального значення.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bird, J.** Engineering Mathematics. Pocket Book / J. Bird. – Elsevier Ltd., 2007. – 576 p.
2. **Hunt, Brian R.** Matlab: официальный учебный курс Кембриджского университета / Hunt, Brian R. – М. : Триумф, 2008. – 352 с.
3. **Вигодський, М. Я.** Довідник з елементарної математики / М. Я. Вигодський. – М. : АСТ: Астрель, 2006. – 509 с.
4. **Довідник з елементарної математики: геометрія, тригонометрія, векторна алгебра** / під ред. П. Ф. Фільчакова. – К. : Наукова думка. 1967. – 438 с.
5. **Дьяконов, В. П.** Справочник по MathCad PLUS 7.0 PRO / В. П. Дьяконов. – М. : СК ПРЕСС, 1998. – 352 с.
6. **Швецов, К. І.** Довідник з елементарної математики. Арифметика, алгебра / К. І. Швецов, Г. П. Бевз. – К. : Наукова думка, 1967. – 408 с.

## ДЛЯ ПОДАТОК

*Навчальне видання*

**Онуфрієнко Володимир Михайлович  
Сніжко Наталія Вікторівна  
Антоненко Ніна Миколаївна  
П'янков Володимир Павлович  
Зіненко Ігор Іванович**

**Інженерна математика.  
Бакалаврський мінімум.  
Частина 1**

*Навчальний посібник*

Комп'ютерний набір *Сніжко Н.В., Антоненко Н.М.*  
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 25.04.2019. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 21,04.  
Тираж 100 прим. Зам. № 509.

Запорізький національний технічний університет  
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64  
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2394 від 27.12.2005.