

УДК 539.3

Канд. фіз.-мат. наук О. О. Авраменко  
Державна інженерна академія, м. Запоріжжя

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НЕТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПІД ДІЄЮ НЕРІВНОМІРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*На основі запропонованого підходу проведено аналіз напружено-деформованого стану нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини під дією нерівномірно розподіленого навантаження. Як приклад наведено результати розподілу прогинів для конічних оболонок у залежності від параметрів зміни товщини для деяких навантажень. Виявлені ефекти і отримані закономірності.*

**Ключові слова:** *нерівномірне навантаження, нетонка ортотропна конічна оболонка, уточнена теорія, змінна товщина, сплайн, метод дискретної ортогоналізації, напружено-деформований стан.*

### Вступ

Конічні оболонки сталі та змінної товщини широко застосовуються в різних галузях техніки як елементи конструкцій та деталі машин [1, 2]. Навантаження, під впливом яких знаходяться такі конструкції, часто може бути нерівномірним.

При розрахунку міцності оболонкових конструкцій необхідно мати інформацію про їх напружено-деформований стан. Важливим при визначенні напружено-деформованого стану є врахування змінної товщини оболонки, оскільки в багатьох випадках необхідно вибрати раціональні параметри деформативності конструкції, не змінюючи її ваги. У багатьох випадках матеріали механічних об'єктів, що розглядаються, є анізотропними, що зумовлено широким застосуванням композитних матеріалів та змушує використовувати для дослідження напружено-деформованого стану таких конструкцій уточнені моделі теорії оболонок, що враховують вплив поперечного зсуву.

Для розв'язання задач статички тонких конічних оболонок як сталі, так і змінної товщини існує ряд розроблених методів, тоді як задачам про напружено-деформований стан конічних оболонок в уточненій постановці присвячено небагато робіт.

Метою даної роботи є розрахунок та аналіз напружено-деформованого стану оболонок вказаного класу на базі гіпотези прямолінійного елемента в залежності від параметрів змінної товщини та нерівномірно розподіленого навантаження.

### 1 Розв'язання задач статички нетонких конічних оболонок на основі сплайн-апроксимації

У деяких випадках, особливо для нетонких оболонок та оболонок з композитних матеріалів, припущення класичної теорії можуть привести до результатів, що недостатньо точно відображають суть механічних явищ, що вивчаються. Для розв'язання таких задач запропоновано різні варіанти уточнених моделей обо-

лонок, отримані на основі менш жорстких припущень, ніж припущення про збереження нормального прямолинійного елемента.

Пропонується підхід до розв'язання двовимірних задач про напружено-деформований стан конічних оболонок в уточненій постановці [4] на базі гіпотези прямої лінії, заснований на пониженні розмірності задачі за допомогою сплайн-коллокації [3] і розв'язанні отриманої при цьому одновимірної крайової задачі стійким методом дискретної ортогоналізації [1, 3].

Розглянемо клас нетонких конічних оболонок, віднесених до ортогональної системи координат  $s, \theta, \gamma$ , де  $s$  – довжина по створюючій поверхні приведення, – центральний кут у поперечному перетині, – нормальна до даної поверхні координата. Радіус кола в поперечному перетині представимо у вигляді  $r = r_0 + \cos \varphi \cdot s$ .

Виходячи з основних співвідношень уточненої теорії оболонок, після ряду перетворень, отримуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних у переміщеннях, що описує напружено-деформований стан конічних оболонок змінної товщини:

