

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет «Запорізька політехніка»

# **ПОЛЯ І ХВИЛІ В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ**

Навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за  
напрямом підготовки «Інформаційні мережі зв'язку»

Запоріжжя – 2019

УДК 621.391.3(075.8)

Д-53

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Національного університету «Запорізька політехніка»  
(протокол №2 від 30 вересня 2019 року).*

Рецензенти:

*Карпуков Л.М.*, доктор технічних наук, професор Національного університету «Запорізька політехніка»;

*Журавльов В.М.*, доктор технічних наук, начальник сектору обробки сигналів Державного підприємства «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро «Прогрес» імені академіка О.Г. Івченка.

**Дмитренко В. П.**

Д53

Поля і хвилі в телекомунікаціях: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів / В.П.Дмитренко, С.М. Романенко, Г.В. Мороз – Запоріжжя: НУ «ЗП», 2019. – 289 с.

ISBN 978-617-529-243-3

Розглянуто основні поняття і закони класичної електродинаміки, властивості та параметри основних різновидів телекомунікаційних напрямних систем класичного та інтегрального типів, методи аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами, основні різновиди частотно вибіркового кіл з наголосом на їх інтегральне виконання, проведено аналіз випромінювальних структур з різними типами поляризації класичного та інтегрального виконання, в тому числі для мобільного зв'язку. Посібник містить велику кількість ілюстрацій, прикладів вирішення типових задач, задачі для самостійного вирішення та переліки запитань для самоконтролю засвоєння знань за кожною темою.

Призначено для студентів напряму підготовки «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання.

**УДК 621.391.3(075.8)**

ISBN 978-617-529-243-3

© Дмитренко В.П.

© Національний університет  
«Запорізька Політехніка» (НУЗП),  
2019

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	8
ВСТУП .....	10
1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. ВЕКТОРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.....	15
1.1 Основні визначення. Загальні відомості про хвильові процеси.....	15
1.2 Гармонійна хвиля та її параметри .....	17
1.3 Вектори електромагнітного поля.....	19
2 ВЗАЄМОДІЯ ЕМП З СЕРЕДОВИЩЕМ.....	24
2.1 Параметри середовищ. Матеріальні рівняння електромагнітного поля.....	24
2.1.1 Діелектричні середовища .....	24
2.1.2 Провідні середовища .....	26
2.1.3 Магнетики.....	27
2.2 Класифікація середовищ .....	29
3 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ...	34
3.1 Рівняння Максвелла .....	34
3.2 Система рівнянь електромагнітного поля.....	41
3.3 Система рівнянь гармонійного електромагнітного поля....	42
3.3.1 Метод комплексних амплітуд.....	43
3.3.2 Рівняння Максвелла для комплексних амплітуд. Комплексні проникності.....	44
3.3.3 Критерій класифікації середовищ .....	47
3.4 Рівняння балансу миттєвих значень потужностей для електромагнітного поля.....	49
3.5 Граничні умови для векторів електромагнітного поля на поверхні розділу середовищ.....	52
3.5.1 Граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля.....	53

3.5.2	Граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля.....	56
3.5.3	Граничні умови на поверхні ідеального провідника .....	59
4	ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ У ОДНОРІДНОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ .....	67
4.1	Хвилеві рівняння .....	67
4.2	Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі .....	70
4.3	Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі з ненульовою провідністю .....	76
4.4	Плоскі однорідні хвилі в добре провідних середовищах ...	82
4.5	Поляризація електромагнітних хвиль .....	83
4.5.1	Лінійна поляризація .....	85
4.5.2	Кругова поляризація .....	87
4.5.3	Еліптична поляризація.....	89
4.5.4	Розкладання лінійно поляризованої хвилі в круговому базисі .....	90
5	ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ .....	95
5.1	Падіння нормально поляризованої плоскої хвилі на межу розділу двох середовищ.....	95
5.2	Падіння паралельно поляризованої плоскої хвилі на плоску межу розділу двох середовищ.....	100
5.3	Повне проходження хвилі в друге середовище.....	102
5.4	Перпендикулярне падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску межу розділу середовищ.....	103
5.5	Проходження електромагнітної хвилі через шар речовини .....	104
5.6	Наближені граничні умови Леонтовича. Розрахунок потужності втрат в провідниках .....	107
5.7	Повне внутрішнє відбиття.....	112

5.8 Явище деполяризації хвилі на межі розділу середовищ ..	114
6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В ЛІНІЯХ ПЕРЕДАЧІ .....	120
6.1 Класифікація ліній передачі .....	120
6.2 Рівняння однорідних ліній .....	120
6.2.1 Нормування напруг та струмів в ЛП з хвилею TEM. Універсальна модель ЛП .....	121
6.2.2 Телеграфні рівняння .....	124
6.3 Основні електричні характеристики ліній передачі .....	127
6.3.1 Комплексний коефіцієнт відбиття .....	128
6.3.2 Коефіцієнт стоячої хвилі .....	130
6.3.3 Повні нормовані напруга, струм, опори та провідності в ЛП .....	132
6.4 Коаксіальна лінія .....	135
6.4.1 Експериментальне визначення параметрів режиму ЛП	137
6.5 Двопровідна лінія .....	142
6.6 Несиметрична смужкова лінія (НСЛ) .....	144
6.7 ЛП щілинного типу .....	148
6.7.1 Симетрична щілинна лінія (СЩЛ) .....	149
6.7.2 Порівняння властивостей НСЛ та СЩЛ .....	151
6.7.3 Несиметрична щілинна лінія (НСЩЛ) .....	152
6.7.4 Копланарна лінія .....	154
7 ТРАНСФОРМУВАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КОРОТКИХ ВІДРІЗКІВ ЛП .....	160
7.1 Закон трансформації опору короткими відрізками ЛП ....	160
7.2 Приклади застосування трансформувальних властивостей відрізків ЛП .....	163
7.2.1 Зауваження щодо термінів .....	163
7.2.2 Реактивний шлейф короткого замикання .....	164
7.2.3 Реактивний шлейф холостого ходу .....	166

7.2.4 Порівняння властивостей шлейфів КЗ та ХХ.....	167
7.2.5 Деякі можливості застосування РШ.....	168
7.2.6 Чвертьхвильовий трансформатор.....	170
7.2.7 Півхвильовий трансформатор.....	171
7.2.8 Кругова номограма повних опорів та провідностей.....	174
7.2.9 Вузкосмугове узгодження.....	179
7.2.10 Широкозмугове узгодження.....	186
8 ЧАСТОТНОВИБІРКОВІ КОЛА В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ.....	198
8.1 Різновиди електричних фільтрів.....	198
8.2 Використання відрізків ліній в якості коливальних систем.....	200
8.3 Елементи фільтрів на квазізосереджених структурах.....	203
8.4 Приклади топологій фільтрів на ЛП інтегрального типу.....	208
9 МАТРИЧНИЙ ОПИС КІЛ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	217
9.1 Матриця розсіювання.....	218
9.2 Матриці розсіювання простих базових елементів.....	222
9.3 Хвильова матриця передачі Т.....	228
9.4 Матриця А.....	229
10 ВИПРОМІНЕННЯ ЕМХ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ВИПРОМІНЮВАЛЬНИМИ СТРУКТУРАМИ.....	236
10.1 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герця.....	237
10.2 Елементарний магнітний випромінювач (ЕМВ).....	240
10.3 Елементарний випромінювач Гюйгенса (ЕВГ).....	243
10.4 Елементарні випромінювачі смужкового типу (ЕВС).....	244
11 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ПАРАМЕТРИ ТИПОВИХ АНТЕН ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ.....	251
11.1 Характеристики антен.....	251
11.2 Параметри антен.....	253

11.3 Симетричний вібратор.....	256
11.3.1 Розподіл струму і напруги по вібратору .....	257
11.3.2 Поле випромінення симетричного вібратору .....	259
11.3.3 Опір випромінення симетричного вібратору.....	261
11.3.4 Вхідний опір симетричного вібратору .....	262
11.4 Антени з обертовою поляризацією ЕМХ.....	265
11.4.1 Турнікетна антена .....	265
11.4.2 Спиральна антена .....	268
11.5 Складена об'ємна спіральна антена з лінійною поляризацією .....	270
11.6 Вирішення питань узгодження антен зі спіральною структурою.....	271
11.7 Складена плоска спіральна антена з лінійною поляризацією .....	272
11.7.1 Геометрія парціальних плоских спіралей .....	273
11.7.2 ДС парціальних плоских спіральних антен.....	274
11.7.3 Геометрія складених плоских спіральних антен.....	275
11.7.4 ДС складеної плоскої спіральної антени .....	276
11.8 Особливості антен індивідуальних мобільних терміналів .....	277
11.8.1 Z-подібний смужковий випромінювач.....	278
11.8.2 Антени смужкового типу з обертовою поляризацією поля.....	279
11.9 Особливості антен базових станцій мобільного зв'язку	280
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК .....	287

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АЧХ	– амплітудно–частотна характеристика
АМ	– амплітудна модуляція
БЕ	– базовий елемент
ВЧ	– висока частота
ГДЛ	– гіпотетична двопровідна лінія
ДС	– діаграма спрямованості
ЕВГ	– елементарний випромінювач Гюйгенса
ЕВС	– елементарний випромінювач смужкового типу
ЕЕВ	– елементарний електричний випромінювач
ЕМВ	– елементарний магнітний випромінювач
ЕМП	– електромагнітне поле
ЕМХ	– електромагнітна хвиля
КК	– коаксіальний кабель
КЛ	– копланарна лінія
КСД	– коефіцієнт спрямованої дії
ККД	– коефіцієнт корисної дії
КСХ	– коефіцієнт стоячої хвилі
ЛП	– лінія передачі
МСЕ	– міжнародний союз електрозв'язку
НВЧ	– надвисока частота
НС	– напрямна система
НСЛ	– несиметрична смужкова лінія
НЩЛ	– несиметрична щілинна лінія
НХР	– неоднорідне хвильове рівняння
ОХР	– однорідне хвильове рівняння
ПОХ	– плоска однорідна хвиля
ПХ	– прямокутний хвильовід
РЕА	– радіоелектронна апаратура
РФ	– режекторний фільтр
РШ	– реактивний шлейф
СЗФ	– смугозагороджувальний фільтр
СК	– симетричний кабель
СПФ	– смугопропускальний фільтр
СЩЛ	– симетрична щілинна лінія
КЗ	– коротке замикання
ФМ	– фазова модуляція

ФВЧ	– фільтр високої частоти
ФНЧ	– фільтр низької частоти
ХХ	– холостий хід
ХР	– хвильове рівняння
ЧМ	– частотна модуляція
ЧХ	– частотна характеристика

## ВСТУП

Сучасний етап розвитку цивілізації характеризується міжнародним масштабом застосування мереж телекомунікацій і формуванням глобальної інфраструктури інформаційних мереж. Вони забезпечують можливість передачі найрізноманітніших різновидів інформації та дозволяють жителям будь-якої країни приєднатися до досягнень науки, культури та виробництва всього світу. При вирішенні цих задач велику роль грає застосування нових інформаційних технологій, застосування яких дає можливість створення такої універсальної мережі зв'язку, яка буде охоплювати практично всю планету без будь-яких технічних і інформаційних обмежень.

Устаткування будь-якої системи передачі від його розробки до морального або фізичного руйнування зазнає великої кількості змін кількісного та якісного характеру, сукупність яких створює життєвий цикл системи. Укрупнено життєвий цикл системи розділяють на послідовні стадії. Основною стадією життєвого циклу системи передачі є стадія експлуатації. Вона складається з наступних етапів:

- а) монтаж та налагодження устаткування системи передачі;
- б) функціональне використання устаткування за прямим призначенням;
- в) проведення заходів по профілактичному і технічному обслуговуванню;
- г) ремонт та відновлення після відмов;
- д) оперативно-технічне керування функціональним станом устаткування;
- е) знімання з експлуатації внаслідок неможливості або недоцільності використання устаткування за призначенням.

Значна частина фахівців телекомунікації працює в системі експлуатації і на підготовку їх саме в цьому напрямку спрямовано навчальний посібник.

Будь-які дослідження та розробки в системі телекомунікації дуже тісно зв'язано з електромагнітними процесами. Людство давно в тій чи іншій мірі мало справу з різними явищами електрики та магнетизму, але лише дослідження останніх 150-180 років дали змогу створити чітку наукову теорію

електромагнітних явищ і процесів. В ХХ сторіччі ця, вже узагальнена теорія електричних і магнітних явищ і процесів, отримала назву «теорія електромагнітного поля». Одним із найбільш важливих аспектів узагальнення стало використання єдиних підходів до опису та дослідження електричних і магнітних процесів у часі та просторі.

Геніальний англійський вчений Дж.К.Максвелл в другій половині ХІХ сторіччя надав фізичним ідеям багатьох дослідників математичну форму і узагальнив всі відомі на той час закони електромагнетизму в системі рівнянь - *рівняння Максвелла*. Це дозволило не тільки пояснити відомі на той час електромагнітні явища, але і передбачити ряд нових явищ. Спрощено сутність цієї теорії можна викласти так: будь-які зміни електричного поля можуть збуджувати магнітне поле і навпаки. Теорія Дж.К.Максвелла є фундаментом теорії електромагнітного поля.

Дослідники встановлюють закони електромагнітного поля на основі вивчення та дослідження електричних і магнітних явищ. Науку, яка вивчає властивості та встановлює закони електромагнітного поля практично в усіх його проявах (окрім квантових) можна характеризувати, як феноменологічну (на основі феноменів – фізичних фактів) теорію. Ця наука і отримала назву «феноменологічна електродинаміка», або коротше «електродинаміка» (на «квантовому рівні» - квантова електродинаміка).

Електродинаміка сучасним станом перетворилась в теоретичну основу цілого ряду важливих галузей науки і техніки, які надзвичайно широко використовуються практично в усіх сферах людської діяльності (радіотехнічні, комп'ютерні, телекомунікаційні та ін.). Відмітимо також, що справедливість системи рівнянь Дж.К.Максвелла, які є основою більшості теоретичних положень радіотехніки (та інших сфер діяльності), не викликають сумнівів. Ця теорія пройшла майже сторічну перевірку практикою.

Електродинаміка є основою для вирішення задач, які постають перед дослідниками, розробниками та виробничниками техніки зв'язку, бо обов'язковими її частинами в більшій частині випадків є елементи, які напряму зв'язано з процесами, в основі

яких лежать електромагнітні явища в тих чи інших їх проявах. В останній час в техніці зв'язку знайшли широке застосування ті аспекти, які раніше були властиві виключно надвисоко частній (НВЧ) мікроелектроніці. Яскравим прикладом цього є техніка мобільного зв'язку. Ця техніка впевнено «крокує» в діапазон НВЧ. На перших етапах її розвитку в мобільних терміналах (телефонних трубках) застосовувались зовнішні антени - рис.В.1 (а), а зі застосуванням досягнень НВЧ мікроелектроніки вдалося антенний блок вмонтувати в корпус - рис.В.1 (б). Фотографію «нутрошів» трубки мобільного телефону наведено на рис.В.2.

З вищесказаного витікає, що для ефективного вирішення своїх задач фахівець з телекомунікацій повинен володіти основами електродинаміки. Тут маються на увазі не тільки класичні основи теорії електромагнітного поля, але і основи схемотехнічного підходу до реалізації кіл з розподіленими параметрами (або, як їх ще зовуть, «кіл НВЧ»). Комплекс цих питань охоплює «технічна електродинаміка», яка і стала предметом викладення в пропонованому до уваги читачів навчальному посібнику.

В перших п'яти розділах посібника в скороченій формі викладено основи класичної електродинаміки.

Шостий розділ – електромагнітні хвилі в лініях передачі; розглянуто не тільки «класичні» ЛП, але і ЛП інтегрального типу - НСЛ, СЩЛ, НЩЛ, КЛ. Сьомий розділ присвячено розгляду властивостей елементів РЕА з розподіленими параметрами та особливостям їх схемотехнічного використання. Восьмий розділ присвячено розгляду частотно вибіркового структур з акцентом на реалізацію їх в інтегральному варіанті, в тому числі і з використанням принципів об'ємних інтегральних схем. В дев'ятому розділі коротко викладено основи матричного опису кіл з розподіленими параметрами. Десятий та одинадцятий розділи присвячено розгляду питань випромінювання та випромінювачам в класичному та мікроелектронному варіантах, розглянуто їх діаграми спрямованості та електричні властивості. Досить багато уваги приділено і їх поляризаційним властивостям.

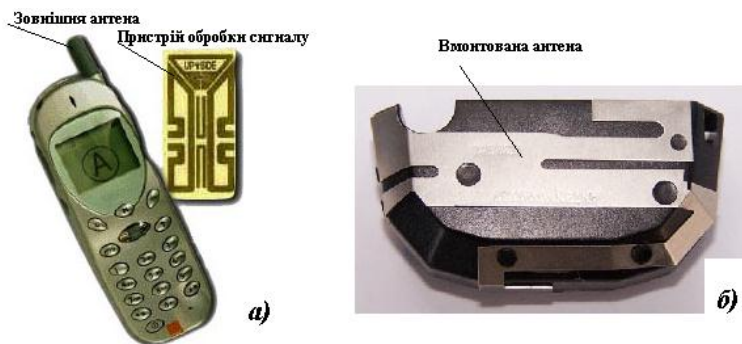


Рисунок В.1 – Фотографії деяких мобільних телефонів

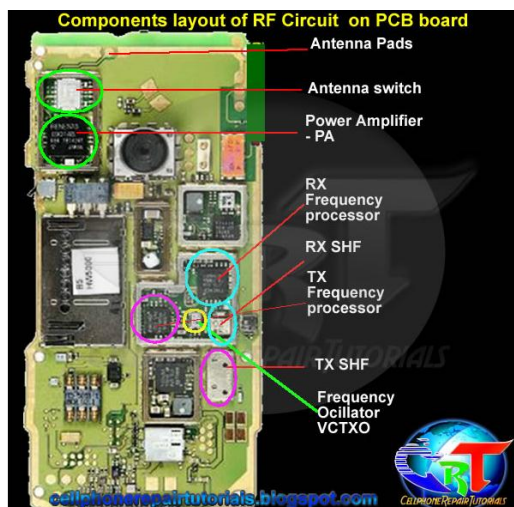


Рисунок В.2 – Фотографія «нутрошів» трубки мобільного телефону

Але при цьому фахівець не повинен забувати, що техніка не «стоїть на місці» і те, що було вирішено сьогодні, завтра вже може бути застарілим. Сучасні мобільні телефони являють собою смартфони, які забезпечують виконання практично всього

спектра послуг – від класичного зв'язку (в тому числі і на рівні зображень) до користування Інтернетом.

Навчальний посібник призначено для студентів, які навчаються за фаховим напрямком «Інформаційні мережі зв'язку».

# 1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. ВЕКТОРИ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

## 1.1 Основні визначення. Загальні відомості про хвилеві процеси

Хвилевим процесом називають будь яку зміну (збурення) стану суцільного середовища; ця зміна стану поширюється з кінцевою швидкістю і переносить енергію. Існує велике різномайття хвилевих процесів (різновидів хвиль), але в усіх різновидах хвилевих процесів спостерігаються схожі закономірності поведінки у просторі і в часі; вони описуються однаковими математичними моделями і досліджуються однаковими методами. Виділяють два основних типи хвиль: пружні і електромагнітні. Пружні (друга назва акустичні) хвилі – це хвилі, які зв'язано з коливаннями частинок при механічній деформації пружного середовища (рідкого, газоподібного, твердого). При цьому має місце перенесення енергії при відсутності переносу речовини. В акустичній хвилі частинки здійснюють коливання навколо точки спокою. Хвиля, у якій частки середовища здійснюють коливання уздовж напрямку поширення, називається поздовжньою хвилею. Якщо частки середовища коливаються перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, акустична хвиля називається поперечною або зсувною. Це ті хвилі, які чує людське вухо. Вони займають діапазон частот від 17 Гц до 20 кГц. Більш низькі за частотою (інфразвукові, частоти нижче 17 Гц) та більш високі (ультразвукові, частоти від 20 КГц до 1 МГц) вухо людини не сприймає.

