
УДК 691.7:620.17

Канд. техн. наук В. Г. Шевченко, канд. техн. наук С. Л. Рягин,
М. А. Журба, Н. В. Литовский
Национальный технический университет, г. Запорожье

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Получены аналитические зависимости для прочностного расчета статически неопределимых пространственных составных стержней, представляющих собой набор 5 продольных профилей, соединенных поперечными диафрагмами. Показано, что кручение таких стержней может вызывать изгиб продольных профилей.

Ключевые слова: статически неопределимые пространственные составные стержни, прочностной расчет.

Введение

Точность расчета на стадии проектирования обеспечивает низкую материалоемкость и высокую надежность создаваемых конструкций. Поэтому разработка моделей аналитического расчета связана с важной научной и практической задачей повышения конкурентоспособности продукции отечественного машиностроения.

В машиностроительных конструкциях периодически встречаются статически неопределимые пространственные составные стержни, которые представляют собой набор параллельных профилей, скрепленных между собой поперечными диафрагмами по концам и в пролете – сидения, ограждения, перила, полки, ступени и т. п. (см. рис. 1, 2). На такие стержни могут действовать изгибающие, крутящие и сдвигающие нагрузки.

В литературных источниках, связанных с сопротивлением материалов и строительной механикой, большое внимание уделено сварным составным балкам и фермам. Например, в книге [1] наиболее подробно приведен расчет составных стержней и пластин. Однако в этой книге в качестве частного случая рассматриваются составные стержни без сдвиговых связей, работающие только на изгиб только в одной плоскости. Авторам не известны публикации, приводящие аналитический расчет статически неопределимых пространственных составных стержней при данной комбинации нагрузок. Решению этой задачи посвящается данная статья.

Целью статьи является разработка аппарата аналитического расчета статически неопределимых пространственных составных стержней при изгибе, кручении и сдвиге.

Материалы и методы исследований

Если поперечную диафрагму считать абсолютно жесткой, уравнение совместности деформаций следует из перемещений центров тяжести профилей вместе с поперечной диафрагмой.

Изгиб в вертикальной плоскости

Полагаем, что посередине пролета составной стержень нагружен вертикальной силой (см. рис. 1).

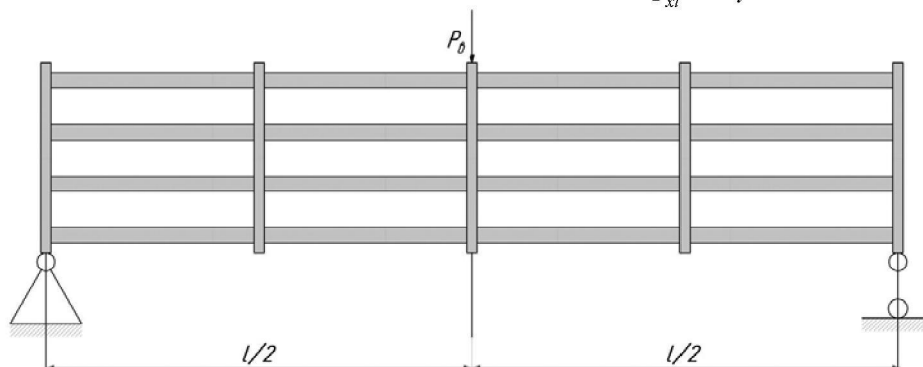


Рис. 1. Схема статически неопределимого пространственного составного стержня

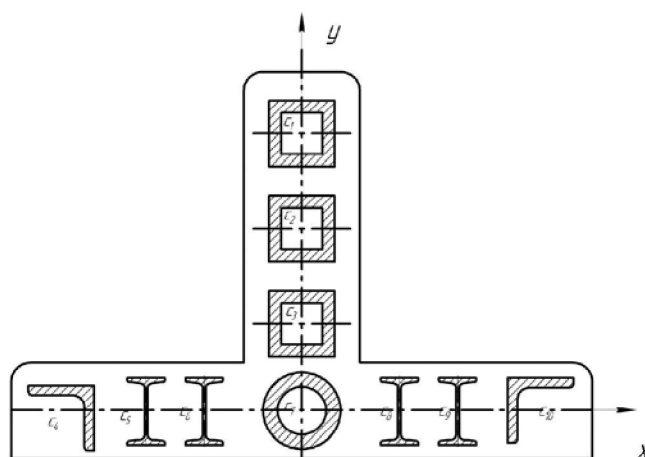


Рис. 2. Пример поперечного сечения статически неопределимого пространственного составного стержня

Считаем, что при изгибе составной стержень получает опору по краям.

