МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

“Математичні методи наукових досліджень в енергетиці”

для студентів спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
всіх форм навчання

2024

Конспект лекцій з дисципліни "Математичні методи наукових досліджень в енергетиці" для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» всіх форм навчання / Укл.: Д.О. Кулагін – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024 – 80 с.

Укладач: Д.О. Кулагін, д-р техн. наук, професор, професор кафедри ЕПП

Рецензент: Ю.Г. Качан, д-р техн. наук, професор, професор кафедри ЕПП

Відповідальний за випуск: О.А. Шрам, канд. техн. наук, доц., зав. кафедри ЕПП

Затверджено
на засіданні кафедри
«Електропостачання
промислових підприємств»
Протокол № 6 від 31.01.24

Затверджено
на засіданні НМК
електротехнічного факультету
Протокол № 6 від 25.04.24

Змістовий модуль 1. Методи аналізу та синтезу електротехнічних комплексів промислових підприємств за допомогою варіаційного числення

Тема 1. Вступ.

Значення дисципліни при підготовці фахівців з електротехніки, її зміст, зв‘язок з іншими дисциплінами навчального плану.

Рекомендована література та методичні вказівки до вивчення дисципліни.

Основні терміни, визначення, схеми та позначення на них.

Література: [1-6]

Тема 2. Основні поняття варіаційного числення.

Функціонал.

Функціонал — відображення векторного простору на базову множину для цього простору, здебільшого на множину дійсних чисел. Прикладом функціоналу є норма.

Кожну функцію , яка належить області визначенняD функціоналу I[y], можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються функціональними просторами. Можна сказати, що функціонал — це функція, в якої значеннями незалежної змінної є точки (елементи) функціонального простору, а значеннями залежної змінної — числа.

Допустимі лінії.

У варіаційному численні відшукуються функції, які доставляють функціоналу значення, екстремальне в порівнянні з його значенням на деяких інших функціях. Природно, що

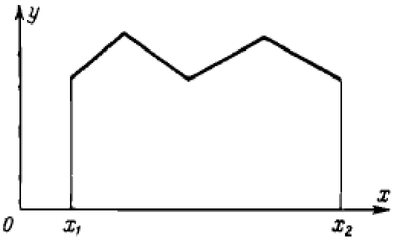


Рис. 1

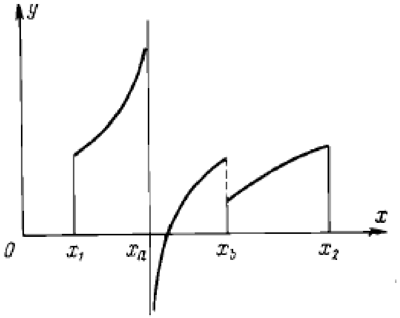


Рис. 2

потрібно точно визначити, серед яких функцій ми будемо шукати екстремум, т. е. визначити клас допускаються до порівняння, допустимих, функцій (допустимих ліній). Найбільш природним було б шукати екстремум в класі неперервних функцій. До цього класу належать функції, які не мають розривів, плавно переходять від одного значення до іншого. На рис. 1 наведено приклад неперервної функції, на рис. 2 приклад функції, що має розриви - або нескінченні, коли при підході до точки розриву значення функції спрямовуються в нескінченність, або кінцеві (скачки). Доцільно шукати екстремум в кілька більш вузькому класі функцій - не тільки безперервних, але і мають безперервну першу похідну. Такі функції називають гладкими функціями. На рис. 3 показаний приклад гладкої функції. Гладкі функції не можуть мати зламів (в точках зламу виконуються розриви першої похідної). У технічних додатках часто зустрічаються функції з зламами в окремих точках. Такі функції називають кусочно-гладкими. На рис. 1 представлена як раз кусочно-гладка функція. Доводиться зустрічатися також з

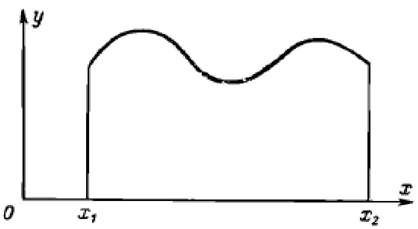


Рис. 3

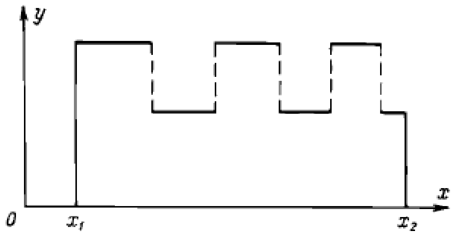


Рис. 4

функціями кусочно-безперервними, мають розриви (скачки) в окремих точках (рис. 4). Надалі ми будемо, як правило, шукати екстремум в класі кусково-гладких функцій, а іноді (там, де це необхідно) в більш широкому класі кусково-неперервних функцій. Переважна більшість інженерних завдань мають рішення саме в цих класах функцій

Близькість функцій.

При знаходженні екстремуму нам доведеться порівнювати між собою значення функціоналу для двох «близьких» між собою Функ. Уточнимо тому поняття «близькість». Нехай дві функції задані рівняннями:

$$y = y(x); \quad y_1 = y_1(x)$$

Відстанню між цими функціями назвемо максимум модуля різниці $|y_1(x) - y(x)|$.

$$J = \int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$$

залежить не тільки від самої функції, але і від її похідної у '(x). Тому значення функціоналу для функцій, відстань між якими мало (менше будь-якого наперед заданого числа е), можуть сильно відрізнятися один від одного. Наведемо приклад. візьмемо функціонал

$$J = \int_0^\pi y'^2\,dx$$

Розглянемо функцію

$$y = \frac{1}{n}\sin nx,$$

відстань якої від осі абсцис (т. е. від функції у = 0) дорівнює $1/n$ і прагне до нуля при необмеженому зростанні / г. Тим часом, значення функціоналу не залежить від n і дорівнює $\pi/2$, а для функції у = 0 значення функціоналу дорівнює нулю. Таким чином, для «близьких» функцій значення функціоналу можуть істотно відрізнятися. Щоб цього не було, потрібно уточнити визначення «близькості» функцій. Назвемо відстанню п-го порядку для двох функцій найбільший з максимумів різниць:

$$\left.\begin{array}{l} |y_1(x)-y(x)|; \\ |y_1'(x)-y'(x)|; \\ \cdots\cdots\cdots \\ |y_1^{(n)}(x)-y^{(n)}(x)|. \end{array}\right\}$$

Отже, трохи відстані нульового порядку означає, що близькі між собою самі функції. Трохи відстані першого порядку означає, що близькі між собою як самі функції, так і їх перші похідні. У розглянутому нами прикладі з функціями $y_1 = \frac{1}{n} \sin nx$ і y = 0 відстань нульового порядку дійсно прагнуло до нуля $n \to \infty$,при але відстань першого порядку

$$\max|y_1' - y'| = \max|\cos nx - 0| = 1$$

до нуля не прагнула. Тому були різні і значення функціоналів. На кривих, що знаходяться один від одного в близькості першого порядку, значення функціоналу також будуть близькі один до одного.

Класифікація екстремумів.

Нехай між двома пунктами розташована висока гора. Нам потрібно з'єднати ці два пункти найкоротшою дорогою. Природно, що дорога повинна йти не через вершину гори, а огинати її справа або зліва. Серед всіх шляхів, що огинають гору праворуч, знайдеться найкоротший. Також і з усіх шляхів, що огинають гору зліва, знайдеться найкоротший. Нехай шлях зліва коротше шляху праворуч. Тоді найкоротша з доріг, що огинають гору зліва, буде давати абсолютний екстремум. Найкоротша з доріг справа не даватиме абсолютного екстремуму, але на ній буде досягатися екстремум відносний: вона буде коротше в порівнянні з дорогами, близькими до неї. Таким чином, якщо дана крива доставляє функціоналу екстремум в порівнянні з усіма кривими даного класу, то це-абсолютний екстремум. Якщо екстремум досягається тільки при порівнянні з близькими кривими, то це - відносний екстремум. Серед відносних екстремумів розрізняють сильний і слабкий. Вважається, що на кривій досягається сильний максимум функціоналу, якщо значення функціоналу на даній кривій більше, ніж на всіх інших кривих, відстань нульового порядку до яких мало. Вважається, що на кривій досягається слабкий екстремум, якщо значення функціоналу на даній кривій більше, ніж на кривих, до яких мало відстань першого порядку. Відзначимо, що всякий абсолютний екстремум є в той же час і відносний; будь-який сильний екстремум є в той же самий час і слабкий, але не навпаки. Дійсно, визначаючи, чи досягається на даній кривій абсолютний екстремум, ми порівнюємо її з усіма кривими даного класу; визначаючи відносний екстремум, ми порівнюємо її тільки з близькими до неї кривими; для сильного екстремуму порівнюємо з кривими, що знаходяться в близькості нульового порядку, для слабкого екстремуму порівняння проводиться з ще більш вузьким класом кривих, що знаходяться від досліджуваної в близькості першого порядку. Тому, якщо деякий умова необхідно для того, щоб на кривій досягався слабкий відносний екстремум, то ця умова і поготів буде необхідно для сильного, а тим більше абсолютного екстремуму.

Тема 3. **Рівняння Ейлера.**

Узагальнене рівняння Ейлера.

Рівняння Ейлера — Лагранжа (у фізиці також рівняння Лагранжа — Ейлера або рівняння Лагранжа) є основними формулами варіаційного числення, з допомогою яких шукаються стаціонарні точки і екстремуми функціоналів. Зокрема ці рівняння широко використовуються в задачах оптимізації, і, разом з принципом стаціонарності дії, використовуються для обчислення траєкторій в механіці.

Використання рівнянь Ейлера — Лагранжа для знаходження екстремуму функціоналу в деякому сенсі є аналогічним використанню теореми Ферма, яка стверджує, що лише в точці, де перша похідна функції рівна нулю, диференційовна функція може мати екстремум (в разі функцій кількох змінних нулю має бути рівний градієнт функції). Точніше кажучи, це пряме узагальнення відповідної формули на випадок функціоналів — функцій нескінченновимірного аргументу.

Умови Лежандра.

Для того щоб у (х) доставляла екстремум функціоналу J= $= \int_a^b F(x;\, y;\, y')\, dx,$ необхідно щоб крім рівняння Ейлера виконувалося ще одна умова - умова Лежандра. Ця умова, крім того, дозволить нам розрізняти максимум і мінімум. Якщо перша варіація звертається в нуль, то, оскільки при досить малому члени вищого порядку зменшуються швидше, ніж квадратичний член, знак збільшення функціоналу ΔJ співпадає зі знаком другої варіації:

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\,\frac{d^2 J}{d\alpha^2}$$

Тому, щоб функція у (х) доставляла мінімум функціоналу необхідним є дотримання нерівності $\delta^2 J \geqslant 0$, а для максимуму – нерівності зворотнього знака $\delta^2 J \leqslant 0$. Но

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = \int_a^b \frac{d^2}{d\alpha^2} F(x;\; y + \alpha\eta;\;\; y' + \alpha\eta')\, dx =$$

$$= \int_a^b \left(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2\right) dx.$$

Другий член варіації можливо можливо перетворити, застосувавши інтегрування по частинах. Так як $\eta\,(a) = \eta\,(b) = 0$, то

$$2\int_a^b F_{yy'}\eta\eta' dx = \int_a^b F_{yy'} d\eta^2 = F_{yy'}\eta^2 \Big|_a^b -$$

$$- \int_a^b \frac{d}{dx} F_{yy'}\,\eta^2 dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{yy'}\,\eta^2 dx.$$

Отже

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = 2\int_a^b \left(P\eta^2 + R\eta'^2\right) dx,$$

$$P=\frac{1}{2}\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right);\quad R=\frac{1}{2}F_{y'y'}.$$

де

Але так як $\eta(x)$ - довільна функція, то для того щоб виконувалась нерівність $\frac{d^2J}{d\alpha^2}\geqslant 0$, необхідно $F_{y'y'}\geqslant 0$. Дійсно, легко підібрати таку функцію $\eta(x)$, щоб η^2 було мале, а η'^2 велике. Для цього достатньо вибрати малу по абсолютній величині, але швидко змінюється функцію. Для такої функції знак другої варіації буде збігатися зі знаком $F_{y'y'}$, і ми приходимо до наступного необхідної умови (умови Лежандра): для того щоб крива y (x) доставляла мінімум функціоналу $J=\int\limits_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$, повинна виконуватись нерівність

$$F_{y'y'}\geqslant 0;$$

Для максимуму

$$F_{y'y'}\leqslant 0.$$

Таким чином, найважливішу роль у вивченні функціоналу грає дослідження знака $F_{y'y'}$:якщо $F_{y'y'}$ негативно, то на екстремалях може досягатися максимум функціоналу, якщо позитивно - мінімум. У точках, де $F_{y'y'}=0$, можливі злами. Нарешті, якщо $F_{y'y'}$ дорівнює нулю тотожно, то перед нами вироджених функціонал, що володіє особливими властивостями.

Тема 4. **Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення.**

Задача з рухомими кінцями.

Завдання про відшукання мінімуму функціоналу

$$J=\int\limits_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$$

варіаційному численні називають найпростішої. У цій главі будуть досліджені різні узагальнення найпростішої завдання. Так, до цих пір розглядалися завдання, де екстремум відшукувався серед кривих з закріпленими кінцями. Надалі зустрінуться завдання, де кінці не закріплені. Для їх вирішення потрібно вивести формулу для варіації функціоналу, що відбувається як від варіації шуканої функції, так і від варіації решт.

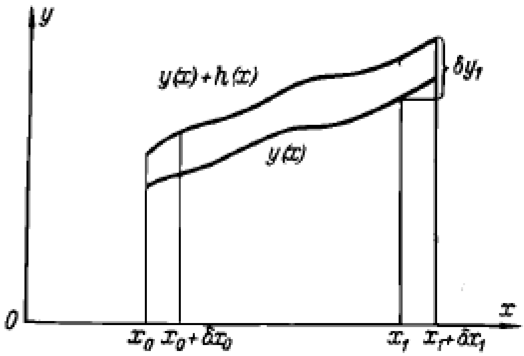


Рис. 9

Розглянемо рис. 9. На ньому y (x) - вихідна функція, а y (x) + h (x) - проварірованная. Приріст функціоналу при переході від y к y + h можна записати у вигляді

$$\Delta J = J(y+h) - J(y) = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x;\ y+h;\ y'+h')\,dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y;\ y')\,dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y+h;\ y'+h')\,dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y;\ y')\,dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x;\ y+h;\ y'+h')\,dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x;\ y+h;\ y'+h')\,dx.$$

Виділимо знову головну, лінійну, частина приросту функціоналу - його варіацію. отримаємо:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F_y h + F_{y'} h']\, dx + F|_{x=x_1} \delta x_1 - F|_{x=x_0} \delta x_0.$$

Після того як другий член подінтегрального виразу проінтегруємо частинами

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx + F_{y'} h \Big|_{x_0}^{x_1} + F|_{x_1} \delta x_1 - F|_{x_0} \delta x_0.$$

Але так як з точністю до нескінченно малих вищого порядку (це видно з рис. 9)

$$h(x_0) = \delta y_0 - y' \delta x_0; \quad h(x_1) = \delta y_1 - y' \delta x_1,$$

то отримуємо остаточний вираз для варіації функціонала:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) h dx + F_{y'}|_{x=x_1} \delta y_1 +$$

$$+ (F - y' F_{y'})|_{x=x_1} \delta x_1 - F_{y'}|_{x=x_0} \delta y_0 - (F - y' F_{y'})|_{x=x_0} \delta x_0.$$

Таким чином, варіація функціонала складається з інтегрального члена, що походить від варіації y (x) всередині старого проміжку інтегрування, і внеінтегральних членів від варіації решт. Користуючись виразом (3), можна вирішити ряд нових завдань

Умова трансверсальності.

Нехай нам необхідно знайти екстремум функціонала серед кривих y (x), кінці яких можуть ковзати по деяким двох лініях: $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. Прикладом такого завдання може слу-жити завдання про знаходження найкоротшого відстані між двома кривими, зокрема між двома колами. Для вирішення потрібно знайти не тільки рівняння шуканої кривої, але і положення точок А і В, які заздалегідь невідомі.