Електромагнітні хвилі – це змінні в часі електромагнітні поля, які мають властивість поширюватися в оточуючому просторі. Електромагнітні хвилі в вільному просторі завжди мають поперечні до напрямку поширення складові векторів напруженостей електричного і магнітного полів. Поздовжні складові цих векторів можуть існувати лише за певних умов (біля меж розділу різних середовищ, поблизу збуджуючих джерел, в лініях передачі). Чисто поздовжніх електромагнітних хвиль не існує. Часто електромагнітні хвилі звать радіохвилями,

підкреслюючи цим їх зв'язок з радіотехнічними процесами. Звичайно до радіохвиль відносять електромагнітні хвилі з частотами від  $3 \cdot 10^3$  Гц до  $3 \cdot 10^{11}$  Гц.

*Наука, яка займається вивченням випромінення, поширення і поглинання електромагнітних хвиль, називається електродинамікою.*

Дві основних властивості всіх хвильових процесів є очевидними з самого визначення цих процесів. Це насамперед – перенесення енергії. Величина енергії, яку переносить хвиля, оцінюється густиною потоку енергії в одиницю часу; ця характеристика хвиль для реальних хвилевих процесів може змінюватися в широких межах. Наприклад, густина потоку енергії електромагнітного випромінення Сонця біля земної поверхні досягає  $1 \text{ кВт/м}^2$ , а густина потоку енергії мовних радіостанцій складає всього  $(10^{-3} \dots 10^{-6}) \text{ Вт/м}^2$ .

Другу загальну властивість хвилевих процесів також закладено у визначенні – кінцева швидкість поширення хвиль в середовищі. Різні хвилі мають різні швидкості. З найбільшою швидкістю ( $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ) поширюються електромагнітні хвилі у вакуумі.

Хвилеві процеси можуть бути лінійними і нелінійними. Хвиля називається *лінійною*, якщо властивості середовища для цієї хвилі не залежать від інтенсивності хвилі. Лінійні хвилі поширюються незалежно одна від одної без взаємних спотворень. Необмежений простір може бути заповнено різними типами лінійних хвиль, які можуть мати різні частоти і напрямки поширення. Для лінійних хвиль виконується принцип суперпозиції (накладення) хвиль без взаємного впливу одна на одну. Для лінійних хвиль, незалежно від їх природи, для дослідження властивостей використовують єдиний теоретичний підхід. *Нелінійна хвиля* – це хвиля, піддією якої змінюються властивості середовища і відповідно змінюються властивості самої хвилі. Це зазвичай відбувається при великій інтенсивності хвилі. Але треба відзначити, що властивості середовища можуть змінюватися і під впливом інших факторів, наприклад, підмагнічування.

## 1.2 Гармонійна хвиля та її параметри

Гармонійна хвиля – це хвиля, яка змінюється в часі (аргумент  $t$ ) і в просторі (аргумент  $r$ ) за гармонійним (косинусоїдальним) законом. Для цієї хвилі також вживається термін монохроматична (одноколірна) хвиля, який запозичено з оптики. Будь який хвилевий процес можна представити за допомогою перетворень Фур'є через сукупність гармонійних хвиль.

Рівняння (миттєве значення) плоскої гармонійної хвилі, яка поширюється, наприклад, вздовж вісі  $z$  в середовищі без втрат, записується в наступному вигляді:

$$A(z, t) = A_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Під величиною  $A$  розуміється та фізична величина, яка визначає природу хвильового процесу. Максимальне значення цієї величини називається амплітудою, яку позначено в (1.1) через  $A_0$ . Розмірність величини  $A_0$  визначається природою хвильового процесу. Наприклад, у звукових хвилях амплітуда вимірюється в одиницях тиску – паскалях (Па), в електромагнітних хвилях амплітуда напруженості електричного поля вимірюється в вольтах на метр (В/м), а магнітного поля – в амперах на метр (А/м).

Вираз, який стоїть в дужках (1.1), називається фазою коливання; фазу визначають через значення фізичної величини в даний момент часу і в даній точці простору. Константа  $\varphi_0$  називається початковою фазою; її використання має сенс при порівнянні двох і більше хвиль однієї частоти в даній точці простору і в фіксований момент часу. Кругову частоту  $\omega$  зв'язано з циклічною частотою  $f$  (кількість коливань в одиницю часу) співвідношенням:

$$\omega = 2\pi \cdot f. \quad (1.2)$$

Частота  $\omega$  вимірюється в радіанах в секунду, частота  $f$  в герцах (1Гц – одне коливання в секунду). При відомій частоті  $f$  період коливання  $T$  знаходиться за співвідношенням:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (1.3)$$

З властивості періодичності хвильового процесу за просторовою координатою  $r$  визначається *довжина хвилі*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.4)$$

Таким чином, довжина хвилі – це просторовий інтервал (просторовий період), при проходженні якого фаза хвилі міняється на  $2\pi$  вздовж напрямку поширення. Та кількість довжин хвиль, яка укладаються на відстані  $2\pi$  метрів, називається хвильовим числом і позначається  $k$ .

Поверхня, на якій хвильовий процес має однакову фазу коливання, зветься поверхнею однакових фаз або фронтом хвилі. За формою фронту хвилі можна розділити на плоскі, циліндричні та сферичні. Слід зазначити, що це зручні математичні моделі, тому що в реальних умовах поширення фронт хвилі найчастіше має досить складну структуру. Поверхня, на якій амплітуда хвильового процесу є незмінною величиною, зветься поверхнею рівних амплітуд. Хвиля називається *однорідною*, якщо у неї поверхні рівних амплітуд і рівних фаз збігаються, тобто на поверхні фронту не змінюється амплітуда хвильового процесу. В неоднорідній хвилі амплітуда на поверхні фронту змінюється.

Густина (або щільність) течії енергії (або інтенсивність) хвилі – це енергія, яка переноситься хвилею через одиницю площі перпендикулярно орієнтованої (до напрямку поширення хвилі) поверхні за одиницю часу. Густина течії енергії пропорційна квадрату амплітуди хвилі

$$\vec{J} = \vec{e}_0 p A_0^2 \text{ Вт/м}^2, \quad (1.5)$$

де  $p$  – коефіцієнт пропорційності, величина якого залежить від властивостей середовища і типу хвилі;

$\vec{e}_0$  – одиничний вектор, що показує напрям передавання енергії хвилею.

Вектор густини течії енергії в одиницю часу (густина течії потужності) прийнято називати вектором Умова – Пойнтінга.

Поширення хвилі відбувається в напрямку, який є перпендикулярним до поверхні фронту хвилі. Плоска хвиля рухається в напрямку нормалі до площини фронту.

У середовищі з втратами хвилі, які поширюються, втрачають частину своєї енергії за рахунок перетворення її в теплову енергію (закон Джоуля) та їх амплітуди зменшуються за експоненціальним законом вздовж напрямку поширення. Відмітимо, що процес перетворення енергії хвилі в теплову енергію є незворотнім процесом і його треба однозначно зв'язувати з втратами за рахунок властивостей середовища поширення хвилі. Особливо треба наголосити на відмінності процесів зменшення амплітуди хвилі за рахунок втрат в середовищі (перетворення в тепло) і за рахунок того, що хвиля розходить (поширюється) від свого джерела.

### 1.3 Вектори електромагнітного поля

Електромагнітне поле являє собою сукупність змінних в часі і взаємозалежних електричного і магнітного полів, які і впливають одне на одне і в той же час зумовлюють один одного. Електромагнітне поле проявляється у вигляді *сили, яка діє на електричні заряди*. Будь-який силовий вплив характеризується величиною і напрямком, тому для опису електромагнітних полів необхідно використовувати векторні величини та функції.

*Електричне* поле здійснює силовий вплив як на *нерухомі, так і на рухомі заряди*. Математичною моделлю електричного поля у вакуумі служить вектор  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля, що визначається за силою  $\vec{F}$ , яка діє на пробний заряд  $q$ , який внесено у розглядувану точку поля. Цю точку задано радіус-вектором  $\vec{r}$ .

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}). \quad (1.6)$$

У системі СІ напруженість електричного поля вимірюється у вольтах на метр – В/м. Для опису електричного поля в матеріальному середовищі потрібно ввести ще вектор електричної індукції, який у вакуумі зв'язано з вектором  $\vec{E}$  співвідношенням

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.7)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична стала вакууму. Фізична сутність цієї величини – абсолютна діелектрична проникність для вакууму.

Вектор електричної індукції  $\vec{D}$  вимірюється в кулонах на квадратний метр – Кл/м<sup>2</sup>, а діелектрична проникність – у фарадах на метр – Ф/м. Величина  $\varepsilon_0$  визначена експериментально і дорівнює

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}} = 8.842 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

*Магнітне поле взаємодіє лише з рухомими зарядами.* У вакуумі магнітне поле описується вектором магнітної індукції  $\vec{B}$ , який визначається за силою Лоренця  $\vec{F}_L$ , що діє на заряд  $q$ , який рухається зі швидкістю  $\vec{V}$

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{V}, \vec{B}]. \quad (1.8)$$

Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  вимірюється в веберах на квадратний метр – Вб/м<sup>2</sup>, тобто у вольт-секундах на квадратний метр, або в теслах [Тл]. Для опису магнітного поля в матеріальному середовищі додатково вводить вектор  $\vec{H}$ , який називається напруженістю магнітного поля. В вакуумі вектори  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  зв'язано співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1.9)$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала вакууму. Фізична сутність цієї величини – абсолютна магнітна проникність вакууму.

Вектор  $\vec{H}$  має розмірність ампера на метр – А/м, а величина  $\mu_0$  – генрі на метр – Гн/м. Чисельне значення  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м. Таким чином електромагнітне поле визначається чотирма своїми векторами:  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ .

### Контрольні запитання

1. Що таке хвильовий процес і які його головні властивості ?
2. Які існують різновиди хвильових процесів ?
3. Які складові може мати електромагнітна хвиля ?
4. За яких умов у електромагнітній хвилі можуть існувати поздовжні складові ?
5. Що таке лінійні і нелінійні електромагнітні хвилі ?
6. Що таке гармонійна (монохроматична) електромагнітна хвиля ?
7. Якими величинами характеризується гармонійна хвиля ?
8. Що таке довжина хвилі і хвильове число ?
9. За якими ознаками визначається фазовий і амплітудний фронт електромагнітної хвилі ?
10. Чим відрізняється однорідна хвиля від неоднорідної ?
11. Як визначається густина потоку енергії хвилі ?
12. Що таке вектор Умова-Пойнтінга ?
13. Якими процесами зумовлюється зменшення амплітуди електромагнітної хвилі при її поширенні в деякому середовищі ?
14. За якою ознакою вводиться вектор напруженості електричного поля ?

15. Як вводиться вектор електричної індукції у вакуумі?
16. Що таке електрична стала вакууму?
17. Як визначається сила Лоренця, яка її фізична сутність і як вводяться вектори магнітної індукції та напруженості магнітного поля у вакуумі?

### Приклад вирішення задачі

**Задача 1.1** Вектор напруженості електричного поля гармонійної електромагнітної хвилі, яка поширюється в повітрі в напрямку вісі  $z$ , має дві складові  $E_x$  та  $E_y$  з однаковими амплітудами 10 В/м. Частота  $f = 100$  МГц. Початкову фазу обох складових для простоти візьмемо нульовими. Треба:

1. Записати вирази для миттєвих значень векторів цих складових.

2. Знайти величину та напрямок сумарного вектору напруженості електричного поля.

#### Вирішення

За п.1:

1. За виразом (1.2) знайдемо кругову (кутову) частоту

$$\omega = 2\pi \cdot 10^8 = 6.28 \cdot 10^8 \text{ рад/сек.}$$

З фізики відомо, що електромагнітні хвилі поширюються в повітрі зі швидкістю  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек, а тоді довжина хвилі  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3$  м.

2. За виразом (1.4) знайдемо хвилеве число

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/3 = 2.09 \text{ рад/м.}$$

3. За аналогією з виразом (1.1) запишемо вирази для миттєвих значень векторів заданих складових з врахуванням того, що напрями цих векторів будуть визначати орти  $\vec{x}_0$  та  $\vec{y}_0$  декартової системи координат.

$$\vec{E}_x(z, t) = \vec{x}_0 10 \cos(6.28 \cdot 10^8 \cdot t - 2.09 \cdot z),$$

$$\vec{E}_y(z, t) = \vec{y}_0 10 \cos(6.28 \cdot 10^8 \cdot t - 2.09 \cdot z)$$

За п.2:

1. Величину та напрямок сумарного вектору  $\vec{E}$  визначимо з векторної суми

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = E_x \vec{x}_0 + E_y \vec{y}_0 = |\vec{E}| \cdot (\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi)$$

де  $|\vec{E}|$  – довжина (модуль) вектору  $\vec{E}$  (визначається за теоремою Піфагора), а  $(\vec{x}_0 \cos \varphi + \vec{y}_0 \sin \varphi)$  – його напрямок.

Тоді

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 14.15 \text{ В/м}$$

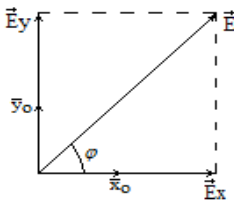


Рисунок 1.1 – До визначення сумарного вектору  $\vec{E}$

## 2 ВЗАЄМОДІЯ ЕМП З СЕРЕДОВИЩЕМ

За особливостями впливу середовища на властивості ЕМП їх (середовища) прийнято поділяти на три основні групи: діелектрики, магнетики та провідники. Існують речовини, де одночасно проявляються дві властивості, наприклад, магніто-діелектрики.

### 2.1 Параметри середовищ. Матеріальні рівняння електромагнітного поля

#### 2.1.1 Діелектричні середовища

Взаємодія електромагнітного поля з середовищем враховується в матеріальних рівняннях, які є співвідношеннями, що зв'язують попарно вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$ . Виведення цих рівнянь зв'язано з описом процесів, які відбуваються в середовищі під дією сил електромагнітного поля.

Є багато прикладів речовин-діелектриків, які не проводять електричний струм, але електричне поле усередині них залежить від напруженості зовнішнього електричного поля. Діелектрики, які поміщено в електричне поле (стале або змінне в часі), специфічним чином міняють свій стан – вони *поляризуються*. В результаті цього з'являється додаткове електричне поле, яке накладається на первинне. При цьому сумарне електричне поле буде відрізнитися від того, яким би воно було у вакуумі і залежить від властивостей діелектричного середовища.

Поляризація – складний фізичний процес, який зв'язано з атомною структурою конкретної речовини. Молекули і атоми речовини є об'єднанням (сукупністю) електрично заряджених часток (зв'язані заряди), причому сумарний заряд молекули (атома) дорівнює нулю. Для діелектриків характерними є міцні зв'язки заряджених часток, тому при дії зовнішнього електричного поля не відбувається руху носіїв заряду в товщі матеріалу (принаймні в не дуже сильних полях). Під дією поля молекула діелектрика деформується так, що її можна представити у вигляді малого електричного диполя – системи двох різноіменних зарядів (+  $q$  і –

$q$ ), які зміщено в просторі на малу відстань  $l$ . Диполі характеризуються дипольним моментом  $\vec{p} = \vec{l}_0 q l$  ( $\vec{l}_0$  – орт вектору  $\vec{p}$ , який направлено вздовж вісі диполя від від’ємного заряду до додатнього). Спрощено цей процес можна показати на моделі атома водню, який складається з протона і електрона.

За відсутності зовнішнього електричного поля електрон обертається за круговою орбітою. В електричному полі орбіта електрона витягується, центри додатнього та від’ємного зарядів перестають збігатися в просторі, і атом водню поводитья як електричний диполь, що характеризується дипольним моментом. Так поляризуються неполярні діелектрики, молекули (атоми) яких у відсутності зовнішнього поля не мають власного дипольного моменту. До них відносяться більшість газів і багато твердих діелектриків (кварц, поліетилен і т. д.). У полярних діелектриків (непровідні рідини і деякі тверді діелектрики, наприклад, поліхлорвинил) молекули і без зовнішнього електричного поля вже є диполями, дипольні моменти яких орієнтовано в просторі хаотично. У обох випадках зовнішнє електричне поле здійснює силову дію на диполі і орієнтує дипольні моменти молекул за полем. В результаті з’являється дипольний момент даного об’єму речовини. Характеристикою поляризації діелектрика є вектор поляризованості  $\vec{P}$ .

Вектор  $\vec{P}$  має розмірність Кл/м<sup>2</sup>. Величина індукованого дипольного моменту пропорційна напруженості електричного поля

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^E \vec{E}. \quad (2.1)$$

Безрозмірний параметр  $\chi^E$  називається діелектричною сприйнятливістю; він характеризує властивість діелектрика поляризуватися. При описі електромагнітних полів у матеріальному середовищі зручно ввести вектор  $\vec{D}$ , який зв’язано з вектором  $\vec{P}$  співвідношенням

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.2)$$

З урахуванням виразу (2.1) формулу (2.2) можна представити у вигляді

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi^E \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi^E) \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (2.3)$$

де  $\varepsilon_a = \varepsilon_0 (1 + \chi^E)$  – абсолютна діелектрична проникність середовища.

Рівняння (2.3), яке зв'язує між собою вектори  $\vec{D}$  та  $\vec{E}$ , зветься першим матеріальним рівнянням.

### 2.1.2 Провідні середовища

Під дією електричного поля (сталого або змінного в часі) в середовищі, яке має властивість провідності (провідниках), існують вільні електричні заряди, виникає електричний струм провідності, розподіл якого характеризується вектором об'ємної густини струму провідності

$$\vec{J}(M) = \vec{i}_0 \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (2.4)$$

де  $\vec{i}_0$  – одиничний вектор, який показує напрям струму (напрямок руху позитивних зарядів) в даній точці  $M$ ;

$\Delta S$  – площа, яка є перпендикулярною вектору  $\vec{i}_0$ , і в якій розташовано точку  $M$ ;

$\Delta I$  – струм провідності, який протікає через площинку  $\Delta S$ . Вектор  $\vec{J}$  має розмірність А/м<sup>2</sup>.

Густина струму провідності є пропорційною напруженості електричного поля

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (2.5)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\sigma$  зветься *питомою провідністю* і має розмірність сименс на метр – См/м [1/Ом·м]. Співвідношення (2.5) зветься *законом Ома в диференційній формі*.

### 2.1.3 Магнетики

Речовини, які самі можуть не проводити електричний струм, але магнітне поле усередині них залежить від зовнішнього магнітного поля, зветься магнетиками. Під дією зовнішнього магнітного поля (сталого або змінного в часі) магнетики намагнічуються. В результаті з'являється додаткове магнітне поле, яке накладається на первинне. При цьому сумарне магнітне поле відрізняється від того, яким воно було б у вакуумі.

Явище намагнічування спрощено можна представити таким чином. Атоми і молекули магнетиків мають магнітний момент  $\vec{m}$  і можуть бути уподібнені маленьким рамкам зі струмом. Кожна рамка зі струмом створює власне магнітне поле. За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти молекул направлено хаотично і сумарний магнітний момент даного об'єму середовища  $\Delta V$  дорівнює нулю, тобто магнітні поля окремих молекул взаємно компенсуються. Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація магнітних моментів всіх молекул, а тому сумарний магнітний момент буде відрізнятися від нуля. Додаткове магнітне поле, яке утворюється в результаті намагнічування, може як зменшувати, так і збільшувати первинне поле. Середовища, в яких магнітне поле трохи ослаблюється, називають діамагнітними. Середовища, в яких магнітне поле трохи збільшується, називають парамагнітними, а середовища, в яких відбувається істотне збільшення магнітного поля – феромагнітними.