Перемещение нагруженной диафрагмы будет одинаковым для всех n - профилей. Тогда уравнения совместности деформаций:

$$f_i = f, \quad i = 1, \dots, n,$$

где f – вертикальное перемещение поперечной диафрагмы;

f_i – вертикальное перемещение центра тяжести i -го профиля.

Сила P_0 распределяется между профилями:

$$P_0 = \sum_{i=1}^n P_{0i}.$$

Перемещение центра тяжести каждого профиля:

$$f_i = \frac{P_{0i} \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_{xi}},$$

где E – модуль Юнга;

I_{xi} – момент инерции i -го профиля.

Тогда

$$\frac{P_{0i}}{I_{xi}} = \frac{48 \cdot E}{l^3} \cdot f_i = \text{const}.$$

После выполнения преобразований получаем для i -го профиля:

$$P_{ei} = \frac{I_{xi}}{I_x} \cdot P_e,$$

где

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{xi}.$$

Тогда

$$\sigma_{xi} = \frac{M_{x\max}}{I_x} \cdot \frac{I_{xi}}{W_{xi}},$$

где $M_{x\max}$ – максимальный изгибающий момент;

W_{xi} – момент сопротивления i -го стержня.

Изгиб в горизонтальной плоскости

По аналогии с изгибом в вертикальной плоскости, напряжения в i -м профиле определяются по формуле:

$$\sigma_{yi} = \frac{M_{y\max}}{I_y} \cdot \frac{I_{yi}}{W_{yi}},$$

где

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi}.$$

Определение положения $y_{нл}$ нейтральной линии при изгибе в вертикальной плоскости выполняется из условия равенства нулю статического момента $S_x = 0$:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot (y_{ci} - y_{нл}) = 0,$$

где x_{ci}, y_{ci} – координаты центра тяжести i -го профиля, F_i – площадь этого профиля.

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{ci} = y_{нл} \cdot \sum_{i=1}^n F_i.$$

Тогда

$$y_{нл} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{ci}}{F},$$

где

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

Кручение

При кручении составной стержень считаем заземленным по концам. Крутящий момент, приложенный к центральной пластине, будет уравниваться за счет изгиба и кручения профилей:

$$M_{кр} = \sum_{i=1}^n P_{zi} \cdot |y_{ci} - y_{нл}| + \sum_{i=1}^n P_{ei} \cdot |x_{ci}| + \sum_{i=1}^n M_{zi}.$$

Последним слагаемым можно пренебречь. Перемещения при изгибе будут определяться поворотом центральной пластины. Тогда

$$P_{ei} = \frac{48 \cdot E \cdot I_{xi}}{l^3} \cdot \varphi \cdot |x_{ci}|,$$

$$P_{zi} = \frac{48 \cdot E \cdot I_{yi}}{l^3} \cdot \varphi \cdot |y_{ci} - y_{нл}|,$$

где φ – угол поворота центральной пластины.

Тогда

$$M_{кр} = \frac{48 \cdot E}{l^3} \cdot \varphi \times \left[\sum_{i=1}^n I_{xi} \cdot x_{ci}^2 + \sum_{i=1}^n I_{yi} \cdot (y_{ci} - y_{нл})^2 \right].$$

Обозначим

$$\left[\sum_{i=1}^n I_{xi} \cdot x_{ci}^2 + \sum_{i=1}^n I_{yi} \cdot (y_{ci} - y_{нл})^2 \right] = K.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{\frac{48 \cdot E}{l^3} \cdot K} = \frac{M_{кр} \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot K}.$$

