МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Методичні вказівки
до виконання розрахункових робіт для студентів денної форми навчання та контрольних робіт для студентів заочної форми навчання з вищої математики.
Розділи: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл»

2026

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт для студентів денної форми навчання та контрольних робіт для студентів заочної форми навчання з вищої математики. Розділи: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл» / «Запорізька політехніка» нац. ун-т. Каф. математики ; уклад.: І. М. Килимник. Запоріжжя : «Запорізька політехніка», 2026. 55 с.

Укладач: Килимник І. М., канд. тех. наук, доцент

Рецензент: Антоненко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., канд. тех. наук, доцент

Затверджено на засіданні
кафедри математики
Протокол № 6 від 11.03.2026 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 7 від 09.04.2026 р.

ЗМІСТ

1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Означення 1.1. Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і справджується рівність $F'(x)=f(x)$ для усіх $x\in(a;b)$.

Існує множина первісних $F(x)$ для функції $f(x)$, які відрізняються тільки сталою C: $(F(x)+C)'=f(x)$. Цю множину первісних називають *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ і записують

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,, \tag{1.1}$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція,
$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Властивості невизначеного інтеграла

а) $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$;

б) $\int dF(x)=F(x)+C$;

в) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)\,dx$;

г) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, де $k=\text{const}$;

д) $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;

е) $\int f(\alpha x+\beta)dx=\dfrac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C$, $\alpha,\beta\in R$, $F(x)$ первісна для $f(x)$ на $(a;b)$.

Таблиця 1 – Таблиця невизначених інтегралів

У таблиці $\int f(u)\,du = F(u) + C$

1	$\int du = u + C$	2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\alpha \neq -1$
2а	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
4а	$\int \mathrm{e}^u\, du = \mathrm{e}^u + C$	5	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$
6	$\int \cos u\, du = \sin u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$
8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$	9	$\int \mathrm{tg}\, u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
10	$\int \mathrm{ctg}\, u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\,\frac{u}{2}\right\rvert + C =$ $= \ln\left\lvert \frac{1}{\sin \mathrm{u}} - \mathrm{ctg} u\right\rvert + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C =$ $= \ln\left\lvert \frac{1}{\cos \mathrm{u}} - \mathrm{tg} u\right\rvert + C$	13	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + C$
14	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$	15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
16	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	17	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$

Кінець таблиці 1

18	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = u \cdot \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$		
19	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$	20	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

Зауваження. Таблицею інтегралів можна користуватись у випадку, коли аргумент підінтегральної функції і вираз під знаком диференціала однакові.

1.1 Методи інтегрування

1) Метод безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою властивостей невизначеного інтеграла та таблиці невизначених інтегралів.

Треба пам'ятати , що $du = \frac{1}{a} d(au)$, $du = a\,d\left(\frac{1}{a}u\right)$, $du = d(u \pm a)$, де $a = \text{const}$.

Задача 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx$,

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$,

в) $\int \mathrm{e}^{7x-5}\,dx$,

г) $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2\,d\,x$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx$. При знаходженні інтеграла чисельник почлено ділимо на знаменник. Маємо під інтегралом три доданки. Від кожного знаходимо інтеграл, застосовуючи формули 2 і 3 таблиці.

$$I=\int\frac{3\cdot\sqrt[4]{x}-4x+5x^3}{x^2}dx=\int\left(3\cdot\frac{\sqrt[4]{x}}{x^2}-4\cdot\frac{x}{x^2}+5\cdot\frac{x^3}{x^2}\right)dx=$$

$$=\int\left(3\cdot x^{-\frac{7}{4}}-4\cdot\frac{1}{x}+5\cdot x\right)dx=3\int x^{-\frac{7}{4}}dx-4\int\frac{dx}{x}+5\int xdx=$$

$$=3\cdot\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}}-4\cdot\ln|x|+5\cdot\frac{x^2}{2}+C=-4\cdot x^{-\frac{3}{4}}-4\cdot\ln|x|+\frac{5}{2}\cdot x^2+C.$$

Відповідь: $I=-4\cdot x^{-\frac{3}{4}}-4\cdot\ln|x|+\frac{5}{2}\cdot x^2+C$.

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. Можемо застосувати формулу 2б), де $u=3-2x$, і врахуємо лінійність аргументу u. За властивістю е) коефіцієнт лінійності дорівнює: -2.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}=-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3-2x}+C=-\sqrt{3-2x}+C.$$

Відповідь: $I=-\sqrt{3-2x}+C$.

в) $\int e^{7x-5}\,dx$. Застосовуємо формулу 4а). За властивістю е) коефіцієнт лінійності дорівнює: 7.

$$I=\int e^{7x-5}\,dx=\frac{1}{7}\cdot e^{7x-5}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{7}\cdot e^{7x-5}+C$.

г) $\int(\cos 3x-\sin 3x)^2\,dx$. Підінтегральну функцію піднесемо до квадрата і враховуючи, що $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$ і $2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x = \sin 6x$, матимемо

$$\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx = \int \left(\cos^2 3x - 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x + \sin^2 3x\right) dx =$$

$$= \int (1 - \sin 6x)\, dx = \int dx - \int \sin 6x\, dx = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C.$$

Відповідь: $I = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C$.

2) Метод заміни змінної (метод підстановки).

Згідно цього метода вводять нову змінну інтегрування. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$. Функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційовна на проміжку $(\alpha;\beta)$ і $x \in (a;b)$: $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$. Тоді справедлива формула:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{1.2}$$

Зручним є і такий запис:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Підстановку $u = \phi(x)$ підбирають так, щоб мати після перетворення табличний інтеграл.

Задача 2. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx$,

б) $\int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx$,

в) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$.

Розв'язання.

а) $\int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx$. Оскільки $d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x\,dx$, то зробимо заміну змінної $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$. Матимемо:

$$I = \int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(\frac{\sin^5 x}{5} + C\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x = \sin^4 x \cdot \cos x.$$

Відповідь: $I = \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$.

б) $I = \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x^2 + 8 \\ du = d(3x^2 + 8) = (3x^2 + 8)' dx = 6x\,dx \end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{6} \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Відповідь: $I = \dfrac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C$

в) $I = \int \dfrac{dx}{e^x + 1} = \left[\begin{array}{l} u = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(u - 1) \\ dx = \dfrac{du}{u - 1} \end{array}\right] = \int \dfrac{du}{u(u - 1)} =$

$$= -\int \frac{u - 1 - u}{u(u - 1)} du = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{(u - 1)} = -\ln|u| + \ln|u - 1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{u - 1}{u}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x}{e^x + 1}\right| + C = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C = x - \ln(e^x + 1) + C.$$

Відповідь: $I = x - \ln(e^x + 1) + C$.

3) Метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1.3}$$

До інтегралів, які обчислюються методом інтегрування частинами відносяться:

а) $\int P_n(x)\sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int P_n(x)\cos(\alpha x+\beta)dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x+\beta}dx$,

$$\int P_n(x)a^{\alpha x+\beta}dx,\ \int \frac{ax+b}{\cos^2(\alpha x+\beta)}dx,\ \int \frac{ax+b}{\sin^2(\alpha x+\beta)}dx, \tag{1.4}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеню, a, b, α, β – дійсні числа. У цих інтегралах через u позначаємо $P_n(x)$ або $ax+b$, а через dv – один з виразів $\cos(\alpha x+\beta)dx$, $\sin(\alpha x+\beta)dx$, $a^{\alpha x+\beta}dx$, $e^{\alpha x+\beta}dx$, $\dfrac{dx}{\cos^2(\alpha x+\beta)}$, $\dfrac{dx}{\sin^2(\alpha x+\beta)}$;

б) $\int P_n(x)\arcsin f(x)dx$, $\int P_n(x)\arccos f(x)dx$,

$\int P_n(x)\operatorname{arctg} f(x)dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} f(x)dx$, $\int P_n(x)\ln f(x)dx$,

$$\int P_n(x)\log_a f(x)dx, \tag{1.5}$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеню (n може дорівнювати нулю), $f(x)$ – відома функція з умови.

В цих інтегралах через u позначаємо один з виразів $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\operatorname{arcctg} f(x)$, $\ln f(x)$, $\log_a f(x)$, а через dv – $P_n(x)dx$.

Існують інші типи інтегралів для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Зауваження. При застосуванні метода інтегрування частинами треба підінтегральний вираз розбити на два множники: u і dv, а саме: dx треба віднести до dv, dv повинен бути таким, щоб інтегруванням легко знайти v. Інколи доводиться формулу інтегрування частинами застосовувати декілька разів.

Задача 3. Знайти інтеграли:

а) $\int x\cos 4x\,dx$,

б) $\int (3x+5)\sin(1-2x)\,dx$,

в) $\int x\ln(x+3)\,dx$,

г) $\int \frac{3x-2}{\cos^2 4x}\,dx$,

д) $\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,dx$.

Розв'язання.

а) $I=\int x\cos 4x\,dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & du=dx \\ dv=\cos 4x\,dx & v=\frac{1}{4}\sin 4x \end{array}\right]=$

$$=\frac{x}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\int \sin 4x\,dx=\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C.$$

Відповідь: $I=\frac{x}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$.

б) $I=\int (3x+5)\sin(1-2x)\,dx=$

$$=\left[\begin{array}{c|c} u=3x+5 & du=3dx \\ dv=\sin(1-2x)\,dx & v=\frac{1}{2}\cos(1-2x) \end{array}\right]=(3x+5)\frac{1}{2}\cos(1-2x)-$$

$$-\int \frac{1}{2}\cos(1-2x)3\,dx=\frac{3x+5}{2}\cos(1-2x)-\frac{3}{2}\int \cos(1-2x)\,dx=$$

$$=\frac{3x+5}{2}\cos(1-2x)+\frac{3}{4}\sin(1-2x)+C.$$

Відповідь: $I=\frac{3x+5}{2}\cos(1-2x)+\frac{3}{4}\sin(1-2x)+C$.

в) $I=\int x\ln(x+3)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\ln(x+3) & du=\dfrac{1}{x+3}dx \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right]=$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+3}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+3}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} -\,x^2 \quad \big|\, x+3 \\ \underline{\;x^2+3x\;} \quad \big|\, \overline{x-3} \\ \quad -\;-3x \\ \quad \underline{\;-3x-9\;} \\ \qquad 9 \end{array}\right]=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+9\ln|x+3|\right)+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}-3x+9\ln|x+3|\right)+C.$

г) $I=\int\dfrac{3x-2}{\cos^2 4x}dx=\left[\begin{array}{c|c} u=3x-2 & du=3dx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 4x} & v=\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}4x\end{array}\right]=\dfrac{3x-2}{4}tg4x-$

$$-\frac{1}{4}\int\operatorname{tg}4x\cdot 3dx=\frac{3x-2}{4}\operatorname{tg}4x+\frac{3}{16}\ln|\cos 4x|+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{3x-2}{4}\operatorname{tg}4x+\dfrac{3}{16}\ln|\cos 4x|+C.$

д) $I=\int e^{2x}\sin xdx=\left[\begin{array}{c|c} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{array}\right]=-e^{2x}\cos x+$

$$+2\int e^{2x}\cos xdx=\left[\begin{array}{c|c} u=e^{2x} & du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{array}\right]=-e^{2x}\cos x+$$

$$+2\left(e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin dx\right)=-e^{2x}\cos x+2e^{2x}\sin x-4\int e^{2x}\sin dx.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$5\int e^{2x}\sin d\,x = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin\,x\,,$$

$$\int e^{2x}\sin d\,x = \frac{1}{5}\left(-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin\,x\right) + C = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin\,x - \cos x\right) + C\,.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin\,x - \cos x\right) + C$.

4) Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен у знаменнику.

До цих інтегралів відносяться:

$$1)\ \int\frac{Adx}{ax^2+bx+c},\ 2)\ \int\frac{Bdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ 3)\ \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$$

$$4)\ \int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\,. \tag{1.6}$$

Для інтегралів типів 1), 2) необхідно виділити повний квадрат у квадратному тричлені:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right). \tag{1.7}$$

Заміна $x+\frac{b}{2a}=u$ приводить інтеграл до табличного: для інтеграла типу 1) маємо табличний інтеграл 13 або 14, а для інтеграла типу 2) маємо табличний інтеграл 15 або 16.

Для інтегралів типів 3), 4) необхідно у чисельнику виділити похідну квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику, і чисельник почлено поділити на знаменник. Отримаємо два інтеграли, перший з яких знаходимо за Таблицею інтегралів: формула 19 (для інтеграла типу 3)) або 20 (для інтеграла типу 4)). Другий інтеграл є інтегралом типу 1) або 2).

Задача 4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{2-3x}{2x^2+6x-7}dx$,

б) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx$.

Розв'язання.

а) $I=\int \frac{2-3x}{2x^2+6x-7}dx=$

$$=\left[\begin{array}{l} 1)(2x^2+6x-7)'=4x+6; \\ 2)\ 2-3x=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)=-0{,}75\left(4x-\frac{8}{3}\right)= \\ =-0{,}75\left(4x+6-6-\frac{8}{3}\right)=-0{,}75(4x+6)+6{,}5; \\ 3)\ 2x^2+6x-7=2\left(x^2+3x-3{,}5\right)= \\ =2\left((x+1{,}5)^2-2{,}25-3{,}5\right)=2\left((x+1{,}5)^2-5{,}75\right) \end{array}\right]=$$

$$=\int \frac{-0{,}75(4x+6)+6{,}5}{2x^2+6x-7}dx=-0{,}75\int \frac{4x+6}{2x^2+6x-7}dx+$$

$$+6{,}5\int \frac{dx}{2\left((x+1{,}5)^2-5{,}75\right)}=-0{,}75\ln\left|2x^2+6x-7\right|+3{,}25\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{23}{4}}=$$

$$=-0{,}75\ln\left|2x^2+6x-7\right|+\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{23}}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}}{x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}}\right|+C=$$

$$-0{,}75\ln\left|2x^2+6x-7\right|+\frac{13}{4\sqrt{23}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{23}}{2x+3+\sqrt{23}}\right|+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}75\ln\left|2x^2+6x-7\right|+\frac{13}{4\sqrt{23}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{23}}{2x+3+\sqrt{23}}\right|+C$.