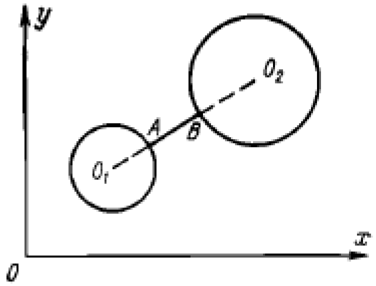


Рис. 10

Припустимо, що задача вирішена, т. Е. Знайдено крива, що проходить через А і В і доставляє мінімум відстані. Ця крива може бути тільки екстремали. Дійсно, якщо ця крива - НЕ екстремали, то може бути проведена інша крива між тими ж точками А і В, на якій значення функціоналу буде менше. Але для екстремали інтегральний член у формулі звертається в 0 і

$$\delta J = F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 + (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 -$$

$$- F_{y'}\big|_{x=x_0}\delta y_0 - (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0}\delta x_0.$$

Так як з точністю до нескінченно малих вищого порядку

$$\delta y_0 = \varphi'(x)\,\delta x_0; \quad \delta y_1 = \psi'(x)\,\delta x_1,$$

то умову екстремуму $\delta J = 0$ можливо записати у вигляді

$$\delta J = (F_{y'}\psi' + F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 -$$

$$-(F_{y'}\varphi' + F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0}\delta x_0.$$

Так як δx_0 і δx_1 незалежні один від одного збільшення, то слідує

$$\left.\begin{aligned} \psi' F_{y'} + F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0; \\ \varphi' F_{y'} + F - y'F_{y'}\big|_{x=x_0} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Умови називають умовами трансверсальності. Нагадаємо, що в рішення рівняння Ейлера входять дві довільні постійні. Для їх визначення необхідно мати два рівняння. Цими рівняннями і є умови трансверсальності. Таким чином, умови трансверсальності дозволяють визначити місце розташування кінців екстремали. Особливо просто виглядають умови трансверсальності для функціоналів виду

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x;\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Дійсно, в цьому випадку

$$F_{y'}=f(x;\ y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{Fy'}{1+y'^2}$$

і умова трансверсальності набирає вигляду:

$$\frac{F(1+y'\psi')}{1+y'^2}=0,$$

звідки витікає, що $\psi'y'+1=0;\ \psi'y'=-1$, т. е.

$$y'=-\frac{1}{\psi'}.$$

Аналогічно на другому кінці

$$y'=-\frac{1}{\varphi'}.$$

Але умови означають, що екстремали ортогональна кривим $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ тобто перетинає їх під прямим кутом. Для функціоналів трансверсального зводиться до ортогональности. До функціоналом виду відноситься, зокрема, довжина кривої, функціонал

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

екстремалями якого, як ми встановили раніше, є прямі лінії.

Тепер, грунтуючись на результатах цього параграфа, ми можемо стверджувати, що найкоротшим відстанню між двома кривими може бути лише пряма, перпендикулярна до обох кривих. Так, найкоротшим відстанню між двома колами буде пряма, що лежить на лінії центрів O_1O_2.

У загальному випадку умови дозволяють обчислити кути, під якими екстремалі у (x) перетинаються з функціями $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Ці кути називаються трансверсального кутами. Зауважимо, що можуть зустрітися завдання про мінімумі функціоналів

$$J = \int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$$

при довільних граничних умовах y (a) і y (b), тобто y (a) і y (b) не задані і можуть бути будь-якими. Таке завдання еквівалентна задачі про знаходження кривої y (x), що доставляє мінімум функціоналу; причому кінці кривої можуть ковзати по вертикальних прямим, що проходить через точки x = a і x = b. Використовуючи загальну формулу (3) і з огляду на, що в даному випадку $\delta x_0 = \delta x_1 = 0,$, і δy_0 и δy_1 - довільні величини, знаходимо умови, яким повинна задовольняти шукана функція y (x):

$$F_{y'}\big|_{x=a} = F_{y'}\big|_{x=b} = 0.$$

Умова Вейєрштрасса-Ердмана.

Існують функціонали, екстремум яких досягається лише за межами цього класу, наприклад в класі кривих, що мають злами в окремих точках. Розглянемо функціонал

$$J = \int_0^2 y^2 (1 - y')^2\,dx$$

граничними умовами: y (0) = 0; y (2) = 1. Функціонал обмежений знизу значенням 0, і це значення може досягатися або на функції y = 0, або на функції y = x + c (для якої 1-y '= 0). Однак ні та, ні інша функція не задовольняє граничним умовам, і мінімум функціоналу, рівний нулю, мо-же досягатися лише на складеної кривої, складеної з частин y = 0 і y = x-1, зі зламом в точці (y = 0; x = 1) . На будь-якій гладкій кривій, що з'єднує точки (0; 0) і (2; 1), значення функціоналу більше нуля, і мінімум не досягается. Між точками зламу криві, що доставляють екстремум, задовольняють рівняння Ейлера (так, для функціоналу $y = 0$ и $y = x - 1$ - екстремали), але для повного визначення функції, що доставляє екстремум, необхідно знати умови, що виконуються в точці зламу. До висновку їх ми і перейдемо. Покладемо для простоти, що крива, що доставляє екстремум інтеграла

$$J = \int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx,$$

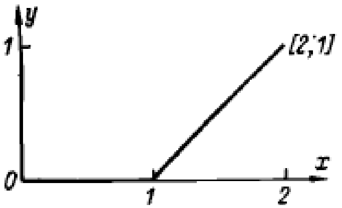


Рис. 11

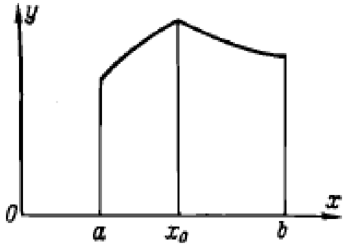


Рис. 12

має один злам в точці x0, що знаходиться між a і b. Уявімо цей інтеграл у вигляді суми двох інтегралів

$$J = \int_a^{x_0} F(x;\ y;\ y')\,dy + \int_{x_0}^{b} F(x;\ y;\ y')\,dx$$

обчислимо варіацію кожного з них окремо. На кожному з відрізків $[a;\ x_0]$ и $[x_0;\ b]$ криві у {x) є екстремалами; отже, інтегральний член формули звертається в нуль і

$$\left.\begin{aligned} \delta J_1 &= F_{y'}\big|_{x=x_0-0}\delta y_0 + (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0-0}\delta x_0; \\ \delta J_2 &= F_{y'}\big|_{x=x_0+0}\delta y_0 + (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0+0}\delta x_0, \end{aligned}\right\}$$

де символ x = x_0-0 означає, що похідні беруться при x, прагне до точки x_0 зліва, а символ x = x_0 + 0 - що вони беруться за. x, що прямує до точки x_0 справа. Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю першої варіації, тобто

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2 = 0.$$

Отже,

$$\left(F_{y'}\big|_{x=x_0-0} - F_{y'}\big|_{x=x_0+0}\right)\delta y_0 + \left[(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0-0} - \right.$$
$$\left. - (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0+0}\right]\delta x_0 = 0,$$

звідки внаслідок довільності δx_0 и δy_0 витікає, що

$$\left.\begin{aligned} F_{y'}\big|_{x=x_0-0} &= F_{y'}\big|_{x=x_0+0}; \\ (F - yF'_{y'})\big|_{x=x_0-0} &= (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_0+0}. \end{aligned}\right\}$$

Умови називаються умовами Вейерштрасса-Ердмана. Ці умови дозволяють визначити відсутні довільні постійні в рівняннях екстремалів. Дійсно, на ділянці [a; x_0] в рішення рівнянь Ейлера входять дві довільні постійні, на ділянці [x_0; b] постійні можуть бути вже іншими. Всього потрібно визначити чотири довільні постійні, для їх визначення необхідні чотири рівняння. Два з них випливають з граничних умов y (a) = A; y (b) = B, а два бракуючих - з умов Вейерштрасса-Ердмана. Умови Вейерштрасса-Ердмана допускають наочну геометричну інтерпретацію. Зафіксуємо значення x і y і побудуємо для цих значень $x = x_0$ і $y = y_0$ графік F (x_0; y_0; y') як функцію від y '. Якщо при $x = x_0$ і $y = y_0$ екстремали має злам,тобто $y'_{x=x_0-0} \neq y'_{x=x_0+0}$, перше із умов Вейерштрасса-Ердмана означає, що дотичні до кривої F (x_0; y_0; y') в точках $y' = y'_{x=x_0-0}$ и $y' = y'_{x=x_0+0}$ паралельні між собою (оскільки тангенси кутів нахилу рівні), а друга умова Вейерштрасса-Ердмана означає, що вони не тільки паралельні, але і збігаються між собою. Таким чином, злами можливі лише в тому випадку, якщо на кривій F (x_0; y_0; y') існують такі дві точки, через які можна провести загальну дотичну. Якщо F (x_0; y_0; y') і $F_{y'}$ (x_0; y_0; y') неперервні по y' для всіх x_0 і y_0, то необхідною умовою наявності зламу є рівність $\tilde{F}_{y'y'} = 0.$. Якщо для всіх y ', то крива F (x_0; y_0; y') увігнута вгору (відповідно при $F_{y'y'} < 0$ увігнута вниз) і на ній не може бути дотичною, що проходить через дві різні точки.

Умови Вейерштрасса-Ердмана дозволяють уточнити зміст теореми Ейлера. Теорема Ейлера стверджує, що якщо екстремум існує і досягається в класі кусково-гладких функцій, то він досягається тільки на екстремалів. Однак екстремалів незліченна безліч, і, взагалі кажучи, теорема Ейлера залишає відкритою можливість того, що крива, що доставляє екстремум, складається з дуг екстремалів, що відповідають різним значенням постійної інтегрування і сполучаються з через ломом, або ж складається з різних рішень рівняння Ейлера, якщо воно (як це часто буває) має кілька рішень.

Умови Вейерштрасса-Ердмана дозволяють усунути цю невизначеність. Злами можуть бути лише в тому випадку, якщо або $F_{y'y'} = 0,$ або ж сама функція F терпить розрив, і кут зламу може бути лише таким, щоб задовольнялися умови Вейерштрасса-Ердмана. Крива, складена з рішень рівняння Ейлера таким об-разом, щоб виконувалися умови Вейерштрасса-Ердмана, називається ламаною екстремалів.

Прикладом завдання, що приводить до «ламаним екстремали», може служити відома задача про траєкторії променя світла в неоднозначних-рідному середовищі. Поширення світла підпорядковується принципу Ферма: промінь світла між точками A і B рухається по такій траєкторії, час руху по якій мінімально. Якщо рівняння траєкторії світлового променя записати у вигляді $y = y(x)$, то за час dt промінь пройде відстань ds = $v_t$dty, де v_t - швидкість світла в даному середовищі. Оскільки $ds = \sqrt{1+y'^2}$, то

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_i}\,dx$$

і час руху дорівнюватиме інтегралу:

$$T = \int_0^T dt = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_i}\,dx.$$

Якщо vt = const, т. Е. Посеред однорідного, то екстремалами, природно, будуть прямі лінії - в однорідному середовищі промінь поширюється по прямій. Однак якщо промінь світла переходить з одного середовища в іншу, де у нього інша швидкість поширення, наприклад з повітря в скло, то в точці переходу з одного середовища іншу подинтегральная функція терпить розрив і екстремали може мати злам, який можна знайти з умов Вейерштрасса - Ердмана .

Для спрощення викладок зручно розташувати координатні осі так, щоб кордон розділу була паралельна осі Оу. Тоді при варіації положення точки зламу варіація 8х буде дорівнює нулю і для виконання умови 6У = 0 досить, щоб виконан-нялось перше з умов, т. Е. Щоб значення Fy 'зліва від точки .ізлома дорівнювало значенню $F_{y'}$ справа. Але зліва від точки зламу

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{v_1},$$

А з права

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{v_2}$$

Так як $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin\alpha$ то з умов Вейерштрасса-Ердмана отримуємо

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

Тобто ставлення синуса кута падіння до синуса кута заломлення а 2 є величина постійна, рівна коефіцієнту заломлення світла при переході з одного середовища в іншу. Це - відомий з фізики закон заломлення. Ми бачимо, що користуючись варіаційним обчисленням, його можна вивести з принципу Ферма. Розглянемо задачу про відшукання кривої, що проходить через точки $x = 0;\ y = 0$ и $x = 2;\ y = 1$ і доставляє мінімум функціоналу

$$J = \int_0^2 \left(y^2 - 2y^2y' + y^2y'^2\right)dx.$$

У даному випадку $F_{y'} = 2y^2(y'-1);\quad F_{y'y'} = 2y^2.$ Оскільки функціонал не залежить явно від x, пишемо відразу перший інтеграл рівняння Ейлера:

$$F - y'F_{y'} = C,$$

$$y^2\left(1 - y'^2\right) = C,$$

звідки випливає, що або y = 0, або, розділивши рівняння

$$y' = \pm\sqrt{1 - \frac{C}{y^2}}.$$

Функціонали декількох змінних.

Роздивимось криву *y = y (x)\ z = z (x)* в тривимірному просторі. Її довжина

$$S = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$$

є прикладом функціоналу, що залежить від двох невідомих функцій. Для того щоб знайти найкоротшу криву, яка з'єднує дві точки простору, потрібно, очевидно, знайти дві функції: $y(x)$ и $z(x)$, що доставляють мінімум інтегралу. Розглянемо загальний вираз для функціонала, залежить від п функцій

$y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y_1, \ldots, y_n;\ y_1', \ldots, y_n')\,dx.$$

Припустимо, що екстремум існує і досягається на кривій $y_1 = y_1(x); \ldots; \quad y_n = y_n(x)$. Зафіксуємо всі функції, крім однієї, наприклад $y_1 = y_1(x)$, якій будемо надавати прирощення $\delta y_1(x)$. Тоді варіація функціонала буде залежати тільки від однієї функції, слід рівняння Ейлера для функції $y_1(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0.$$

Але те ж саме міркування можна повторити щодо будь-якої невідомої функції, і ми приходимо до остаточного висновку: для того щоб крива *yx = y1* (,*x*), . . . , *yn = yn (x)* доставляла екстремум функціоналу необхідно, щоб функції $y_i(x)$ задовольняли системі диференціальних рівнянь - рівнянь Ейлера:

$$\left.\begin{array}{l} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{y_n} - \dfrac{d}{dx} F_{y_n'} = 0. \end{array}\right\}$$

Тема 5. Особливі випадки найпростішої задачі варіаційного числення.

Загальна задача Лагранжа - одна з основних завдань класичного варіаційного числення. Складається в мінімізації функціоналу

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y,\ y')\,dx, \quad f:\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

при наявності диференціальних обмежень типу рівностей:

$$\varphi(x, y, y') = 0, \quad \varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \; m < n,$$

і граничних умов:

$$\psi(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0, \quad \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad p \leqslant 2n+2.$$

Зазвичай Л. з. розглядається за умови, що має місце регулярність системи, яка полягає в тому, що матриця $||\partial\varphi/dy'||$ має максимальний ранг: $\operatorname{rang} \| \partial\varphi/\partial y' \| = m.$
При цьому умови систему можна дозволити щодо частини змінних і, використовуючи інші позначення (t, x замість x, y), привести Л. з. до виду

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\,dt, \; F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\dot{x} = \Phi(t, x, u), \; \Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}\right\}$$

Функцію Fи відображення Ф припускають зазвичай безперервно диференціюються. Завдання оптимального управління задаються зазвичай у формі (дозволена, або понтрягінская, форма), і при цьому накладаються ще обмеження на управління $u \in U$. Необхідні умови сильного екстремуму для завдання (для простоти - з закріпленим лівим x0 і вільним правим кінцем x1) мають такий вигляд. Нехай

$$L(t, x, \dot{x}, u, p(t)) = (p(t)) - \dot{x} + \Phi(t, x, u)) - F(t, x, u)$$

- Лагранжа функція. Для того щоб вектор-функція

$$(x^*(t), \; u^*(t))$$

доставляла сильний мінімум в Л. з., необхідно, щоб були виконані співвідношення:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{(x^*,\ u^*)} + \int_{t_0}^{t_1} \left.\frac{\partial L}{dx}\right|_{(x^*,\ u^*)} dt = 0,$$

$$p(t_1) = 0,$$

$$\mathscr{E} \equiv L(t,\ x^*(t),\ \dot{x},\ u,\ p(t)) -$$
$$- L(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t)) -$$
$$- ((\dot{x} - \dot{x}^*(t)) \mid L_{\dot{x}}(t,\ x^*(t), \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t)) =$$
$$= (p(t) \mid \Phi(t,\ x^*(t),\ u) - F(t,\ x^*(t),\ u)) -$$
$$- (p(t)\ \mid \Phi(t,\ x^*(t),\ u^*(t)) + F(t,\ x^*(t), u^*(t))) \leqslant 0$$

при всіляких допустимих значеннях x, u. Якщо провести диференціювання в по tи скористатися позначенням

$$\mathscr{H}(t,\ x,\ u,\ p) = (p \mid \Phi) - F,$$

то необхідна умова сильного мінімуму сформулюйте у формі принципу максимуму, в к-ром з'єднані Ейлера рівняння , трансверсальності умова і Вейерштрасса умова . Для того щоб вектор-функція

$$(x^*,\ u^*)$$

доставляла сильний мінімум в задачі із закріпленим лівим і вільним правим кінцями, необхідно, щоб знайшлося рішення системи

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}(t,\ x^*,\ u^*,\ p)}{\partial x},\quad p(t_1) = 0,$$

при к-ром

$$\mathscr{H}(t,\ x^*(t),\ u^*(t),\ p(t)) = \max_{u \in U} \mathscr{H}(t,\ x^*(t),\ u,\ p(t)).$$

Задача Майєра.

У загальному випадку функціонал і граничні умови мають вигляд:

$$J = q_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \dot{\mathbf{x}},\ \dot{\mathbf{u}},\ t)\, dt + q_2 \nu_0(\mathbf{x}^{(1)},\ t_1), \qquad (2.1.$$

$$\nu_{j0}(\mathbf{x}^{(0)},\ t_0) = 0;\quad \nu_{i1}(\mathbf{x}^{(1)},\ t_1) = 0\quad (j = \overline{1,\ s} \leqslant n;\ i = \overline{1,\ p} \leqslant n),$$

Де $v_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1)$ - задана функція; q_1 і q_2 – відомі числа. Якщо $q_1 \neq 0,\ q_2 \neq 0$, то задача о знаходженні екстремалей цього функціонала, що задовольняє рівнянням зв'язку і граничним умовам називається задачею Маєра. При $q_2=0$ це задача Лагранжа.