После преобразований

$$P_{ei} = \frac{M_{кр}}{K} \cdot I_{xi} \cdot |x_{ci}|,$$

$$P_{zi} = \frac{M_{кр}}{K} \cdot I_{yi} \cdot |y_{ci} - y_{нл}|.$$

Полагая опасное сечение посередине пролета

$$M_{xi} = \frac{P_{ei} \cdot l}{4}, \quad M_{yi} = \frac{P_{zi} \cdot l}{4}.$$

Нормальные напряжения в i -ом стержне, вызванные кручением:

$$\sigma_{xi}^{кр} = \frac{P_{ei}}{W_{xi}} \cdot \frac{l}{4}, \quad \sigma_{yi}^{кр} = \frac{P_{zi}}{W_{yi}} \cdot \frac{l}{4}.$$

С учетом подстановки

$$\sigma_{xi}^{кр} = \frac{M_{кр}}{K} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{I_{xi}}{W_{xi}} \cdot |x_{ci}|,$$

$$\sigma_{yi}^{кр} = \frac{M_{кр}}{K} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{I_{yi}}{W_{yi}} \cdot |y_{ci} - y_{нл}|.$$

Для заземленного по концам профиля при кручении, полагая момент в худшем случае приложенным посередине, в том же опасном сечении:

$$\varphi = \frac{M_{zi} \cdot l}{4 \cdot G \cdot I_{kpi}},$$

где M_{zi} – момент кручения в i -м профиле;

G – модуль упругости II рода;

I_{kpi} – приведенный момент инерции при кручении.

Тогда

$$\frac{M_{kp} \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot K} = \frac{M_{zi} \cdot l}{4 \cdot G \cdot I_{kpi}},$$

$$M_{zi} = \frac{M_{kp}}{K} \cdot \frac{G \cdot l^2}{12 \cdot E} \cdot I_{kpi}.$$

Касательные напряжения в i -м стержне, вызванные кручением

$$\tau_i^{kp} = \frac{M_{zi}}{2 \cdot W_{kpi}} = \frac{M_{kp}}{K} \cdot \frac{G \cdot l^2}{24 \cdot E} \cdot \frac{I_{kpi}}{W_{kpi}}.$$

Если при кручении характер распределения нагрузок ближе к распределенному по длине, чем к сосредоточенному посередине, это можно учесть умножением напряжений на поправочный коэффициент $\alpha = 0,5$. Этот коэффициент представляет собой отношение наибольших изгибающих моментов в двухопорном пролетном стержне, возникающих при действии сосредоточенной силы посередине, и эквивалентной ей распределенной нагрузки.

Сдвиг

Боковые силы и их реакции создают пару сил M_{σ} . Получаем, что от ее действия поперечные диафрагмы поворачиваются на одинаковый угол ψ (см. рис. 3).

При этом в каждой секции каждого профиля возникают моменты $M_{\sigma i}$ и соответствующие им реакции

$$R_i = \frac{2M_{\sigma i}}{l_3}.$$

Таким образом, момент M_{σ} уравновешивается внутренними силами:

$$M_{\sigma} = 2 \cdot m \cdot \sum_{i=1}^m M_{\sigma i},$$

где m – количество секций.

Уравнения совместности деформаций

$$\psi_i = \psi = \text{const}.$$

В i -й секции, по формуле [2]:

$$\psi = \frac{M_{\sigma i} \cdot l_3}{6 \cdot E \cdot I_{xi}}, \quad M_{\sigma i} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{xi}}{l_3} \cdot \psi.$$

После подстановки и преобразований получаем:

$$M_{\sigma} = 2 \cdot m \cdot \frac{\psi \cdot 6 \cdot E}{l_3} \cdot \sum I_{xi}.$$

Отсюда

$$\psi = \frac{M_{\sigma} \cdot l_3}{2 \cdot m \cdot 6 \cdot E \cdot I_x}.$$

После повторной подстановки

$$M_{\sigma i} = \frac{6 \cdot E \cdot I_{xi}}{l_3} \cdot \frac{M_{\sigma} \cdot l_3}{2 \cdot m \cdot 6 \cdot E \cdot I_x} = \frac{M_{\sigma}}{2 \cdot m} \cdot \frac{I_{xi}}{I_x}.$$