б) $I=\int\frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx=$

$$=\left[\begin{array}{l}1)(4-2x-x^2)'=-2-2x;\\ 2)\ 3x-4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{2}\left(-2x+\frac{8}{3}\right)=\\ =-\frac{3}{2}\left(-2x-2+2+\frac{8}{3}\right)=-\frac{3}{2}(-2x-2)-7;\\ 3)\ 4-2x-x^2=-(x^2+2x-4)=\\ =-(x^2+2x+1-1-4)=-(x+1)^2+5.\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-\frac{3}{2}(-2x-2)-7}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{-2x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{4-2x-x^2}-7\arcsin\frac{x+1}{\sqrt5}+C=-3\sqrt{4-2x-x^2}-$$

$$-7\arcsin\frac{x+1}{\sqrt5}+C.$$

Відповідь: $I=-3\sqrt{4-2x-x^2}-7\arcsin\frac{x+1}{\sqrt5}+C$.

5) Інтегрування дробово-раціональних функцій.

До цих функцій відносяться дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Якщо $n\geq m$, то дріб є неправильний. Треба виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

де $S(x)$ – неповна частка (ціла частина),

$\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб (степінь многочлена $R(x)$ менший за m).

Якщо правильний дріб не є простий, то необхідно знаменник $Q_m(x)$ розкласти на множники (множниками можуть бути многочлени вигляду: $x \pm x_1$, $(x \pm x_2)^k$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^k$, $x^2 + a^2$, $(x^2 + a^2)^k$ з дискримінантом квадратного тричлена меншим нуля).

Потім правильний дріб розкладають на прості дроби. Простих дробів буде стільки, скільки множників у знаменнику, враховуючи кратність кожного. У чисельниках простих дробів записують многочлени в загальному вигляді, не враховуючи кратність многочленів у знаменнику. Коефіцієнти чисельників знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або комбінованим методом. При інтегруванні правильних простих дробів можемо мати такі інтеграли:

$$\int \frac{A}{x \pm x_1} dx = A \cdot \ln|x \pm x_1| + C; \tag{1.8}$$

$$\int \frac{A}{(x \pm x_2)^k} dx = A \cdot \frac{(x \pm x_2)^{1-k}}{1-k} + C, \ k \neq 1; \tag{1.9}$$

$$\int \frac{A}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \tag{1.10}$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2 + a^2\right| + \frac{B}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C . \qquad (1.11)$$

Інтеграли $\int \frac{A}{x^2 + px + q}\,d\,x,\ \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,d\,x$ – розглянуті в інтегруванні квадратних тричленів з $D < 0$.

Інтеграл $\int \frac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^k}\,d\,x$, $k \in N,\ k > 1$ обчислюється за рекурентною формулою:

$$\int \frac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^k}\,d\,x = \frac{A}{2(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + m^2\right)^k} ,$$

де $t = x + \frac{p}{2}$, $m^2 = q - \frac{p^2}{4}$. При цьому многочлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Інтеграл $\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = I_k$ можна знайти використовуючи рекурентну формулу:

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1} . \qquad (1.12)$$

Задача 5. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x+1}{(x+2)\left(x^2+1\right)}\,d\,x$,

б) $\int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}$,

в) $\int \frac{x^2 + 24x - 45}{(x+3)\left(x^2 - 8x + 21\right)}\,d\,x$.

Розв’язання.

а) $I=\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}dx$.

Підінтегральна функція $\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}$ є правильним раціональним дробом. Представимо його у вигляді суми простих дробів. У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+x_1)$ відповідає дріб $\frac{A}{x+x_1}$, множнику виду (x^2+a^2) – дріб $\frac{Bx+C}{x^2+a^2}$.

Таким чином,

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

де коефіцієнти A, B, C треба визначити.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$x+1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)$$

або

$$x+1\equiv x^2(A+B)+x(2B+C)+A+2C.$$

Для знаходження коефіцієнтів чисельників застосуємо комбінований метод: метод окремих значень аргументу та метод порівняння коефіцієнтів. Спочатку підставимо в останню тотожність значення змінної $x=-2$, а потім для знаходження коефіцієнтів B та C прирівняємо вирази при x^2 та x^1, що стоять у лівій та правій частинах останньої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|l}
x=-2 & -2+1=A((-2)^2+1)+(B(-2)+C)(-2+2)\Rightarrow -1=5A,\ \ A=-0{,}2;\\
x^2 & 0=A+B,\qquad B=1/5=0{,}2;\\
x & 1=2B+C,\qquad C=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6.
\end{array}$$

Тоді $\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{-0{,}2}{x+2}+\frac{0{,}2x+0{,}6}{x^2+1}$.

$$I=\int\frac{x+1}{(x+2)\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{-0{,}2}{x+2}dx+\int\frac{0{,}2x+0{,}6}{x^2+1}dx=$$

$$=-0{,}2\int\frac{dx}{x+2}+0{,}2\int\frac{xdx}{x^2+1}+0{,}6\int\frac{dx}{x^2+1}=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\int\frac{2xdx}{x^2+1}+$$

$$+0{,}6\,\mathrm{arctg}\,x+C=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\ln\left|x^2+1\right|+0{,}6\,\mathrm{arctg}\,x+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\ln\left|x^2+1\right|+0{,}6\,\mathrm{arctg}\,x+C$.

б) $I=\int\frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

Підінтегральна функція $\frac{3}{(x-1)^2(x+1)}$ є правильним раціональним дробом. Представимо його у вигляді суми простих дробів. У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+x_1)$ відповідає дріб $\frac{A}{x+x_1}$, множнику виду $(x-x_2)^2$ – сума двох дробів $\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{(x-x_2)^2}$. Таким чином,

$$\frac{3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1},$$

де коефіцієнти A, B, C треба визначити.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$3\equiv A(x+1)+B\left(x^2-1\right)+C(x-1)^2$$

або

$$3\equiv x^2(B+C)+x(A-2C)+A-B+C.$$

Для знаходження коефіцієнтів чисельників застосуємо комбінований метод: метод окремих значень аргументу та метод порівняння коефіцієнтів. Спочатку підставимо в останню тотожність значення змінної $x=-1$ і $x=1$, а потім прирівняємо вирази при x^2, що стоять у лівій та правій частинах першої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3=4C \\ x=1 & 3=2A \\ x^2 & 0=B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} C=3/4=0{,}75; \\ A=3/2=1{,}5; \\ B=-3/4=-0{,}75 \end{cases}$$