$$\begin{aligned} & rC_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{C_{66}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \\ & + \left( r \frac{\partial C_{11}}{\partial s} + \cos \varphi C_{11} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ & + C_{12} \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \\ & - \left( \frac{\cos \varphi C_{22}}{r} - \frac{\partial C_{22}}{\partial s} + \frac{\cos \varphi C_{66}}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ & + \left( \cos \varphi \frac{\partial C_{12}}{\partial s} - \frac{\cos^2 \varphi C_{22}}{r} \right) u - \cos \varphi \times \\ & \times r \frac{\partial C_{66}}{\partial \theta} v + \sin \varphi \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial s} - \frac{\cos \varphi C_{22}}{r} \right) w + r q_s = 0; \\ & \left( C_{12} - \frac{\sin^2 \varphi D_{66}}{r^2} + C_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + r C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \\ & + \frac{C_{22}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\sin \varphi D_{66}}{r} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + \\ & + \sin \varphi D_{66} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial s} + \\ & + \left( r \frac{\partial C_{66}}{\partial s} + \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi D_{66}}{r^2} + \cos \varphi C_{66} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \\ & + \left( \sin \varphi \frac{\partial D_{66}}{\partial s} - \frac{\sin 2\varphi D_{66}}{2r} \right) \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + \\ & + \left( \frac{\cos \varphi (C_{22} + C_{66})}{r} - \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin 2\varphi \sin \varphi D_{66}}{r^3} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} (C_{22} + K_2) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{\partial D_{66}}{\partial s} - \frac{\cos \varphi D_{66}}{r} \right) \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \\ & + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} u - \\ & - \left( \cos \varphi \frac{\partial C_{66}}{\partial s} + \frac{\sin^2 \varphi K_2}{r} - \frac{\sin 2\varphi \sin \varphi}{2r^2} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} + \right. \\ & \left. \frac{\cos^2 \varphi C_{66}}{r} + \frac{\sin^2 2\varphi D_{66}}{2r^3} \right) v + \\ & + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial C_{22}}{\partial \theta} w + \left( \sin \varphi K_2 - \frac{\sin 2\varphi}{2r} + \frac{\sin 2\varphi \cos \varphi D_{66}}{2r^2} \right) \times \\ & \times \psi_\theta + r q_\theta = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & rK_1 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{K_2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \sin \varphi C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + \\ & + \left( r \frac{\partial K_1}{\partial s} + \cos \varphi K_1 \right) \frac{\partial w}{\partial s} + rK_1 \frac{\partial \psi_s}{\partial s} - \\ & - \frac{\sin \varphi}{r} (C_{22} + K_2) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ & + K_2 \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{\sin 2\varphi C_{22}}{2r} u - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial K_2}{\partial \theta} v - \\ & - \frac{\sin^2 \varphi C_{22}}{r} w + \left( \cos \varphi K_1 + r \frac{\partial K_1}{\partial s} \right) \psi_s + \\ & + \frac{\partial K_2}{\partial \theta} \psi_\theta + r q_\gamma = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin \varphi D_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi D_{12}}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \\ & rD_{11} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + \frac{D_{66}}{r} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} + (D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s \partial \theta} - \\ & - \frac{\sin 2\varphi D_{12}}{2r} \frac{\partial u}{\partial s} + \left( \frac{\cos^2 \varphi D_{12}}{r} - rK_1 - \frac{D_{12}}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial s} + \\ & + \left( \cos \varphi D_{11} + r \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \right) \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \\ & + \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \\ & + \left( \frac{\sin 2\varphi (D_{12} + D_{22} + D_{66})}{2r^2} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial D_{12}}{\partial s} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \left( \frac{\partial D_{12}}{\partial s} - \frac{\cos \varphi (D_{22} + D_{66})}{r} \right) \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \\ & + \left( \frac{\sin 2\varphi \cos \varphi (D_{12} + D_{22})}{2r^2} - \frac{\sin 2\varphi}{2r} \frac{\partial D_{12}}{\partial s} \right) + \\ & + \left( \frac{\sin 2\varphi \sin \varphi D_{12}}{2r^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial D_{12}}{\partial s} + \frac{\sin 2\varphi \sin \varphi D_{22}}{r^2} \right) w + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \cos \varphi \frac{\partial D_{12}}{\partial s} - rK_1 - \frac{\cos^2 \varphi D_{22}}{r} \right) \psi_s - \\
 & - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial D_{66}}{\partial \theta} \psi_\theta = 0; \\
 & - \frac{\sin \varphi D_{66}}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} - \frac{\sin \varphi D_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \\
 & + (D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + rD_{66} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2} + \\
 & + \frac{D_{22}}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\sin 2\varphi D_{66}}{2r} \frac{\partial v}{\partial s} + \\
 & + \frac{\partial D_{12}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \left( r \frac{\partial D_{66}}{\partial s} + \cos \varphi D_{66} \right) \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \\
 & - \left( \frac{\sin 2\varphi D_{22}}{2r^2} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \\
 & - \frac{\sin \varphi}{r^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \left( \frac{\sin^2 \varphi D_{22}}{r^2} - K_2 \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
 & + \left( \frac{\cos \varphi (D_{66} + D_{22})}{r} + \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \right) \times \\
 & \times \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{\sin 2\varphi}{2r^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} u + \\
 & + \left( \sin \varphi K_2 + \frac{\sin 2\varphi}{2r} \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \right) v - \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} w + \\
 & + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial D_{22}}{\partial \theta} \psi_s - \\
 & - \left( rK_2 - \cos \varphi \frac{\partial D_{66}}{\partial s} - \frac{\cos^2 \varphi D_{66}}{r} \right) \psi_\theta = 0, \quad (1)
 \end{aligned}$$