Задача Больца

Задачею Больцах (ЗБ) називається наступна екстремальна задача:

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \psi(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}$$

Де $f = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ дана функція трьох змінних, а ψ = ψ (x0, x1)

- дана функція двох змінних. Функцію f називають інтегрантом, функцію ψ - термінантом, функціонал B - функціоналом Больцах. Відрізок [t0, t1] передбачається фіксованим і кінцевим, t0 <t1. завдання Больцах розглядаємо в слабкій постановці, тобто екстремум функціоналу шукаємо серед безперервно диференційовних функцій, які в даній задачі будуть допустимими.

Варіаційні задачі в параметричній формі.

Досліджуючи на екстремум функціонал

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt,$$

ми вважали, що аргументи функціонала – функції ·

$x(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$ що задані в явному вигляді $x = x(t),\ \ t_0 \le t \le t_1$. У деяких задачах доцільно функцію x xt = () задавати в параметричній формі $x = x(u),\ \ t = t(u)$. Тоді функціонал J можна записати так:

$$J(x(\cdot), t(\cdot)) \quad = \int_{u_0}^{u_1} L\left(t(u), x(u), \frac{x'(u)}{t'(u)}\right) t'(u)du = \int_{u_0}^{u_1} F(t, x, t', x')du.$$

Цей функціонал залежить від двох функцій $x(u),\ \ t(u),\ \ u_0 \le u \le u_1$. Функція $F(t, x, t', x')$ під знаком інтеграла не залежить явно від змінної u . Вона додатно однорідна першого порядку відносно x′, t′, тобто $F(t, x, kt', kx') = kF(t, x, t', x')$. Ці дві властивості достатні для того, щоб функціонал залежав від функції $x = x(t)$ і не залежав від способу її параметризації. Дійсно, нехай заданий функціонал

$$J = \int_{u_0}^{u_1} F(t, x, \frac{dt}{du}, \frac{dx}{du}) du = \int_{v_0}^{v_1} F(t, x, \frac{dt}{dv}\frac{dv}{du}, \frac{dx}{dv}\frac{dv}{du}) \frac{du}{dv} dv =$$

$$= \int_{v_0}^{v_1} F(t, x, \frac{dt}{dv}, \frac{dx}{dv}) dv$$

не залежить від перетворення параметра, що не змінює напрямку руху вздовж кривої (u v′( )>0). Тому екстремаль не залежить від вибору параметра. Однорідна першого порядку по t′, x′ функція Ftxt x (, , ,) ′ ′ задовольняє співвідношення $F(t, x, kt', kx') = kF(t, x, t', x')$. Продиференціюємо цю рівність по k і візьмемо =1 k . Одержимо

$$t'F_{t'}(t, x, t', x') + x'F_{x'}(t, x, t', x') = F(t, x, t', x').$$

Диференціюємо тепер по t , x , t′, x′. Одержимо

$$F_t = t'F_{tt'} + x'F_{tx'}, \quad F_x = t'F_{xt'} + x'F_{xx'},$$

$$0 = t'F_{t't'} + x'F_{t'x'}, \quad 0 = t'F_{t'x'} + x'F_{x'x'}.$$

З останніх двох рівностей знаходимо

$$\frac{F_{t't'}}{(x')^2} = \frac{F_{t'x'}}{-t'x'} = \frac{F_{x'x'}}{(t')^2} = F_1(t, x, t', x'),$$

де через $F_1(t, x, t', x')$ позначена величина всіх трьох відношень. Ці співвідношення можна записати у вигляді

$$F_{t't'} = (x')^2 F_1, \quad F_{t'x'} = -t'x'F_1, \quad F_{x'x'} = (t')^2 F_1$$

Їх можна використовувати для аналізу рівнянь Ейлера

$$F_x - \frac{d}{du} F_{x'} = 0, \quad F_t - \frac{d}{du} F_{t'} = 0$$

функціонала $J(x(\cdot), t(\cdot))$. Одне із цих рівнянь є наслідком іншого. Дійсно,

$$F_x - \frac{d}{du}F_{x'} = (t'F_{xt'} + x'F_{xx'}) - (t'F_{x't} + x'F_{x'x} + x''F_{x'x'} + t''F_{x't'})$$
$$= -t'[F_{tx'} - F_{xt'} - F_1(t'x'' - t''x')],$$
$$F_t - \frac{d}{du}F_{t'} = (t'F_{tt'} + x'F_{tx'}) - (t'F_{tt'} + x'F_{xt'} + t''F_{t't'} + x''F_{t'x'})$$
$$= -x'[F_{tx'} - F_{xt'} - F_1(t'x'' - t''x')].$$

Якщо x′, t′ одночасно не дорівнюють нулю $(x'^2 + t'^2 \neq 0)$, то два рівняння Ейлера зводяться до одного рівняння:

$-F_1(t,x,t',x')(t'x'' - t''x') + F_{tx'} - F_{xt'} = 0.$ Це так звана форма Вейєрштрасса рівнянь Ейлера. До цього рівняння з двома невідомими функціями можна додати ще одне рівняння, що характеризує вибір параметра . u Якщо, наприклад, за параметр беремо довжину дуги S шуканої екстремалі, то додаткове рівняння буде $x'^2 + t'^2 = 1.$

Якщо врахувати, що радіус кривизни R плоскої кривої, яка задана в параметричній формі $x = x(u)$, $t = t(u)$, обчислюється за формулою

$$\frac{1}{R} = \frac{t'x'' - t''x'}{(x'^2 + t'^2)^{3/2}};$$

то форму Вейєрштрасса рівнянь Ейлера можна записати у вигляді

$$\frac{1}{R} = \frac{F_{tx'} - F_{xt'}}{F_1(x'^2 + t'^2)^{3/2}}.$$

Ця форма інваріантна відносно перетворення параметра.

Канонічна форма рівняння Ейлера.

Розглянемо функціонал

$$y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \alpha), \ i = \overline{1,n}$$

з граничними умовами. Для цього функціоналу рівняння Ейлера мають вигляд . Ця система $x, \ y_i, \ i = \overline{1,n}$ диференціальних рівнянь другого порядку. Запишемо систему, як систему $\varphi_k(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha)$ диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього введемо нові змінні

$$\alpha = 0;$$

$$x^* = x, \ \ y_i^* = \varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, \alpha), \ \ i = \overline{1, n}.$$

Змінні називаються канонічними змінними, а функція α називається функцією Гамільтона даного функціоналу.

Задача знаходження екстремуму функціонала, залежного від декількох функцій.

$$J\,[z = f(x;\ y)] = \iint_D F\left(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy,$$

визначений на деякій поверхні $z = f(x;\ y)$.

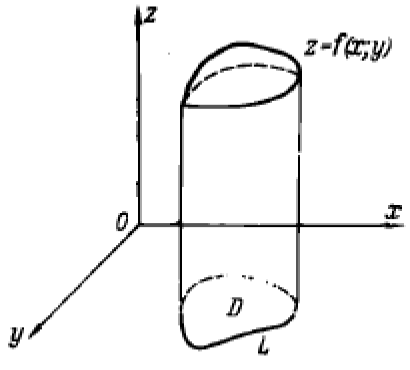


Рис. 17

Нехай $z = f(x;\ y)$ задана на кордоні області D (т. е. краю поверхні закріплені. Поставимо задачу: знайти таку поверхню z = f (z; y) з закріпленими краями z = f (x \ y), на якій функціонал приймав би екстремальне значення. Виведемо необхідна умова екстремуму - рівняння Ейлера- Остроградського. Нехай екстремум функціоналу досягається на деякій функції z = f {x \ y). Тоді, якщо ми до функції z додамо варіацію функції, підпорядковану лише умові, що 6z = 0 на кордоні області D, то перша варіація функціонала повинна звернутися в нуль.

Позначивши для скорочення запису

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

Отримаємо

$$\delta J = \iint_D [F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q]\, dxdy.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy,$$

де інтеграл в правій частині береться по кривій L, що є контуром області D.

Так як

$$\iint_D \left[F_p \delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_q \delta\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] dxdy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta z F_p) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(\delta z F_q)\right] dxdy - \iint_D \delta z \left(\frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q\right) dxdy,$$

то, перетворюючи перший член за формулою Гріна, отримаємо:

$$\iint_D (F_p \delta p + F_q \delta q)\, dxdy =$$

$$= \int_L \delta z F_p dy - \delta z F_q dx - \iint_D \delta z \left(\frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q\right) dxdy.$$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0.$$

Це рівняння названо в честь російського математика М. В. Гостро-Градського, який отримав в 1834 р найбільш загальну формулу для варіації кратних інтегралів. Воно є диференціальним рівнянням в приватних похідних.

Для повного вирішення варіаційної задачі потрібно знайти рішення рівняння, яка бере на кордоні області задане значення. Таким чином, рішення варіаційної задачі зводиться до вирішення диференціального рівняння в приватних похідних.

Класична методика мінімізації кратних інтегралів по-лучила розвиток в численних роботах по оптимальному управлінню системами з розподіленими параметрами - управління нагріванням масивних тіл, розподілом тиску в довгих трубопроводах і т. П. Методика рішення такого роду завдань, що зводиться в кінцевому рахунку до дослідження деяких рівнянь в приватних похідних, розглянута, наприклад, в монографії

Література: [1-6] .

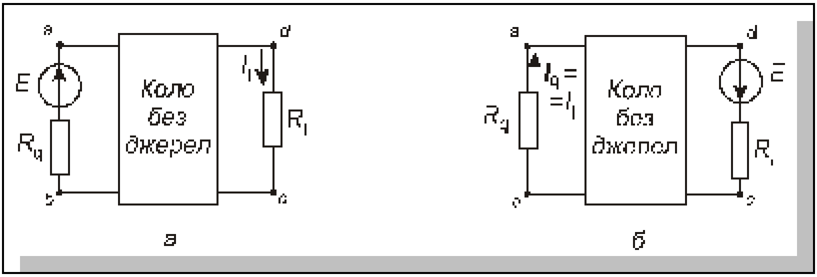
Тема 6. Загальні принципи використання рівняння Ейлера при вирішенні задач керування електротехнічними комплексами.

Принципи автоматичного керування характеристиками електротехнічних комплексів на основі рівняння Ейлера.

Принципи позиціонування на основі рівняння Ейлера.

Принцип взаємності.

Принцип взаємності полягає в тому, що



перенесення цього ідеального джерела до вітки ℓ (з його спрямуванням від точки dдо точки с(див. рис.1.46,б), призведе до того, що у вітці q потече від точки в до точки а струм Iq, який дорівнюватиме струмові Il у попередньому колі.

Величини Rql =E/Il, та Rlq =E/Iq, називають взаємними опорамивіток l та q, при цьому Rql= Rlq. Величини G q ℓ =1/ R q ℓ та G ℓ q =1/R ℓ qназивають взаємними провідностямивіток l та q (звісно, що G q ℓ = G ℓ q).

Вибір оптимального передаточного числа редуктора. Це досягається вибором оптимального передавального числа редуктора і і може бути визначено, як $i = \frac{\omega d}{\omega c}$.

Будемо вважати заданими величини моментів інерції на робочому валу Jc і ротора двигуна Jg, статичного моменту Mc і моменту двигуна Md, що діє під час розгону. Будемо вважати всі ці величини постійними і не залежать від швидкості обертання. Ці припущення відповідають дійсності практично для всіх двигунів. Для вибору оптимального передавального числа покладемо ККД η = 1. При заданій швидкості робочого вала ωc вибирають двигун тієї чи іншої потужності Pd = Md * ωd, ωd - швидкість двигуна. Тим самим визначається передавальне число $i = \frac{\omega d}{\omega c}$, що впливає на умову пуску. Якщо збільшувати і, то це призведе призведе до збільшення рушійного моменту на робочому валу Md '= Md * i, що призводить до збільшення моменту інерції двигуна $Jg' = i^2 * Jg$. Оптимальне передавальне відношення забезпечує мінімальний час пуску.

Тема 7. Особливі випадки використання рівняння Ейлера при вирішенні задач керування електротехнічними комплексами.

Керування електротехнічним комплексом з моментом навантаження, залежним від часу.

Розглянемо електропривод з двигуном постійного струму незалежного збудження і поставимо задачу про вибір діаграми струму (і швидкості), яка забезпечувала б мінімум втрат в якорі при заданому рівні продуктивності, т. Е. При заданому значенні інтеграла

$$\alpha = \int_0^T \nu d\tau.$$

Втрати у якорі

$$Q = \int_0^T (\nu' + \mu)^2 d\tau,$$

і наше завдання зведеться до изопериметрической: знайти функцію v (т) (а тим самим і і (т) = v '+ fx), що доставляє мінімум інтегралу (58), де | л = (х (т), при заданому значенні інтеграла (57).

Проміжна функція L матиме вигляд:

$$L = (\nu' + \mu)^2 + \lambda_0 \nu;$$

$$2\left(\nu'' + \frac{d\mu}{d\tau}\right) - \lambda_0 = 0$$

$$\nu' + \mu = C_1 + \frac{\lambda_0}{2}\tau,$$

З цього отримуємо наступні рівняння оптимальних діаграм:

$$\left.\begin{aligned} i &= C_1 + \frac{\lambda_0}{2}\tau; \\ \nu &= C_2 + C_1\tau + \frac{\lambda_0}{4}\tau^2 - \int_0^\tau \mu d\tau. \end{aligned}\right\}$$

Граничні умови на нескінченності.

Керування електротехнічним комплексом з моментом навантаження, залежним від швидкості.

Розглянемо двигун з постійним магнітним потоком, що працює на механізм з моментом опору, що залежить від швидкості, і знайдемо діаграми струму якоря і швидкості, що забезпечують мінімум втрат в якорі при виконанні заданої програми переміщень виконавчого механізму.

$$\int_0^T L_1 d\tau = \int_0^T [(\nu' + \mu)^2 + \lambda_0 \nu]\, d\tau,$$

Де $\mu = \mu(\nu).$

Рівняння Єйлера:

$$\nu'' - \mu \frac{d\mu}{d\nu} - \frac{\lambda_0}{2} = 0.$$

На практиці залежність моменту опору від швидкості зазвичай вдається з високим ступенем точності апроксимувати лінійною функцією

$$\mu = \mu_0 + k\nu,$$

а при необхідності більшої точності - квадратичною функцією

$$\mu = \mu_0 + k\nu + k_1\nu^2.$$

При лінійної залежності моменту опору від швидкості рівняння (63) є рівнянням з постійними коефіцієнтами

$$\nu'' - k^2\nu - \mu_0 k - \frac{\lambda_0}{2} = 0,$$

яке легко інтегрується в елементарних функціях:

$$\left.\begin{aligned} \nu &= b + C_1 e^{k\tau} + C_2 e^{-k\tau}; \\ i &= \mu_0 + kb + 2kC_1 e^{k\tau}, \end{aligned}\right\}$$

де $b = -\left(\frac{\mu_0}{k} + \frac{\lambda_0}{2k^2}\right).$

Таким чином, оптимальною діаграмою швидкості є ланцюгова лінія.

Для нульових граничних умов $\nu(0) = \nu(T) = 0$ ланцюгова лінія розташована симетрично щодо середини проміжку 0; T і в цьому випадку

$$C_1 = -\frac{b}{e^{kT}+1}; \qquad C_2 = -\frac{be^{kT}}{e^{kT}+1}.$$

Інтегруючи частоту обертання і квадрат струму якоря, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{k\alpha}{[kT]}; \\ Q &= \frac{k^3\alpha^2}{[kT]} + 2k\mu_0\alpha + \mu_0^2 T, \end{aligned}\right\}$$

де для скорочення запису позначено

$$[kT] = kT - 2\,\frac{e^{kT}-1}{e^{kT}+1}\,.$$

Тема 8. Теорія поля.

Поле екстремалей.

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу Лагранжа на множині функцій з фіксованими кінцями

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to \inf,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Нехай $\hat{x}(\cdot)$ – деяка екстремаль функціонала J x(( )) · із множини екстремалей $\{x(\cdot,\lambda)\},\quad x(\cdot,\lambda) \in C^1([t_0,t_1],R^n)$, що залежать від параметра $\lambda \in \Lambda \subset R^n$. Екстремаль $\hat{x}(\cdot)$ · оточена полем екстремалей $x(t,\lambda)$, якщо можна вказати такий окіл G графіка функції $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t,\hat{x}(t)) : t \in [t_0,t_1]\}$, що для будь-якої точки $(\tau,\xi) \in G$ існує єдина екстремаль множини, яка проходить через цю точку. Тобто існує функція $\lambda : G \to R^n,\ \lambda = \lambda(\tau,\xi)$ із класу $C^1(G)$ така, що $x(\tau,\lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda = \lambda(\tau,\xi).$ Функція $u : G \to R^n,\quad u(\tau,\xi) = \frac{d}{dt} x(t,\lambda(\tau,\xi))\,|_{t=\tau}$ називається функцією нахилу поля. Якщо існує точка (t_*, x_*) така, що $x(t_*,\lambda) = x_*$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, то екстремаль xˆ( )· оточена центральним полем екстремалей. Точка (t_*, x_*) називається центром поля, а множина x t(,) λ – центральним полем екстремалей.