або прирівняємо вирази при x^2, x^1 та x^0, що стоять у лівій та правій частинах другої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0=B+C \\ x & 0=A-2C \\ x^0 & 3=A-B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A-2C=0, \\ A+2C=3. \end{cases} \Rightarrow 2A=3 \Rightarrow A=1{,}5 \Rightarrow \begin{cases} A=1{,}5; \\ C=0{,}75; \\ B=-0{,}75. \end{cases}$$

Тоді $\dfrac{3}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{1{,}5}{(x-1)^2}+\dfrac{-0{,}75}{x-1}+\dfrac{0{,}75}{x+1}$.

$$I=\int\frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}=\int\frac{1{,}5}{(x-1)^2}dx+\int\frac{-0{,}75}{x-1}dx+\int\frac{0{,}75}{x+1}dx=$$

$$=1{,}5\int\frac{dx}{(x-1)^2}-0{,}75\int\frac{dx}{x-1}+0{,}75\int\frac{dx}{x+1}=-1{,}5\cdot\frac{1}{x-1}--0{,}75\ln|x-1|+$$

$$+0{,}75\ln|x+1|+C=-\frac{1{,}5}{x-1}-0{,}75\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Відповідь: $I=-\dfrac{1{,}5}{x-1}-0{,}75\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$.

в) $I=\displaystyle\int\frac{x^2+24x-45}{(x+3)(x^2-8x+21)}dx$.

Підінтегральна функція $\dfrac{x^2+24x-45}{(x+3)(x^2-8x+21)}$ є правильним раціональним дробом. Представимо його у вигляді суми простих дробів. У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+x_1)$

відповідає дріб $\dfrac{A}{x+x_1}$, множнику виду (x^2+px+q) – дріб $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$. Таким чином,

$$\frac{x^2+24x-45}{(x+3)\left(x^2-8x+21\right)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2-8x+21},$$

де коефіцієнти A, B, C треба визначити.

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+24x-45}{(x+3)\left(x^2-8x+21\right)}=\frac{A\left(x^2-8x+21\right)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)\left(x^2-8x+21\right)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$x^2+24x-45\equiv A\left(x^2-8x+21\right)+(Bx+C)(x+3).$$

Для знаходження коефіцієнтів чисельників застосуємо комбінований метод: метод окремих значень аргументу та метод порівняння коефіцієнтів. Спочатку підставимо в тотожність значення змінної $x=-3$, а потім для знаходження коефіцієнтів B та C прирівняємо вирази при x^2 та x^0, що стоять у лівій та правій частинах останньої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|l} x=-3 & 9-72-45=A(9+24+21)\Rightarrow -108=54A, \quad A=-2; \\ x^2 & 1=A+B, \quad B=3; \\ x^0 & -45=21A+3C, \quad C=-1. \end{array}$$

Тоді $\dfrac{x^2+24x-45}{(x+3)\left(x^2-8x+21\right)}=\dfrac{-2}{x+3}+\dfrac{3x-1}{x^2-8x+21}$.

$$I=\int\frac{x^2+24x-45}{(x+3)\left(x^2-8x+21\right)}dx=\int\frac{-2}{x+3}dx+\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-8x+21}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} 1)(x^2-8x+21)'=2x-8; \\ 2)\ 3x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(2x-8+8-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}(2x-8)+11; \\ 3)\ x^2-8x+21=x^2-8x+16-16+21=(x-4)^2+5. \end{array}\right]=$$

$$= -2\ln|x+3| + \int \frac{\frac{3}{2}(2x-8)+11}{x^2-8x+21}dx = -2\ln|x+3| + \frac{3}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+21}dx +$$

$$+11\int \frac{1}{(x-4)^2+5}dx = -2\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln\left|x^2-8x+21\right| + \frac{11}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{\sqrt{5}} + C.$$

Відповідь: $I = -2\ln|x+3| + \frac{3}{2}\ln\left|x^2-8x+21\right| + \frac{11}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{\sqrt{5}} + C$.

6) Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ за допомогою універсальної підстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad (1.13)$$

зводяться до інтегралів від раціональних дробів.

У деяких випадках застосовують інші підстановки, які спрощують знаходження інтегралів. Розглянемо ці випадки.

1) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\sin x = t,\ \cos x = \sqrt{1-t^2},\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (1.14)$$

2) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\cos x = t,\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \qquad (1.15)$$

3) Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\operatorname{tg} x = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt. \qquad (1.16)$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходяться підстановкою:

1) якщо n – ціле додатне непарне число, а m – ціле додатне парне число, то $\sin x = t$;

2) якщо m – ціле додатне непарне число, а n – ціле додатне парне число, то $\cos x = t$;

3) якщо n і m – цілі додатні парні числа, застосовують формули зниження степеня:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ та } \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

4) якщо n і m – цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, або n і m – цілі непарні і від'ємні числа, то робимо заміну (1.16).

Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ зводяться до табличних за допомогою формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right); \tag{1.17}$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right); \tag{1.18}$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right). \tag{1.19}$$

Задача 6. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$,

б) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$,

в) $\int \cos 3x \cdot \sin 2x dx$,

г) $\int \frac{dx}{3-\cos x}$.

Розв'язання.

а) $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$

$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d\cos x = -\int \cos^2 x d\cos x + \int \cos^4 x d\cos x =$

$$=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C$.

б) $I=\int \sin^2 x\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx=$

$$=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int \cos 4x dx=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

в) $I=\int \cos 3x\cdot\sin 2x dx=\int \sin 2x\cdot\cos 3x dx=$

$$\int \frac{1}{2}(\sin(2x-3x)+\sin(2x+3x))dx=\frac{1}{2}\int (\sin 5x-\sin x)dx=\frac{1}{2}\int \sin 5x dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int \sin x dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{2}(-\cos x)+C=-0{,}1\cos 5x+0{,}5\cos x+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}1\cos 5x+0{,}5\cos x+C$.

г) $I=\int \frac{dx}{3-\cos x}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right]=$

$$=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-1+t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{4t^2+2}=\frac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1/2}}+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{2}\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+C.$$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\sqrt{2}\right)+C$.

7) Інтегрування ірраціональних виразів.

Розглянемо деякі з них.

1) Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}, ..., x^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx,$$

де n_i, m_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ – цілі додатні числа.

Робимо заміну $x = t^s$, де s є спільним знаменником дробів $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, ..., \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t.

2) Інтеграли вигляду

$$\int R\left(\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_2}{m_2}}, ..., \left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx,$$

де n_i, m_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ – цілі додатні числа,

a_1, b_1, a_2, b_2 – дійсні числа: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Заміна: $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} = t^s$, де s є спільним знаменником дробів $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, ..., \frac{n_k}{m_k}$, приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t.

3) Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{m^2 - x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{m^2 + x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - m^2}\right)dx$:

а) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{m^2 - x^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = m\cos t,\ dx = -m\sin t dt,\ \sqrt{m^2 - x^2} = m\sin t\,, \qquad (1.20)$$

або $x = m\sin t$;

б) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{m^2 + x^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = m\,\mathrm{tg}\,t,\ dx = \frac{m}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{m^2 + x^2} = \frac{m}{\cos t}\,; \qquad (1.21)$$

або $x = m\,\mathrm{ctg}\,t$;

в) якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2 - m^2}$, то застосовуємо заміну:

$$x = \frac{m}{\cos t},\ dx = \frac{m\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{x^2 - m^2} = \frac{m\sin t}{\cos t}. \qquad (1.22)$$

або $x = \dfrac{m}{\sin t}$.

Наведені заміни приводять до інтегралу від тригонометричних функцій аргументу t.

Задача 7. Знайти інтеграл $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \left\{ \begin{matrix} x = t^6;\ t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right\} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2 + t^3} =$$

$$= 6\int \frac{t^8}{t^2(t+1)}dt = 6\int \frac{t^6}{t+1}dt = 6\int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| \right) + C.$$

Відповідь:

$$I=6\left(\frac{x}{6}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C.$$

Задача 8. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}dx$.

Розв’язання.

Оскільки підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{2-x^2}$, то скористаємся формулою (1.20):

$$I=\int\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}dx=\left[x=\sqrt{2}\sin t,\ dx=\sqrt{2}\cos t dt,\ \sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t\right]=$$

$$=\int\frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2}\sin t}\sqrt{2}\cos t dt=\sqrt{2}\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\sqrt{2}\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=\sqrt{2}\int\frac{1}{\sin t}dt-$$

$$-\sqrt{2}\int\sin t dt=\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\sqrt{2}\cos t+C=\left[t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]=$$

$$=\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|+\sqrt{2}\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Відповідь: $I=\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|+\sqrt{2}\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку інтегрування $[a;b]$, a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування, обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2.1}$$

де $F(x)$ є первісною для підінтегральної функції $f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

1) $\int_a^b dx = b - a$.

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4) Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;c]$ і на $[c;b]$, то вона інтегровна і на $[a;b]$, причому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Зауваження. Точка c може бути довільно розташована відносно точок a і b.

5) $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$,

де $k = \text{const}$.

6) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

7) Якщо відрізок інтегрування $\left[-a;a\right]$ симетричний, то для парної підінтегральної функції $f\left(x\right)$ $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)dx$, а для непарної функції $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 0$.

Для знаходження первісної $F\left(x\right)$ при обчисленні визначеного інтеграла можна застосувати табличні інтеграли та методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів.

Задача 9. Знайти інтеграли:

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$,

б) $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Розв'язання.

а) $I = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg} x d\left(\operatorname{tg} x\right) = \left.\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/4} =$

$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $I = \frac{1}{3}$.

б) $I = \int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left[\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right)\right] = \int\limits_{1}^{e^3} \frac{d\left(\ln x\right)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2 \cdot \left.\sqrt{1+\ln x}\right|_{1}^{e^3} =$

$= 2\left(\sqrt{1+\ln e^3} - \sqrt{1+\ln 1}\right) = \left[\ln 1 = 0\right] = 2\left(\sqrt{1+3\ln e} - 1\right) = \left[\ln e = 1\right] = 2\left(\sqrt{4} -\right.$

$\left.-1\right) = 2\left(2-1\right) = 2$.

Відповідь: $I = 2$.

Розглянемо деякі методи інтегрування визначеного інтеграла.

1) Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ задовольняють умовам: функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,. \qquad (2.2)$$

2) Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,. \qquad (2.3)$$

Випадки її застосування аналогічні, як у невизначеному інтегралі.

Задача 10. Знайти інтеграли, застосовуючи заміну змінної:

а) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$,

б) $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}dx$.

Розв’язання.

а) $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c|c} x = 2\sin t & \alpha = 0,\ \beta = \pi/2 \\ a = 0, b = 2 & dx = 2\cos t dt \end{array} \right\} =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right] = \pi\,.$$

Відповідь: $I = \pi$.

б) $I=\int\limits_{0}^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=\Bigg[\sqrt{1-e^{2x}}=t,\ 1-e^{2x}=t^2,\ x=\frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right),$

$dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{1-t^2}dt=\frac{t}{t^2-1}dt,\ a=0\Rightarrow\alpha=0,\ b=-\ln 2\Rightarrow\beta=\sqrt{1-e^{2(-\ln 2)}}=$

$=\sqrt{1-e^{\left(\ln\frac{1}{4}\right)}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Bigg]=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t\cdot t}{t^2-1}dt=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$

$=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right|-\ln 1\right)=$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+$

$+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$

Задача 11. Знайти інтеграли, застосовуючи формулу інтегрування частинами:

а) $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\sin x\,dx,$

б) $\int\limits_{1}^{2}\ln\left(2x-1\right)dx.$

Розв'язання.

а) $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}x\sin x\,dx=\begin{bmatrix}u=x, & dv=\sin x\,dx\\ du=dx, & v=-\cos x\end{bmatrix}=$

$=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx=0+\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1.$

Відповідь: $I=1.$

б) $I=\int\limits_1^2 \ln(2x-1)dx=\left[\begin{matrix} u=\ln(2x-1), \; du=\dfrac{2}{2x-1}dx \\ dv=dx, \; v=x \end{matrix}\right]=$

$=x\ln(2x-1)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 \dfrac{2x}{2x-1}dx=2\ln 3-\ln 1-\int\limits_1^2 \dfrac{2x-1+1}{2x-1}dx=2\ln 3-$

$-\int\limits_1^2\left(1+\dfrac{1}{2x-1}\right)dx=2\ln 3-\left(x+\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_1^2=2\ln 3-(2-1)-$

$-\dfrac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=2\ln 3-1-\dfrac{1}{2}\ln 3=1{,}5\ln 3-1$.

Відповідь: $I=1{,}5\ln 3-1$.

2.1 Невласні інтеграли першого та другого роду

1) ***Невласні інтеграли I роду*** (інтеграли з нескінченними межами інтегрування). До них відносяться інтеграли вигляду:

$$\text{а) } \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx, \text{ б) } \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx, \text{ в) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \qquad (2.4)$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. За властивістю 4) розіб'ємо його на два інтеграли: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx$, перший з яких відповідає інтегралу а), а другий – інтегралу б). Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$, то $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$.

Аналогічно $\int\limits_c^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$.

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^c+\lim\limits_{b\to\infty} F(x)\Big|_c^b=$$

$$=F(c)-\lim_{a\to-\infty}F(a)+\lim_{b\to\infty}F(b)-F(c)=\lim_{b\to\infty}F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a). \quad (2.5)$$

Якщо обидві границі існують (скінченні числа), то невласний інтеграл першого роду є збіжним, в іншому випадку – розбіжним. Аналогічно знаходяться інтеграли а) і б).

2) ***Невласні інтеграли II роду*** (інтеграли від розривних функцій). До них відносяться інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$, для яких підінтегральна функція $f(x)$ невизначена або при $x=a$, або при $x=b$, або при $x=c,\ c\in(a;b)$.