Намагнічуваність середовища характеризується вектором намагнічуваності  $\vec{M}$ .

Вектор  $\vec{M}$  має розмірність А/м.

При розгляді багатьох процесів зручно ввести вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ , який зв'язано з вектором  $\vec{M}$  співвідношенням

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (2.6)$$

Експериментально встановлено, що в не дуже сильних і не дуже швидко змінних зовнішніх магнітних полях зв'язок між векторами  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$  є лінійним.

$$\vec{M} = \chi^M \vec{H}. \quad (2.7)$$

Безрозмірний параметр  $\chi^M$  зветься магнітною сприйнятливістю середовища. При підстановці (2.7) в (2.6), отримаємо

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi^M) \vec{H} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.8)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\mu_a = \mu_0(1 + \chi^M)$  між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  зветься *абсолютною магнітною проникністю* середовища. Співвідношення (2.8) є *другим матеріальним рівнянням*. Порівнюючи (2.8) з (2.5) можна углядіти аналогію між поведінкою поляризованих діелектриків в електричному полі і поведінкою магнетиків, які поміщено в зовнішнє магнітне поле.

Електромагнітне поле в матеріальному середовищі описується чотирма основними векторами  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , які попарно зв'язано між собою матеріальними рівняннями

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.9)$$

Матеріальні рівняння характеризують силову дію електромагнітного поля на середовище, яка проявляється в поляризованості і намагнічуваності середовищ. Розглянуті

величини  $\vec{P}, \vec{M}, \chi^E, \chi^M$  виражають «міру» відгуку середовища на електромагнітне поле і входять в матеріальні рівняння (2.9).

## 2.2 Класифікація середовищ

Властивості середовища по відношенню до електромагнітного поля визначаються параметрами: абсолютною діелектричною проникністю  $\epsilon_a$ , абсолютною магнітною проникністю  $\mu_a$  і питомою провідністю  $\sigma$ . Разом з абсолютною діелектричною проникністю  $\epsilon_a$  вводиться *відносна* діелектрична проникність

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}. \quad (2.10)$$

Звідси видно, що величина  $\epsilon_r$  характеризує середовище ( $\epsilon_a$ ) по відношенню до електричних властивостей вакууму ( $\epsilon_0$ ). Для більшості середовищ  $\epsilon_r > 1$ . Слід зазначити, що існують середовища для яких  $\epsilon_r < 1$  (іоносфера, плазма).

Значення  $\epsilon_r$  для деяких діелектриків, які часто використовуються в радіоелектронних пристроях, наведено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Відносна діелектрична проникність деяких діелектриків

Матеріал	$\epsilon_r$
Фторопласт-4	2.08
Поліетилен	2.25
Полістирол	2.55
Плавлений кварц	3.8
Полікор	9.7

Аналогічно вводиться відносна магнітна проникність

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (2.11)$$

Відносна магнітна проникність діамагнітних і парамагнітних речовин трохи відрізняються від одиниці і в практичних розрахунках ефектами діамагнетизму і парамагнетизму зазвичай нехтують, вважаючи,  $\mu_r = 1$ , тобто  $\mu_a = \mu_0$ . Феромагнітні речовини (залізо, нікель і т. і.) мають  $\mu_r \gg 1$  та її величина істотно залежить від величини зовнішнього магнітного поля. Окрім того, у феромагнітних матеріалах намагнічуваність середовища залежить не лише від величини магнітного поля в даний момент часу, але і від того, яким воно було раніше (явище магнітного гістерезису).

Питома провідність  $\sigma$  для металів має великі чисельні значення; для деяких з них значення  $\sigma$  наведено в таблиці 2.2

Таблиця 2.2 – Питомі провідності деяких металів

Метал	$\sigma$ [См/м]
Срібло	$7.1 \cdot 10^7$
Мідь	$5.7 \cdot 10^7$
Цинк	$1.7 \cdot 10^7$
Латунь	$1.4 \cdot 10^7$

Значення питомої провідності інших середовищ (діелектриків, напівпровідників) на декілька порядків менші, ніж у металів. Для опису провідних властивостей цих середовищ використовують іншу числову характеристику – кут діелектричних втрат, який буде введено далі.

За критерієм «поведінки» параметрів середовища в електромагнітному полі проводиться класифікація середовищ.

Середовище зветься лінійним, якщо його параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  не залежать від величини амплітуд векторів поля. У лінійному середовищі матеріальні рівняння (2.9) лінійні, тобто є співвідношеннями прямої пропорційності. Середовище зветься *нелінійним*, якщо його параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  (або хоч би один з них) залежать від величин амплітуд векторів поля. Реальні середовища при не дуже сильних полях розглядаються як лінійні, і надалі мова буде йти лише про лінійні середовища.

Лінійні середовища поділяють на *однорідні* і *неоднорідні*, *ізотропні* і *анізотропні*. *Однорідними* зуть середовища, у яких параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  не залежать від координат, тобто властивості середовища однакові у всіх її точках. Середовища, в яких хоч би один з параметрів  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , і  $\sigma$  є функцією координат, зуться неоднорідними. Прикладами неоднорідних середовищ є тропосфера, іоносфера, діелектрична проникність яких змінюється з висотою.

Якщо властивості середовища однакові для будь-яких орієнтацій векторів впливного поля, то таке середовище зуть ізотропним. В ізотропних середовищах вектори  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ , а також,  $\vec{M}$  і  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  є паралельними, а параметри  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ , – скалярні величини.

Середовища, властивості яких залежать від орієнтації векторів впливного поля, зуть анізотропними. В анізотропних середовищах вектори  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  або  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  виявляються не паралельними. При цьому діелектрична або магнітна проникність вже не є скалярними величинами. Тоді ці параметри має бути представлено у вигляді квадратної матриці, що зветься тензором. До анізотропних середовищ відносяться, наприклад, намагнічена плазма і намагнічений ферит. У намагніченій плазмі тензором є діелектрична проникність.

В лінійних, однорідних і ізотропних середовищах, в яких справедливі матеріальні рівняння у вигляді  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , електромагнітне поле може бути визначене двома векторами. У прикладній електродинаміці зазвичай використовують пару векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , через які виражаються всі параметри електромагнітних хвиль в різних середовищах і пристроях.

## Контрольні запитання

1. Що таке поляризація діелектрика та як можуть створюватись електричні диполі із електрично нейтральних молекул або атомів?
2. Як вводиться вектор поляризованості, яка фізична сутність діелектричної сприйнятливості та абсолютної діелектричної проникності діелектричної речовини?
3. Як вводиться об'ємна густина струму провідності?
4. Що таке закон Ома в диференційній формі та чим він відрізняється від закону Ома для ділянки електричного кола?
5. Чим відрізняється магнетик від діелектрика?
6. Які властивості мають діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики?
7. Як вводяться вектори намагнічуваності та напруженості магнітного поля?
8. Яка фізична сутність матеріальних рівнянь електромагнітного поля?
9. Яка фізична сутність відносних діелектричної та магнітної проникностей?
10. Що таке магнітний гістерезис?
11. За якими ознаками проводиться класифікація середовищ?
12. Що таке однорідні та неоднорідні середовища?
13. За якими ознаками розрізняють ізотропні та анізотропні речовини?

## Приклад вирішення задачі

**Задача 2.1** По круглому провіднику, який виконано із міді протікає сталий струм  $I = 1.5$  А. Діаметр провідника  $d = 0.5$  мм. Знайти напруженість електричного поля усередині провідника та спадання напруги ділянці довжиною  $l = 10$  м. Як зміниться спадання напруги, якщо діаметр провідника збільшити вдвоє?

## Вирішення

1. Знайдемо площу поперечного перерізу провідника

$$S = \pi \cdot d^2 / 4 = 3.14 \cdot 0.5^2 / 4 = 1.96 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2.$$

2. Оскільки струм є сталим у часі, то його буде розподілено рівномірно по площі поперечного перерізу і тоді модуль вектору густини струму

$$J = I/S = 1.5 / 1.96 \cdot 10^{-7} = 7.65 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2.$$

3. Питома провідність міді за даними Табл.2.2 є  $\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ , а тоді модуль вектору напруженості електричного поля за виразом (2.5) буде

$$E = J/\sigma = 7.65 \cdot 10^6 / 5.7 \cdot 10^7 = 0.134 \text{ В/м}.$$

4. Оскільки струм тече вздовж провідника, то і вектор напруженості електричного поля буде мати той же напрям, а тоді спадання напруги на ділянці довжиною  $l$  буде

$$\Delta U_l = E \cdot l = 0.134 \cdot 10 = 1.34 \text{ В}.$$

5. Якщо  $d = 1 \text{ мм}$ , то  $S = 7.85 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$ ,  $J = 1.91 \text{ А/м}^2$ ,  $E = 0.034 \text{ В/м}$ , а спадання напруги складе лише  $\Delta U_2 = 0.34 \text{ В}$ .

Треба чітко розуміти, що зменшення спадання напруги  $\Delta U_2 < \Delta U_l$  зумовлено зменшенням втрат при протіканні струму. В свою чергу, зменшення втрат відбулося за рахунок зменшення значення густини струму з-за збільшення площі провідника. На практиці для більшості застосувань допустимим значенням густини струму вважається величина  $7 \text{ А/мм}^2$ .

## Задачі для самостійного вирішення

**Задача 2.3** Вектор  $\vec{A} = [\vec{m}, \vec{n}]$ , а вектор  $\vec{B} = [\vec{n}, \vec{m}]$ . Чи будуть ці вектори відрізнятися за довжиною (модулем) та напрямом?

**Задача 2.4** Чи можуть силові лінії електричного поля торкатися одна одній в будь якій точці?

**Задача 2.5** Нескінчену металеву площину рівномірно заряджено з поверхневою густиною заряду  $\rho_S = 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ .

Визначити вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{D}$  у всьому просторі,  $\epsilon_r = 1$ .

## 3 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

### 3.1 Рівняння Максвелла

Електромагнітні процеси підкоряються багатьом фізичним законам, які було відкрито в XVIII-XIX сторіччях. Ці закони було узагальнено, формалізовано і записано у вигляді рівнянь англійським фізиком Дж. К. Максвеллом. Ці рівняння прийнято представляти в інтегральній або диференціальній формах запису.

1. Перше рівняння Максвелла в інтегральній формі описує закон повного струму: *циркуляція вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  по довільному замкнутому контуру  $l$  дорівнює повному струму, що пронизує цей контур*

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}} \right) d\vec{S} \quad (3.1)$$

Повний струм визначається течією через поверхню  $S$  суми векторів об'ємної густини струмів провідності  $\vec{J}$ , струмів зсуву  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  і сторонніх струмів  $\vec{J}^{\text{ст}}$ . У загальному випадку густини струмів мають нерівномірний розподіл на довільній поверхні  $S$ , що спирається на контур  $l$ . В випадку сталих струмів і полів вираз (3.1) є законом Ампера.

Для переходу до диференціальної форми запису закону повного струму в рівнянні (3.1) циркуляція вектору  $\vec{H}$  замінюється за теоремою Стокса інтегралом від вектору  $\text{rot}\vec{H}$  (течією цього вектора) через поверхню  $S$

$$\int_S \text{rot}\vec{H} d\vec{S} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}} \right) d\vec{S}$$

Оскільки в поверхневих інтегралах поверхня  $S$  довільна і однакова, то і підінтегральні вирази однакові, тобто маємо

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}} \quad (3.2)$$

Густина повного струму в рівнянні (3.2) містить три доданки, що мають розмірності А/м. Вектор  $\vec{J} = \sigma\vec{E}$  являє собою густину струму провідності, який виникає в провідному середовищі під дією електричного поля. Разом з густиною струму

провідності Максвеллом було введено вектор  $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}^{\text{зм}}$ , який він назвав густиною струму зміщення (вектор  $\vec{D}$  має ще назву вектора електричного зміщення). Струм зміщення встановлює внутрішній взаємозв'язок між змінними у часі електричним і магнітним полями. Якщо навіть в деякій точці простору у момент часу  $t$  щільність струму провідності  $\vec{J}$  відсутня, то вихрове змінне в просторі магнітне поле може породжуватися струмом

зміщення з густиною  $\vec{J}^{\text{зм}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ , тобто змінним в часі електричним полем. Таким чином, змінне електричне поле, так само як і струм провідності, буде супроводжуватися появою змінного магнітного поля. Густина струму зміщення може бути представлено, з урахуванням (2.2), (2.3), у вигляді двох доданків

$$\vec{J}^{\text{зм}} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Перший доданок в правій частині цієї формули є струмом зміщення у вакуумі і відповідає лише зміні електричного поля в часі. Цей струм не супроводжується рухом електричних зарядів.

Другий доданок, який Максвелл назвав струмом зміщення в діелектричному середовищі, обумовлено впорядкованим рухом зв'язаних зарядів в результаті дії змінного електричного поля. Прикладом електричної системи, в якій існує лише струм зміщення, може служити конденсатор в колі змінного струму. В цьому випадку лише існуванням струму зміщення між обкладинками конденсатора, які розділено діелектриком, можна обґрунтувати замкнутість електричного кола.

Третій вектор в виразі (3.2) для густини повного струму – вектор  $\vec{J}^{ст}$  зветься густиною стороннього електричного струму; він грає роль первинного збудника електромагнітного поля. Сторонні струми не залежать від збуджуваного ними поля і вважаються заданими функціями координат і часу. Наприклад, сторонні струми в антенах викликаються зовнішніми джерелами (генераторами) і їх величини не залежать від збуджуваних антенами хвиль.

Векторне рівняння (3.2) еквівалентне трьом скалярним рівнянням, які в декартовій системі координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} + J_x^{ст} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} + J_y^{ст}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z^{ст} \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. Друге рівняння Максвелла в інтегральній формі є законом електромагнітної індукції: *у замкнутому контурі, що пронизується змінною у часі течією вектору магнітної індукції*

$\vec{B}$ , виникає електрорушійна сила  $e = \oint_l \vec{E} d\vec{l}$  яка дорівнює швидкості зміни  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  цієї течії.

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.5)$$

де  $l$  – довільний замкнутий контур в будь-якомусередовищі;  
 $S$  – довільна поверхня, якаспирається на цей контур.

Закон (3.5) встановлює факт виникнення і величину напруженості електричного поля під дією змінного магнітного поля. Якщо на місці уявного контура  $l$  розмістити реальний контур, виконаний з провідника, то наявність електрорушійної сили приведе до протікання в провіднику електричного струму у напрямі вектора  $\vec{E}$  – це відомий закон електромагнітної індукції Фарадея, відкритий експериментально.

Від інтегральної форми запису другого рівняння Максвелла (3.5) можна перейти до диференціальної форми. Для цього циркуляція вектора  $\vec{E}$  в (3.5) замінюється, відповідно до теореми Стокса, інтегралом від  $rot\vec{E}$  по

$$\int_S rot\vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

поверхні  $S$

Оскільки поверхня  $S$  довільна, то дане рівняння можливе лише при виконанні умови рівності підінтегральних виразів в лівій та правій його частинах, що дає

$$rot\vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Це друге рівняння Максвелла в диференціальній формі. Воно справедливе в будь-якій точці простору у будь-який момент

часу і виражає кількісний зв'язок між тими величинами, що входять в закон електромагнітної індукції. Векторне рівняння (3.6) еквівалентне трьом скалярним рівнянням, які в декартовій системі координат  $x, y, z$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} ; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} ; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

3. Третє рівняння Максвелла в інтегральній формі є узагальненням закону Гауса для постійних і змінних електромагнітних полів: *течія вектору електричної індукції  $\vec{D}$  через довільну замкнуту поверхню  $S$  породжується вільним електричним зарядом  $Q$ , який знаходиться в об'ємі  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad (3.8)$$

Заряд може бути довільно розподілено всередині об'єму  $V$ , який обмежено поверхнею  $S$ , тому його треба задавати інтегралом від об'ємної густини розподілу  $\rho$ , що має розмірність Кл/м<sup>3</sup>, тобто

$$Q = \int_V \rho dV \quad (3.9)$$

Підстановка (3.9) в (3.8) дає

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (3.10)$$

Рівність (3.10) є третім рівнянням Максвелла в інтегральній формі. Ліву частину виразу (3.10) можна перетворити, використовуючи теорему Остроградського-Гауса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV$$

Ця рівність повинна виконуватися для довільного об'єму, що можливо, якщо підінтегральні вирази дорівнюють один одному, тобто

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (3.11)$$

Співвідношення (3.11) зветься третім рівнянням Максвелла в диференціальній формі. З (3.11) витікає, що дивергенція вектору  $\vec{D}$  відрізняється від нуля лише в тих точках простору, де є вільні електричні заряди. У цих точках лінії вектора починаються на додатніх зарядах (джерела поля) і закінчуються на від'ємних зарядах (стоки поля). Скалярне рівняння (3.11) в декартовій системі координат  $x, y, z$  записується у вигляді

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (3.12)$$

Аналогічно стороннім струмам (див. перше рівняння Максвелла) вводяться сторонні заряди, об'ємна густина розподілу яких  $\rho^{\text{ст}}$  додається в праві частини третього рівняння Максвелла (3.10) і (3.11)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V (\rho + \rho^{ct}) dV, \quad \text{div} \vec{D} = \rho + \rho^{cm}. \quad (3.13)$$

4. Четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі зветься законом неперервності магнітних силових ліній: *потік вектору магнітної індукції  $\vec{B}$  через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.14)$$

Це означає, що не існує ліній вектора  $\vec{B}$ , які лише входять в замкнену поверхню  $S$  (або, навпаки, лише виходять з поверхні  $S$ ), лінії вектора  $\vec{B}$  завжди пронизують її. Лінії вектору магнітної індукції  $\vec{B}$  неперервні, вони або не мають ні початку, ні кінця, або замкнені. Звідси витікає, що векторне поле  $\vec{B}$  не має джерел, тобто магнітних зарядів не існує.

За допомогою теореми Остроградського-Гаусса можна перейти від інтегральної форми четвертого рівняння (3.14) до диференціальної

$$\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0.$$

Оскільки об'єм  $V$  довільний, то ця рівність може виконуватися лише за умови

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) є четвертим рівнянням Максвелла в диференціальній формі.

### 3.2 Система рівнянь електромагнітного поля

Система рівнянь для аналізу електромагнітних хвильових процесів включає чотири рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho + \rho^{\text{см}}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \end{aligned} \quad (3.16)$$

і матеріальні рівняння, в яких фіксується вплив середовища на електромагнітні явища, які протікають в ньому

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (3.17)$$

Перші два рівняння Максвелла мають симетрію в наступному сенсі: за першим рівнянням зміна в часі електричної індукції породжує вихрове магнітне поле, вектор напруженості якого змінюється в просторі; за другим рівнянням зміна в часі магнітної індукції породжує вихрове електричне поле, яке змінюється в просторі. Таким чином, електричне і магнітне поля можуть існувати, взаємно породжуючи один одного. З цього виходить важливий висновок: електромагнітне поле здатне існувати самостійно і далеко від джерела. Ті збудження електромагнітного поля (зміни його стану), які поширюються в просторі, називають електромагнітними хвилями. Джерелами електромагнітного поля є електричні заряди і струми. Силкові лінії магнітного поля завжди неперервні. Силкові лінії електричного поля або неперервні або можуть обриватися на електричних зарядах.

Застосування операції дивергенції до обох частин першого рівняння Максвелла дає

$$\operatorname{div}\left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}^{\text{ст}}\right) = 0 \quad (3.18)$$

З (3.18) витікає, що лінії вектору густини повного струму *неперервні*. Використовуючи третє рівняння Максвелла і (3.18), отримуємо закон збереження зарядів: *всяка зміна заряду в часі породжує електричний струм*.

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{J}^{\text{ст}} = -\frac{\partial \rho^{\text{ст}}}{\partial t} \quad (3.19)$$

Більшість використовуваних на практиці матеріальних середовищ є лінійними. В цьому випадку електромагнітні поля задовільняють принципу суперпозиції: *поле, яке створене декількома джерелами, можна розглядати як суму полів, створених кожним джерелом*.