де  $u, v, w$  – переміщення точок координатної поверхні в напрямках  $s, \theta, \gamma$ ;  $\psi_s, \psi_\theta$  – повні кути повороту прямолінійного елемента;  $q_s, q_\theta, q_\gamma$  – компоненти поверхневого навантаження,  $k(t)$  – кривина поперечного перерізу оболонки,  $\varphi$  – кут між нормаллю до оболонки та віссю обертання;

$$C_{11} = \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta}, C_{12} = \nu_\theta C_{11}, C_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta}, C_{66} = G_{s\theta} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}, D_{12} = \nu_\theta D_{11}, D_{22} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)},$$

$$D_{66} = \frac{G_{s\theta} h^3}{12}; K_1 = \frac{5}{6} h G_{s\gamma}, K_2 = \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma}.$$

У формулах (2)  $E_s, E_\theta, \nu_s, \nu_\theta$  – модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках  $s$  і  $\theta$ ,  $G_{s\theta}, G_{s\gamma}, G_{\theta\gamma}$  – модулі зсуву,  $h = h(s, \theta)$  – товщина оболонки.

Система диференціальних рівнянь (1) в об'єднанні з граничними умовами утворює двовимірну крайову задачу.

З метою перетворення отриманої задачі у систему звичайних диференціальних рівнянь представимо розв'язувальні функції у вигляді лінійної комбінації сплайн-функцій. При цьому використовуватимемо В-сплайни третього ступеня. Покладемо, що торці оболонки жорстко закріплені. Тоді шукане рішення представимо у вигляді

$$\begin{aligned}
 u(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s), \quad v(s, \theta) = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(s), \\
 w(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(s), \quad \psi_s(s, \theta) = \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \varphi_{4i}(s), \\
 \psi_\theta(s, \theta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \varphi_{5i}(s), \quad (3)
 \end{aligned}$$

де  $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{si}(\theta), \psi_{\theta i}(\theta)$  – шукані функції змінної  $(\theta)$ ,  $\varphi_{ji}(s)$  ( $j=1,5$ ) – задані комбінації В-сплайнів третього ступеня на рівномірній сітці  $\Delta$ :  $\Delta: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L$ . Щоб задовольнити граничним умовам  $u = v = w = \psi_s = \psi_\theta = 0$  представимо сплайн-функції у вигляді

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j0}(s) &= -4B_3^{-1}(s) + B_3^0(s), \\
 \varphi_{j1}(s) &= B_3^{-1}(s) - \frac{1}{2}B_3^0(s) + B_3^1(s), \\
 \varphi_{ji}(s) &= B_3^i(s) \quad (i = 2, 3, \dots, N-2), \\
 \varphi_{j,N-1}(s) &= B_3^{N+1}(s) - \frac{1}{2}B_3^N(s) + B_3^{N-1}(s), \\
 \varphi_{jN}(s) &= -4B_3^{N+1}(s) + B_3^N(s). \quad (4)
 \end{aligned}$$

Перетворюємо систему рівнянь (1) з урахуванням рівностей (3) та (4) і задовольняємо її у точках колокації. Отриману при цьому систему звичайних диференціальних рівнянь приводимо до нормальної форми

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A\bar{R} + \bar{f}, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}
 \bar{R} &= \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, \\
 & v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N; \\
 & \psi_{s0}, \dots, \psi_{sN}, \psi'_{s0}, \dots, \psi'_{sN}, \psi_{\theta 0}, \dots, \\
 & \psi_{\theta N}, \psi'_{\theta 0}, \dots, \psi'_{\theta N}\}^T; \\
 \bar{R} &\text{ – вектор-функція від } \theta; \quad \bar{f} \text{ – вектор правих ча-}
 \end{aligned}$$

стин;  $A$  – квадратна матриця, елементи якої залежать від параметра.

Будемо розглядати замкнені оболонки, у цьому випадку граничними умовами виступають умови симетрії.

Отриману одновимірну краєву задачу вирішуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [1, 3].

Підставляючи отриманий розв’язок у співвідношення (3), отримаємо значення переміщень та повних кутів повороту нормалі, за ними можна з’ясувати всі фактори напружено-деформованого стану.

## 2 Аналіз напружено-деформованого стану нетонких конічних оболонок у залежності від параметрів зміни товщини та навантаження

Розглянемо напружено-деформований стан конічних оболонок, що знаходяться під впливом змінного нормального навантаження, що змінюється згідно з законом  $h = 1,5(1 + \alpha|\cos\theta|)$ .

Матеріал оболонки має модулі поперечного зсуву  $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,2E$ ,  $G_{s\theta} = 0,4E$ ;  $E_s = 5E$ ,  $E_\theta = 1,25E$  – модулі пружності; коефіцієнти Пуассона  $\nu_s = 0,45$ ,  $\nu_\theta = 0,18$ .

Оболонка жорстко закріплена по всьому краю контура  $0 \leq s \leq L$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $L = 30$ . Кут розкриття конуса  $\psi = \pi/2 - \varphi = \pi/6$ .