Припустимо, що функція $f(x)$ невизначена при $x=c,\ c\in(a;b)$. Розглянемо інтеграл:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0}F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to0}F(x)\Big|_{c+\varepsilon_2}^b=\lim_{\varepsilon_1\to0}F(c-\varepsilon_1)-F(a)+F(b)-$$

$$-\lim_{\varepsilon_2\to0}F(c+\varepsilon_1). \quad (2.6)$$

Якщо обидві границі існують (скінченні числа), то невласний інтеграл другого роду є збіжним, в іншому випадку – розбіжним. Аналогічно знаходяться інтеграли, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x=a$ або при $x=b$.

Задача 12. Обчислити невласні інтеграли першого роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}$,

б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Розв’язання.

а) $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}=\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^b\left(4+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4+x^2\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\sqrt{4+x^2}\Big|_o^b=$

$=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\sqrt{4+b^2}-2\right)=\infty$ – інтеграл розбіжний.

Відповідь: інтеграл розбіжний

б) $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int\limits_a^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$

$=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^b=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(a+1)\right)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$

$=\pi$ – інтеграл збіжний.

Відповідь: $I=\pi$, інтеграл збіжний.

Задача 13. Обчислити невласні інтеграли другого роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx$,

б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Розв'язання.

а) $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx=$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1}\ln(2x-1)d(\ln(2x-1))=\frac{1}{2}\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{\ln^2(2x-1)}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^{1}=\frac{1}{4}\Big(\ln^2 1-$

$-\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln^2(2\varepsilon)\Big)=+\infty$ – інтеграл розбіжний.

Відповідь: інтеграл розбіжний.

б) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\arcsin 2x\Big|_0^{\frac{1}{2}-\varepsilon}=$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left(\arcsin\left(2\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right)-\arcsin 0\right)=\frac{1}{2}\arcsin 1=\frac{\pi}{4}$ – інтеграл збіжний.

Відповідь: $I=\frac{\pi}{4}$, інтеграл збіжний.

2.2 Застосування визначених інтегралів

2.2.1 Обчислення площі плоскої фігури

1) Якщо плоска фігура обмежена кривою $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, двома прямими $x=a$ та $x=b$ і віссю Ox (рис. 2.1),

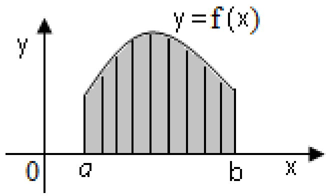


Рисунок 2.1

то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.7}$$

2) Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$ і прямими $x=a$, $x=b$ ($a<b$ і $f_2(x)\geq f_1(x)$) (рис. 2.2),

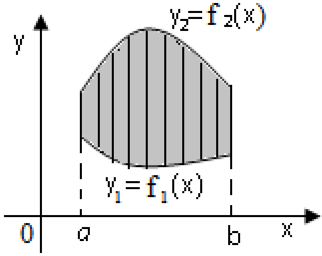


Рисунок 2.2

то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{2.8}$$

3) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t \in [t_1; t_2]$, то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt. \tag{2.9}$$

4) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha; \beta]$ (рис. 2.3),

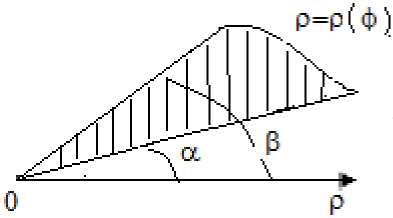


Рисунок 2.3

то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\phi)d\phi\,. \qquad (2.10)$$

Задача 14. Знайти площу фігури, яка обмежена лініями:

а) $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=0, x=\mathrm{e} \end{cases}$,

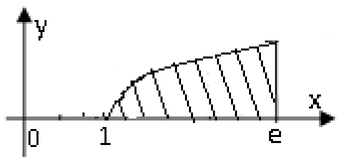
б) $\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=x^2-2 \end{cases}$,

в) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $0\le \mathrm{t}\le 2\pi$ та віссю Ox,

г) $\rho^2=2\cos 2\varphi$.

Розв'язання.

а) $y=\ln x$, $y=0$, $x=\mathrm{e}$. Зробимо рисунок фігури.

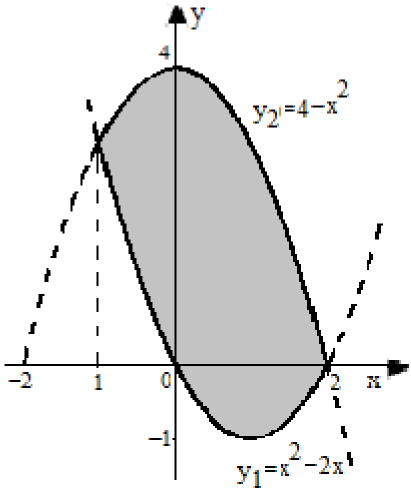


Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.7). З умови задачі маємо: $f(x)=\ln x$, $a=0, b=\mathrm{e}$.

$$S=\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}} x\frac{dx}{x}==\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=1\,(\text{кв.од.}).$$

Відповідь: $S=1$ кв. од.

б) $\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=x^2-2. \end{cases}$ Зробимо рисунок і знайдемо абсциси точок перетину ліній.



$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = x^2 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 - 2x,\ 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

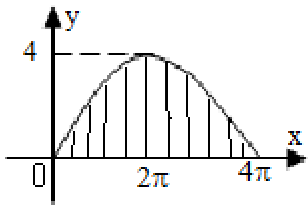
Площу фігури знайдемо за формулою (2.8).

$$S = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right) dx = \int_{-1}^{2} \left(4 - 2x^2 + 2x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 8 -$$

$$- \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 9 \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $S = 9$ кв. од.

в) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ та віссю Ox. Зробимо рисунок.



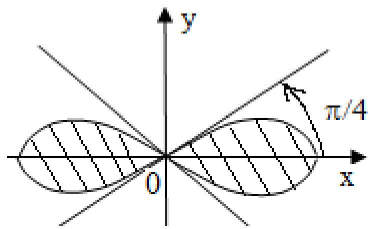
Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.9). Маємо $y=2(1-\cos t),\ x'=2(1-\cos t),\ t_1=0,\ \ t_2=2\pi$. Тоді

$$S=\int_0^{2\pi}2^2(1-\cos t)^2dt=4\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=4\left(t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_o^{2\pi}=12\pi\ (\text{кв.од.}).$$

Відповідь: $S=12\pi$ кв. од.

г) $\rho^2=2\cos 2\varphi$. Зробимо рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою (2.10). Фігура симетрична відносно осей координат. Знайдемо площу її чверті і помножимо на 4 . Маємо $\rho=\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $\alpha=0,\ \ \beta=\dfrac{\pi}{4}$.

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}2\cos 2\varphi d\varphi=2\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi/4}=2\ (\text{кв.од.}).$$

Відповідь: $S=2$ кв. од.