Системи (3.16) і (3.17) описують будь-які поля (статичні, стаціонарні, квазістаціонарні, нестаціонарні) в будь-якому середовищі.

### 3.3 Система рівнянь гармонійного електромагнітного поля

Більшість реальних джерел збуджують гармонійні електромагнітні поля, тобто поля, які змінюються в часі по косинусоїдальному закону з певною частотою. Такі поля отримали ще назву монохроматичні, тобто «однобарвні» (термін узятий з оптики). Монохроматичні поля завжди *переносять енергію, але не несуть інформації*. Інформація передаватиметься, якщо відповідно до заданого закону (або випадковим чином) мінятимуться амплітуда, частота, або фаза електромагнітних хвиль, тобто буде виконана модуляція (АМ, ЧМ, ФМ або більш складні види модуляції).

Це еквівалентно використанню групи (спектру) монохроматичних хвиль, підсумовування яких дає

електромагнітний сигнал, який переносить інформацію. Зв'язок складових спектру з цим сигналом визначається перетворенням Фур'є. Знання поведінки монохроматичних хвиль з довільними частотами в реальних умовах (природні траси поширення, лінії передач, і так далі) дозволяють аналізувати поведінку складних сигналів в тих же умовах. При вивченні гармонійних (монохроматичних) полів, які підкоряються лінійним рівнянням Максвелла, ефективно використовується метод комплексних амплітуд.

### 3.3.1 Метод комплексних амплітуд

Сутність методу полягає у тому, що векторним і скалярним величинам, які входять в системи (3.16), (3.17), ставляться у відповідність комплексні амплітуди. Зв'язок між фізичними величинами і їх комплексними амплітудами можна показати, наприклад, для вектору напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Миттєве значення вектору  $\vec{E}$ , який змінюється в часі за гармонійним законом, в деякій точці простору записується так:

$$\vec{E}(t) = \bar{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \bar{y}_0 E_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \bar{z}_0 E_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \quad (3.20)$$

Тут  $E_{mi}, (\omega t + \varphi_i)$  – відповідно амплітуди і фази окремих частотних (спектральних) складових вектору  $\vec{E}$ , які є дійсними величинами. Вираз (3.20) може бути переписано, як дійсну частину комплексного вектору:

$$\vec{E}(t) = \text{Re} \left[ \left( \bar{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \bar{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \bar{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \right) e^{j\omega t} \right] \quad (3.21)$$

Вектор

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx} e^{j\varphi_x} + \bar{y}_0 E_{my} e^{j\varphi_y} + \bar{z}_0 E_{mz} e^{j\varphi_z} \quad (3.22)$$

не залежить від часу і називається *комплексною амплітудою*. Тут і надалі комплексні амплітуди позначатимуться крапками зверху. Миттєве значення вектору (3.20), який гармонійно змінюється в часі, виражається через комплексну амплітуду таким чином (як дійсна частина комплексної величини):

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}\left(\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}\right) \quad (3.23)$$

Аналогічним чином вводяться комплексні амплітуди для всіх фізичних величин, які входять в рівняння (3.16), (3.17) і які коливаються з частотою  $\omega$ . Наприклад, для скалярних функцій об'ємної густини вільних і сторонніх зарядів буде:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \operatorname{Re}\left(\dot{\rho}e^{j\omega t}\right), \\ \rho^{\text{ст}}(t) &= \operatorname{Re}\left(\dot{\rho}^{\text{ст}}e^{j\omega t}\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.3.2 Рівняння Максвелла для комплексних амплітуд. Комплексні проникності

Рівняння Максвелла є лінійними диференціальними рівняннями. В випадку монохроматичного поля цим же рівнянням задовільнятимуть відповідні комплексні векторні і скалярні функції. Підстановка в перше рівняння Максвелла з системи (3.17) комплексних векторів  $\dot{\vec{E}}e^{j\omega t}$ ,  $\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}$ ,  $\dot{\vec{J}}^{\text{ст}}e^{j\omega t}$ , диференціювання за часом, і скорочення члена  $e^{j\omega t}$  дає рівняння для комплексних амплітуд:

$$\operatorname{rot}\dot{\vec{H}} = \sigma\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{ст}} \quad (3.25)$$

Рівняння (3.25) зазвичай перетворюється до наступного вигляду:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega \left( \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{\text{CT}} = j\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{\text{CT}} \quad , \quad (3.26)$$

де  $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}$  – деяка комплексна величина, яка за своєю сутністю є проникністю, а тому її і назвали комплексною абсолютною діелектричною проникністю середовища. Звернемо увагу, що цей параметр характеризує середовище одночасно з двох точок зору – дійсна частина вказує на «діелектричні», а уявна вказує на «провідні» властивості.

Третє рівняння Максвелла (3.17) для комплексних амплітуд буде мати вигляд

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho} + \dot{\rho}^{\text{CT}} \quad . \quad (3.27)$$

В теорії монохроматичних електромагнітних полів вільні заряди в середовищі зазвичай не розглядаються, оскільки через рівняння неперервності (3.19) вони однозначно визначаються

струмами провідності  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}} = -j\omega \dot{\rho}$ ,  $\dot{\rho} = \frac{j\sigma}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}$ . Підстановка останнього співвідношення в (3.27) дає:

$$\operatorname{div} \left( \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \right) - j \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}^{\text{CT}} \quad , \text{ або}$$

$$\operatorname{div} \left( \dot{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}} \right) = \dot{\rho}^{\text{CT}} \quad . \quad (3.28)$$

Друге і четверте рівняння Максвелла системи (3.16), а також матеріальні рівняння системи (3.17) без додаткових перетворень відразу записуються для комплексних амплітуд.

Аналогічно можна ввести абсолютну комплексну магнітну проникність  $\dot{\mu}$ .

В результаті система рівнянь Максвелла для гармонійного (монохроматичного) електромагнітного поля набуває наступного вигляду

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} &= j\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}^{\text{CT}} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}} &= -j\omega \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \\ \operatorname{div} \left( \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} \right) &= \dot{\rho}^{\text{CT}} \\ \operatorname{div} \left( \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \right) &= 0 \end{aligned} \right|, \quad (3.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{B}} &= \dot{\mu}_a \dot{\vec{H}} \end{aligned} \right| \quad (3.30)$$

Така форма запису рівнянь гармонійного (монохроматичного) поля застосовна в досить широкому діапазоні частот і найчастіше вживається для практичних розрахунків. Рівняння записано для комплексних амплітуд, які є функціями трьох просторових координат і не залежать від часу. Таким чином, з рівнянь вилучена часова змінна. Якщо при вирішенні електродинамічної задачі знайдено комплексні амплітуди векторів поля, то їх миттєві значення відновлюються за формулою (3.23).

Введена вище комплексна діелектрична проникність

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}$$

дозволяє одночасно врахувати діелектричні (поляризаційні) і провідні властивості середовища. Комплексну діелектричну проникність може бути зображено на комплексній площині (рис. 3.1).

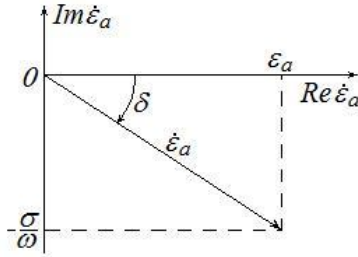


Рисунок 3.1 – До визначення кута діелектричних втрат

Співвідношення між дійсною і уявною частинами  $\dot{\epsilon}_a$  можна описати тангенсом кута  $\delta$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} . \quad (3.31)$$

Величина (3.31) зветься *тангенсом кута діелектричних втрат*. З іншого боку, чисельне значення тангенсу кута втрат дорівнює відношенню амплітуди густини струму провідності до амплітуди густини струму зміщення

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\left| \dot{J} \right|}{\left| \dot{J}^{\text{ЗМ}} \right|} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} , \quad (3.32)$$

бо для гармонійного (монохроматичного) поля комплексні амплітуди векторів густини струму провідності і густини струму зміщення, відповідно, є:  $\dot{J} = \sigma \dot{E}$ ,  $\dot{J}^{\text{ЗМ}} = j \omega \epsilon_a \dot{E}$ .

### 3.3.3 Критерій класифікації середовищ

Значення тангенсу кута діелектричних втрат є критерієм поділу середовищ на провідники та діелектрики. Якщо  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ , то

в речовині густина струму провідності набагато більше густини струму зміщення, і речовина зветься провідником. Якщо  $\operatorname{tg}\delta \ll 1$ , то в речовині густина струму зміщення набагато більше густини струму провідності, і речовину звать діелектриком

Відмітимо, що величини  $\epsilon_r$  та  $\operatorname{tg}\delta$  є паспортними параметрами технічних діелектричних речовин.

Властивості деяких діелектриків у діапазоні надвисоких частот ( $\lambda = 3$  см, при температурі  $20^0-25^0\text{C}$ ) наведено в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Параметри типових діелектриків

Діелектрик	$\epsilon_r$	$\operatorname{tg}\delta$
Плексиглас	2,71	$8,4 \cdot 10^{-3}$
Полістирол	2,55	$7 \cdot 10^{-4}$
Фторопласт	2,08	$3,7 \cdot 10^{-4}$
Текстоліт	3,77	$7 \cdot 10^{-2}$
Гетинакс	7	$2 \cdot 10^{-2}$
Склотекстоліт	4,5	$3 \cdot 10^{-2}$
Пінопласт	1,1	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Поліетілен	2,3	$3 \cdot 10^{-4}$
Полікор	9,7	$1 \cdot 10^{-4}$

Метали мають велику питому провідність, тому у них  $\operatorname{tg}\delta \gg 1$  на усіх частотах радіодіапазону. У типових діелектриків, навпаки, питома провідність дуже мала, наприклад, в кварці  $\sigma = 2 \cdot 10^{-17}$  См/м, у скла  $\sigma = 10^{-12}$  См/м. Існують середовища, в яких провідність не дуже значна, наприкладу морської води  $\sigma = 3 \div 5$  См/м, у вологого ґрунту  $\sigma = 10^{-3} \div 10^{-5}$  См/м. Такі середовища на низьких частотах проявляють властивості провідників ( $\sigma \gg \omega\epsilon_a$ ), а на високих частотах – властивості діелектриків ( $\sigma \ll \omega\epsilon_a$ ).

При дослідженні властивостей електромагнітних хвиль застосовуються поняття ідеального діелектрика і ідеального провідника. Якщо  $\sigma = 0$ , то середовище (речовина) зветься ідеальним діелектриком. Ідеальний провідник – це середовище з нескінченно великою питомою провідністю ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Змінне електромагнітне поле не проникає в ідеальний провідник, тобто в ньому  $\vec{E} = 0$ ;  $\vec{H} = 0$ . Звичайно в природі не існує ідеальних провідників і діелектриків, але введені поняття часто суттєво спрощують вирішення практично значимих задач, результати яких може бути використано для реальних середовищ, близьких за властивостями до ідеальних.

### 3.4 Рівняння балансу миттєвих значень потужностей для електромагнітного поля

Електромагнітні поля здатні переносити енергію в просторі, при цьому частина енергії може перетворюватися в інші види енергії. Електромагнітна енергія підкоряється закону збереження енергії, який закладено в рівняннях Максвелла. Розглядають рівняння балансу для миттєвих значень потужностей в електромагнітному полі стосовно деякого об'єму середовища  $V$ , обмеженому поверхнею  $S$ .

Хай в об'ємі  $V$ , заповненому лінійним однорідним і ізотропним середовищем, знаходиться стороннє джерело поля  $\vec{J}^{ct}$ . Для виведення рівняння балансу використовуються два перші рівняння Максвелла (3.29) і матеріальні рівняння (3.30).

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$\operatorname{div}[\vec{E}, \vec{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) + \vec{J}\vec{E} = -\vec{J}^{ct}\vec{E} \quad (3.33)$$

Це рівняння зветься *рівнянням балансу потужності в диференціальній формі*. Знайдемо інтегральну форму рівняння балансу потужностей, бо воно знаходить більш широке застосування.

Інтегрування по складових виразу (3.33) за об'ємом  $V$  дає:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) dV + \int_V \vec{J}\vec{E} dV = \int_V \left( -\vec{J}^{ct} \vec{E} \right) dV. \quad (3.34)$$

У першому доданку інтегралу (3.34) застосовано теорему Остроградського-Гауса для переходу від об'ємного інтегралу з підінтегральною функцією  $\text{div}[\vec{E}, \vec{H}]$  до поверхневого інтегралу від векторного добутку  $[\vec{E}, \vec{H}]$ .

Вираз (3.34) є рівнянням балансу миттєвих значень потужностей електромагнітного поля і визначає закон збереження енергії електромагнітного поля для виділеного об'єму середовища. Всі члени цього рівняння мають розмірність потужності. Розглянемо сутність його складових.

Об'ємний інтеграл

$$W = \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) dV = W^E + W^M \quad (3.35)$$

є миттєвим значенням енергії електромагнітного поля, що міститься в об'ємі  $V$ , яку розподілено в цьому об'ємі з об'ємною густиною

$$w = \left( \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} \right) = w^E + w^M, \quad \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right] \quad (3.36)$$

Звідси витікає, що енергія електромагнітної хвилі складається з енергії електричного поля  $w^E$  та енергії магнітного поля  $w^M$ .

Об'ємний інтеграл

$$P_n = \int_V \vec{J}\vec{E} dV = \int_V \sigma \vec{E}^2 dV, \quad [\text{Вт}]. \quad (3.37)$$

визначає миттєве значення потужності теплових (джоулевих, або, другими словами, за законом Джоуля) втрат в об'ємі  $V$ .

Інтеграл в правій частині рівняння балансу (3.34) є виразом для обчислення миттєвого значення потужності, яка віддається сторонніми струмами електромагнітному полю в об'ємі  $V$

$$P^{\text{CT}} = \int_V \left( -\vec{J}^{\text{CT}} \vec{E} \right) dV, \quad [\text{Вт}]. \quad (3.38)$$

Підінтегральний вираз в поверхневому інтегралі (3.34)

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E}, \vec{H} \right], \quad \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] \quad (3.39)$$

зветься *вектором Умова-Пойнтінга* і визначає *миттєве значення густини течії потужності* (тобто енергії в одиницю часу) через одиничну площинку, яку розташовано перпендикулярно напрямку поширення енергії. Тоді поверхневий інтеграл

$$P_{\Sigma} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}, \quad [\text{Вт}] \quad (3.40)$$

є миттєвим значенням *течії потужності*, що проходить через поверхню  $S$ , яка обмежує об'єм  $V$ . Якщо течія потужності виходить з даного об'єму ( $P_{\Sigma} > 0$ ), то можна вважати, що усередині об'єму знаходиться передавальний пристрій і течія потужності випромінюється в довколишній простір. При  $P_{\Sigma} < 0$  течія потужності входить в об'єм  $V$  і поглинається приймальним пристроєм. Випадок  $P_{\Sigma} = 0$  відповідає випадку екранування об'єму  $V$  ідеально провідною поверхнею  $S$ .

### 3.5 Граничні умови для векторів електромагнітного поля на поверхні розділу середовищ

Ті реальні середовища, де може існувати електромагнітне поле ніколи не бувають абсолютно однорідними, завжди існують межі розділу середовищ з різними електрофізичними властивостями, наприклад, межа розділу повітря – поверхня Землі та ін. В цих випадках треба знати закони зміни значень векторів поля при переході через межу розділу двох різних середовищ. Будемо вважати, що на межі розділу параметри середовищ  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  (або, принаймні, один з них) стрибкоподібно мінюють свої значення. На поверхні розділу середовищ, де порушується неперервність параметрів середовища, рівняння Максвелла в диференціальній формі втрачають зміст і мають бути доповнені умовами, що визначають поведінку векторів поля на межі розділу середовищ. Ці умови встановлюються за допомогою рівнянь Максвелла в *інтегральній формі* ізвуться граничними умовами.

Вектор поля біля точки  $M$  треба розкласти на *тангенціальні* (дотичні) і *нормальні* (перпендикулярні) до межі розділу складові. Наприклад, вектор  $\vec{E}$  на межі розділу можна представити у вигляді –рис.3.2.

$$\vec{E} = \vec{E}_\tau + \vec{E}_n = \vec{\tau}E_\tau + \vec{n}E_n$$

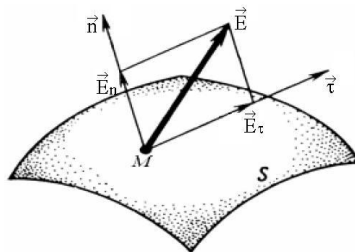


Рисунок 3.2 – Розкладання вектору  $\vec{E}$  на нормальну і дотичну складові

Тут  $\vec{\tau}, \vec{n}$  – одиничні вектори (орти) дотичного і нормального напрямів до площини  $S$  в точці  $M$ .

Поведінка нормальних і тангенціальних складових векторів поля розглядається окремо.

### 3.5.1 Граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля

Розглянемо спочатку граничну умову для нормальної складової вектору електричного зміщення. Для цього на поверхні розділу  $S$  біля вибраної точки  $M$  виділимо елемент поверхні  $\Delta S$ . Елемент  $\Delta S$  має бути настільки малий, аби, по-перше, його можна було вважати плоским, а по-друге, щоб в обох середовищах розподіл нормальної складової вектору електричного зміщення  $\vec{D}$  можна було вважати рівномірним в межах  $\Delta S$ . На елементі  $\Delta S$  будемо циліндр заввишки  $\Delta h$  і об'ємом  $\Delta V$  так, щоб його основи (торці) знаходилися в різних середовищах (рис. 3.3).

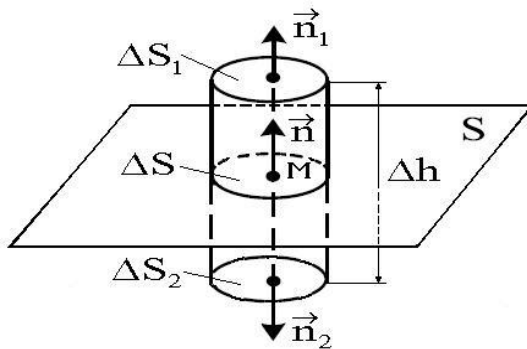


Рисунок 3.3 – До отримання граничних умов для нормальних складових векторів електромагнітного поля

Тут одиничні вектори  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  – орти нормалей до торців циліндра, а  $\vec{n}$  – орт нормалі до межі розділу (направлений з середовища 1 в середовище 2).

Застосуємо третє рівняння Максвелла в інтегральній формі до об'єму циліндра  $\Delta V$ , який обмежено поверхнями торців  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  та боковою поверхнею циліндра  $\Delta S_\delta$  і тоді після здійснення граничного переходу при  $\Delta h \rightarrow 0$  в результаті нескладних перетворень отримаємо:

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \rho \Delta h \quad (3.41)$$

У реальних середовищах заряди не скупчуються безпосередньо на межі розділу, вони зосереджуються в тонкому приграничному шарі, так що об'ємна щільність зарядів рзалишається скінченною величиною, а тоді права частина (3.41) буде прагнути до нуля при  $\Delta h \rightarrow 0$ . Таким чином, співвідношення (3.41) набуває вигляду:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (3.42)$$

Рівність (3.42) є граничною умовою, яка формулюється таким чином: *нормальні складові вектору електричної індукції  $\vec{D}$  на межі розділу двох середовищ неперервні.*

Якщо виразити в рівнянні (3.42)  $D_{n1}$  і  $D_{n2}$  через  $E_{n1}$  і  $E_{n2}$  за допомогою матеріального рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ , то отримаємо граничну умову для нормальних складових вектору  $\vec{E}$ :

$$\varepsilon_{a1} E_{n1} = \varepsilon_{a2} E_{n2}, \text{ або } E_{n1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_{n2} \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.43) показує, що нормальна складова вектору  $\vec{E}$  під час переходу через межу розділу реальних середовищ терпить розрив(стрибок), величина якого визначається відношенням діелектричних проникностей цих середовищ.