Умови Якобі та Лежандра.

Маємо

$$\omega = -\frac{u'}{u} R,$$

де u - нова невідома функція, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$-\frac{d}{dx}(Ru') + Pu = 0.$$

Якщо рішення u(x) рівняння не звертається до нуль на відрізку (a; b), то існує і рішення u(x) рівняння. Точки, де u = 0, називають точками, сполученими з центром поля. Рівняння називається рівнянням Якобі, а умова, що його рішення не звертається в нуль на всьому відрізку (a; b),-умовою Якобі.

Умова Якобі (спільно з посиленим умовою Лежандра: $F_{y'y'} > 0$ для мінімуму і $F_{y'y'} < 0$ для максимуму) є достатньою умовою для того, щоб екстремалі y(x) доставляла на відрізку (a; b) слабкий відносний екстремум функціоналу.

Можна довести, що умова Якобі є і необхідним, тобто при порушенні його на екстремалі взагалі не може досягатися екстремум.

На відміну від умов Ейлера і Лежандра, які відносяться кожній точці екстремалі (локальні умови), умова Якобі характеризує поведінку екстремалі в цілому, на всьому відрізку (a; b). Важливість умови Якобі полягає в тому, що ніякої набор локальних умов не може бути достатнім для того, щоб на шуканої кривої обов'язково досягався екстремум. Дійсно, якщо, наприклад, кожна з двох дуг AB і BC задовольняє рівняння Ейлера (локальному умовою), то і складена з цих двох дуг крива AC також буде йому задовольняти. Тим часом, з того факту, що дві частини кривої окремо доставляють екстремум функціоналу, аж ніяк не випливає, що вся крива також буде доставляти екстремум. Роздивимось найкоротшу відстань між двома точками A і B на сфері. Екстремалами є дуги великого кола. Якщо дуга AB менше половини окружності, то на екстремалі дійсно досягається мінімум відстані. Якщо ж дуга AB дорівнює половині кола (наприклад, точки A і B є полюсами), то екстремуму немає. Дійсно, на сфері всі меридіани рівні, між ними немає найкоротшого. Тому ніякої набір локальних умов не може бути достатнім для екстремуму, необхідно досліджувати поле екстремалів.

Дослідження рівняння - рівняння Якобі - часто досить важко. Можна запропонувати інший спосіб перевірки умов Якобі.

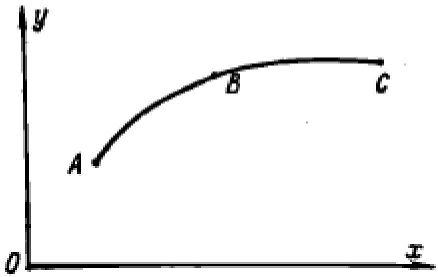


Рис. 32

Позначимо *h* (*x)* різницю ординат між двома нескінченно близькими екстремалями $y(x)$ і $y(x)+h(x)$. Так як $y(x)+h(x)$ задовольняє рівняння Ейлера

$$F_y(x;\ y+h;\ y'+h')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x;\ y+h;\ y'+h')=0.$$

Скориставшись формулою Тейлора і зберігаючи тільки члени першого порядку малості щодо h (т. Е. Нехтуючи членами, що містять / h^2, h^3 і т. Д.), Отримаємо

$$F_{yy}h+F_{yy'}h'-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}h'+F_{y'y}h)=0$$

привівши подібні члени, матимемо

$$Ph-\frac{d}{dx}(Rh')=0,$$

У точці, де рішення рівняння Якобі звертається в нуль, перетинаються дві нескінченно близькі екстремали, що виходять з однієї початкової точки А (дійсно, в точці перетину відстань між кривими звертається в нуль). Точка, де h = О, називається точкою, пов'язаною з А.

Таким чином, існують два способи перевірки виконання умов Якобі.

Перший спосіб полягає в побудові поля екстремалів.

Якщо шукана екстремали, що проходить через задані точки А і В, не перетинається з нескінченно близькими екстремалами (таке перетин можливо, зокрема, на обвідної поля), то умова Якобі виконано. Інший спосіб, аналітичний, полягає в знаходженні рішення рівняння Якобі. Якщо це рішення (з початковими умовами $u = 0;\ u' = 1$) не звертається до нуль між точками A і B, то умова Якобі виконано. Так як рівняння - лінійне, то точка, де його рішення звертається в нуль, не залежить від початкової умови для u'; для зручності вибирають $u' = 1$)

Сильний екстремум.

Для відшукання умов сильного екстремуму потрібно знову розглянути різницю

$$\Delta J = \int_L F(x;\ y;\ y')\,dx - \int_{\text{экс}} F(x;\ y;\ y')\,dx,$$

Де символ $\int_{\text{экс}} F(x;\ y;\ y')\,dx$ означає, що в якості опції береться екстремали, що проходить через точки A і B (рис. 35), а символ $\int_L F(x;\ y;\ y')$ що в якості y (x) взята інша крива L, що з'єднує A і B і знаходиться від екстремали в близькості нульового порядку.

Для визначення знака різниці ΔJ вже не можна скористатися старим методом розкладання в ряд по варіаціям, так як варіація $\delta y'$ не мала. Застосуємо інший метод.

Нехай на екстремали виконана умова Якобі і її можна оточити полем екстремалів (рис. 36), в кожній точці якого визначена функція нахилу поля $p = p\ (x;\ y)$ (функцією нахилу поля в точці (x; y) називається похідна тієї екстремалі, яка проходить через дану точку). Розглянемо інтеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x;\ y;\ p) + (y' - p)\,F_p(x;\ y;\ p)]\,dx.$$

На екстремалі $y\ (x)$ цей інтеграл обертається у $\int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y;\ y')\,dx,$

З іншого боку, інтеграл, який можна уявити вигляді

$$\int\limits_{A(x_0;\ y_0)}^{B(x_1;\ y_1)} [F(x;\ y;\ p) - pF_p(x;\ y;\ p)]\,dx + F_p(x;\ y;\ p)\,dy,$$

не залежить від шляху інтегрування, оскільки є Інтегра-лом від повного диференціала. Дійсно, з формули (3) глави другий слід, що

$$dJ = (F - y'F_{y'})\,dx + F_{y'}dy, \tag{11}$$

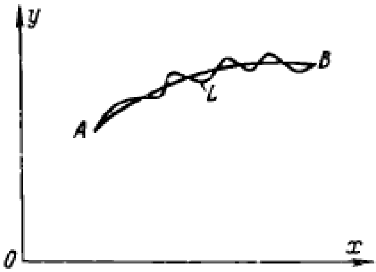


Рис. 35

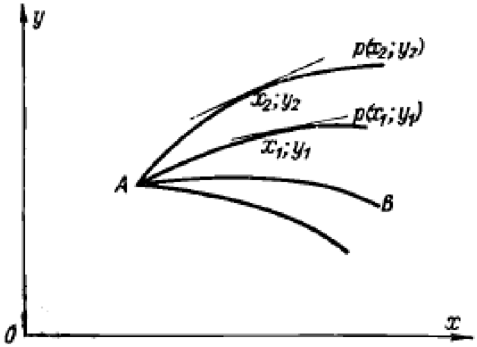


Рис. 36

І таким чином

$$\int\limits_{A(x_0;\ y_0)}^{B(x_1;\ y_1)} [F + (y' - p)\,F_p]\,dx = \int dJ = J(x_1;\ y_1) - J(x_0;\ y_0).$$

Помічаючи, що на екстремали, де $y' = p$,

$$(y' - p)\,F_p = 0,$$

різницю перетворимо до виду

$$\Delta J = \int\limits_L F(x;\ y;\ y')\,dx - \int\limits_{\text{экс}} [F(x;\ y;\ p) + (y' - p)\,F_p]\,dx.$$

Але в віднімається інтеграл не залежить від шляху інтегрування, і, отже,

$$\Delta J = \int_L [F(x;\ y;\ y') - F(x;\ y;\ p) - (y' - p) F_p]\, dx$$

Чи

$$\Delta J = \int_L E\, dx,$$

Де функція
$E(x;\ y;\ y';\ p) = F(x;\ y;\ y') - F(x;\ y;\ p) - (y' - p) F_p$
називається функцією Вейєрштрасса.

Умова Вейєрштрасса.

$E(x;\ y;\ y';\ p) = F(x;\ y;\ y') - F(x;\ y;\ p) - (y' - p) F_p$
називається функцією Вейєрштрасса.

Отримаємо просте достатня умова екстремуму: для того щоб функція y (x) доставляла сильний мінімум функціоналу

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x;\ y;\ y')\, dx,$$

досить, щоб в околиці екстремали для будь-яких y 'дотримані-лось, крім умови Якобі, нерівність

$$E \geqslant 0.$$

Для сильного максимуму досить виконання нерівності протилежного знака

$$E \leqslant 0.$$

Це є умова Вейєрштрасса.

Задачу на сильний екстремум у варіаційному численні вперше досліджував Вейєрштрасс. Щоб довести необхідну умова сильного мінімуму, він використовував спеціальні варіації допустимих функцій:

$$h_\lambda(t)=\begin{cases}\xi\lambda+(t-\tau)\xi, & t\in[\tau-\lambda,\tau],\\ \xi\lambda-(t-\tau)\sqrt{\lambda}\xi, & t\in[\tau,\tau+\sqrt{\lambda}],\\ 0, & t\notin[\tau-\lambda,\tau+\sqrt{\lambda}].\end{cases}$$

Похідна варіації $h_\lambda(t)$ деякою мірою нагадує голку (рис. 9.1), тому такі варіації називають голковими.

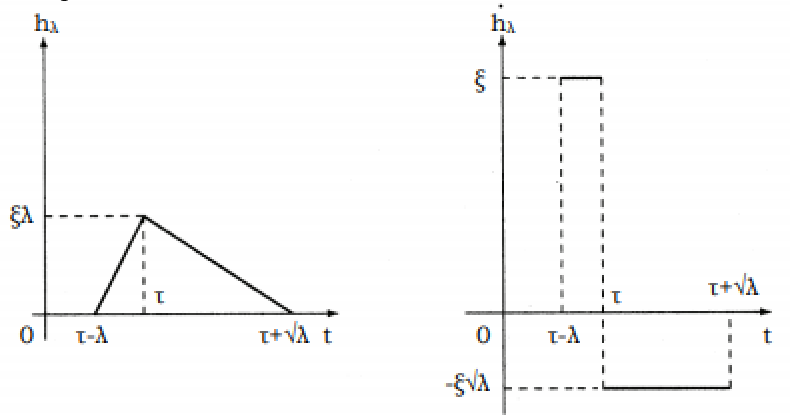


Рис. 9.1

Перейдемо до виведення необхідної умови Вейєрштрасса. Розглянемо основну задачу варіаційного числення:

$$J(x(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt\to extr,\quad x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$$

у класі $KC^1[t_0,t_1]$ кусково-гладких функцій. Нехай xˆ( )· – екстремаль, що досліджується на сильний мінімум. Будемо вважати, що функція xˆ( )· гладка. Відповідно до методу варіацій побудуємо функцію

$$\varphi(\lambda)=J(x_\lambda(\cdot))=J(\hat{x}(\cdot)+h_\lambda(\cdot)),$$

де λ h ( )· – функція, що задається формулами, τ – внутрішня точка відрізка $[t_0,t_1]$, ξ – довільне число. При досить малих λ ≥ 0 функція $x_\lambda(\cdot)=\hat{x}(\cdot)+h_\lambda(\cdot)$ буде допустимою в задачі і $x_\lambda(t_0)=x_0$,

$x_\lambda(t_1) = x_1$ Функція φ λ( ) визначена для невід'ємних λ. Покажемо, що вона диференційовна справа в точці λ = 0:

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau}[L(t, x_\lambda(t), \hat{x}'(t) + \xi) - L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))]dt +$$

$$+ \quad \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}}[L(t, x_\lambda(t), x_\lambda{}'(t)) - L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))]dt = J_1 + J_2.$$

При $\lambda \to 0$ можна оцінити перший інтеграл у так:

$$J_1 = \lambda[L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau))] + o(\lambda).$$

При оцінюванні ми використали теорему про середнє й умову $\|h_\lambda(\cdot)\|_0 = O(\lambda)$. Для оцінки другого інтеграла J2 різницю

$$\Delta = L(t, \hat{x}(t) + h_\lambda(t), \hat{x}'(t) + h_\lambda{}'(t)) - L(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$$

запишемо у вигляді

$$\Delta = L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))h_\lambda(t) + L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))h_\lambda{}'(t) + o(\sqrt{\lambda}).$$

Тут також використали теорему про середнє й оцінку

$$|h_\lambda'(t)| = \xi\sqrt{\lambda} = O(\sqrt{\lambda}), \quad t \in [\tau, \tau + \sqrt{\lambda}].$$

Проінтегруємо частинами другий доданок під знаком інтеграла в J2 і використаємо те, що x^( )· задовольняє рівняння Ейлера $L_x(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)) = \dfrac{d}{dt}L_{x'}(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t))$. Тоді

$$J_2 = -\xi\lambda L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) + \int_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} o(\sqrt{\lambda})dt =$$

$$= -\xi\lambda L_{x'}(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) + o(\lambda).$$

Використовуючи (9.23)–(9.25), одержимо

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0}\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} =$$

$$= L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau) + \xi) - L(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)) - \xi L_{x'}{}'(\tau, \hat{x}(\tau), \hat{x}'(\tau)).$$

Якщо $\hat{x}(\cdot)$ – функція, на якій досягає мінімуму функціонал J x(( )) · задачі, то $J(x_\lambda(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$, звідки

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0}\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} \geq 0,$$

тобто виконується умова Вейєрштрасса

$$E(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)\hat{x}'(\tau)+\xi) =$$

$$= L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)+\xi) - L(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)) - \xi L_{x'}(\tau,\hat{x}(\tau),\hat{x}'(\tau)) \geq 0$$

для всіх $\xi \in R$ і $\tau \in [t_0, t_1]$.

Література: [1-6] .

Тема 9. **Достатні умови екстремуму.**

Необхідні та достатні умови екстремуму.

Якщо x-точка локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, що має в точці x другу похудну, то виконуються умови

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) \geq 0 \quad (f''(\hat{x}) \leq 0).$$

Якщо функція $f(x)$ має в точці x другу похідну і виконуються умови

$$f'(\hat{x}) = 0, \quad f''(\hat{x}) > 0 \quad (f''(\hat{x}) < 0),$$

то x –точка локального мінімуму (максимуму) функції.

Екстремуми кусково-неперервних функцій.

Прикладом функціоналу, екстремум якого може досягатися тільки за межами класу кусочно-гладких функцій, служить функціонал

$$J = \int_{-1}^{+1} x^2 y'^2 \, dx \tag{24}$$

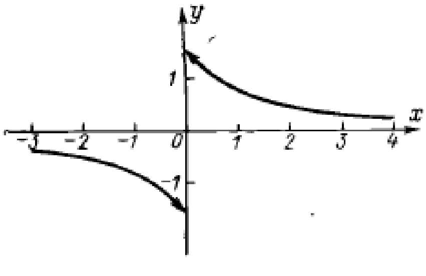


Рис. 38

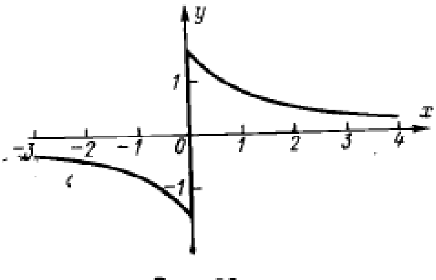


Рис. 39

З граничними умовами $y(-1) = 1; \ y(1) = 1$, розглянутий ще Вейерштрассом; він неотрицателен, і його найменше значення дорівнює нулю. У той же час це значення не може бути досягнуто ні на одній кусочно-гладкою функції, що з'єднує точки $x = -1$,

$y = -1$ и $x = 1$; $y = 1$ оскільки у такої функції обов'язково будуть ділянки, де при $x \neq 0$ буде $y' \neq 0$, і, отже, функціонал буде більше нуля. Тому розширимо клас допустимих функцій і включимо в нього функції кусково-безперервні, тобто мають на інтервалі $a \leqslant x \leqslant b$ кінцеве кількість розривів першого роду - стрибків. Прикладом кусочно-неперервної функції може служити функція $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, графік якої показаний на рис. 38. Коли х прагне до нуля зліва, $y \to +\pi/2$; при х=0 функція не визначена і можна доповнити її вертикальним відрізком від $y = -\pi/2$ до $y = +\pi/2$ (рис. 39)

Екстремуми кривих з вертикальними відрізками.

Будемо завжди доповнювати кусочно-безперервні функції вертикальними відрізками і поставимо питання, в яких випадках екстремум функціоналу

$$J = \int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$$

може досягатися на функції у (х), що має хоча б один розрив першого роду, наприклад в точці $x_0 \quad (a < x_0 < b)$. Нехай при х прагне до x_0 зліва, функція у (х) прагне до значення $y = y_1$, а при x, прагне до x_0 справа, вона прагне до $y = y_2$, причому $y_1 \neq y_2$. Довизначивши функцію у (х) в точці x_0 вертикальним відрізком від y_1 до y_2, розглянемо значення функціоналу на похилих прямих $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$ и $y = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$ (рис. 40). Очевидно, вертикальний відрізок можна розглядати як межа похилих прямих, коли $x_2 - x_1 \to 0$, а тангенс кута нахилу прагне або до $+\infty$, або до $-\infty$.