Початковий радіус усіченого конуса

$$r_0 = 20 - \frac{L}{2} \sin \psi.$$

Товщина змінюється згідно з законом  $h = 1,5(1 + \alpha|\cos\theta|)$ , при цьому зі зміною параметра  $\alpha$  об’єм оболонки залишається незмінним.

Потрібно визначити таке значення, при якому розподіл прогину по коловій координаті в перетині  $s = L/2$  буде найбільш рівномірним.

Через симетрію будемо розглядати  $\frac{1}{4}$  частину оболонки:  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

На рис. 1 наведено графіки розподілу прогинів по напрямній координаті для різних значень параметра  $\alpha$  у законі зміни товщини. З рисунку видно, що бажаний результат спостерігається при значенні  $\alpha = 0,175$ .

### Висновки

Розроблено ефективний підхід до розв’язання двовимірних задач статки нетонких ортотропних конічних оболонок змінної товщини. Отримано розв’язки задач такого класу та виявлено закономірності. З наведених результатів видно, що варіюючи одночасно параметрами змінності товщини і навантаження при збереженні ваги оболонки можна побудувати раціональніший напружено-деформований стан оболонкових конструкцій.

Отримані результати мають теоретичний інтерес та важливе практичне значення для оцінки міцності і деформативності елементів конструкцій, що мають форму конічних оболонок змінної товщини.

### Список літератури

1. Григоренко Я. М. Статика анизотропних оболонок с конечной сдвиговой жесткостью / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Г. П. Голуб. – К. : Наукова думка, 1987. – 216 с.

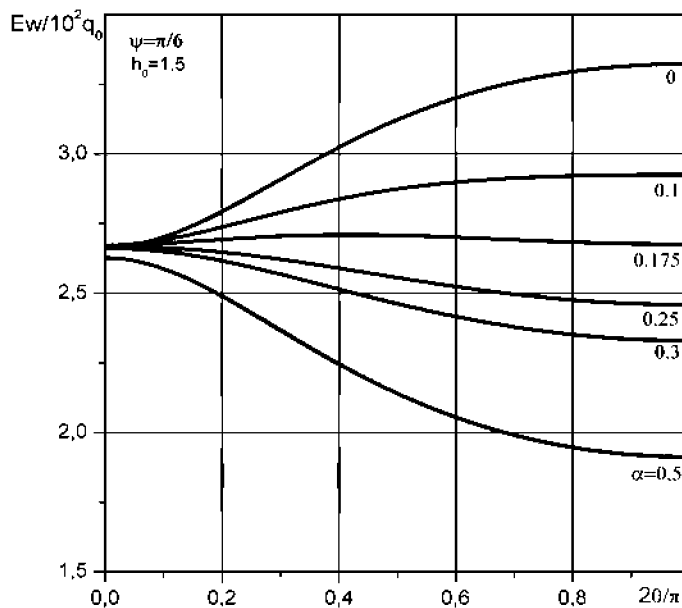


Рис. 1. Розподіл прогинів по напрямній координаті у перерізі  $s = L/2$

2. Григоренко Я. М. Основы теории пластин та оболонок / Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко – К. : Либідь, 1993. – 232 с.
3. Григоренко Я. М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К. : Академперіодика, 2006. – 472 с.
4. Григоренко Я. М. Решение на основе сплайн-аппроксимации двумерных задач статики ортотропных конических оболочек в уточненной постановке / Я. М. Григоренко, О. А. Авраменко, С. Н. Яремченко // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43. – № 11. – С. 43–54.

Одержано 15.12.2010

**Авраменко О.А. Анализ напряженно-деформированного состояния нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины под действием неравномерной нагрузки**

*На основе предложенного подхода проведен анализ напряженно-деформированного состояния нетонких ортотропных конических оболочек под действием неравномерно распределенной нагрузки. В качестве примера приведены результаты распределения прогибов для конических оболочек в зависимости от параметров изменения толщины для некоторых нагрузок. Выявлены эффекты и получены закономерности. Ключевые слова: неравномерная нагрузка, нетонкие ортотропные конические оболочки, уточненная теория, переменная толщина, сплайн, метод дискретной ортогонализации, напряженно-деформированное состояние.*

**Avramenko O. Stress-strain state analysis of non-thin orthotropic varying thickness conical shells under action of uneven loads**

*Basing on the developed approach the analysis of non-thin orthotropic conical shells of variable thickness under stress-strain state action of uneven loads is carried out. As an example, the results of the distribution for conical shells of deflections in depending on thickness change parameters are shown for some loads.*

**Key words:** uneven loads, non-thin orthotropic conical shells, Refined theory, varying thickness, spline, discrete orthogonalization method, stress-strain state.

---