Аналогічно, якщо застосувати до циліндра  $\Delta V$  четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі то при

$\Delta h \rightarrow 0$  отримаємо граничну умову для нормальних складових вектору магнітної індукції  $\vec{B}$ :

$$\dot{B}_{n1} = \dot{B}_{n2}, \quad (3.44)$$

З (3.44) витікає, що нормальні складові вектору  $\vec{B}$  під час переходу через межу розділу двох середовищ неперервні. Використання матеріального рівняння  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  дає граничну умову для нормальних складових вектору напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ :

$$\mu_{a1} H_{n1} = \mu_{a2} H_{n2} \text{ або } H_{n1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} H_{n2}. \quad (3.45)$$

Умови (3.45) показують, що нормальна складова вектору  $\vec{H}$  під час переходу через межу розділу двох середовищ терпить розрив, величина якого визначається відношенням магнітних проникностей цих середовищ.

Граничні умови (3.42)÷(3.45) справедливі для миттєвих значень векторів змінного електромагнітного поля. В разі гармонійного (монохроматичного) поля граничні умови (3.42)÷(3.45) записуються для незалежних від часу комплексних амплітуд векторів поля таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{D}_{n1} &= \dot{D}_{n2}, & \dot{E}_{n1} &= \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \dot{E}_{n2} \\ \dot{B}_{n1} &= \dot{B}_{n2}, & \dot{H}_{n1} &= \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \dot{H}_{n2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.5.2 Граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля

Для з'ясування поведінки тангенціальних складових векторів електромагнітного поля на межі розділу  $S$  двох ізотропних середовищ побудуємо з довільної точки  $M$  орт нормалі  $\vec{n}$ , яка направлено з другого середовища в перше (рис. 3.4). Спочатку розглянемо граничні умови для тангенціальної складової вектору напруженості магнітного поля.

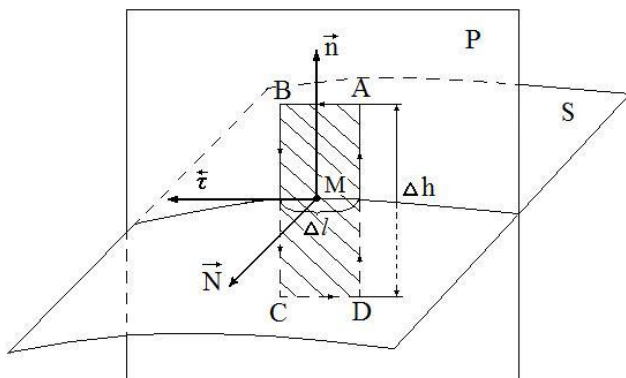


Рисунок 3.4 – До отримання граничних умов для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля

Для цього через орт  $\vec{n}$  проводимо площину  $P$  і на лінії перетинання межі розділу  $S$  з площиною  $P$  виділяємо малий відрізок  $\Delta l$ , що містить точку  $M$ . Розміри відрізка  $\Delta l$  мають бути настільки малими, аби, по-перше, його можна було вважати прямолінійним, а по-друге, аби розподіли дотичних складових вектору  $\vec{H}$  в межах  $\Delta l$  в обох середовищах можна було вважати рівномірними. У площині  $P$  будуємо прямокутний замкнутий контур  $ABCD$  так, щоб сторони  $AB$  і  $CD$  були паралельними і знаходились в різних середовищах. З точки  $M$  проводимо орт  $\vec{\tau}$  так, щоб він був дотичним до лінії перетинання площини  $S$  (межі

розділу) з площиною  $P$ . З цієї ж точки будемо орт нормалі  $\vec{N}$  до площини  $P$ . Орти  $\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{N}$  утворюють праву трійку векторів  $\vec{N} = [\vec{n}, \vec{\tau}]$ . Напрямок обходу контуру  $ABCD$  утворює правогвинтову систему з вектором  $\vec{N}$ . Застосувавши до контуру  $ABCD$  перше рівняння Максвелла в інтегральній формі, після використання граничного переходу при  $\Delta h \rightarrow 0$ , отримаємо:

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (3.47)$$

Якщо застосувати до контуру  $ABCD$  друге рівняння Максвелла в інтегральній формі, то аналогічно можна отримати граничну умову для тангенціальних складових вектора  $\vec{E}$ :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (3.48)$$

Умови (3.47), (3.48) формулюються таким чином: *дотичні складові векторів напруженостей електричного і магнітного полів залишаються неперервними під час переходу через межу розділу двох середовищ.*

Використовуючи матеріальне рівняння  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$  і враховуючи (3.48), можна записати граничні умови для тангенціальних складових вектору  $\vec{D}$ :

$$\frac{1}{\varepsilon_{a1}} D_{\tau 1} = \frac{1}{\varepsilon_{a2}} D_{\tau 2} \quad \text{або} \quad D_{\tau 1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} D_{\tau 2}. \quad (3.49)$$

Тангенціальна складова вектору  $\vec{D}$  при переході через межу розділу зазнає розриву, величина якого визначається відношенням діелектричних проникностей середовищ.

Аналогічно, з матеріального рівняння  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$  і граничної умови (3.47) отримаємо:

$$\frac{1}{\mu_{a1}} B_{\tau 1} = \frac{1}{\mu_{a2}} B_{\tau 2} \quad \text{або} \quad B_{\tau 1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} B_{\tau 2} \quad (3.50)$$

Гранична умова (3.50) показує, що при переході через межу розділу тангенціальна складова вектору  $\vec{B}$  зазнає розриву, величина якого залежить від співвідношення між магнітними проникностями.

Граничні умови (3.47) – (3.50) записані для миттєвих значень векторів поля. В разі монохроматичного поля граничні умови визначаються для комплексних амплітуд векторів поля:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\tau 1} &= \dot{H}_{\tau 2}, & \dot{E}_{\tau 1} &= \dot{E}_{\tau 2} \\ \dot{D}_{\tau 1} &= \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \dot{D}_{\tau 2}, & \dot{B}_{\tau 1} &= \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} \dot{B}_{\tau 2} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Слід звернути увагу на той факт, що граничні умови для нормальних і тангенціальних складових векторів поля мають відмінності. Причину цих відмінностей можна показати на прикладі вектору  $\vec{E}$ . Для цього випадку задамо два ізотропні середовища, які характеризуються діелектричними проникностями  $\varepsilon_{a1}$  та  $\varepsilon_{a2}$ , та межу розділу між ними. Під впливом зовнішнього електричного поля обидва середовища поляризуються, причому вектор поляризованості  $\vec{P}$  матиме різні значення, оскільки  $\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}$ . Хай вектор  $\vec{E}$ , а, отже, і вектор  $\vec{P}$  будуть перпендикулярними до межі розділу. Тоді на межі розділу виникають некомпенсовані зв'язані заряди (вторинні джерела), що створюють додаткове електричне поле, яке в одному середовищі складається з первинним полем, а в другому –

віднімається, так що  $E_{n1} \neq E_{n2}$  і нормальна складова вектору  $\vec{E}$  терпить розрив під час переходу через межу розділу.

Якщо вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{P}$  паралельні поверхні розділу, то некомпенсованих зарядів на межі розділу не виникає, і тангенціальна складова неперервна ( $E_{\tau1} = E_{\tau2}$ ). При цьому, через однакові значення  $E_{\tau}$  в обох середовищах, але різних  $P_{\tau}$ , тангенціальна складова вектору електричного зміщення  $D_{\tau} = \varepsilon_a E_{\tau} + P_{\tau}$  зазнає стрибка.

Відмінність в граничних умовах для нормальних і тангенціальних складових векторів магнітного поля  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  пояснюється різною мірою намагніченості середовищ, що приводить до появи поверхневих молекулярних струмів, які створюють додаткове магнітне поле.

### 3.5.3 Граничні умови на поверхні ідеального провідника

При вивченні змінних електромагнітних полів поблизу поверхні металевого (провідного) тіла будемо припускати, що воно є ідеальним провідником, тобто  $\sigma \rightarrow \infty$ . При цьому граничні умови спрощуються, оскільки в середовищі, де  $\sigma \rightarrow \infty$  змінне у часі поле відсутнє. Припустимо, що ідеально

провідним є друге середовище, тоді  $\vec{D}_2 = \vec{E}_2 = \vec{B}_2 = \vec{H}_2 = 0$ . Перше середовище хай буде ізотропним і непровідним. Поведінку нормальних складових векторів поля можна розглянути за допомогою співвідношення (3.41):

$$\vec{D}_1 \vec{n} - \vec{D}_2 \vec{n} = \rho \Delta h$$

При наявності змінного у часі поля заряди ідеального провідника зосереджуються на його поверхні в нескінченно тонкому шарі, розподіляючись з деякою поверхневою густиною. Об'ємну густину зарядів представимо в наступному вигляді:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta h} = \frac{\rho_S}{\Delta h}, \quad (3.52)$$

де  $\Delta S$  – елемент поверхні провідника;

$$\rho_S = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

– поверхнева густина заряду (її називають також густиною поверхневих зарядів).

Тоді в правій частині співвідношення (3.41) залишиться лише  $\rho_S$ . Взявши до уваги нульове значення  $D_{n2}$ , отримаємо граничну умову для нормальної складової вектору  $\vec{D}$  на поверхні ідеального провідника:

$$D_{n1} = \rho_S. \quad (3.53)$$

Нормальна складова вектору  $\vec{E}$  визначається з матеріального рівняння  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$

$$E_{n1} = \frac{\rho_S}{\epsilon_{a1}}. \quad (3.54)$$

Нормальні складові векторів магнітного поля визначаються із співвідношень (3.44) та (3.45):

$$B_{n1} = 0, \quad H_{n1} = 0. \quad (3.55)$$

Поведінку дотичних до поверхні S провідника складових векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  можна встановити за допомогою співвідношення:

$$\vec{H}_1 \vec{\tau} - \vec{H}_2 \vec{\tau} = \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) N \Delta h \quad (3.47)$$

Об'ємна густина струму зміщення завжди є скінченною величиною, оскільки величини векторів поля і їх похідних є обмеженими, тому в правій частині (3.47) буде

$$\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \Delta h \rightarrow 0$$

при  $\Delta h \rightarrow 0$ . Об'ємна густина струму провідності вправій частині (3.47) буде

$$\vec{J} \Delta h = \rho \vec{v} \Delta h = \vec{v} \Delta h \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta h} = \vec{v} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \vec{v} \rho_S = \vec{J}_S, \quad (3.56)$$

де  $\vec{v}$  – швидкість носіїв заряду,

$\vec{J}_S$  – поверхнева густина струму провідності, яка має розмірність А/м.

Тоді граничний перехід в (3.47) дасть праву частину, відмінну від нуля:

$$\vec{H}_1 \vec{\tau} = \vec{J}_S \vec{N}. \quad (3.57)$$

Заміна  $\vec{\tau} = [\vec{N}, \vec{n}]$  і використання властивості циклічної перестановки співмножників в змішаному добутку векторів дають:

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] \vec{N} = \vec{J}_S \vec{N}. \quad (3.58)$$

Оскільки ця рівність виконується при будь-якому напрямі орту  $\vec{N}$ , то з (3.58) витікає:

$$[\vec{n}, \vec{H}_1] = \vec{J}_S \text{ або } [\vec{n}, \vec{H}_{\tau 1}] = \vec{J}_S. \quad (3.59)$$

З рівняння (3.48) витікає гранична умова для тангенціальної складової вектору  $\vec{E}$  (оскільки поле в провіднику нульове):

$$E_{\tau 1} = 0 \quad (3.60)$$

Таким чином, на поверхні ідеального провідника виконуються наступні граничні умови для нормальних і тангенціальних складових векторів електричного та магнітного полів:

$$E_{\tau 1} = 0, \quad E_{n1} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_{a1}}, \quad H_{n1} = 0, \quad [\vec{n}, \vec{H}_{\tau 1}] = \vec{J}_S \quad (3.61)$$

Тангенціальна складова магнітного поля наводить на поверхні ідеального провідника електричний струм з густиною  $\vec{J}_S$ , причому напрямок цього струму є перпендикулярним до вектору магнітного поля  $\vec{H}$ . На поверхні ідеального провідника нормальна складова вектору  $\vec{H}$  і дотична складова вектору  $\vec{E}$  повинні мати нульові значення. З цього витікає, що розподіл магнітного поля повинен бути таким, щоб його силові лінії (нагадаємо, що вони повинні бути замкненими) біля ідеального провідника мали лише ті складові, які є дотичними (тангенціальними) до його поверхні. Аналогічно, силові лінії електричного поля біля поверхні ідеального провідника повинні мати лише перпендикулярні (нормальні) до нього складові.

### Контрольні запитання

1. Який фізичний зміст мають перше та друге рівняння Максвелла в інтегральній формі?
2. Який фізичний зміст мають третє та четверте рівняння Максвелла в інтегральній формі?
3. За допомогою яких математичних перетворень здійснюється перехід від інтегральної до диференціальної форми рівнянь Максвелла?

4. Який фізичний зміст мають рівняння Максвелла в диференціальній формі?
5. Які складові має вираз для густини струму зміщення в діелектрику та яка їх фізична сутність?
6. Що таке сторонні струми та заряди та яка мета їх введення в перше та четверте рівняння Максвелла?
7. На основі чого можна стверджувати, що магнітних зарядів в природі не існує?
8. Що таке матеріальні рівняння та який їх фізичний зміст?
9. Як розуміється поняття симетрії рівнянь Максвелла?
10. Що таке комплексний вектор та його комплексна амплітуда?
11. Як від комплексної амплітуди перейти до миттєвого значення та навпаки?
12. Як записується система рівнянь Максвелла та матеріальні рівняння в комплексній формі?
13. Як вводиться комплексна діелектрична проникність?
14. Як вводиться параметр  $tg\delta$ , яка його фізична сутність та як за цим параметром класифікують середовища?
15. Що таке ідеальний провідник та ідеальний діелектрик і які їх параметри?
16. Як вводиться рівняння балансу миттєвих значень потужностей та яка фізична сутність його складових?
17. Що таке вектор Пойнтінга, течія потужності та яка їх фізична сутність?
18. На які складові розкладається вектор поля біля межі розділу середовищ?
19. Як отримати граничні умови для нормальних складових векторів електромагнітного поля?
20. Як отримати граничні умови для тангенціальних складових векторів електромагнітного поля?
21. Які складові векторів поля на межі розділу неперервні, а які терплять розрив? Яка величина розриву?
22. Як фізично пояснити розрив деяких складових поля на межі розділу середовищ?

23. Що таке густина поверхневих зарядів для ідеального провідника та як вона застосовується при отриманні граничних умов для  $D_n$  та  $E_n$  на його поверхні?

24. Що таке густина поверхневого струму для ідеального провідника та як вона застосовується при отриманні граничних умов для  $H_\tau$  та  $E_\tau$  на його поверхні?

25. Які особливості розподілу електричного та магнітного полів біля поверхні ідеального провідника?

### Приклад вирішення задачі

**Задача 3.1** Миттєве значення вектору напруженості електричного поля в повітрі є  $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E \sin(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення вектору напруженості магнітного

поля, якщо  $E = 100 \frac{\text{мкВ}}{\text{м}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ ,  $f = 1 \text{ МГц}$ .

#### Вирішення

1. Скористаємось другим рівнянням Максвелла в диференціальній формі (3.6), де для повітря візьмемо  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\epsilon_a = \epsilon_0$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

2. Обчислимо  $\text{rot} \vec{E}$  в декартовій системі координат при умові, що  $E_y = E_z = 0$ . (Так задано в умові задачі). Тоді

$$\text{rot} \vec{E} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{e}_z \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Тут для знаходження визначника матриці застосовано розкладання за алгебраїчними доповненнями першого рядка.

Врахуємо, що вектор  $\vec{E}$  не залежить від координати  $y$ , а тому буде

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{та} \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\vec{e}_y \beta \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

3. Підставимо отриманий вираз для  $\text{rot} \vec{E}$  в друге рівняння Максвелла і тоді одержимо

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{E} = \vec{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

З цього виразу видно, що для знаходження вектору  $\vec{H}$  треба виконати інтегрування останнього виразу за часом, отже

$$\vec{H} = \int \vec{e}_y \frac{\beta}{\mu_0} \cdot E \cdot \cos(\omega t - \beta z) dt = \vec{e}_y \left( \frac{\beta}{\omega \mu_0} \cdot E \cdot \sin(\omega t - \beta z) + C \right),$$

де  $C$ -стала інтегрування.

З фізичних міркувань слід прийняти  $C = 0$ , оскільки стале магнітне поле не може збуджувати змінне електричне поле. Тоді з урахуванням значень  $\mu_0$  та  $\varepsilon_0$  для миттєвого значення вектору  $\vec{H}$  отримаємо

$$\begin{aligned} \vec{H}(z, t) &= \vec{e}_y \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\omega \mu_0} \cdot E \cdot \sin(\omega t - \beta z) = \\ &= \vec{e}_y \cdot 2.65 \cdot 10^{-7} \sin(2\pi 10^6 t - 2.1 \cdot 10^{-2} z), \text{ A/м.} \end{aligned}$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 3.2.** Миттєве значення вектору напруженості магнітного поля в повітрі є  $\vec{H} = \vec{e}_y H \cos(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення вектору напруженості електричного поля за умови, що  $H = 10^{-4}$  А/м,  $f = 1$  МГц.

**Задача 3.3** Миттєве значення вектору напруженості електричного поля є  $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$ . Визначити миттєве значення та комплексну амплітуду вектору напруженості магнітного поля за умови, що  $E = 1 \text{ мВ/м}$ ,  $\alpha = 10^{-3} \text{ 1/м}$ ,  $\beta = 4.2 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $f = 1 \text{ МГц}$ .

**Задача 3.4** Вектор напруженості електричного поля в сферичній системі координат є  $\vec{E} = \vec{e}_r \cdot 0.25 \cdot r \text{ В/м}$ . Визначити  $\text{div} \vec{D}$  в середовищі з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon_r = 6$  та встановити, чи є заряди в цій області.

**Задача 3.5** Миттєве значення вектору напруженості магнітного поля взяти з задачі 3.1 і записати вираз для комплексної амплітуди цього вектору.

**Задача 3.6** Морська вода має параметри  $\epsilon_r = 80$ ,  $\sigma = 2 \text{ См/м}$ . Знайти комплексну діелектричну проникність і величину параметру  $\text{tg} \delta$  на частотах 10 кГц, 1 МГц, 100 МГц, 10 ГГц. Провести класифікацію поведінки цієї речовини на вказаних частотах.

## 4 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ У ОДНОРІДНОМУ ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 4.1 Хвилеві рівняння

Одним з найважливіших результатів, отриманих Максвеллом, виявилось доведення хвилевої природи електромагнітного поля. Вже з'ясовано, що зміна в часі електричного поля приводить до виникнення вихрового магнітного поля, яке змінюється в просторі, і навпаки. Для доведення хвилевого характеру електромагнітного поля зведемо рівняння Максвелла до інших рівнянь, які безумовно (апріорі, не вимагає доведення) описують хвилеві процеси.