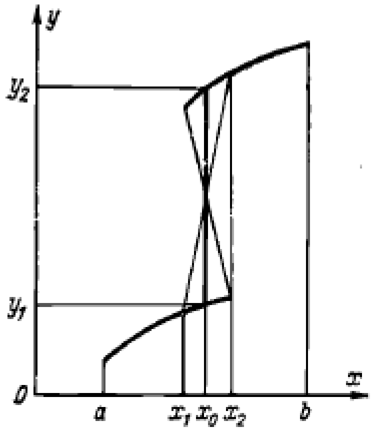


Рис. 40

Для обчислення значення функціоналу на вертикальному відрізку поміняємо ролями змінні x і y, тобто замість того, щоб обчислювати інтеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x;\ y;\ \frac{dy}{dx}\right) dx$$

Вочевидь

$$\lim_{x_2 \to x_1} \int_{x_1}^{x_2} F\left(x;\ y;\ \frac{dy}{dx}\right) dx =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} F\left(x;\ y;\ \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) \frac{dx}{dy}\, dy.$$

Таким чином, значення функціоналу на вертикальному відрізку залежить від виразу

$$\lim_{y' \to \pm\infty} F(x;\ y;\ y')\, \frac{1}{y'}\,.$$

Вироджені функціонали.

Виродженими називають функціонали виду:

$$J=\int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx,$$

у яких $F_{y'y'}=0$ тотожно на всьому інтервалі $a\leqslant x\leqslant b.$ Для таких функціоналів звичайне рівняння Ейлера - диференціальне рівняння другого порядку - вироджується, як побачимо далі, в кінцеве рівняння, що не містить похідних шуканої функції.

Тотожне перетворення на нуль другий приватної похідною $F_{y'y'}$ можливо в тому випадку, якщо $F(x;\ y;\ y')$ залежить від y' лінійно, тобто вироджені функціонали виду (32) завжди можуть бути приведені до форми

$$J=\int_a^b [M(x;\ y)+N(x;\ y)\,y']\,dx.$$

Складаючи рівняння Ейлера для функціоналів , отримуємо:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y';$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=N;\quad \frac{d}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}y'.$$

Отже,

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

рівняння Ейлера дійсно вироджується в кінцеве рівняння, що не містить похідних. Рішення такого рівняння не містить довільних постійних і лише у виняткових випадках може задовольняти граничним умовам (проходити через задані точки). Для того щоб крива, що доставляє екстремум, задовольняла граничним умовам, екстремали слід доповнити вертикальними відрізками, що проходять через задані точки.

Література: [1-6].

Тема 10. **Задачі на екстремум при наявності обмежень.**

Задачі з обмеженнями.

Нехай $f_k : R^n \to R$, $k = 0,1,\dots,m$, – диференційовні функції n дійсних змінних. Задачею на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями називається задача

$$f_0(x) \to extr, \quad f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0.$$

Точки $\hat{x} \in R^n$, які задовольняють рівняння $f_k(\hat{x}) = 0$, $k = \overline{1,m}$, , , називаються допустимими в задачі (1.2). Допустима точка xˆ дає локаль- Варіаційне числення. Екстремальні задачі 14 ний мінімум (максимум) задачі (1.2), якщо існує таке число >0 δ , що для всіх допустимих $x \in R^n$, які задовольняють умови $f_k(x) = 0$, $k = 1,2,\dots,m$, $\|x - \hat{x}\| < \delta$, виконується нерівність $f(x) \ge f(\hat{x}) \quad (f(x) \le f(\hat{x}))$. Основним методом розв’язування задач на умовний екстремум є метод невизначених множників Лагранжа. Він базується на тому факті, що умовний екстремум у задачі (1.2) досягається в точках, які є критичними в задачі на безумовний екстремум $L(x,\lambda,\lambda_0) \to extr,$ де $L(x,\lambda,\lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_k(x)$ – функція Лагранжа, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – множники Лагранжа.

Лінійні задачі оптимального керування.

Системи автоматичного управління в більшості випадків описуються системою диференціальних рівнянь

~тт ~~ /i (^ *2> • • •» xn; uь . . . , uk)\
at

fn(!> xi> x2y • • •» xn> ui> • • •» uk)y

Рух корабля описується системою типу , де $x_1, \dots, x_n$ - положення, курс, а $u_1, \dots, u_k(t)$-положення рулів.

Управління u (t) , як правило, обмежено і зверху і знизу: $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$.

Лінійні керовані системи, у яких рівняння лінійні, т. е. мають вигляд

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1u;\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_nu\end{aligned}\right\}$$

Або

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + b_1u;\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + b_nu\end{aligned}$$

(Деякі з b_i можуть бути рівні нулю), а функціоналом, екстремум якого нам належить визначити, є час досягнення системою положення рівноваги,

$$J = \int_0^T dt; \quad x_i(T) = 0,$$

і обмеження накладені тільки на управління $u\ (t)$.

Принцип максимуму.

Теореми принципу максимуму відносяться до систем, поведінка яких можна описати диференціальними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ \ldots, \ x_n; \ u_1, \ \ldots, \ u_k);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ \ldots, \ x_n; \ u_1, \ \ldots, \ u_k),\end{aligned}\right\}$$

Ми помічаємо, що на відміну від звичайних завдань варіаційного числення, де все шукані функції були рівноправні, в принципі максимуму поділяються фазові координати x_i і управління. Це поділ зручно в тих випадках, коли обмеження накладаються тільки на управління, а не на фазові координати, наприклад, якщо задано

$$|u_j| \leqslant 1.$$

Важливу роль в принципі максимуму грають допоміжні змінні $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ і проміжна функція, яку можна назвати гамільтоніаном:

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i (x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_k).$$

За допомогою системи рівнянь, необхідні для визначення допоміжних змінних $\psi_i(t)$, записуються у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{d\psi_i};$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Так як

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i,$$

то рівняння еквівалентні рівнянням ; в той же час з рівнянь можна знайти допоміжні змінні $\psi_i(t)$, .

Основна необхідна умова, якій має задовольняти управління $u_j(t)$ для того, щоб бути оптимальним, формулюється у вигляді теореми про максимум: якщо $u_j(t)$- оптимальне управління, то воно доставляє максимум функції H [(формула 64)], тобто

$$H(\psi_i; f_i; u_j = u_{j\,\text{опт}}) = M(\psi_i; f_i)$$

Для задачі про максимальний швидкодії, коли функціоналом, мінімум якого відшукується, є час

$$J = \int_0^T f_0(x_i;\ u_j)\,dt = \int_0^T dt,$$

рівняння для змінного ψ_0 відпадає і функція H набирає вигляду

$$H = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_k).$$

Синтез оптимального кусково-постійного керування.
Розглянемо систему, поведінка якої описується рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u, \end{aligned}\right\}$$

Досліджуємо поведінку системи при управлінні u = + 1.

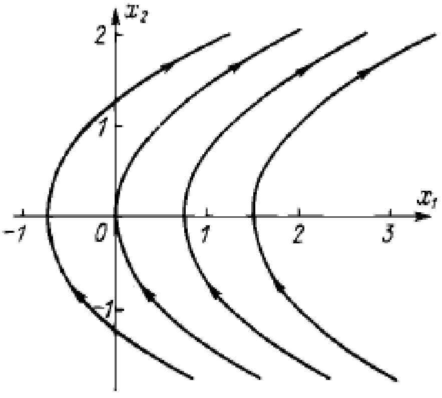


Рис. 52

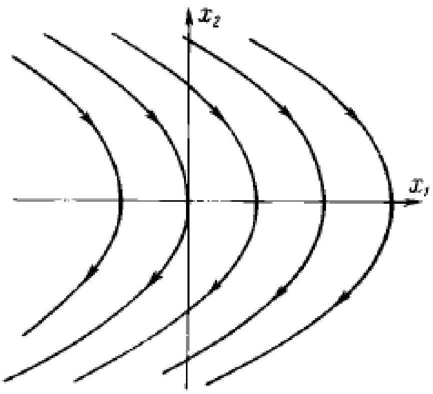


Рис. 53

Із рівнянь слідує, що при u = + 1

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{t^2}{2} + C_1 t - C_2; \\ x_2 &= t + C_1, \end{aligned}\right\}$$

Звідки

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

На фазовій площині рішення зобразиться у вигляді сімейства

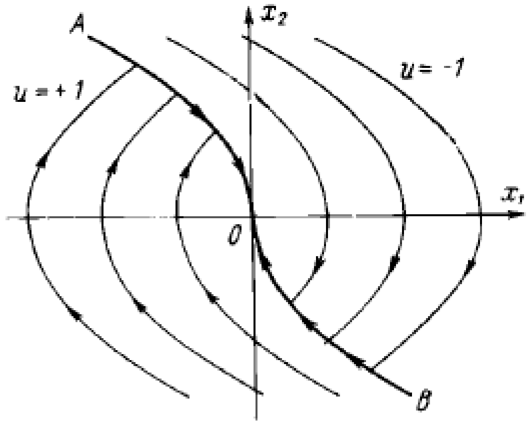


Рис. 54

парабол.

Стрілки на параболу характеризують поведінку системи в часі. Нехай, наприклад, в початковий момент часу система перебувала в четвертому квадранті фазової площини. З плином часу координата x_2 буде весь час зростати, координата ХГ спочатку буде зменшуватися, а потім (після того як x_2 пройде через нуль) також почне зростати. рисунок показує, що в початок координат веде тільки одна парабола, т. е. лише для цілком певних граничних умовах $x_1(0)$ і $x_2(0)$ можна при управлінні u = + 1 досягти початку до ординат. Розглянемо тепер поведінку системи при управлінні u = - 1. На цей раз, розділивши перше рівняння системи на друге, отримаємо:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2,$$

Звідки

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C,$$

Тепер неважко вирішити і питання про синтез оптимальної системи управління. Оптимальна система повинна забезпечувати на виході сигнал
u = + 1 якщо x_1 і x_2 такі, що точка, яка зображує поведінку системи, перебуває нижче лінії перемикання AB на фазової площині, і сигнал u = - 1, якщо зображає точка знаходиться вище лінії AB. Під дією керуючого сигналу система змінює свої координати x_1 і x_2, точка, яка відображає стан системи, рухається по фазовій площині. При попаданні точки на криву AB відбувається перемикання сигналу на виході системи від до u = + 1 u = - 1, і від u = - 1 до u = + 1. Таким чином, оптимальна система є релейного системою, перемикає на виході керуючий сигнал згідно наступних залежностей:
$u = +1$ при $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$; $u = -1$
при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Динамічне програмування.

У динамічному програмуванні для керованого процесу серед множини усіх допустимих управлінь шукають оптимальне у сенсі деякого критерію тобто таке яке призводить
до екстремального (найбільшого або найменшого) значення цільової функції — деякої числової характеристики процесу. Під багатоступеневістю розуміють або багатоступеневу структуру процесу, або розподілення управління на ряд послідовних етапів (ступенів, кроків), що відповідають, як правило, різним моментам часу. Таким чином, в назві «Динамічне програмування» під «програмуванням» розуміють «прийняття рішень», «планування», а слово «динамічне» вказує на суттєве значення часу та порядку виконання операцій в процесах і методах, що розглядаються.

Методи динамічного програмування є складовою частиною методів, які використовуються при дослідженні операцій, і використовуються як у задачах оптимального планування, так і при розв'язанні різних технічних проблем (наприклад, у задачах визначення оптимальних розмірів ступенів багатоступеневих ракет, у задачах оптимального проектування прокладення доріг та ін.)

Методи динамічного програмування використовуються не лише в дискретних, але і в неперервних керованих процесах, наприклад, в таких процесах, коли в кожен момент певного інтервалу часу необхідно приймати рішення. Динамічне програмування також дало новий підхід до задач варіаційного числення.

Хоча метод динамічного програмування суттєво спрощує вихідні задачі, та безпосереднє його використання, як правило, пов'язане з громіздкими обчисленнями. Для подолання цих труднощів розробляються наближені методи динамічного програмування.

Нестандартні функціонали.

Відомо, що абсциса центра ваги плоскої кривої у (х), що проходить через точки а і b буде виражатися формулою

$$J = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

Тому завдання відшукання кривої, у якій центр ваги розташований найбільш низько в порівнянні з усіма іншими кривими, що проходять через ті ж точки, зводиться до вивчення екстремуму функціоналу - приватного двох визначених інтегралів. Для відшукання екстремумів функціоналів, що мають форму деяких функцій від інтегралів, корисно мати на увазі, що варіювання підпорядковується тим же правилам, що і диференціювання, тобто якщо

$$J_3 = \frac{J_1}{J_2},$$

То

$$\delta J_3 = \frac{J_2\,\delta J_1 - J_1\,\delta J_2}{J_2^2}$$

Нехай $y = y_{экс}(x)$ доставляє екстремум функціоналу J_3. Тоді $\delta J_3 = 0$ і, отже (якщо $J_2 \neq 0$)

$$J_2(y_{экс})\,\delta J_1 - J_1(y_{экс})\,\delta J_2 = 0.$$

Після заміни отримуємо

$$\delta J_1 - \lambda_0 \delta J_2 = \delta (J_1 - \lambda_0 J_2)$$

і приходимо до наступної теореми: функція y (x), доставляє екстремум приватному двох функціоналів J_1 і J_2, повинна задовольняти рівнянню Ейлера для проміжного функціоналу

$$L = J_1 - \lambda_0 J_2.$$

Постійна λ_0 визначається з умови

$$\frac{J_1 (y_{экс})}{J_2 (y_{экс})} = \lambda_0 .$$

Чисельні методи визначення оптимального керування.

Як ми вже згадували, розглянуті варіаційні методи дозволяють звести задачу пошуку оптимального управління до таких математичних завдань, алгоритми вирішення яких відомі. Так, наприклад, класичні варіаційні методи дозволяють звести пошук екстремуму до задачі інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (рівнянь Ейлера), які відповідають заданим умовам на кінцях (крайова задача). До вирішення крайової задачі для системи диференціальних рівнянь зводяться завдання про екстремуму функціоналів і при використанні принципу максимуму. Лише в небагатьох випадках вдається отримати рішення крайової задачі в кінцевому вигляді, найчастіше доводиться вдаватися до чисельних методів. Ми не будемо розглядати різні чисельні методи, що спрощують і прискорюють визначення екстремалів, оскільки це розгляд відноситься скоріше до обчислювальної математики, ніж до теорії управління. Крім того, читач, який цікавиться обчислювальної стороною, може безпосередньо звернутися до численних робіт , де досить докладно описані різні чисельні методи, використовувані при обчисленні оптимального управління. Обмежимося лише коротким розглядом основних труднощів на шляху чисельного рішення, які і привели до появи такої великої кількості робіт, присвячених даній темі. На перший погляд може здатися, що при наявності швидкодіючих обчислювальних машин інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь - рівнянь Ейлера - не є надто складним завданням, однак обчислення різко ускладнюються тим, що на лівому кінці ми не маємо повного комплекту граничних умов. З цими труднощами ми стикаємося вже в найпростішої задачі про відшукання функції $y(x)$, доставляє екстремум функціоналу

$$J = \int_a^b F(x;\ y;\ y')\,dx$$

і що проходить через задані точки $y(a) = y_1$ і $y(b) = y_2$.

Рівняння Ейлера для функціоналу є рівнянням другого порядку, і для його послідовного інтегрування починаючи від точки $x = a$ необхідно в цій точці мати два початкових умови: для самої функції $y(x)$ і для її похідної, а задано нам тільки одне. Одним із шляхів подолання цієї проблеми служить так званий метод пристрілки: другим початковим умовою, умовою для похідної $y'(a)$ задаємося довільно і інтегруємо рівняння Ейлера від $x = a$ до $x = b$. Природно, що умова на правому кінці $y(b) = y_2$ при цьому не буде виконано. Нехай виявилося $y(b) < y_2$. Тоді збільшуємо прийняте спочатку значення $y'(a)$ і повторюємо інтегрування, намагаючись спочатку «зловити в вилку» граничну умову $y(b) = y_2$ а далі рухатися до нього методом послідовних наближень. Зрозуміло, процес інтегрування доводиться повторювати багато разів, а крім того, виникають питання про збіжність послідовних наближень і т. П. З цієї ж труднощами - неповнотою початкових умов - стикаємося ми і при використанні принципу максимуму. Для обчислення оптимального управління $u(t)$ нам потрібно інтегрувати систему 2n диференціальних рівнянь і для n функцій $x_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ і n функцій $\psi_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, а початкові умови задані лише для функцій $x_i(t)$ для функцій $\psi_i(t)$ початкових умов немає.

Література: [1-6].

Тема 11. **Дослідження питань практичного використання варіаційного числення.**

Оптимальне керування електротехнічними комплексами постійного струму при наявності обмежень.