2.2.2 Обчислення довжини дуги гладкої кривої

1) Якщо крива задана рівнянням $y=f(x),\ \ x\in[a;\ b]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,. \tag{2.11}$$

2) Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt . \qquad (2.12)$$

3) Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi . \qquad (2.13)$$

Задача 15. Знайти довжину дуг гладких кривих, заданих рівняннями:

а) $\begin{cases} y^2 = x^3, x = 0, \\ x = \dfrac{4}{3}, \ (y \geq 0) \end{cases}$,

б) $\begin{cases} x = \cos^5 t, \\ y = \sin^5 t. \end{cases} \left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$,

в) $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

а) $y^2 = x^3$, $x = 0$, $x = \dfrac{4}{3}$, $(y \geq 0)$. Довжину дуги знайдемо за формулою (2.11). Маємо

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \ y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \ \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}, \ a = 0, \ b = \frac{4}{3} .$$

$$L = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x dx} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{27} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27} \text{ (лін. од).}$$

Відповідь: $L=\dfrac{56}{27}$ лін. од.

б) $\begin{cases} x=\cos^5 t, \\ y=\sin^5 t. \end{cases}$ $\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Довжину дуги знайдемо за формулою (2.12). Маємо $x'=-5\cos^4 t\sin t$, $y'=5\sin^4 t\cos t$, $t_1=0, t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Знайдемо $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}=\sqrt{\left(-5\cos^4 t\sin t\right)^2+\left(5\sin^4 t\cos t\right)^2}=$

$=\sqrt{25\cos^8 t\sin^2 t+25\sin^8 t\cos^2 t}=\sqrt{25\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^6 t+\sin^6 t\right)}=$

$=5\sin t\cos t\sqrt{\sin^6 t+\cos^6 t}=$

$=5\sin t\cos t\sqrt{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\left(\sin^4 t-\sin^2 t\cos^2 t+\cos^4 t\right)}=$

$=\dfrac{5}{2}\sin 2t\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\cos^2 2t}=\dfrac{5}{4}\sin 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}$.

Тоді

$$L=\frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,dt=-\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\,d\left(\cos 2t\right)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\cdot\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}\cos 2t+\sqrt{1+3\cos^2 2t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{5}{8}\left(1+\frac{\ln\left|\sqrt{3}+2\right|}{2\sqrt{3}}\right)\text{ (лін. од).}$$

Відповідь: $L=\dfrac{5}{8}\left(1+\dfrac{\ln\left|\sqrt{3}+2\right|}{2\sqrt{3}}\right)$ лін. од.

в) $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої знайдемо за формулою (2.13). Маємо $\rho' = 3\sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos\frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos\frac{\varphi}{3}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 \frac{\phi}{3} + \sin^4 \frac{\phi}{3} \cos^2 \frac{\phi}{3}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\phi}{3} d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2\phi}{3} \right) d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\phi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\phi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right) (\text{лін. од}).$$

Відповідь: $L = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$ лін. од.

2.2.3 Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо заданої осі

Крива, що обертається навколо заданої осі, утворює деяку поверхню.

1) Якщо крива задана рівнянням $y = f(x), x \in [a;b]$ і обертається навколо осі Ox, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx . \qquad (2.14)$$

2) Якщо крива задана рівнянням $x = \varphi(y), y \in [c;d]$ і обертається навколо осі Oy, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_y = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy . \qquad (2.15)$$

3) Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (2.16)$$

4) Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Oy, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt. \qquad (2.17)$$

5) Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (2.18)$$

Задача 16. Обчислити площу поверхні обертання, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy:

а) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ Ox,

б) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$, Ox,

в) $\rho = 1 - \cos\varphi$, навколо полярної осі.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ Ox. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою (2.14). Маємо $y' = 2\cos 2x$, $a = 0, b = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\, dx = \begin{bmatrix} 2\cos 2x = t,\ t_н = 2,\ t_в = -2 \\ -4\sin 2x dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right) \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $Q_x = \dfrac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$ кв. од.

б) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \end{cases}$ $\left(0 \le t \le 1\right)$, Ox. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою (2.16). Маємо $x' = 1$, $y' = -1$, $t_1 = 0, t_2 = 1$. Тоді

$$Q_x = 2\pi \int_0^1 (2 - t) \cdot \sqrt{1+1}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2 - t) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{2}\pi \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_x = 3\sqrt{2}\pi$ кв. од.

в) $\rho = 1 - \cos\varphi$ – кардіоїда, що обертається навколо полярної осі. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою (2.18). Маємо $\rho' = \sin\varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Тоді

$$Q = 2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\phi}{2}d\varphi = 32\pi\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\varphi}{2}d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 32\pi\left.\frac{\sin^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^{\pi} = \frac{32\pi}{5} = 6{,}4\,\pi \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $Q = 6{,}4\pi$ кв. од.

2.2.4 Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо заданої осі

1) Якщо плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a,\ x = b,\ y = 0\ \ (a < b)$ і обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2.19}$$

2) Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y = f_2(x),\ y = f_1(x)$ та прямими $x = a,\ x = b\ \left(a < b \text{ і } f_2(x) \geq f_1(x)\right)$ і обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi\int_a^b\left(f_2{}^2(x) - f_1^2(x)\right)dx. \tag{2.20}$$

3) Якщо плоска фігура обмежена кривою $x = \varphi(y)$ та прямими $y = c,\ y = d,\ x = 0$ і $(c < d)$ обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) d\,y . \qquad (2.21)$$

4) Якщо плоска фігура обмежена кривими: $x = \varphi_2(y), x = \varphi_1(y)$ та прямими $y = c,\ y = d$ $(c < d$ і $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y))$ і обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_y = \pi \int_c^d \left(\varphi_2{}^2(y) - \varphi_1^2(y)\right) d\,y . \qquad (2.22)$$

5) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt . \qquad (2.23)$$

6) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Oy, то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_y = \pi \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \cdot y'(t) dt . \qquad (2.24)$$

7) Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою у полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі,

то об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi)\cdot \sin\varphi\, d\varphi . \qquad (2.25)$$

Задача 17. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вказаної осі:

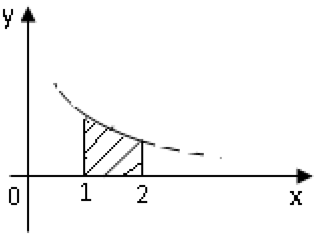
а) $\begin{cases} xy=1,\ y=0, \\ x=1,\ x=2, \end{cases}$ Ox,

б) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ Ox ,

в) $\rho=\sin 2\varphi$, навколо полярної осі.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} xy=1,\ y=0, \\ x=1,\ x=2, \end{cases}$ Ox. Фігура обертається навколо осі Ox. Зробимо рисунок.

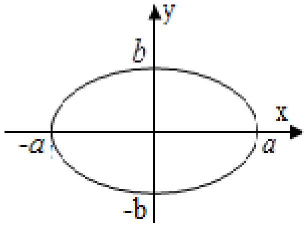


Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.19). Маємо $y_2=\frac{1}{x},\ y_1=0,\ a=1,\ b=2$. Тоді

$$V_x=\pi\int_1^2\frac{dx}{x^2}=-\frac{\pi}{x}\Big|_1^2=\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}\ \text{(куб. од.)}.$$

Відповідь: $V_x=\frac{\pi}{2}$ куб. од.

б) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ Ox. Маємо рівняння еліпса. Фігура обертається навколо осі Ox. Зробимо рисунок:



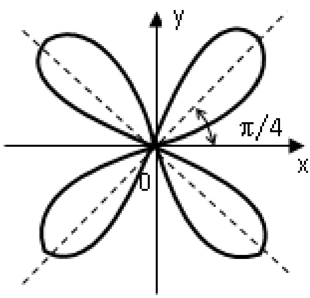
Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.23). Маємо $y = b\sin t$, $x' = -a\sin t$, $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy, подвоїмо результат.

$$V_x = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2 \sin^2 t \left(-a\sin t\right)dt = -2\pi ab^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t\, dt =$$

$$= 2\pi ab^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2 t\right) d\cos t = 2\pi ab^2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. од).}$$

Відповідь: $V_x = \dfrac{4}{3}\pi ab^2$ куб. од.

в) $\rho = \sin 2\varphi$ – чотирипелюсткова троянда. Фігура обертається навколо полярної осі. Зробимо рисунок:



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за формулою (2.25). Маємо $\alpha = 0,\ \beta = \dfrac{\pi}{2}$. Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy , подвоїмо результат.

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi/2} 8\sin^4\varphi \cdot \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{64\pi}{105} \text{ (куб. од).}$$

Відповідь: $V = \dfrac{64\pi}{105}$ куб. од.

2.2.5 Застосування визначених інтегралів у механіці та фізиці

Координати $(x_c; y_c)$ ***центра маси плоскої фігури*** обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса плоскої фігури,

M_x – статичний момент відносно осі Ox ,

M_y – статичний момент відносно осі Oy ,

$\gamma(x)$ – густина плоскої фігури ($\gamma(x) = 1$ для однорідної фігури).

1) Якщо плоска фігура обмежена лініями: $y = f_2(x),\ y = f_1(x)$, $x = a,\ x = b\ \ (a < b$ і $f_2(x) \ge f_1(x))$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \cdot (f_2(x) - f_1(x))\, dx, \tag{2.26}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x) \cdot \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx, \tag{2.27}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \tag{2.28}$$

2) Якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t) dt, \tag{2.29}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \cdot x'(t) dt, \tag{2.30}$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x(t) \cdot x'(t) dt. \tag{2.31}$$

3) Якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi, \tag{2.32}$$

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi, \tag{2.33}$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cos\varphi\, d\varphi. \tag{2.34}$$

Задача 18. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$ та віссю Ox.

Розв'язання.

Знайдемо M_x, M_y, m за формулами (2.30), (2.31), (2.29) відповідно.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)-\left(1-\sin^2 t\right)\cos t)dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(t-3\sin t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 2\pi=\frac{5}{2}a^3\pi;$$

$$M_y=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a\,(t-\sin t)a\,(1-\cos t)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,t\,dt+$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 d\cos t=a^3\int_0^{2\pi}t\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt+$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 d\cos t=a^3\int_0^{2\pi}t\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt-\frac{a^3}{3}(1-\cos t)^3\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\left[\int t\cos t\,dt=t\sin t+\cos t,\ \int t\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t\right]=$$

$$=a^3\left(\frac{3}{4}t^2-2t\sin t-2\cos t+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{3}a^3\cdot 0=$$

$$=\frac{3}{4}a^3\cdot 4\pi^2=3a^3\pi^2;$$

$$m=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3a^2\pi .$$

$$x_c = \frac{3a^3\pi^2}{3a^2\pi} = a\pi , \qquad y_c = \frac{5a^3\pi}{2\cdot 3a^2\pi} = \frac{5}{6}a .$$

Відповідь: $x_c = a\pi$, $y_c = \dfrac{5}{6}a$.

Координати $(x_c; y_c)$ ***центра маси плоскої кривої*** обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m};\ y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса плоскої кривої,

M_x – статичний момент відносно осі Ox ,

M_y – статичний момент відносно осі Oy ,

$\gamma(x)$ – густина плоскої кривої ($\gamma(x) = 1$ – для однорідної кривої).

1) Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x), x \in [a, b]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx , \qquad (2.29)$$

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx , \qquad (2.30)$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx . \qquad (2.31)$$

2) Якщо однорідна плоска крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \tag{2.32}$$

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \tag{2.33}$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{2.34}$$

3) Якщо однорідна плоска крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha; \beta]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\phi, \tag{2.35}$$

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\phi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\phi, \tag{2.36}$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \cos\phi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\phi. \tag{2.37}$$

Задача 19. Знайти координати центра маси однорідної плоскої дуги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої над віссю Ox.

Розв'язання.

Знайдемо m, M_x, M_y за наведеними вище формулами. Маємо $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$.

Тоді $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ і $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

$$M_x = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int_{-a}^{a} a\,dx = ax\Big|_{-a}^{a} = 2a^2,$$

$$M_y = \int_{-a}^{a} x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = -\frac{a}{2}\int_{-a}^{a} \frac{d\left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\Bigg|_{-a}^{a} = 0,$$

$$m = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = a \cdot \arcsin\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{a} = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a\pi .$$

$$x_c = \frac{0}{a\pi} = 0, \qquad y_c = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

Відповідь: $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{2a}{\pi}$.

Визначений інтеграл застосовують для знаходження:

1) роботи A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a, b]$, за формулою:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx; \tag{2.38}$$

2) шляху S, пройденого точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$ зі швидкістю $v(t)$ за формулою:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt; \tag{2.39}$$

3) маси m неоднорідного стержня з густиною $\gamma(x)$ на відрізку $[a, b]$ за формулою:

$$m = \int_a^b \gamma(x)\,dx. \tag{2.40}$$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Авдєєва Т. В., Дюженкова О. Ю., Листопадова В. В. Інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 151 с.
2. Вища математика: збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ : А.С.К., 2005. 480 с.
3. Вища математика : підруч. : у 2 кн. / Г. Й. Призва та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. 2-ге вид., перероб. і доп. Київ : Либідь, 2003. Кн. 1. 400 с.
4. Герасимчук В. С., Васильченко В. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. Київ : Книги України ЛТД, 2010. 470 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. Київ : А.С.К., 2003. 648 с.
6. Дьяченко Н. К. Інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. Дніпро : ДДАЕУ, 2022. 124 с.
7. Килимник І. М., Полякова Т. Г. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: навч. посіб. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. 306 с.
8. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Ю. І. Першина, О. П. Пріщенко, Н. В. Черемська, Т. Т. Черногор. Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. 188 с.
9. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. П. Вища математика : підруч. : у 2 ч. / за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ : Техніка, 2003. Ч. 1. 600 с.
10. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : Підручник . Дніпропетровськ : «Видавництво Сталкер», 2003. 496 с.
11. Панченко Н. Г., Резуненко М. Є. Вища математика: навч. посіб. Харків : УкрДУЗТ, 2023. Ч. 2. 251 с.