У однорідному ізотропному середовищі з параметрами  $\varepsilon_a, \mu_a$  для спрощення математичних перетворень припускається, що питома провідність середовища  $\sigma = 0$ , тобто це ідеальне діелектричне середовище без втрат. У такому середовищі рівняння Максвелла набувають вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4.4)$$

Якщо взяти ротор від обох частин рівняння (4.1) і змінити порядок диференціювання за часом і за просторовими координатами в правій частині, то отримаємо диференціальне рівняння другого порядку, якому повинен підкорятися вектор  $\vec{H}$  електромагнітного поля (нагадаємо, що  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$ ):

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5)$$

Аналогічним чином з рівняння (4.2) можна отримати рівняння другого порядку і для вектору  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.6)$$

Наголосимо, що це векторні рівняння, а коефіцієнт перед другою похідною за часом в (4.5), (4.6) має розмірність  $\text{сек}^2/\text{м}^2$ , тобто обернено пропорційний квадрату швидкості. Кожне з векторних рівнянь (4.5), (4.6) еквівалентне трьом скалярним рівнянням. Якщо позначити через  $A$  будь-яку із складових векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , то скалярні рівняння набудуть вигляду:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (4.7)$$

Як відомо, диференціальні рівняння другого порядку виду (4.7) описують хвильві процеси, причому параметр  $V$  дорівнює швидкості поширення цього процесу. Такі рівняння називають однорідними (з правою частиною рівною нулю) рівняннями Даламбера або однорідними хвильвими рівняннями. Шукана функція  $A$ , яка описує хвильвий процес, змінюється і за простором і за часом. При врахуванні джерел електромагнітних полів (задача про збурення електромагнітного поля) права частина рівняння (4.7) не дорівнює нулю і рівняння зветься неоднорідним.

Вирішенням рівняння (4.7) є функції вигляду  $F\left(t \mp \frac{r}{V}\right)$ ,

де верхній знак відповідає хвилі, яка рухається уздовж напрямку  $+r$ , а нижній знак  $-$  хвилі, яка рухається в протилежному напрямі  $(-r)$ . Вибір фізичного рішення здійснюється на основі інформації про місце розташування джерела поля.

Рівняння (4.5), (4.6) для векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  відрізняються від (4.7) лише тим, що функції, які в них входять є векторними.

Рівняння такого типу називаються векторними рівняннями Даламбера або однорідними векторними хвильовими рівняннями.

Як вже згадувалось раніше, параметр

$$\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{V^2} \quad (4.8)$$

зв'язано зі швидкістю поширення хвилі в середовищі без втрат.

Для гармонійного (монохроматичного) поля можна знов скористатися комплексним представленням миттєвих значень векторів поля, які входять в рівняння (4.5), (4.6),

$$\text{тобто } \vec{E} = \text{Re}(\dot{\vec{E}} e^{j\omega t}), \quad \vec{H} = \text{Re}(\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}).$$

Після диференціювання за часом в хвильових рівняннях (4.5), (4.6) і скорочення на  $e^{j\omega t}$ , отримаємо хвильові рівняння для комплексних амплітуд векторів поля  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$ :

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0, \quad (4.10)$$

де  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V}$  – стала поширення.

Величина  $k$  має розмірність  $\text{м}^{-1}$ . Для  $k$  вживаються також терміни *коефіцієнт фази* і *хвильове число*; наголосимо, що це одна з найважливіших характеристик хвильового процесу. В теорії гармонійних хвильових процесів рівняння (4.9), (4.10) отримали назву однорідні векторні рівняння Гельмгольца.

Якщо середовище має втрати (у загальному випадку і електричні, і магнітні), то воно характеризується комплексними діелектричною і магнітною проникністями  $\dot{\varepsilon}_a$ ,  $\dot{\mu}_a$ . Тоді хвильове число стає комплексним  $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a}$  і рівняння Гельмгольца набувають вигляду:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + \dot{k}^2 \dot{\vec{H}} = 0. \quad (4.12)$$

Хвилеві рівняння (4.5), (4.6) для миттєвих значень векторів поля і хвилеві рівняння (4.9) – (4.12) для комплексних амплітуд векторів монохроматичного поля описують хвилеві процеси поширення електромагнітних хвиль в просторі. При вирішенні хвилевих рівнянь в сферичній системі координат отримаємо математичний запис хвильового процесу у вигляді сферичної хвилі, в циліндричній системі координат – циліндричної хвилі, в декартовій системі координат – плоскої хвилі.

## 4.2 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі

Плоскою називається електромагнітна хвиля, вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  якої мають постійні фази на площині, яка є перпендикулярною напрямку поширення. Ця площина називається *фронтом хвилі*, її називають ще *поверхнею рівних фаз*, або *хвильовою поверхнею*, або *синфазною поверхнею*. Плоска хвиля називається *однорідною*, якщо амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  не міняються в площині фронту. Збудити в необмеженому просторі плоску однорідну хвилю за допомогою реального пристрою неможливо, оскільки при цьому джерело повинно представляти нескінчену за розмірами синфазну площину і мати нескінчену енергію.

Поняття плоскої однорідної хвилі застосовується в якості простої математичної моделі, яка розкриває основні властивості вільних електромагнітних хвиль. У реальних випадках це поняття використовується для малих ділянок хвильового фронту зі складною поверхнею. Так, на значній відстані від джерела малу ділянку сферичного фронту можна наближено замінити площиною.

Наприклад, хай сферична хвиля створюється точковим джерелом, розташованим на початку декартової системи координат (точка  $Q$  – рис. 4.1) з віссю  $z$ , яку орієнтовано в напрямі на приймальну антену. Хай приймальна антена має малий об'єм  $V$ . Хай також вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  випромінюваної

хвилі лежать в площині тієї грані об'єму  $V$ , яка є перпендикулярною до вісі  $z$  (радіус-вектору), вектор  $\vec{E}$  направлений за віссю  $x$ , а  $\vec{H}$  - за віссю  $y$ .

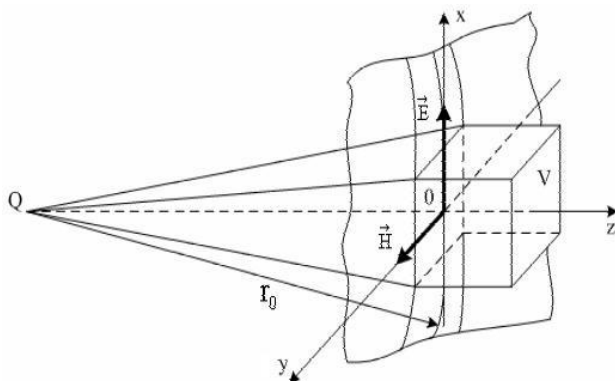


Рисунок 4.1 – До поняття локально плоского фронту хвилі

В межах об'єму  $V$  вектори поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  синфазні і фронт хвилі визначається рівнянням  $z = const$ , тобто є площиною, яка є перпендикулярною до напрямку поширення. Таким чином, сферичну хвилю в межах області  $V$  можна розглядати як плоску. Цей висновок можна віднести до будь-якого джерела, яке випромінює хвилю з неплоским фазовим фронтом.

Окремим випадком безмежного однорідного ізотропного середовища із заданими значеннями  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  та  $\sigma = 0$  є вакуум з параметрами  $\epsilon_a = \epsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ . Атмосферне повітря за своїми параметрами близьке до вакууму, так що в більшості випадків для розрахунку електромагнітних полів повітря може розглядатися як середовище з  $\epsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 0$ .

Поле плоскої однорідної хвилі можна визначити з вирішення однорідних рівнянь Гельмгольца (4.9),(4.10). Ці векторні рівняння еквівалентні системі шести скалярних рівнянь, вирішення яких максимально спрощується для плоскої однорідної хвилі. В цьому випадку шукані комплексні амплітуди

$\vec{E}$  або  $\vec{H}$  будуть функціями лише однієї координати  $z$  і тоді хвилеві рівняння для окремих складових набудуть вигляду:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0, \quad (4.14)$$

Загальне вирішення таких диференціальних рівнянь для обох складових є сумою двох експоненціальних доданків:

$$\dot{E}_x = E_{mx}^+ e^{-jkz} + E_{mx}^- e^{+jkz}, \quad (4.15)$$

$$\dot{E}_y = E_{my}^+ e^{-jkz} + E_{my}^- e^{+jkz}, \quad (4.16)$$

де  $E_{mx}^+$ ,  $E_{mx}^-$ ,  $E_{my}^+$ ,  $E_{my}^-$  – амплітуди, які визначаються потужністю джерела.

Функція  $e^{\pm jkz}$  – називається хвильовим множником, а також оператором рухомої хвилі (хвилі, що біжить; біжної хвилі, рухома хвиля), або фазовим множником. Перший доданок в (4.15), (4.16) описує хвилю, яка поширюється з певною швидкістю в додатньому напрямку вісі  $z$  (пряма хвиля), а другий член описує хвилю, яка поширюється в від'ємному напрямку вісі  $z$  (зворотня хвиля). Дійсно, для миттєвого значення першого доданку в (4.15) маємо:

$$E_x(z, t) = \text{Re} \left( E_{mx}^+ e^{-jkz} e^{j\omega t} \right) = E_{mx}^+ \cos(\omega t - kz). \quad (4.17)$$

Поверхня, яка задовольняє умові незмінного значення фази

$$\omega t - kz = \text{const}, \quad (4.18)$$

являє собою фронт хвилі. Ця поверхня задовільняє рівнянню  $z = const$ . Швидкість переміщення фронту хвилі зветься фазовою швидкістю:

$$v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t - const}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = f \cdot \lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (4.19)$$

Оскільки час змінюється завжди лише в одному напрямі, рівняння (4.18) виконуватиметься, якщо координата  $z$  зростає, що і відповідає переміщенню фронту хвилі в додатньому напрямку вісі  $z$ . Аналогічно, для миттєвого значення другого доданку в (4.15) - зворотньої хвилі:

$$E_x(z, t) = \text{Re} \left( E_{mx}^- e^{jkz} e^{j\omega t} \right) = E_{mx}^- \cos(\omega t + kz) \quad (4.20)$$

Рівняння незмінного значення фази для цієї хвилі

$$\omega t + kz = const \quad (4.21)$$

виконуватиметься для від'ємних значень  $z$ , що відповідає хвилі, яка поширюється в від'ємному напрямку вісі  $z$ .

Вище було прийнято, що єдине джерело розташовано з боку від'ємних значень координати  $z$ , тому в безмежному середовищі має право на існування лише хвиля, яка біжить в додатньому напрямку вісі  $z$  (нагадаємо, що з правої сторони джерело поля відсутнє). З цього розгляду витікає, що  $E_{mx}^- = 0$ . Аналогічні викладення для складової поля  $E_y(z, t)$  дають  $E_{my}^- = 0$ .

Таким чином, вирішення однорідних рівнянь Гельмгольца (4.9), (4.10) визначає електричне поле плоскої однорідної хвилі, яка поширюється вздовж додатного напрямку вісі  $z$ :

$$\dot{E}_x = E_{mx}^+ e^{-jkz}, \quad \dot{E}_y = E_{my}^+ e^{-jkz}, \quad \dot{E}_z = 0. \quad (4.22)$$

Комплексні амплітуди вектору напруженості магнітного поля  $\dot{\vec{H}}$  можуть бути знайдені з рівняння Максвелла  $\text{rot}\dot{\vec{E}} = -\mu_a \frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial t}$  :

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_y, \quad (4.23)$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -\frac{k}{\omega\mu_a} \dot{E}_x. \quad (4.24)$$

Відмітимо важливий висновок, який витікає з (4.23), (4.24): значення комплексних амплітуд векторів поля  $\dot{\vec{E}}$  і  $\dot{\vec{H}}$  в будь-якій точці простору зв'язано коефіцієнтом пропорційності, який має розмірність Ом. Цей коефіцієнт отримав назву “характеристичний опір хвилі  $Z_c$  в середовищі ” (літера “с” від англійського слова characteristic).

$$\dot{E}_x = Z_c \dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -Z_c \dot{H}_x. \quad (4.25)$$

За загальноприйнятим визначенням, характеристичний опір хвилі в середовищі – це величина, яка визначається відношенням поперечних до напрямку поширення хвилі складових комплексних амплітуд векторів поля рухомої хвилі (хвилі, що біжить; біжної хвилі ). Таким чином,

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\omega\mu_a}{k} = \frac{\omega\mu_a}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 120 \cdot \pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad (4.26)$$

В результаті, шукане вирішення для однорідної плоскої хвилі, яка поширюється вздовж вісі  $z$  в ідеальному діелектричному середовищі набуває вигляду:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-jkz} + \bar{y}_0 E_{my}^+ e^{-jkz}, \quad (4.27)$$

$$\dot{\vec{H}} = -\bar{x}_0 \frac{E_{my}^+}{Z_c} e^{-jkz} + \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{Z_c} e^{-jkz}, \quad (4.28)$$

Нижче, як приклади, розглянуто характеристики плоских однорідних електромагнітних хвиль в деяких середовищах.

1. Вакуум. Ідеалізоване середовище з параметрами  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ .

Коефіцієнт фази плоскої хвилі у вакуумі:  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

Звідси фазова швидкість буде:

$$V_\phi \equiv C_0 = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Наголосимо, що фазова швидкість плоскої однорідної хвилі у вакуумі дорівнює *швидкості світла у вакуумі і не залежить від частоти*.

Довжина хвилі в вакуумі:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = \frac{C_0}{f}.$$

Характеристичний опір плоскої однорідної хвилі у вакуумі:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}.$$

Величина  $Z_0$  дійсна, тобто в будь-якій точці  $z$  простору вектори поля  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$  синфазні. Як вже наголошувалося, атмосферне повітря за нормальних умов близьке за своїми властивостями до вакууму, тому в більшості випадків для дослідження властивостей електромагнітних хвиль в повітрі можна користуватися співвідношеннями, отриманими для вакууму.

2. Діелектричне немагнітне середовище без втрат з параметрами  $\varepsilon_r > 1, \mu_r = 1, \sigma = 0$ . Фазова швидкість плоских однорідних хвиль в такому середовищі буде:

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Таким чином, фазова швидкість та довжина хвилі в діелектрику  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$  зменшуються в  $\sqrt{\varepsilon_r}$  раз в порівнянні з

аналогічними величинами у вакуумі. Характеристичний опір діелектричного середовища також зменшується:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 120\pi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

3. Магнітодіелектричне середовище без втрат з параметрами  $\varepsilon_r > 1, \mu_r > 1, \sigma = 0$ . Фазова швидкість, довжина хвилі і її характеристичний опір в такому середовищі обчислюються за формулами:

$$V_{\phi} = \frac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad Z_c = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}.$$

### 4.3 Плоскі електромагнітні хвилі у однорідному ізотропному середовищі з ненульовою провідністю

При поширенні в реальних середовищах електромагнітні хвилі зазнають загасання, бо відбуваються втрати енергії, яку переносять ці хвилі. Основні втрати в середовищі зв'язано з провідністю, відмінною від нуля. Електромагнітна хвиля викликає в такому середовищі струми провідності з густиною  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , на створення та існування яких витрачається частина енергії хвилі, внаслідок чого виділяється тепло (закон Джоуля, джоулеві втрати).

У однорідному ізотропному середовищі з *комплексною* діелектричною проникністю

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_a (1 - jtg \delta) \quad (4.29)$$

та *дійсною* магнітною проникністю  $\mu_a$  хвильове число стає комплексною величиною:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a (1 - jtg \delta)} = \beta + j\alpha. \quad (4.30)$$

У виразі (4.30) через  $\beta$  позначено реальну частину комплексного хвильового числа, через  $\alpha$  – уявну частину. Незавжно з (4.30) отримати формули для величин  $\beta$  та  $\alpha$  в наступному вигляді:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + tg^2 \delta} \right)}. \quad (4.31)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} - 1 \right)}. \quad (4.32)$$

З урахуванням того, що хвиля затухає в процесі її руху в додатньому напрямі вісі  $z$ , комплексне хвильове число треба записувати у вигляді:

$$\dot{k} = \beta - j\alpha. \quad (4.33)$$

Комплексна діелектрична проникність (4.29) входить також у вираз для характеристичного опору хвилі в середовищі. Цей параметр також стає комплексною величиною:

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a(1 - jtg\delta)}} = |\dot{Z}_c| e^{j\varphi_c}, \quad (4.34)$$

$$\text{де} \quad |\dot{Z}_c| = \sqrt{\frac{\mu_a \cos \delta}{\varepsilon_a}}, \quad \varphi_c = \frac{1}{2} \delta.$$

В результаті вирази для векторів поля плоскої однорідної хвилі, яка поширюється вздовж додатного напрямку вісі  $z$  в середовищі з ненульовою провідністю набувають вигляду:

$$\dot{\vec{E}} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \bar{y}_0 E_{my}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \quad (4.35)$$

$$\dot{\vec{H}} = -\bar{x}_0 \frac{E_{my}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c} + \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\varphi_c}. \quad (4.36)$$

Для прикладу розглянемо плоску хвилю в середовищі з втратами, коли вектор  $\dot{\vec{E}}$  має одну складову, наприклад,  $\dot{E}_x$ , а тоді вектор  $\dot{\vec{H}}$  буде мати складову  $\dot{H}_y$ . Миттєві значення цих складових:

$$\vec{E} = \bar{x}_0 E_{mx}^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z), \quad (4.37)$$

$$\vec{H} = \bar{y}_0 \frac{E_{mx}^+}{|\dot{Z}_c|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right). \quad (4.38)$$

*Проаналізуємо отримані вирази.* Амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  експоненціально зменшуються вздовж вісі  $z$ , вектор  $\vec{H}$  запізнюється за фазою відносно вектора  $\vec{E}$  на величину  $\varphi_c = \delta/2$ .

На рис. 4.2 наведено залежності миттєвих значень векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  від часу  $t$  в деякій фіксованій точці простору  $z = z_0$ .

Залежність миттєвих значень векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від координати  $z$  в деякій момент часу  $t = t_0$  наведено на рис. 4.3.

Фазова швидкість плоскої хвилі визначається за загальною формулою, як відношення частоти до дійсної частини комплексного хвильового числа (4.33) - коефіцієнту фази:

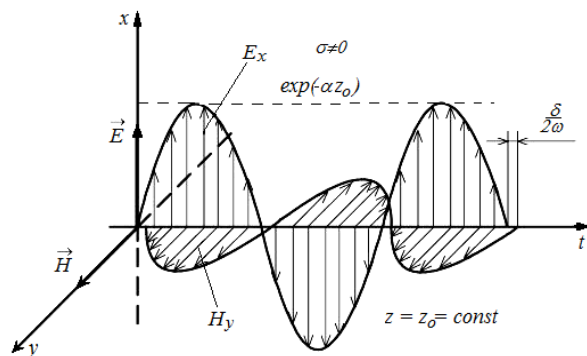


Рисунок 4.2 – Залежність поля плоскої хвилі від часу

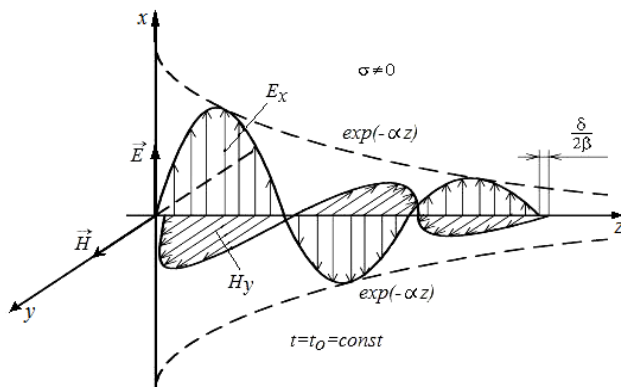


Рисунок 4.3 – Зміна поля плоскої хвилі в просторі

$$V_{\Phi} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}}. \quad (4.39)$$

Як бачимо з цього виразу, фазова швидкість плоскої хвилі в середовищі з втратами, по-перше, менше, ніж фазова швидкість плоскої хвилі в середовищі без втрат ( $\sigma = 0$ ) з тими ж параметрами  $\varepsilon_a$  та  $\mu_a$ , а, по-друге, фазова швидкість залежить від частоти, (оскільки  $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}$ ), причому із збільшенням частоти вона зростає і прагне до фазової швидкості в середовищі без втрат. Крім того, величина  $V_{\Phi}$  залежить від значення провідності середовища: при однаковій частоті вона буде менша в середовищі з більшою провідністю.

Довжина хвилі в середовищі з втратами:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\operatorname{Re} k} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}} = \frac{V_{\Phi}}{f}. \quad (4.40)$$

Таким чином, довжина хвилі при фіксованій частоті зменшується із збільшенням провідності  $\sigma$ .