Розглянемо докладніше питання про діаграми струму і швидкості для двигунів повторно-короткочасного режиму роботи. Для таких двигунів середньоквадратичний ток при оптимальному управлінні дорівнює

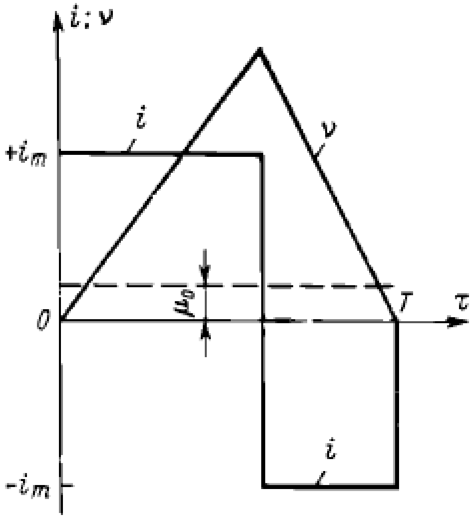


Рис. 60

$$i_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{Q}{T + kt_{\text{п}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{T}{T + kt_{\text{п}}}}\sqrt{\frac{Q}{T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{T}{T + kt_{\text{п}}}}\sqrt{\mu_0^2 + \frac{12\alpha^2}{T^4}},$$

Для двигунів, що обдуваються від окремого вентилятора, k = 1; для двигунів, що обдуваються Крилатки, що сидить на валу, k = 0,25-М.

Розглянемо випадок $\mu_0 = 0$. При цьому

$$i_{ср.\,кв} = \sqrt{12\frac{\alpha^2}{T^4}\frac{T}{T+kt_п}} = 3{,}46\frac{\alpha}{T^2}\sqrt{\frac{T}{T+kt_п}},$$

в той час як максимальний струм оптимальної діаграми

$$i_m = 6\frac{\alpha}{T^2}.$$

З огляду на, що для нормальних двигунів постійного струму максимально допустимий струм дорівнює зазвичай триразовому середньоквадратичного (тобто на короткий час струм якоря може в три рази перевищити струм, допустимий за умовами нагріву), приходимо до висновку, що діаграма оптимального управління не включатиме в себе ділянок, що проходять по кордону області, в тому випадку, якщо тривалість пауз не більше ніж в два рази перевершує тривалість робочих циклів двигуна, тобто якщо

$$\frac{T}{T+kt_п} \leqslant \frac{1}{3}.$$

При більш тривалих паузах необхідно переходити до діаграми, складеної з шматків екстремалі і шматків кордону області, і, нарешті, при паузах, більш ніж в 8 разів перевищують тривалість роботи двигуна, оптимальне управління цілком проходить по межі області.

Керування, яке забезпечує мінімум встановленої потужності генератора.

В системі генератор-двигун встановлена потужність генератора пропорційна добутку його номінального струму, який при виборі машини по нагріванню дорівнює $\sqrt{\frac{\overline{Q}}{T}}$ на номінальну напругу. Останнє в свою чергу (якщо знехтувати невеликим падінням напруги в якорях генератора і двигуна) пропорційно максимальної ординате діаграми швидкості. Отже, для забезпечення мінімуму встановленої потужності генератора потрібно знайти діаграму швидкості v (т), що доставляє мінімум функціоналу

$$N = v_m \sqrt{\frac{Q}{T}}$$

або, що те ж саме, функціоналу

$$N^2 = \frac{v_m^2}{T} \int_0^T (v' + \mu_0)^2 \, dt.$$

Екстремум функціоналу необхідно шукати в класі кривих із заданою максимальною ординатою і з закріпленими кінцями, т. е. задовольняють
умовами:

$$v \leqslant v_0;$$

$$v(0) = 0; \quad v(T) = 0.$$

В цьому класі кривих перший множник функціоналу фіксований. Треба шукати криву, що мінімізувала другий співмножник, з урахуванням обмеження. Це завдання вже вирішувалася нами в попередньому параграфі, і було отримано, що на оптимальній кривої виконуються співвідношення , які можна записати у вигляді

$$Q = \frac{16}{9} \frac{v_0^3}{(v_0 T - \alpha)} + \mu_0^2 T.$$

Отже, функціонал на оптимальній кривої приймає значення

$$N^2 = \frac{v_0^2 Q}{T} = \frac{16}{9} \frac{v_0^5}{T\,(v_0 T - \alpha)} + \mu_0^2 v_0^2.$$

У рівності значення ординати v0 може бути будь-яким, т. Е. Вибір в якості кривих порівняння класу кривих з ординатою, підпорядкованої умовою , не обмежує спільності рішення. Тепер, диференціюючи формулу по v_0 і прирівнюючи похідну нулю, знайдемо значення ординати v0, що доставляє мінімум функціоналу . Так, для $\mu_0 = 0$ отримаємо $v_0 = \frac{5}{4} \frac{\alpha}{T}$, звідки витікає, що $T_1 = T_2 = 0{,}3\,T$, тобто мінімум встановленої потужності доставляє діаграма швидкості, яка містить ділянку

$$\nu = \nu_0 = \frac{5}{4}\frac{\alpha}{T}$$

, що займає 0,4 повного часу, відведеного на цикл переміщення. Аналогічні рішення можна отримати і для $\mu_0 \neq 0.$

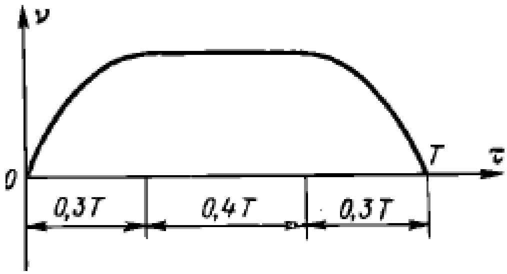


Рис. 61

Порівняємо встановлену потужність генератора, необхідну для виконання заданої програми переміщення виконавчого механізму при оптимальній діаграмі швидкості і при неоптимальних діаграмах. Легко перевірити, що при $\mu_0 = 0$

$$N = \nu_0 \sqrt{\frac{Q}{T}} = B\,\frac{\alpha^2}{T^3},$$

Для оптимальної діаграми маємо B = 4,66. У той же час при традиційному способі управління - «трикутної» діаграмі швидкості, якій відповідає «прямокутна» діаграма струму з коефіцієнтом заповнення, рівним одиниці, B = 9, що на 71% більше, ніж при оптимальному управлінні.
Ми ще раз переконуємося, що ефективність оптимального управління в порівнянні з традиційним може бути вельми велика. Слід зазначити, що одночасно зі зменшенням встановленої потужності генератора зменшується і встановлена потужність виконавчого електродвигуна в системі генератор- двигун, але це відіграє меншу роль. Якщо вартість генератора визначається його встановленою потужністю, то вартість двигуна визначається в основному не потужністю, а моментом. Тому

вводити в діаграму швидкості ділянку $v = v_0$ доцільно з точки зору зменшення габаритів і вартості генератора.

Багатоканальне керування.

Визначення небезпечної динамічної дії.

Розглянемо найпростіший елемент конструкції (маса на пружною балці), поведінка якого можна описати рівнянням

$$mx'' + nx' + kx = f(t),$$

де m - маса елемента; x - деформація; n - коефіцієнт тертя, що характеризує загасання коливань; k – коефіцієнт пропорційності між силою і деформацією; f - діюча сила.

Щодо сили f (t) відомо лише, що вона обмежена по модулю:

$$|f| \leqslant f_m.$$

Обмеження можна розглядати як межа обмеження

$$\int_0^T \left(\frac{f}{f_m}\right) \quad dt \leqslant T$$

при $p \to \infty$, а вимога максимуму деформації x в момент t = T трактувати як вимога досягнення максимуму інтеграла

$$x(T) = \int_0^T x'dt \Big|.$$

Легко переконатися, що екстремум не досягається всередині допустимої області. Екстремум досягатиметься на кордоні, де нерівність (30) переходить в рівність

$$\int_0^T \left(\frac{f}{f_m}\right)^{2p} dt = T.$$

В результаті приходимо до загальної задачі Лагранжа: визначити функції f (t) $x\ (t)$, що доставляють максимум інтегралу при наявності рівняння зв'язку і заданому значенні інтеграла . Шукані функції повинні задовольняти рівнянням Ейлера- Пуассона для проміжної функції

$$L = x' + \lambda_0 \left(\frac{f}{f_m}\right)^{2p} + \lambda\,(mx'' + nx' + kx - f).$$

$$\frac{f}{f_m} = \frac{1}{2p\lambda_0}\sqrt[2p-1]{\lambda},$$

Переходячи до межі, отримуємо $f = f_m \ \mathrm{sign}\,\lambda$

З рівняння для x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\ \frac{\partial L}{\partial x''} = m\lambda'' - n\lambda' + k\lambda = 0$$

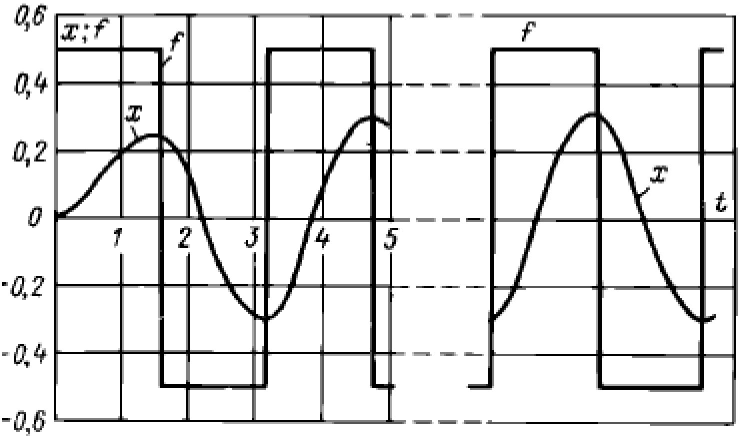


Рис. 65

Маємо

$$\lambda = Ae^{\frac{n}{2m}t}\ \sin\left(\frac{\sqrt{4km - n^2}}{2m}\,t + \varphi\right).$$

$$f(t) = f_m\,\mathrm{sign}\,\sin\left(\frac{\sqrt{4km - n^2}}{2m}\,t + \varphi\right)$$

найбільш небезпечним динамічним впливом є кусочно-постійна, що міняє знак через час

$$t = \frac{2m}{\sqrt{4km - n^2}}\pi$$

рівне напівперіоду вільних коливань розглянутого елемента.

Керування синхронним машинами.

Поведінка синхронної машини, що працює паралельно з мережею, описується рівняннями Парка-Горєва:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi_d}{dt} &= e\sin\theta + \psi_q(1+s) + r(A_d\psi_d + A_f\psi_f + A_{эd}\psi_{эd});\\
\frac{d\psi_q}{dt} &= e\cos\theta - \psi_d(1+s) + r(D_q\psi_q + D_{эq}\psi_{эd});\\
\frac{d\psi_f}{dt} &= e_f - r_f(B_f\psi_f + B_{эd}\psi_{эd} + B_d\psi_d);\\
\frac{d\psi_{эd}}{dt} &= -r_{эd}(D_d\psi_d + C_f\psi_f);\\
\frac{d\psi_{эq}}{dt} &= -r_{эq}(F_q\psi_q - F_{эq}\psi_{эq});\\
\frac{ds}{dt} &= \frac{1}{H_j}[M_т - \psi_q(A_d\psi_d - A_f\psi_f + A_{эd}\psi_{эd}) +\\
&\qquad + \psi_d(D_q\psi_q + D_{эq}\psi_{эq})];\\
\frac{d\theta}{dt} &= s,
\end{aligned}\right\}$$

У сталому режимі похідні всіх змінних дорівнюють нулю. Різкі порушення встановленого режиму (короткі замикання в мережі, відключаються захистом; наброс або скидання навантаження) викликають відхилення змінних в рівняннях (37) від їх сталих значень. Залежно від величини цих відхилень машина може або повернутися до сталого режиму (в загальному випадку відмінному від початкового), або випасти із синхронізму, що характеризується, зокрема, необмеженим ростом кута 0. з плином часу. Випадання із синхронізму є серйозною аварією, тому дуже важливо розширювати можливості сталої роботи машини, щоб навіть вельми сильні впливи на машину і систему не приводили до випадання з синхронізму. Дієвим засобом підвищення стійкості є регулювання напруги ef на затискачах обмотки збудження.

Стосовно до синхронної машині оптимальне за швидкодією управління раціонально відшукувати, користуючись принципом максимуму. Оптимальна функція e_f повинна доставити максимум гамільтоніану.

$$H = p_1 [(e \sin\theta + \psi_q (1+s) + r (A_d\psi_d + A_f\psi_f + A_{эd}\psi_{эd})] + \\ + p_2 [e\cos\theta - \psi_d (1+s) + r (D_q\psi_q + D_{эq}\psi_{эq})] + p_3 [e_f - r_f (B_f\psi_f + \\ + B_{эd}\psi_{эd} + B_d\psi_d)] - p_4 r_{эd} (C_d\psi_d + C_f\psi_f) - p_5 r_{эq} (F_q\psi_q - F_{эq}\psi_{эq}) + \\ + p_6 \frac{1}{H_j} [M_т - \psi_q (A_d\psi_d - A_f\psi_f) + A_{эd}\psi_{эd} + \psi_d (D_q\psi_q + D_{эq}\psi_{эq})] + p_7 s,$$

Де функції $p_1, p_2, \ldots, p_7$ задовольняють системі диференційних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\psi_d}; \quad \frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\psi_{эd}};\\ &\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\psi_q}; \quad \frac{dp_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\psi_{эq}};\\ &\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\psi_f}; \quad \frac{dp_6}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial s};\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{dp_7}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\}$$

При наявності обмеження максимум H буде досягатися при

$$e_f = \operatorname{sign} p_3.$$

Таким чином, оптимальним буде релейне управління - чергування максимальної форсування напруги (ef = 1) з максимальною форсировкой зворотного знака $(e_f = 1)$. Для відшукання точок переходу від форсування до расфорсіровке і назад необхідно визначити знак функції p_3. В цілому рівняння спільно з умовою утворюють систему з п'ятнадцяти рівнянь, достатніх для визначення п'ятнадцяти невідомих: семи змінних $\psi_d, \psi_q, \ldots, s$ и θ в рівняннях, семи функцій $p_1, \ldots, p_7$ і функції e_f. Ця система може бути вирішена чисельними методами. Однак і без рішення рівнянь проведене дослідження дозволяє зробити важливий висновок про те, що оптимальною системою управління збудженням синхронної машини є система, що подає на обмотку збудження максимальна напруга змінної полярності. Цей висновок має великим рівнем спільності та справедливий для всіх синхронних машин, як генераторів, так і двигунів, при будь-якому законі зміни моменту на валу $M_т$. В найпростіших випадках чергування перемикань досить очевидно. Розглянемо найбільш часту аварію синхронного генератора - коротке замикання в мережі і його відключення. Під час короткого замикання генератор не віддає активної потужності в мережу і вся енергія, що підводиться до його валу турбіною, йде на збільшення його частоти обертання, кут 0 збільшується.

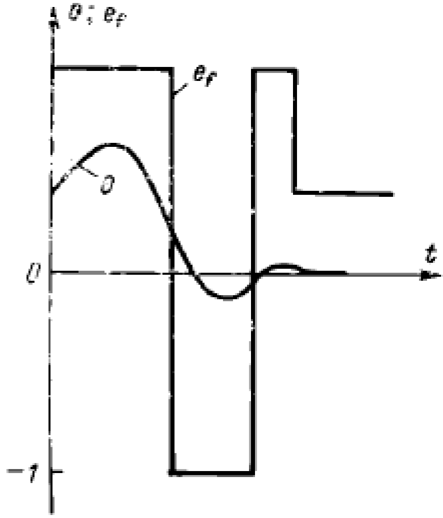


Рис. 66

Після того як коротке замикання відключено захистом, відновлюється зв'язок генератора з мережею, починається поступове гальмування ротора, але в перший момент кут 0 продовжує зростати і може досягти критичної позначки, що приводить до випадання генератора із синхронізму раніше, ніж ротор буде загальмований. Для запобігання цьому намагаються до максимуму збільшити гальмівну дію мережі шляхом форсування збудження. Однак на цьому шляху підстерігає нова небезпека: при сильній і тривалій форсировке гальмівну дію мережі може виявитися настільки різким, що кут 0 почне змінюватися в зворотну сторону і генератор може випасти з синхронізму на негативних кутах. для

запобігання цієї небезпеки слід в певний момент переключити полярність напруги збудження. При такому регулюванні досягається найбільша можлива ступінь стійкості синхронної машини.

Література: [1].

Змістовий модуль 2. Синтез оптимальних регуляторів для керування електротехнічними комплексами промислових підприємств.

Тема 1. Загальні питання синтезу оптимальних регуляторів.

Проблема реалізації оптимального керування.

Коли оптимальна програма для зміни фазових координат і управлінь знайдена, виникає проблема її реалізації. Універсальний метод реалізації будь-якої програми - це використання регуляторної-тора зі зворотним зв'язком. У канал зворотного зв'язку вводиться різниця між дійсним рухом системи і заданим оптимальним, і регулятор забезпечує малу величину цієї різниці, а саме мале відхилення дійсного руху від оптимального. В цьому відношенні реалізація оптимальної програми руху нічим не відрізняється від реалізації будь-який інший, в тому числі і неоптимальною, програми і здійснюється традиційними методами автоматичного регулювання.

Однак варіаційні методи дозволяють внести багато нового і в традиційну область синтезу регуляторів зі зворотним зв'язком, що здійснюють заданий режим руху. Розглянемо тому застосування цих методів до синтезу регуляторів, які найкращим чином реалізують заданий режим. Такі регулятори мають назву оптимальні. Точне визначення критерію оптимальності буде дано пізніше.