Тогда нормальные напряжения в i -м стержне от действия боковых сил:

$$\sigma_{xi}^{\sigma} = \frac{M_{\sigma i}}{2 \cdot m \cdot I_x} \cdot \frac{I_{xi}}{W_{xi}}.$$

Касательные напряжения от реакций R_i :

$$\tau_i^{\sigma} = \frac{R_i}{F_i} = \frac{M_{\sigma}}{I_x} \cdot \frac{1}{l_3 \cdot m} \cdot \frac{I_{xi}}{F_i}.$$

Эквивалентные напряжения

Исходя из принципа суперпозиции и правил определения напряжений при сложном сопротивлении [3], одноименные напряжения суммируются арифметически:

$$\sigma_i = \sigma_{xi} + \sigma_{yi} + \sigma_{xi}^{kp} + \sigma_{yi}^{kp} + \sigma_{xi}^{\sigma} + \sigma_{xi}^n + \sigma_{yi}^n,$$

где $\sigma_{xi}^n, \sigma_{yi}^n$ – локальные нормальные напряжения в i -м профиле.

$$\tau_i = \tau_i^{kp} + \tau_i^{\sigma} + \tau_i^n,$$

где τ_i^n – локальные касательные напряжения в i -м профиле.

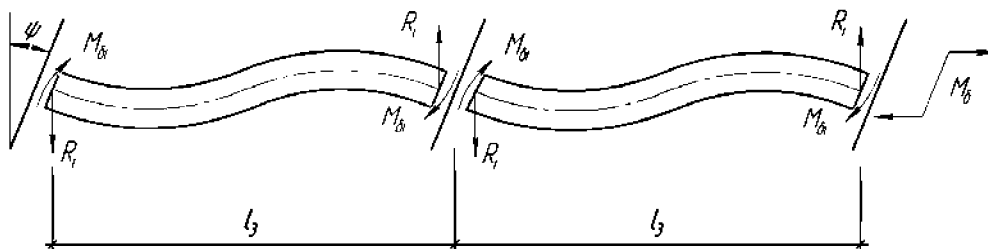


Рис. 3. Вспомогательная расчетная схема для учета боковых сил

Затем эквивалентные напряжения в i -м профиле вычисляются по одной из теорий прочности, например – по III:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_i^2 + 4 \cdot \tau_i^2}.$$

Анализ полученных результатов

В перспективе полученные аналитические зависимости могут быть использованы для расчета конструкций, относящихся к статически неопределимым пространственным составным стержням.

Выводы

В статически неопределимых пространственных составных стержнях кручение может вызывать нор-

мальные изгибающие напряжения в параллельных профилях.

Список литературы

1. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки / Ржаницын А. Р. – М. : Стройиздат, 1986. – 316 с., ил.
2. Справочная книга по расчету самолета на прочность / [Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я.]. – М. : Оборонгиз, 1954. – 708 с.
3. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. ; отв. ред. Писаренко Г. С. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук, думка, 1988. – 736 с.

Одержано 20.05.2013

Шевченко В.Г., Рягин С.Л., Журба М.О., Литовский М.В. Розрахунок статично невизначуваних просторових складових стержнів

Отримані аналітичні залежності для розрахунку на міцність статично невизначуваних просторових складових стержнів, які являють собою набір повздожніх профілів, з'єднаних поперечними діафрагмами. Показано, що кручення таких стержнів може викликати згин повздожніх профілів.

Ключові слова: статично невизначувані просторові складові стержні, розрахунок на міцність.

Shevchenko V., Riagin S., Zhourba M., Litovsky N. Design of statically indeterminable three-dimensional sets of rods

Analytical dependences for strength design of statically indeterminable three-dimensional sets of rods have been obtained. Those rods consist of parallel profiles, connected by perpendicular diaphragms. It has been shown, that torsion of such rods may cause bending of parallel profiles.

Key words: statically indeterminable three-dimensional sets of rods, strength design.