Коефіцієнт загасання (стала загасання)  $\alpha$  (4.36) – це дійсна величина, яка, подібно до коефіцієнту фази, має розмірність 1/м. Величина  $e^{-\alpha \cdot z}$  показує, в скільки разів зменшуються амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  по проходженню відстані в  $z$ (м). Відстань, по проходженню якої електромагнітна хвиля слабшає в  $e = 2.718$  разів, називається глибиною проникнення хвилі в середовище і визначається як  $\Delta = \frac{1}{\alpha}$ .

Основна відмінність параметрів плоскої хвилі, яка поширюється в середовищі з кінцевою провідністю (тобто в

середовищі з  $\sigma \neq 0$ ) полягає в тому, що в середовищі без втрат параметри хвилі однакові при будь-яких частотах, а в середовищі з провідністю вони залежать від частоти. Явище залежності параметрів хвилі ( $V_\phi$ ,  $Z_c$  і ін.) від частоти називається дисперсією.

Для тих діелектриків з малими втратами  $tg \delta \ll 1$ , які широко використовуються в апаратурі радіоелектроніки і зв'язку (звичайно це немагнітні діелектрики з  $\mu_r = 1$ ), величину  $\sqrt{1 - jtg \delta}$  можна розкласти в ряд Тейлора, зберігши два перших члена:  $\sqrt{1 - jtg \delta} \approx 1 - j \frac{1}{2} tg \delta$ .

З використанням цього наближення з раніше отриманих формул одержимо наближені вирази для коефіцієнту фази та коефіцієнту загасання:

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{C_0} \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_r}, \quad (4.41)$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} = \frac{\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_r} tg \delta = \frac{1}{2} \beta \cdot tg \delta. \quad (4.42)$$

Наближений вираз для характеристичного опору середовища отримає вигляд:

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a (1 - jtg \delta)}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \sqrt{1 - jtg \delta}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \left( 1 + j \frac{1}{2} tg \delta \right). \quad (4.43)$$

Комплексний характер  $\dot{Z}_c$  вказує на незначну за величиною несинфазність векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , якою на практиці можна знехтувати.

Довжина хвилі обчислюється за звичайною формулою:  $\lambda = 2\pi/\beta$ .

$V_\phi$  розраховується, як в середовищі з  $\sigma = 0$ :  $V_\phi = 1/\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ .

З отриманих результатів витікає, що параметри  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $V_{\phi}$ ,  $Z_c$  хвилі яка поширюється в реальному діелектрику з малими втратами в першому наближенні збігаються з параметрами хвилі в середовищі без втрат, а коефіцієнт згасання  $\alpha$  є малою величиною і не залежить від частоти. Дисперсійні властивості при цьому проявляються незначно і ними можна знехтувати.

#### 4.4 Плоскі однорідні хвилі в добре провідних середовищах

В добре провідних середовищах (наприклад, в немагнітних металах)  $tg \delta \gg 1$ , відносна магнітна проникність  $\mu_r = 1$  ( $\mu_a = \mu_0$ ). При  $tg \delta \gg 1$  в загальних виразах для коефіцієнту фази  $\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} + 1 \right)}$  та коефіцієнту згасання  $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + tg^2 \delta} - 1 \right)}$  можна знехтувати одиницею в порівнянні з  $tg \delta$ . В результаті отримаємо:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}, \quad (4.44)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}. \quad (4.45)$$

Особливо відмітимо, що сталі фази  $\beta$  та згасання  $\alpha$  поперше, однакові, а по-друге, нелінійно залежать від частоти, отже, властивості хвилі на різних частотах істотно розрізнятимуться. Формули для фазової швидкості, довжини хвилі і характеристичного опору в таких середовищах набувають вигляду:

$$V_{\Phi} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0\sigma}}, \quad (4.46)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu_0\sigma f}}, \quad (4.47)$$

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{\sigma}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}. \quad (4.48)$$

Наприклад, параметри плоских хвиль, які поширюються у вакуумі та міді ( $\sigma = 5,75 \cdot 10^7$  См/м) на частоті 1 МГц будуть складати:

в вакуумі:

$$V_{\Phi} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\lambda_0 = 300 \text{ м}$$

$$Z_0 = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$$

в металі (мідь):

$$V_{\Phi} = 421 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 4,21 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$|\dot{Z}_c| \approx 3,74 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт згасання хвилі, яка поширюється в міді при частоті 1 МГц дорівнює  $\alpha = 14935$  1/м. *Це дуже велике згасання.* Глибина проникнення хвилі в мідь на цій частоті складає всього 77 мкм. Наведені приклади показують, що електромагнітна хвиля на частотах радіодіапазону практично не проникає углиб провідника. З цієї причини струм провідності  $\vec{J}$  в (3.57) *можна вважати поверхневим і його позначено, як  $\vec{J}_S$ .* Ці властивості використовують для екранування блоків РЕА від впливу зовнішніх полів на частотах радіодіапазону.

#### 4.5 Поляризація електромагнітних хвиль

Поляризація – це орієнтаційна характеристика електромагнітної хвилі. Поляризацією електромагнітної хвилі називають *зміни величини і орієнтації векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  у фіксованій точці простору протягом періоду коливання хвилі.*

Хвиля, у якої в фіксованій точці простору у будь-який момент часу величина і орієнтація векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  є детермінованою (точно визначена), називається *поляризованою*. Поляризація хвилі – орієнтаційна характеристика. Існують і неполяризовані хвилі.

У плоскій однорідній хвилі вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  взаємозв'язано, характер їх поведінки в просторі однаковий, тому зазвичай обмежуються розглядом поведінки лише вектору  $\vec{E}$ . Площину, яка проходить через вектор  $\vec{E}$  та орт вісі  $z$  (вектор  $\vec{\Pi}$ ), називають *площиною поляризації* (рис. 4.4).

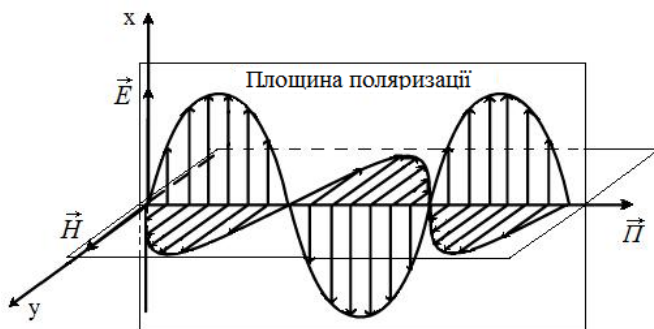


Рисунок 4.4 –Визначення площини поляризації

У загальному випадку вираз для вектору  $\vec{E}$  плоскої поляризованої однорідної хвилі в середовищі без втрат записується у вигляді векторної суми двох складових:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \quad (4.49)$$

Тут  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – початкові фази складових  $E_x$  і  $E_y$  в точці  $z = 0$  при  $t = 0$ .

Орієнтація сумарного вектора  $\vec{E}$  визначається кутом  $\theta$  (рис. 4.5). Кут  $\theta$  відраховується за годинниковою стрілкою від

вісі  $x$ , якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі (вісь  $z$ ) і визначається співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}. \quad (4.50)$$

Характер зміни орієнтації і величини вектора  $\vec{E}$  з часом у фіксованій точці простору залежить від різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  і від співвідношення амплітуд  $E_{mx}$  та  $E_{my}$ . У загальному випадку кут  $\theta$  може змінюватися за зміною часу.

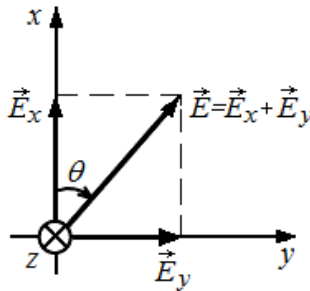


Рисунок 4.5 – Миттєве положення вектору  $\vec{E}$

Кінець вектору  $\vec{E}$  зі зміною часу у фіксованій точці простору описуватиме лінію, яка зветься *годографом*. За формою годографу виділяють два види поляризації: лінійну і обертову. В свою чергу обертові підрозділяють на кругову та еліптичну.

#### 4.5.1 Лінійна поляризація

Тут складові  $E_x$  і  $E_y$  повинні бути або синфазними або протифазними

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.51)$$

Хай спочатку для простоти  $n = 0$ , тобто початкові фази  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  однакові. Вважаючи у формулі (4.50)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , отримаємо стале у часі значення кута орієнтації:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi)}{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi)} = \frac{E_{my}}{E_{mx}} = \operatorname{const}. \quad (4.52)$$

В цьому випадку у фіксованій точці простору вектор  $\vec{E}$ , не змінюючи орієнтації ( $\theta = \operatorname{const}$ ), змінюється в часі лише за довжиною (модулем):

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (4.53)$$

При цьому, якщо значення  $n$  брати, як в (4.51), кінець вектора  $\vec{E}$  зі зміною часової або просторової координати буде переміщуватися вздовж прямої лінії, що складає з віссю  $x$  сталий у часі та просторі кут  $\theta$ :

$$\theta = (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{E_{my}}{E_{mx}}. \quad (4.54)$$

При парних значеннях числа  $n$  ( $E_x$  і  $E_y$  синфазні) кут  $\theta$  – величина додатня; при непарних  $n$  ( $E_x$  і  $E_y$  протифазні) кут  $\theta$  – величина від’ємна. Таким чином, хвиля (4.49), при виконанні умови (4.51), має лінійну поляризацію. Якщо за поверхню Землі прийняти площину  $yOz$  (рис. 4.4), то при  $\theta = 0$  буде вертикальна лінійна поляризація, при  $\theta = \pi/2$  – горизонтальна лінійна поляризація, а при  $0 < \theta < \pi/2$  – похила лінійна поляризація.

### 4.5.2 Кругова поляризація

Тут амплітуди складових  $E_x$  і  $E_y$  однакові, а фази відрізняються на  $\pm\pi/2$ :

$$E_{mx} = E_{my} = E_0, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}. \quad (4.55)$$

Підстановка цих значень в (4.50) дає:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2})}{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_1)} = \frac{\mp \sin(\omega t - kz + \varphi_1)}{\cos(\omega t - kz + \varphi_1)} = \mp \operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi_1)$$

Звідси витікає:

$$\theta = \mp(\omega t - kz + \varphi_1). \quad (4.56)$$

Особливо наголосимо, що при цьому величина вектору  $\vec{E}$  при зміні часової та просторової координати залишається незмінною:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0. \quad (4.57)$$

З (4.56) витікає, що у фіксованій точці простору вектор  $\vec{E}$ , залишаючись незмінним за величиною, обертається з кутовою частотою  $\omega$  довкола напрямку поширення. Кількість обертів вектору  $\vec{E}$  за секунду дорівнює частоті коливань. Залежно від напрямку обертання вектору  $\vec{E}$  розрізняють хвилі з правою і лівою поляризаціями (рис. 4.6).

Хвиля має *праву кругову* поляризацію, коли вектор  $\vec{E}$  обертається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі ( $\theta > 0$ ). Хвиля має *ліву кругову*

поляризацію, коли вектор  $\vec{E}$  обертається проти годинникової стрілки, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі ( $\theta > 0$ ).

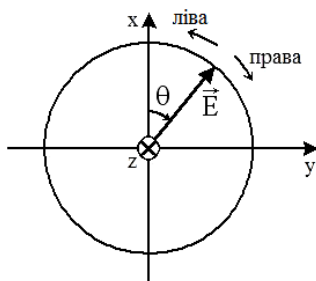


Рисунок 4.6 – Годограф вектору  $\vec{E}$  при круговій поляризації

Відзначимо, що напрям обертання визначається знаком фазового зсуву між складовими в (4.55). На рис. 4.7 показано зміну орієнтації вектору  $\vec{E}$  в просторі у фіксований момент часу для плоскої хвилі з правою круговою поляризацією, яка поширюється уздовж вісі  $z$ , в середовищі без втрат.

Лінія, що з'єднує кінці векторів, є правогвинтовою спіраллю з кроком, який дорівнює довжині хвилі. Її проекція на площину  $xOy$  утворює коло з обертанням вектора  $\vec{E}$  за годинниковою стрілкою, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі. Для хвилі з лівою круговою поляризацією її проекція на площину  $xOy$  утворює коло з обертанням вектора  $\vec{E}$  проти годинникової стрілкою, якщо дивитися уздовж напрямку поширення хвилі.

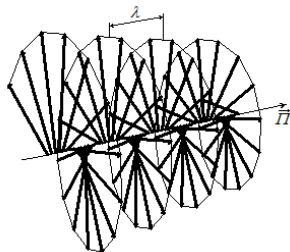


Рисунок 4.7 – Зміна орієнтації вектору  $\vec{E}$  в просторі при правій круговій поляризації

#### 4.5.3 Еліптична поляризація

Тут складові поля  $E_x$  і  $E_y$  можуть мати довільні співвідношення амплітуд і фаз. При цьому сумарний вектор  $\vec{E}$  у фіксованій точці простору з часом змінюється за величиною і обертається довкола напрямку поширення хвилі, його кінець описує еліпс (рис. 4.8).

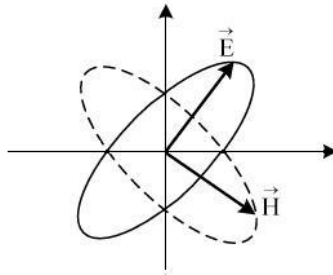


Рисунок 4.8 – Годографи векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  при еліптичній поляризації

Хвилі такого типу прийнято називати *еліптично поляризованими*. Якщо обертання вектору  $\vec{E}$  відбувається за годинниковою стрілкою, то хвиля має праву еліптичну поляризацію, якщо обертання проти годинникової стрілки – це хвиля лівої еліптичної поляризації. Міру еліптичності хвилі оцінюють по коефіцієнту еліптичності, який дорівнює відношенню довжини малої вісі еліпса до довжини великої. Орієнтація еліпса задається кутом між великою віссю еліпса і віссю  $x$  (або віссю  $y$ ).

Слід зазначити, що поняття еліптичної, кругової і лінійної поляризації застосовне не лише для плоских однорідних хвиль, але і інших типів хвиль.

#### 4.5.4 Розкладання лінійно поляризованої хвилі в круговому базисі

Розглянемо дві хвилі ( $\dot{\vec{E}}_1$  та  $\dot{\vec{E}}_2$ ) кругової поляризації з однаковими комплексними амплітудами:

лівої кругової

$$\dot{\vec{E}}_1 = (\vec{x}_0 + j \cdot \vec{y}_0) \cdot \dot{E}_x, \quad (4.58)$$

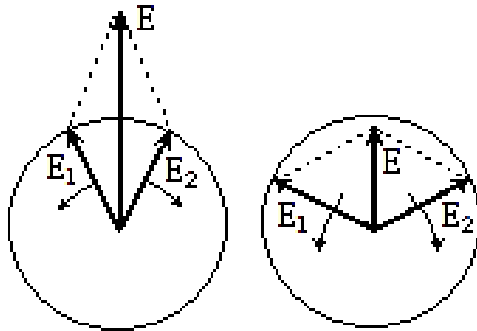
правої кругової

$$\dot{\vec{E}}_2 = (\vec{x}_0 - j \cdot \vec{y}_0) \cdot \dot{E}_x. \quad (4.59)$$

Якщо скласти (4.58) та (4.59), або, другими словами, скласти поля двох кругових поляризацій з протилежними напрямками обертання площин поляризації, то отримаємо

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 = \vec{x}_0 2 \cdot \dot{E}_x. \quad (4.60)$$

Вираз (4.60) відповідає запису комплексної амплітуди вектору електричного поля хвилі з лінійною поляризацією. З цього розгляду витікає, що лінійно поляризовану хвилю завжди може бути представлено у вигляді суми двох хвиль, поляризованих по кругу в протилежних напрямках. Це розкладання пояснюється на рис.4.9.



### Контрольні запитання

1. Як перейти від рівнянь Максвелла до однорідних хвильових рівнянь відносно векторів  $\vec{H}$  та  $\vec{E}$  електромагнітного поля? Яка фізична сутність параметру  $\varepsilon_a \mu_a = \frac{1}{V^2}$  в хвильових рівняннях?
2. Як вводиться, яка розмірність та фізична сутність параметру  $k$  в рівняннях Гельмгольца? Як змінюється цей параметр в середовищі з втратами?
3. Як вводиться поняття фронту хвилі? Що таке фазовий та амплітудний фронти хвилі? Що таке плоска хвиля та однорідна плоска хвиля? Що таке локально плоска хвиля?
4. Яка фізична сутність обох доданків в загальному вирішенні хвильового рівняння? Які фізичні процеси можуть зумовити появу зворотної хвилі?
5. Що таке фазова швидкість хвилі? Як вона визначається та від яких параметрів середовища залежить?
6. Як визначаються комплексні амплітуди  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$ ? Який зв'язок між ними? Як вводиться поняття характеристичного опору та якими параметрами середовища він визначається?
7. Які параметри хвилі у вакуумі, діелектрику та магнітодіелектрику без втрат? Про що свідчить порівняльний аналіз поведінки хвиль в цих середовищах?
8. Як впливають втрати в середовищі на параметри поширення хвиль в них? Які особливості визначення параметрів  $\beta$  та  $\alpha$  в середовищі з втратами?
9. Яка фізична сутність сталої втрат та комплексного характеристичного опору в середовищі з втратами? Від чого

залежить фазовий зсув між  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  при поширенні хвилі в середовищі з втратами?

10. Як знайти параметри  $\beta$  та  $\alpha$  в добре провідному середовищі (в металі)? Які їх особливості? Про що свідчить порівняльний аналіз параметрів хвиль в металі та в діелектрику?

11. Що таке поверхневий струм та глибина занурення хвилі в метал?

12. Як вводиться поняття поляризації плоскої хвилі? Що таке вертикальна, горизонтальна та похила лінійні поляризації?

13. Що таке обертова (зокрема, кругова, еліптична) поляризація хвилі?

14. Як здійснюється розкладання лінійно поляризованої хвилі в круговому базисі?

### Приклади вирішення задач

**Задача 4.1.** Плоска хвиля поширюється в повітрі. Амплітудне значення її вектору  $\vec{E}$  дорівнює 1 В/м. Знайти амплітудне значення вектору  $\vec{H}$  та середнє значення вектору Пойнтінга.

#### Вирішення

1. За виразом (4.26) для амплітуди вектору  $\vec{H}$  маємо  $H = E/Z_0 = 1/(120 \cdot \pi) = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$ .
2. За виразом (3.39) для середнього значення вектору Пойнтінга будемо мати

$$P_{\text{ср}} = E_{\text{д}} \cdot H_{\text{д}} = 1/2 \cdot (E \cdot H) = 1/2 \cdot (1 \cdot 2.65 \cdot 10^{-3}) = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2.$$

**Задача 4.2.** Напруженість електричного поля плоскої хвилі, яка в повітрі поширюється вздовж вісі  $z$  при  $z = 0$  є  $E_x(t) = 0,2 \cdot \cos(\omega t + \pi/3)$ . Тут  $\omega = 10^6$  рад/с. Записати вираз для миттєвого значення напруженості електричного поля на відстані  $l = 100$  м.

#### Вирішення

1. Питома провідність повітря  $\sigma = 0$ , а тому і  $\operatorname{tg}\delta = 0$ , значить при поширенні хвиля не змінюється за амплітудою, а буде набувати лише фазового зсуву  $\Delta\varphi$ .