Буквами xt будемо позначати відхилення дійсних значень фазових координат від бажаних (байдуже, отримані ці бажані значення з розрахунку оптимальних режимів руху або з інших міркувань), uj- додаткові керуючі впливу, що дозволяють зберігати малі значення відхилень xt. Для простоти в подальшому обмежимося випадком одного управління.

Рівняння руху керованої системи можуть бути легко переписані в нових змінних xt. Оскільки x - малі величини, то досить утримати в рівняннях руху лише головні, лінійні, члени, і тоді рівняння руху керованої системи матимут вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1u + \varphi_1(t); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_nu + \varphi_n(t). \end{aligned}\right\}$$

Для того щоб при розгляді принципових питань не оперувати з громіздкими багатовимірними системами, обмежимося випадком, коли потрібно забезпечити трохи відхилення однієї фазової координати XГ = x від заданого значення і система шляхом послідовного виключення x2, x3у. . . , Xп може бути зведена до одного диференціального рівняння n-го порядку відносно x:

$$A(D)\,x = B(D)\,u + \varphi(t).$$

Основи теорії випадкових функцій.

Прикладом випадкової функції часу може служити напруга на затискачах генератора постійного струму. При роботі генератора на навантаження воно відчуває безперервні випадкові коливання навколо середнього значення.

Випадкова функція поєднує в собі риси випадкової величини функції: для кожного значення аргументу вона - випадкова величина, в кожному конкретному досвіді або вимірі (наприклад,при записі напруги генератора в інтервалі від t = 0 до t =10 с) вона перетворюється в звичайну (невипадкову) функцію. При вивченні випадкових функцій важливе значення мають такі їх характеристики, як середнє значення, середній квадрат, дисперсія і т. ін. Випадкові функції, що володіють ергодичною властивістю, а саме такі, для яких середнє значення (зване ще математичним очікуванням) .обчислюється за формулою

$$<\varphi> = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\, dt$$

а середній квадрат - по формулі

$$<\varphi^2> = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2(t)\, dt.$$

Знання дисперсії дозволяє досить багато сказати про випадкову функції ф (t)> підпорядкованої нормальним законом. І для довільних функцій ф (t), в тому числі і не підпорядкованих нормальному закону, можна, спираючись на нерівність Чебишева, дати оцінку часу, протягом якого функція ф (t) не вийде за межі смужки $\pm\ k\sigma_\varphi$:

$$P\,[\,|\varphi| \leqslant k\sigma_\varphi] \geqslant 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Переважна більшість зустрічаються на практиці випадкових сил, що обурюють підпорядковується з високим ступенем точності нормальному закону. Причина полягає в тому, що нормальний закон є закон граничний: сума досить великого числа незалежних (або слабо залежних) випадкових величин, підпорядкованих яким завгодно законам розподілу, при вельми не жорстких і зазвичай завжди виконуються обмеження до нормального закону. А оскільки на практиці кожне значення випадкової вимушених коливань є в кінцевому рахунку наслідком великого числа факторів, то й не дивно, що найчастіше випадкові функції, що зустрічаються на практиці, підпорядковані саме нормальному закону.

Вибір та обґрунтування критерію якості керування.

Оптимальне керування повинно забезпечувати мале відхилення дійсного руху від заданого, а саме Малість функції x (t). Однак «малість» функції можна розуміти по-різному і оцінювати різними функціоналами. Так, в якості виміру малості x (t) можна розглядати значення максимума модуля | x (0) | значення середнього квадрата $\langle x^2 \rangle$, імовірність порушення нерівності й т. ін.

При виборі критерію якості управління слід враховувати, що впливи ф(t) найчастіше є, як уже зазначалося, стаціонарними випадковими функціями часу, підлеглими нормальному закону розподілу, а це призводить

До того, що і фазова координата x (t), як ми в цьому переконаємося згодом, буде розподілена за нормальним законом (або близькому до нього). Але для стаціонарної випадкової функції x (t), розподіленої за нормальним законом, всі показники, характеризуючи її трохи, будуть цілком визначатися дисперсією x(t). Так, для практики дуже часто важливо, щоб ймовірність виходу величини x (t) з допустимих меж, т. Е. Ймовірність нерівності | x |> a_0, була найменшою. Але ця ймовірність цілком залежить від Dx.

У багатьох випадках важливо, щоб зверталася в нуль ймовірність нерівності $|x| > b_0$,- неприпустиме, що веде до аварії значення x (t). Але і ймовірність цієї нерівності цілком залежить від Dx і звернеться в нуль, якщо $D_x < b_0^2/k_0^2$, , де k0 - постійна «практичної впевненості». Таким чином, при збурюючих впливах, підпорядкованих нормальному закону розподілу, універсальним критерієм оптимальності служить мінімум дисперсії x (t).

У загальному випадку, коли функція x (t) може бути розподілена не тільки за нормальним законом, критерій мінімуму дисперсії вже не настільки універсальний, але все ж грає центральну роль.

Відзначимо, що у системах, де є небажані і великі значення управління, наприклад в системах управління судами, літаками слід враховувати, що при відхиленні керма створюються не тільки керуючі, а й гальмуючі рух сили, значення яких пропорційно інтегралу $\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt$. У цьому випадку критерієм якості є інтеграл

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T \left(u^2 + m_0 x^2 + m_1 x'^2 + \ . \ . \ . \ + m_k x^{(k)2}\right) dt.$$

Обчислення екстремуму наближених функціоналів.

Наявність множника 1 / Т і граничного переходу вносить значні особливості в поведінку функціоналів виду

$$J = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(x;\ x';\ t)\,dt,$$

які, до речі, не проявляються у функціоналів типу

$$J = \lim_{T \to \infty} \int_0^T F(x;\ x';\ t)\,dt$$

без множника 1 / Т перед інтегралом.

Зауважимо, що незалежність функціоналів типу від граничних умов може призвести до того, що завдання про синтез регуляторних-тора, що реалізує в замкнутій системі мінімум функціоналу, може мати єдине рішення, незважаючи на те, що рішення задачі про функції, що доставляє екстремум, свідомо не єдино. Так, наприклад, мінімум функціоналу може доставити будь-яка з функцій, але всі ці функції (що відображають руху замкнутої системи при різних початкових умовах) можуть бути породжені одним регулятором, який і забезпечить мінімум функціоналу (проте в загальному випадку рішення задачі про синтез оптимального регулятора може бути і не одним.

Синтез регуляторів, які забезпечують стійкість системи.

Обґрунтувавши вибір критерію якості, приступимо тепер до рішення основного завдання - до синтезу регулятора, який для керує системою, та забезпечить мінімум критерію якості. На першому етапі обмежимося частинним випадком – рівнянням:

$$A(D)\,x = u + \varphi.$$

Під рішенням поставленої нами задачі будемо розуміти знаходження такої функціональної залежності и = и (х), забезпечуючу мінімум критерію, яка дозволить спроектувати реальний регулятор зі зворотним зв'язком, що виробляє керуючий вплив і в функції від вимірюваного поточного значення фазової координати х (t) і, якщо потрібно, її похідних. В подальшому для стислості викладу під словами« керована система »будемо розуміти диференціальне рівняння системи, а під словом« регулятор »-

рівняння регулятора $u = u(x,\ x',\ \ldots,\ x^{(k)})$. Зрозуміло, ми будемо стежити, щоб рівняння регулятора допускало матеріальне втілення.

Завдання синтезу оптимального регулятора при випадкових збуреннях є, взагалі кажучи, вже не завданням пошуку оптимальної функції x (t) незалежної змінної t, а завданням побудови оператора $u = u(x,\ x',\ \ldots,\ x^{(k)})$ оптимальним чином перетворює випадкову функцію x (t) - фазову координату на виході - в випадкову функцію і (t) - керуючий вплив на вході; сам оператор при цьому може бути і не випадковим.

Завдання побудови оптимального оператора в цілому виходить вже за рамки варіаційного обчислення, але ми будемо вирішувати її шляхом виключення випадкової функції з системи двох рівнянь.

Необхідною умовою мінімуму функціоналу є виконання рівняння Ейлера- Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} = 0.$$

Оскільки поліном вигляду $A(D)\,A(-D) + m^2 = 0.$ можна предствити у вигляді добутку :

$$A(D)\,A(-D) + m^2 = a_n^2 (D - D_1)(D - D_2) \ldots (D - D_{2n}),$$

То згрупувавши сомножники з додатніми та від’ємними частинами коренів, можемо отримати добуток двох поліномів:

$$A(D)\,A(-D) + m^2 = G(D)\,G(-D),$$

Загальний розв’язок може бути записаний в наступному вигляді:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} C_i e^{D_i t} + \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-D_i t} + x_{\text{частн}}; \\ u &= \sum_{i=1}^{n} C_i e^{D_i t} + \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-D_i t} + u_{\text{частн}}, \end{aligned}\right\}$$

,

Де D_i - корені гурвицева полінома $G(D)$. Отже, перші n експоненційних членів у виразах будуть експоненціально зменшучимися членами, а наступні n членів будуть експоненціально зростаючими (ми не розглядаємо окремо випадки кратних коренів, оскільки безкінечно малою зміною коефіцієнтів, не змінюючим властивостей системи, кратні коріння можна зробити різними).

Тема 2. Синтез оптимальних регуляторів для електротехнічних комплексів.

Обчислення лінійних оптимальних операторів.

Основним етапом в синтезі регулятора є обчислення оптимального оператора, який зв'язує функції x (t) і и (t). Ми відшукували цей оператор шляхом виключення ф (t) з рівняння сталої підсімейства екстремалів, спираючись на властивості функції-представника. Необхідною умовою була побудова теорії екстремуму осередненою функціоналів з граничним переходом типу функціоналів. Тим часом існує інший, вже відомий метод обчислення оптимальних операторів, заснований на ідеях А. Н. Колмогорова і Н. Вінера і застосований в теорії управління з 50-х років.

Цей метод спирається на обмежуючу передумову: з са-мого початку передбачається, що регулятор линійний і оптимальний оператор відшукується тільки в класі лінійних операторів. Ми побачимо далі, що ця передумова не завжди справедлива, і дослідження дає більш повний строгий результат. Однак, прийнявши цю обмежуючу передумову, ми отримуємо порівняно просте рішення задачі синтезу відразу для широкого класу сил, що збурюють.

Дійсно, припустимо, що оптимальний регулятор має вигляд: •

$$u_{\text{опт}} = W(D)\,x,$$

де W (D) - дрібно-лінійна функція від оператора диференціювання D = d / dt. Тоді, замкнувши керовану систему регулятора, отримаємо наступне лінійне рівняння для функ-ції x (t):

$$[A(D) - W(D)]\,x = \varphi(t).$$

Тепер перейдемо з тимчасової області в частотну,а саме и праву і ліву частину рівняння піддамо перетворенню Фур'є (нагадаємо, що перетворення Фур'є можна розглядає-вати як окремий випадок перетворення Лапласа при s = jw). Зображення по Фур'є часткового рішення рівняння має вигляд:

$$x_{\text{частн}}(j\omega) = \frac{\varphi(j\omega)}{A(j\omega) - W(j\omega)}.$$

Отже, оптимальний регулятор і (х) мав би мати вигляд:

$$u = -\frac{m^2}{A(-D)}x,$$

що збігається з регулятором. Однак цей регулятор, як ми вже переконалися, не забезпечує стійкості замкнутої системи.

Для відшукання оптимального регулятора, що володіє додатково властивістю збереження стійкості замкнутої системи, необхідно виконати значно складніші викладки, оскільки в цьому випадку можливі лише такі варіації W (jw), які не порушують стійкості замкнутої системи. Вперше їх виконав Н. Вінер в 1943 р, який звів завдання пошуку оптимального оператора до вирішення особливого інтегрального рівняння Вінера-Хопфа. Надалі методика обчислення оптимального оператора викладалася, як правило, на основі рівняння Вінера-Хопфа. Оскільки інтегральні рівняння малознайомі (а часто і зовсім незнайомі) широкому колу інженерів, такий виклад не приводило до розуміння суті справи. Тому ми дамо новий виклад (з використанням ряду результатів роботи), що не вимагає від читача знання інтегральних рівнянь (але припускає знайомство з деякими найпростішими поняттями з теорії функцій когось комплексних змінних).

Отримуємо наступну кінцеву формулу для оптимального лінійного оператора W (D):

$$W(D) = A(D) - \frac{\Gamma(D)}{M_0(D) + M_+(D)}.$$

Перевіримо стійкість замкнутої системи:

$$A(D)x = \left[A(D) - \frac{\Phi_0(D)}{\Phi_1(D)}\right]x + \varphi,$$

звідки після скорочення подібних членів

$$\Phi_0(D)x = \Phi_1(D)\varphi,$$

оскільки $\Phi_0(D)$ - Гурвіців поліном, то замкнута система стійка.

Синтез регулятора за зарані відомою програмою.

Раніше ми досліджували синтез регуляторів, які або здійснювали стабілізацію керованої системи (і тоді x - це відхилення системи від стабилизованому положенні), або реалізовували задану, заздалегідь відому програму руху, наприклад оптимальну (і тоді x - це відхилення реального руху від оптимального програмного). Але можуть бути випадки, коли необхідно відстежувати заздалегідь невідому програму руху. Розглянемо, наприклад, систему управління копіювально-фрезерним верстатом. Вона повинна забезпечувати стеження руху фрези за рухом копіювального щупа, а це рух заздалегідь невідомо (залежить від деталі яку копіюють). Так само при реалізації оптимальних систем оптимальна програма може не бути заздалегідь відома, а обчислюється під час руху, і знову виникає проблема відстеження за-раніше невідомої програми.

Покажемо, що якщо керована система лінійна і відома кореляційна функція відслідковується програми, то може бути синтезований оптимальний регулятор, її реалізує. Нехай динаміка керованої системи описується лінійним диференційним рівнянням n-го порядку:

$$A(D)\,y = B(D)\,u + \varphi(t),$$

де y - фазова координата системи. Рух системи має щонайменше відхилятися від деякого програмного y = z (t) (наприклад, оптимального); причому функція z (t) нам раніше невідома, є лише можливість отримувати її значення кожен поточний момент часу t і відомі її статистичні характеристики - дисперсія і кореляційна функція (так, наприклад, для копіювально-фрезерного верстата кореляційна функція K(t) може бути отримана шляхом аналізу функції z (t) за минулі години роботи).

Позначимо через x різницю x = y- z. Найбільш доцільно вибрати середній квадрат x або, з урахуванням обмежень на управління, функціонал. Зробивши в рівнянні заміну змінної y = x + z, прийдемо до рівняння

$$A(D)\,x = B(D)\,u - A(D)z + \varphi(t).$$

Функцію часу $\varphi(t) - A(D)$ можна розглядати як новий збурюючий вплив $\varphi_1(t) = \varphi(t) - A(D)z$, причому її спектральна щільність потужності буде дорівнює

$$S_{\varphi_1}(\omega) = S_\varphi(\omega) + |A(j\omega)|^2 S_z(\omega).$$

Отже, завдання про синтез регулятора, що здійснює оптимальне в сенсі мінімуму критерію відстеження заздалегідь невідомої програми, може бути вирішена за допомогою алгоритму, причому спектральна щільність потужності функції, що фігурує в алгоритмі, обчислюється за формулою.

Зі збільшенням коефіцієнта посилення зростає точність стеження і одночасно з цим збільшується потужність управління. З формул випливає, що при необмеженому збільшенні k можна забезпечити як завгодно високу точність спостереження. Але необхідно пам'ятати, що формули вводилися в припущенні, що фазова координата x (t) (неузгодженість між дійсним і бажаним рухами системи) відома точно. Практично при малих x^2 точність стабілізації і стеження починає обмежувати інший фактор - обмежена точність будь-яких приладів, що вимірюють неузгодження x (t).

Врахування похибок приладів.

Повернемося до проблеми синтезу регулятора, що забезпечує для керованої системи загального вигляду мінімум критерію якості, але врахуємо, що будь-які вимірювальні прилади показують фазову координату з неминучою похибкою, і по-цьому фактично оптимальний регулятор потрібно шукати у вигляді:

$$u_{\text{опт}} = W(D)\,y,$$

Де $y = x + \psi$, а $\psi(t)$ охибка вимірювання, що є зазвичай стаціонарною випадковою функцією часу. Дисперсія цієї похибки добре відома і є характеристикою точності вимірювального приладу. Ми переконаємося далі, що не менш важливою характеристикою приладу служить кореляційна функція похибки і її облік може істотно підвищити точність систем стабілізації і відстеження програмного руху.

Замкнемо регулятором керовану систему та отримаємо:

$$[A(D)-W(D)]\,x = W(D)\,\psi+\varphi$$

Значення:

$$<x^2>_{\text{мин}} = \int_0^\infty S_\varphi S_\psi \frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2 S_\psi + S_\varphi}.$$

є абсолютним мінімумом, досяжним в класі лінійних регуляторів, оскільки воно визначалось без урахування додаткової вимоги - вимоги стійкості. Легко переконатися, що регулятор, в загальному випадку не забезпечує стійкості замкнутої системи, і тому необхідно, обчислювати оптимальний оператор більш складним шляхом, стежачи за тим, щоб при варіації шуканої функції не порушувалися вимоги стійкості.

При обліку похибок вимірювання можуть існувати нелінійні регулятори, кращі, ніж лінійні, на практиці і в цьому випадку обмежуються пошуком оптимального оператора в класі лінійних. Частково це пов'язано з тим, що для побудови оптимального нелінійного регулятора необхідно використовувати більш повні імовірнісні характеристики похибкою, які, як правило, невідомі, і частково з тим, що для найбільш часто зустрічаються на практиці випадкових функцій у розподілених за нормальним законом, оптимальним регулятором і при обліку похибок вимірювання буде лінійний регулятор. Нелінійний регулятор, кращий, ніж оптимальний лінійний, може бути побудований лише тоді, коли функції розподілені не за нормальним законом.

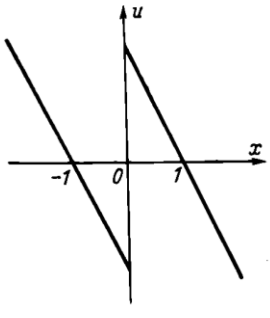


Рис.2.2.1 Характеристика регулятора.

Методика керування регулятором.

Традиційна методика синтезу регуляторів ґрунтується на дослідженні перехідного процесу, що виникає в замкнутій системі при впливі, що обурює типу одиничного стрибка або імпульсу. Регулятор синтезують так, щоб перехідні процеси загасали швидко і володіли помірною коливальних і малим перерегулюванням. Вважаються бажаними аперіодичні перехідні процеси.

Детально розроблені різноманітні методи (логарифмічних амплітудних характеристик, інтегральних оцінок і т. ін.), що дозволяють, задавшись характером перехідних процесів, визначити структуру і коефіцієнти посилення регулятора. Ця методика буде обґрунтованою
 в тому випадку, якщо рівноваги вплив в функції часу дійсно виглядає як стрибок або досить рідкісна послідовність стрибків. Але якщо вплив рівноваги, як це найчастіше буває на практиці, є випадковою стаціонарною функцією, то аналіз перехідних процесів вже не може, природно, дати обґрунтовану відповідь на питання про якість системи. При стаціонарньому збуренні сил якість визначає вже не перехідний процес, а дисперсія в сталому режимі, коли фазова координата x (t) сама є стаціонарною випадковою функцією.

Для стаціонарних випадкових збурюючих сил методика синтезу, заснована на розгляді характеру перехідних процесів, використовувалася лише тому, що не була достатньо розроблена та доведена до простого інженерного алгоритму методика синтезу регуляторів, оптимальних за випадкових збурень.

Тепер, маючи в своєму розпорядженні цю методику, ми можемо однозначно визначити, які перехідні процеси відповідають дійсно оптимальним системам, які забезпечують найвищу точність стабілізації або відстеження заданої програми, і які не відповідають нормі. Побудувати регулятор, оптимальний в сенсі аналітичного конструювання, набагато простіше, ніж регулятор, оптимальний в сенсі критерію для системи, в якій ті, хто збурення сили не рівне нулю.

Основним недоліком аналітичного конструювання є те, що використовується допущення про рівність нулю збурюючих сил в рівнянні обуреного руху. Це припущення різко звужує коло технічних завдань, до яких можна обґрунтувати та застосувати методику аналітичного конструювання. В переважній більшості технічних завдань (винятком, можливо, є деякі об'єкти космічної техніки) саме відміну дійсних сил від розрахункових (в рівняннях збуреного руху ця відмінність і проявляється у вигляді випадкових функцій, що не рівних нулю) є причиною відхилення дійсного руху від заданого.

Слід зауважити, що робилися спроби, залишаючись у рамках методики аналітичного конструювання, врахувати наявність збурених сил в рівняннях обуреного руху, але ці спроби не можна вважати вдалими. для успішного рішення необхідний ширший підхід, і зокрема перехід від критерію до критерію.

Відзначимо, що регулятори, побудовані на підставі методики аналітичного конструювання, часто успішно застосовуються тоді, коли ті, хто підбурює сили не дорівнюють нулю.

Вибір вагових коефіцієнтів.

Бувають випадки, коли важливо забезпечити трохи не тільки координати, але і її похідних (або стосовно системам виду трохи не тільки фазової координати x(t)). В цьому випадку звісно замість критерію якості треба розглядати критерій більш загального вигляду

$$J=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[u_2+m_0^2x^2+m_1^2(x')^2+\ \dots\ +m_k^2(x^{(k)})^2\right]dt,$$

Якщо всі коефіцієнти задані, то знайти регулятор, що забезпечує для системи стійкість і мінімум критерію , не складає особливих труднощів. Дійсно, рівняння Ейлера для функціоналу з урахуванням рівняння зв'язку буде мати вигляд:

$$[A(D)A(-D)+M(-D^2)]\,x=A(-D)\,\varphi,$$

де символом M (- D^2) позначений наступний поліном:

$$M(-D^2)=m_0^2-m_1^2D^2+m_2^2D^4+\ \dots\ +(-1)^k m_k^2D^{2k}.$$

Рівняння є узагальненням рівняння, і його характеристичний поліном, може бути розкладений на два множники:

$$A(D)A(-D)+M(-D^2)=G_1(D)G_1(-D),$$

де G1 (D) - гурвіц поліном.

Замкнувши регулятором систему, переконаємося, що замкнута система стійка, дисперсію похідних можна обчислити за формулою:

$$<(x^{(k)})^2> = \int_0^\infty \omega^{2k} S_\varphi(\omega) \frac{k^2\, d\omega}{|G_1(j\omega)|^2}$$

Формула обчислення оптимального регулятора:

$$u_{\text{опт}} = -\left[\left(\sqrt{m_1^2 + 2\sqrt{1+m_0^2} - 1} - 1\right)D + \sqrt{1+m_0^2} - 1\right]x.$$

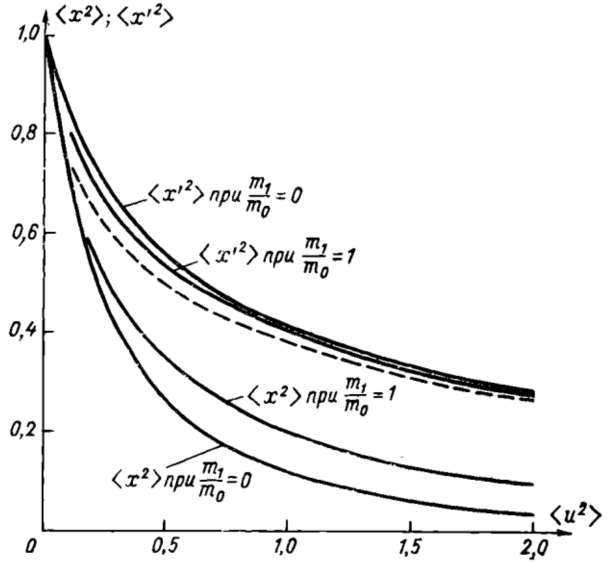


Рис.2.2.2. Залежність x^2, x' від и$^{2.}$

Рисунок 2.2.2. демонструє, що чим більше коефіцієнт m_1^2, стоїть при квадраті похідної в критерії, тим швидше зменшується значення x'' з ростом потужності управління, але неодмінно за рахунок того, що x^2 спадає повільніше. У межах, при m1/m0 прямує до нескінченності зменшуються з однаковою швидкістю.

Тепер стає прозорим фізичний зміст коефіцієнтів m_0, m_1. . , m_k в критерії: вони пропорційні небажаності значень x^2, x '', … $x^{к2}$. Чим більше ваговий коефіцієнт тим швидше зменшується значення $x^{к2}$ з ростом потужності управління. Ця залежність відкриває шлях і до вибору вагових коеффіцієнтів.

Тема 3. Оптимальне керування нелінійними системами в умовах невизначеності зовнішніх факторів.

Керовані системи другого порядку.

Розглянемо проблему оптимального управління рухом різних транспортних засобів - електровозів, тепловозів, судів, літаків і т. ін. Природно, що критерії якості керованого руху можуть залежати від незалежної змінної t, від фазової координати x, її першої похідної x '(швидкості руху) і від другої похідної x " (прискорення), а саме. в загальному випадку критерій якості має вигляд:

$$J = \int_0^T F(t;\ x;\ x';\ x'')\,dt.$$

Рівняння Ейлера для функціоналу буде диференціальним рівнянням четвертого порядку, а рівняння усталеної підродини екстремалей - рівнянням другого порядку. Для того щоб знайти його, потрібно знизити порядок рівняння Ейлера вдвічі. У загальному випадку виконати зниження порядку важко. Однак можна помітити, що для багатьох транспортних коштів залежність критерію якості від прискорення є більш слабкою, менш суттєвою, ніж залежність від інших змінних, і цю залежність часто можна з високим ступенем точності вважати виродженою в лінійну залежність. Але якщо залежність від прискорення вироджується в лінійну, то, рівняння Ейлера перетворюється в рівняння другого порядку, а саме як раз в рівняння сталого (іноді - нестійкого, тоді задача не має рішення) підродини екстремалей вихідного, невиродженого функціоналу.

Таким чином, якщо критерій якості залежить від прискорення (другиї похідної x) лінійно, то відпадає найбільш важка частина рішення - побудова рівняння сталого підродини екстремалей, і синтез регулятора, автоматично реалізує оптимальне керування, можна вести безпосередньо за рівнянням Ейлера для функціоналу - критерію якості. Регулятори, побудовані безпосередньо за рівнянням Ейлера, природно назвати, як це було запропоновано в роботі, ейлеровским регулятором.

Синтез ейлеровських регуляторів.

Розглянемо задачу управління електродвигунами постійного струму, які обирають тралову лебідку. Момент опору на валу електродвигуна залежить, з одного боку, від швидкості вибірки трала, з іншого боку, від стану моря, бо хвиля, розгойдуватися траулер, створює випадкові коливання моменту опору на валу. Рівняння рівноваги моментів на валу може бути в відносних одиницях записано у вигляді

$$i = s'' + \varphi(t)\, s'^{n},$$

де i - струм якоря;

s’’ - швидкість вибірки трала;

n - показник ступеня, що залежить від швидкості вибірки і для зазвичай використовуваних швидкостей рівних 1,5;

$\varphi(t)$ - стаціонарна випадкова функція, яка відображає вплив качки траулера на момент (зміною радіуса навивки нехтуємо). Для підвищення продуктивності траулера (для підвищення улову риби) важливо забезпечити малий час вибірки трала, а обмежує цей час найчастіше нагрів електродвигуна. Тому завданням оптимального управління є забезпечення мінімуму втрат в якорі, а саме мінімуму інтеграла

$$Q = \int_0^T \left[s'' + \varphi(t)\, s'^{n}\right]^2 dt,$$

при виконанні граничних умов: s (0) = 0; s (T) = s_0, відображаючих вимоги вибірки трала довжиною s_0 за час T.

При вирішенні задачі синтезу необхідно врахувати, що функція $\varphi(t)$ змінюється повільно в порівнянні з механічною постійною часу електродвигуна (прийнятої нами за одиницю). Тож повільно буде змінюватися і швидкість вибірки трала, і друга похідна (прискорення) буде дуже мала в порівнянні з першою похідною.

Виконавши виняток, прийдемо до рівняння

$$\frac{i^2}{s'} = C$$

- рівняння ейлеровского регулятора.

Розглянемо тепер, що ж нового принесе управління по закону в динаміку тралової лебідки. При традиційних способах керування напруга на двигуні підтримується постійною. Це призводить до того, що швидкість вибірки трала залишається майже незмінною, а струм якоря відчуває коливання. Для наочності розрахунку будемо вважати, що $\varphi = 1 + a \sin \tau$ (випадок регулярного збурення) і n = 1,5. Тоді випливає:

$$i^2 = \varphi^2 v_0^3,$$

де v_0 - постійна швидкість вибірки трала (в частках номінальної-ної швидкості), а інтенсивність виділення тепла в якорі:

$$\frac{Q}{T} = v_0^3 \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^2 \, dt.$$

При керуванні за законом ейлеровского регулятора на хвилюванні не залишаються постійнми ні швидкість вибірки трала, ні струм якоря. Середня швидкість вибірки трала:

$$\frac{s_0}{T} = C^{1/2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\tau}{1 + a \sin \tau},$$

А інтенсивність втрат в якорі:

$$\frac{Q}{T} = C^{3/2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\tau}{1 + a \sin \tau}.$$

Рівняння показують, що коефіцієнт C в законі управління має фізичний сенс «коефіцієнта терміновості»: чим більше значення C, тим вище середня швидкість вибірки трала, але тим вище і інтенсивність втрат в якорі.

Що стосується реалізації ейлеровского регулятора , то вона утруднень не викликає. Поточне значення струму якоря i (t) пропускається через квадратор і порівнюється з поточним значенням швидкості вибірки s ', помноженої на «коефіцієнт терміновості» C.

Якщо виявляється, що i^2> Cs’ то сигнал з виходу блоку порівняння зменшує напругу, що подається на двигун; якщо i2 <Cs’ то збільшує його.

Рівняння сталої підродини екстремалєй можна записати у вигляді

$$i = i_0 = \text{const}.$$

Це є рівнянням ейлеровского регулятора.

В даному випадку, при зроблених нами припущеннях, ейлеровским буде регулятор, що підтримує сталість струму якоря при коливаннях моменту опору і швидкості вибірки трала. Рівняння руху замкнутої системи:

$$s'' + \varphi(t) s'^n = i_0.$$

Особливості постановки задач керування.

Під задачею проектування розуміється створення нового об’єкта чи системи, що матимуть задані властивості чи характеристики. Об’єктами проектування можуть бути технічні системи, в тому числі системи автоматичного управління, економічні системи тощо. Основні проблеми, що виникають при рішенні задачі проектування, пов’язані з завданням структури проектованого об’єкта (структурний синтез), а також із вибором параметрів у рамках уже відомої структури (параметричний синтез). Основні вимоги до створюваного об’єкта задаються вектором вихідних величин. Задача проектування об’єкта в ряді випадків може бути представлена як задача рішення системи нерівностей, що називаються специфікаціями.

Рекомендована література

Базова

1. Математичне моделювання в електроенергетиці: Підручник / Кириленко О.В., Сегеда М.С., Буткевич О.Ф., Мазур Т.А. Львів:Вид. «Львівська політехніка», 2010. – 608 с. (2 пр., ел).

2. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. – Львів, "Вища школа", 1989.- 464 с. (50пр).

3. Романюк Ю.Ф. Електричні системи та мережі (Розділ 4.5 Розрахунок режимів електричних мереж на електронно – обчислюваних машинах) – К.: Знання, 2007. – 292 с. (5 пр.).

4. Gelfand I. M. Calculus of Variations / I. M. Gelfand, Izrail Moiseevitch Gelfand, S. V. Fomin. – Courier Dover Publications, 2000 – 232 p. (ел.)

5. Cassel Kevin W. Variational Methods with Applications in Science and Engineering / Cassel Kevin W. – Cambridge University Press, 2013. – 432 p. (ел.)

6. Lebedev L. P. The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics / Lebedev L. P., Cloud M. J. – World Scientific, 2003. – 436 p. (ел.)

7. Logan J. David. Applied Mathematics / Logan J. David. – 3rd Ed. – Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2006. – 546 p. (ел.)

Допоміжна

1. Варіаційне числення : навч. посіб. для студ. фіз. спец. ун-тів / В. М. Адамян, М. Я. Сушко ; Одеський національний ун-т ім. І.І.Мечникова. - О. : Астропринт, 2005. - 128 с.: рис. - ISBN 966-318-340-3

2. Варіаційне числення та методи оптимізації : підручник / О. М. Піддубний, Ю. І. Харкевич ; Східноєвроп. нац. ун-т ім. Лесі Українки. - Луцьк : Гадяк Ж. В., 2015. - 331 с. - ISBN 978-617-7129-36-2

3. Вступ до математичної фізики. Варіаційне числення та крайові задачі : навч. посіб. для студентів фіз. та інж.-фіз. спец. ВНЗ /

В. М. Адамян, М. Я. Сушко ; Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова. - Одеса : Астропринт, 2014. - 376 с. : рис. - ISBN 978-966-190-912-9

4. Диференціальні рівняння, варіаційне числення та їх застосування : навч. посіб. / [Ф.Г. Гаращенко, В.Т. Матвієнко, В.В. Пічкур, І.І. Харченко]. – К. : Київський ун-т, 2015. – 271 с.

5. Класичні та сучасні методи варіаційного числення : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Г. І. Кошовий, В. М. Павленко, Б. Л. Голінський ; Ін-т інновац. технологій і змісту освіти, Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харк. авіац. ін-т". - Х. : ХАІ, 2011. - 303 с. : рис. - ISBN 978-966-662-246-7

6. Математичне програмування та елементи варіаційного числення : навч.-метод. посіб. / Ф. Г. Ващук, О. Г. Лавер, Н. Я. Шумило ; Ужгород. держ. ін-т інформатики, економіки і права. - Ужгород, 2001. - 169. - ISBN 966-7186-55-5

7. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. — К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. — 399 с.

8. Основи варіаційного числення : навч. посіб. для студ. вищих навч. закл., які навч. за напрямом підгот. "Механіка" / Е. Л. Гарт ; Дніпропетровський національний ун-т ім. Олеся Гончара. - Д., 2009. - 176 с.: рис. - ISBN 978-966-551-287-5

9. Перестюк М. О., Станжицький О. М., Капустян О. В., Ловейкін Ю. В. Варіаційне числення та методи оптимізації. — К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. — 144 с.