2. Знайдемо фазовий зсув, який хвиля набуває при поширенні на відстань  $l=100\text{м}$ .

$$\Delta\varphi = \beta \cdot l = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot l = 10^6 \sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 100 = \frac{1}{3}, \text{ рад} .$$

3. Запишемо вираз для напруженості електричного поля на відстані  $l = 100 \text{ м}$ , де воно набуло фазового зсуву  $\Delta\varphi = \beta l$ .

$$E_x(z, t) = 0.2 \cos(\omega t - \beta \cdot l + \frac{\pi}{3}) = 0.2 \cos(10^6 t - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3})$$

**Задача 4.3.** Біля поверхні сухого ґрунту ( $\varepsilon_r = 4$ ,  $\sigma = 10^{-3} \text{ Сл/м}$ ) хвиля має амплітуду напруженості електричного поля  $E = 100 \text{ мкВ/м}$ .

Знайти величину  $E$  на глибині  $h = 100\text{м}$  для двох частот  $f_1 = 100\text{КГц}$ ,  $f_2 = 10 \text{ МГц}$ .

### Вирішення

1. За виразом (3.31) знайдемо величину  $\operatorname{tg}\delta$  для сухого ґрунту на заданих частотах.

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\sigma}{2\pi \cdot f_1 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 45 ,$$

$$\operatorname{tg}\delta_2 = \frac{\sigma}{2\pi \cdot f_2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{10^{-3}}{2\pi \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} = 0.45$$

2. Знайдемо коефіцієнт втрат (сталу втрат)  $\alpha_1$  на частоті  $f_1$ . Тут величина  $\operatorname{tg}\delta_1 = 45 \gg 1$ , а тому треба застосовувати вираз (4.45).

$$\alpha_1 = \sqrt{\pi \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot f_1} = \sqrt{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ 1/м}$$

3. Знайдемо сталу втрат  $\alpha_2$  на частоті  $f_2$ . Тут  $\text{tg } \delta_2 = 0.45 \approx 1$ , а тому треба застосовувати вираз (4.32).

$$\alpha_2 = 2\pi \cdot f_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} \left( \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta_2} - 1 \right)} = 2\pi \cdot 10^7 \sqrt{\frac{4\varepsilon_0 \mu_0}{2} \left( \sqrt{1 + 0.45^2} - 1 \right)} = 0.092 \text{ 1/м}.$$

4. Знайдемо величину  $E_1$  на глибині  $h = 100$  м для частоти  $f_1$ .

$$E_1 = E \cdot e^{-\alpha_1 h} = 100 \cdot e^{-0.02 \cdot 100} = 13.53 \text{ мкВ/м}.$$

5. Знайдемо величину  $E_2$  для частоти  $f_2$ .

$$E_2 = E \cdot e^{-\alpha_2 h} = 100 \cdot e^{-0.092 \cdot 100} = 0.01 \text{ мкВ/м}.$$

#### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 4.4.** Титанат барію (кераміка) має параметри  $\varepsilon_r = 144$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\text{tg } \delta = 0.6$ . Визначити параметри плоскої хвилі  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $Z_c$ ,  $V_\phi$ . Виконати порівняльний аналіз з аналогічними параметрами в повітрі.  $f = 1$  ГГц.

**Задача 4.5.** Плоска хвиля в повітрі має  $\lambda = 10$  м. Якими будуть  $\lambda$ ,  $V_\phi$  та  $\alpha$  в морській воді з  $\varepsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 3$  См/м? Як зміняться ці параметри, якщо  $\lambda = 10$  см? Проаналізувати отримані результати.

**Задача 4.6.** Визначити комплексну амплітуду вектору  $\vec{E}$  в алюмінії на частоті  $f_1 = 1$  кГц, якщо в заданій точці простору амплітуда вектору  $\vec{H}$  дорівнює 1 А/м. Якою буде глибина занурення поля в цей метал? Як зміняться результати на частоті  $f_2 = 100$  МГц? Як зміняться результати на обох частотах, якщо замість алюмінію буде срібло? Виконати порівняльний аналіз за частотою та за типами середовищ.

## 5 ВІДБИТТЯ І ЗАЛОМЛЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖІ РОЗДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

Хай на плоску межу розділу середовищ, які мають різні параметри ( $\sigma, \mu_a, \varepsilon_a$ ), падає плоска однорідна хвиля. Потрапляючи на межу розділу, електромагнітна хвиля частково (або повністю) відбивається і частково (або повністю) проходить в друге середовище, тобто виникають явища відбиття і заломлення хвилі. Площина, яка проходить через нормаль до поверхні розділу двох середовищ і напрям поширення падаючої хвилі, називається *площиною падіння*. Вектор напруженості електричного поля плоскої хвилі завжди є перпендикулярним до напрямку її поширення, а по відношенню до площини падіння його може бути орієнтовано довільно. Якщо вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний площині падіння, то така хвиля називається *нормально поляризованою*. Для позначень застосовують індекс  $\perp$ . Якщо вектор  $\vec{E}$  паралельний площині падіння (лежить в цій площині) – хвиля називається *паралельно поляризованою*. Для позначень застосовують індекс  $\parallel$ . Очевидно, що хвилю з будь-якою іншою орієнтацією вектору  $\vec{E}$ , а також хвилі, які мають кругову або еліптичну поляризацію, можна представити у вигляді суперпозиції двох хвиль, одна з яких є нормально поляризованою, а друга – паралельно поляризованою.

### 5.1 Падіння нормально поляризованої плоскої хвилі на межу розділу двох середовищ

Плоска електромагнітна хвиля нормальної лінійної поляризації, поширюючись в першому середовищі, падає на плоску межу розділу двох однорідних ізотропних середовищ, які характеризуються параметрами  $\varepsilon_{a1}, \mu_{a1}, \sigma_1 = 0, \varepsilon_{a2}, \mu_{a2}, \sigma_2 = 0$ . Геометрію задачі і орієнтацію координатних вісей наведено на рис. 5.1. Кут  $\varphi$  між напрямом поширення падаючої хвилі і нормаллю до межі розділу називається *кутом падіння*.

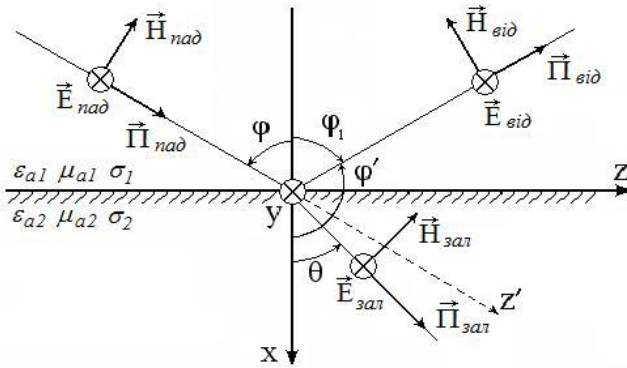


Рисунок 5.1 – Падіння нормально поляризованої плоскої хвилі на межу розділу двох середовищ

Напрямок поширення падаючої хвилі  $z'$  записується в системі координат  $x, y, z$  через напрямні косинуси

$$\cos \varphi_x = \cos \varphi, \quad \cos \varphi_y = 0, \quad \cos \varphi_z = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi$$

в такому вигляді:

$$z' = x \cos \varphi + z \sin \varphi. \quad (5.1)$$

У падаючій хвилі вектор  $\vec{E}$  буде паралельним до вісі  $y$ , вектор  $\vec{H}$  лежить в площині падіння (рис. 5.1). Комплексні амплітуди векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  падаючої хвилі в системі координат  $x, y, z$  набувають вигляду:

$$\dot{\vec{E}}_{\text{пад}} = \vec{y}_0 \dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 z'} = \vec{y}_0 \dot{E}_{\text{пад}} e^{-jk_1 (x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad (5.2)$$

$$\dot{\vec{H}}_{\text{пад}} = -(\vec{x}_0 \sin \varphi - \vec{z}_0 \cos \varphi) \frac{\dot{E}_{\text{пад}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1 (x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \quad (5.3)$$

Оскільки поле падаючої хвилі (5.2), (5.3) не залежить від координати  $y$ , то поля заломленої і відбитої хвиль також не залежать від координати  $y$ . Це означає, що напрями поширення відбитої і заломленої хвиль лежать в площині падіння хвост та визначаються кутом відбиття  $\varphi_1$  і кутом заломлення  $\theta$  відповідно (рис. 5.1). Відбиту і заломлену хвилі, які зумовлено своїм існуванням наявністю падаючої хвилі, будемо визначати аналогічно (5.2), (5.3) у вигляді нормально поляризованих плоских однорідних хвиль.

Вирази для векторів поля відбитої хвилі можуть бути отримані з формул (5.2), (5.3), якщо в останніх замінити  $\dot{E}_{\text{пад}}$  на  $\dot{E}_{\text{від}}$  і кут  $\varphi$  на кут  $\varphi'$ . Кут  $\varphi'$  зв'язано з кутом відбиття  $\varphi_1$  простим співвідношенням  $\varphi' = \pi - \varphi_1$ . При цьому комплексні амплітуди векторів поля відбитої хвилі набувають вигляду:

$$\dot{E}_{\text{від}} = \bar{y}_0 \dot{E}_{\text{від}} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)}, \quad (5.4)$$

$$\dot{H}_{\text{від}} = -(\bar{x}_0 \sin \varphi_1 - \bar{z}_0 \cos \varphi_1) \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1(-x \cos \varphi_1 + z \sin \varphi_1)} \quad (5.5)$$

Поле заломленої хвилі, яка поширюється в другому середовищі, записується також з використанням формул (5.2), (5.3) при наступних замінах:  $\dot{E}_{\text{пад}}$  замінюється на  $\dot{E}_{\text{зал}}$ , кут падіння  $\varphi$  – на кут заломлення  $\theta$ ,  $k_1$  – на  $k_2$ ,  $Z_{c1}$  на  $Z_{c2}$ :

$$\dot{E}_{\text{зал}} = \bar{y}_0 \dot{E}_{\text{зал}} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}, \quad (5.6)$$

$$\dot{H}_{\text{зал}} = -(\bar{x}_0 \sin \theta - \bar{z}_0 \cos \theta) \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{Z_{c2}} e^{-jk_2(x \cos \theta + z \sin \theta)}. \quad (5.7)$$

В (5.2)...(5.7)  $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a1} \mu_{a1}}$ ,  $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{a2} \mu_{a2}}$  – коефіцієнти фази хвиль в першому та другому середовищах;

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}, \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}} \quad - \quad \text{характеристичні опори}$$

першого та другого середовищ.

Тепер задача полягає в тому, аби при заданій падаючій хвилі (5.2), (5.3) обрати такі напрями і комплексні амплітуди відбитої і заломленої хвиль, при яких поля в першому і в другому середовищах задовольняли б обов'язковим граничним умовам, – дотичні (тангенціальні) складові векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  залишаються неперервними (однаковими) на межі розділу, тобто в площині  $x = 0$ , а іменно  $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ ,  $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$ .

Тоді отримаємо:

$$\varphi = \varphi_1, \quad (5.8)$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \theta. \quad (5.9)$$

Рівність (5.8) є *першим законом Снелліуса*. Із співвідношення (5.9) визначається кут заломлення

$$\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi. \quad (5.10)$$

Рівність (5.10) виражає *другий закон Снелліуса*.

Оскільки коефіцієнти фази в обох середовищах обчислюються за однією і тією ж формулою типу  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ , співвідношення (5.10) можна записати так, що в нього увійдуть лише параметри середовищ, а робочу частоту буде вилучено.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{V_{\phi 2}}{V_{\phi 1}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (5.11)$$

де  $V_{\phi 1}, V_{\phi 2}$  – фазові швидкості плоских однорідних хвиль для обох середовищ,  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}$  – показники заломлення першого і другого середовищ.

Слід зазначити, що закони Снелліуса (5.9), (5.10) справедливі при будь-якій орієнтації векторів поля відносно площини падіння. Вони визначають *напрями поширення* відбитої і заломленої хвиль при похилому падінні плоскої однорідної хвилі на межу розділу різних середовищ.

Введемо коефіцієнти відбиття  $\dot{R}_{\perp}$  та проходження (заломлення)  $\dot{T}_{\perp}$  на межі розділу, де  $x=0$ ;

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.12)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.13)$$

Коефіцієнти  $\dot{R}_{\perp}$  і  $\dot{T}_{\perp}$  називають ще коефіцієнтами Френеля для хвиль нормальної поляризації. З застосуванням граничних умов  $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$ ,  $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$  для них неважко отримати вирази:

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \theta}, \quad (5.14)$$

$$\dot{T}_{\perp} = 1 + \dot{R}_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \theta}. \quad (5.15)$$

Формули (5.14), (5.15) справедливі і в тому випадку, якщо одне з середовищ (або обидва середовища) володіють провідністю. При цьому комплексними будуть хвилеві числа при визначенні кута заломлення  $\theta$  і характеристичні опори середовищ у формулах (5.14), (5.15).

На практиці часто доводиться обчислювати коефіцієнти відбиття і заломлення плоских нормально поляризованих хвиль

для випадку, коли першим середовищем служить повітря ( $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 1$ ), а другим середовищем – немагнітний ( $\mu_r = 1$ ) діелектрик без втрат з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon_r$ . При цьому формули (5.14), (5.15) з врахуванням закону Снелліуса (5.10) записуються у вигляді

$$\dot{R}_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}, \quad (5.16)$$

$$\dot{T}_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.17)$$

## 5.2 Падіння паралельно поляризованої плоскої хвилі на плоску межу розділу двох середовищ

Хай плоска однорідна хвиля, яка падає на плоску межу розділу, буде паралельно поляризованою. В цьому випадку вектори напруженості електричного поля  $\dot{\vec{E}}$  падаючої, відбитої і заломленої хвиль лежать в площині падіння  $xoz$ , а вектори напруженості магнітного поля  $\dot{\vec{H}}$  цих трьох хвиль перпендикулярні площині падіння. Геометрія цієї задачі збігається з геометрією задачі падіння плоскої нормально поляризованої хвилі (рис.5.1), якщо в останній замінити  $\dot{\vec{E}}$  на  $\dot{\vec{H}}$ , а  $\dot{\vec{H}}$  замінити на мінус  $\dot{\vec{E}}$ . Враховуючи зміну орієнтації векторів поля по аналогії з формулами (5.2)÷(5.7), можна записати поля падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Напрями поширення цих хвиль залишаються тими ж і підпорядковані тим же законам Снелліуса (5.8), (5.10). Комплексні амплітуди векторів поля відбитої і заломленої хвиль визначаються з граничних умов, але їх запис в даній задачі відрізнятиметься від випадку нормальної поляризації. Дотичними до межі розділу складовими векторів  $\dot{\vec{E}}$  трьох хвиль будуть тепер  $z$ -ві складові, а векторів  $\dot{\vec{H}}$  –  $y$ -ві складові.

Аналогічно попередньому випадку, вводяться коефіцієнти відбиття та заломлення для паралельно поляризованих хвиль:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{від}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}, \quad \dot{T}_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\text{зал}}}{\dot{E}_{\text{пад}}}. \quad (5.18)$$

Для них неважко отримати вирази:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta}, \quad (5.19)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta}. \quad (5.20)$$

Якщо першим середовищем є повітря, а другим середовищем – немагнітний діелектрик без втрат з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon_r$ , то формули (5.19), (5.20) спрощуються до вигляду, більш зручного для розрахунків. Ці формули в подальшому і застосовуються для дослідження різних практичних ситуацій:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\varepsilon_r \cos \varphi - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}{\varepsilon_r \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}, \quad (5.21)$$

$$\dot{T}_{\parallel} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r} \cos \varphi}{\varepsilon_r \cos \varphi + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \varphi}}. \quad (5.22)$$

Слід зазначити, що формули (5.19)...(5.22) справедливі і в тому випадку, якщо одне з середовищ (або обидва середовища) мають провідність. При цьому діелектричні проникності середовищ будуть комплексними величинами, отже відповідно

комплексними будуть і хвилеві числа в і характеристичні опори середовищ у (5.19)...(5.22).

### 5.3 Повне проходження хвилі в друге середовище

Розглянемо умови, при яких падаюча хвиля без відбиття повністю переходить в друге середовище. Умови, при яких відсутня відбита хвиля, можуть бути встановлені шляхом вирішення рівнянь  $\dot{R}_{\parallel} = 0$  і  $\dot{R}_{\perp} = 0$  відносно кута падіння  $\varphi$ . У окремому випадку, коли обидва середовища є немагнітними діелектриками без втрат, для паралельно поляризованої хвилі з умови  $\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c1} \cos \varphi - Z_{c2} \cos \theta}{Z_{c1} \cos \varphi + Z_{c2} \cos \theta} = 0$  витікає  $Z_{c1} \cos \varphi = Z_{c2} \cos \theta$ .

Після вилучення з цього рівняння  $\cos \theta$ , з використанням закону Снелліуса (5.10), отримаємо

$$\sin^2 \varphi = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}. \quad (5.23)$$

Таким чином, плоска паралельно поляризована хвиля *цілком проходить в друге середовище* при куті падіння, який зветься кутом Брюстера

$$\varphi_B = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}. \quad (5.24)$$

Відповідний ефект було відкрито Брюстером при дослідженні оптичних явищ.

У загальному випадку, коли  $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$ ,  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ , для паралельно поляризованої хвилі з умови  $\dot{R}_{\parallel} = 0$  витікає

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}} - \frac{\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}}}, \quad (5.25)$$

а для випадку нормальної поляризації при  $\dot{R}_\perp = 0$  отримаємо

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}} - \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}}{\frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} - \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}}. \quad (5.26)$$

Як випливає з (5.26), для існування кута Брюстера при нормальній поляризації необхідно, аби  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ .

Плоскі хвилі кругової і еліптичної поляризації можна представити у вигляді суперпозиції паралельно і нормально поляризованих хвиль. Оскільки умови існування кута Брюстера для паралельної і нормальної поляризації різні, то хвилі з круговою і еліптичною поляризацією будуть відбиватися при будь-яких кутах падіння. Проте при цьому зміниться поляризація відбитої і заломленої хвиль в порівнянні з поляризацією падаючої хвилі. Зокрема, якщо плоска хвиля з круговою поляризацією попаде під кутом Брюстера на межу двох немагнітних діелектриків, то відбита хвиля виявляється нормально поляризованою, а заломлена – еліптично поляризованою. Це явище зветься деполяризацією і воно може відбуватися і при других умовах, які вимагають окремого дослідження.

#### 5.4 Перпендикулярне падіння плоскої електромагнітної хвилі на плоску межу розділу середовищ

При перпендикулярному (нормальному) падінні плоскої хвилі на межу розділу середовищ втрачає визначеність поняття площини падіння, і, отже, зникає різниця між нормально і паралельно поляризованими хвилями. Оскільки кути падіння і

заломлення дорівнюють нулю, то вирази для коефіцієнтів відбиття і заломлення при нормальному падінні набувають вигляду

$$\dot{R} = \dot{R}_{\perp} = -\dot{R}_{\parallel} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (5.27)$$

$$\dot{T} = \dot{T}_{\perp} = -\dot{T}_{\parallel} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (5.28)$$

Коефіцієнти відбиття і заломлення повністю визначаються характеристичними опорами середовищ, які межують одне з одним. Важливий окремий випадок – нормальне падіння хвилі з повітря на немагнітний діелектрик. Формули (5.27), (5.28) спрощуються і набувають

$$\text{вигляду } \dot{R} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}, \quad \dot{T} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}.$$

Слід звернути увагу на те, що при  $\epsilon_r > 1$  коефіцієнт відбиття  $R < 0$ . Це означає, що на межі розділу комплексна амплітуда вектору відбитої хвилі зсунута за фазою на  $180^\circ$  відносно комплексної амплітуди вектору падаючої хвилі.

### 5.5 Проходження електромагнітної хвилі через шар речовини

У загальному випадку, при перпендикулярному падінні електромагнітної хвилі на шар речовини (рис.5.2) з боку першого середовища, амплітуди відбитої та заломленої хвиль визначатимуться не лише першою межею розділу, але також і товщиною шару  $d$  і другою межею розділу середовищ. На рис. 5.2 стрілками позначено напрями руху хвиль відповідного напрямку, а  $E_i$  – амплітуди напруженості електричного поля цих хвиль.

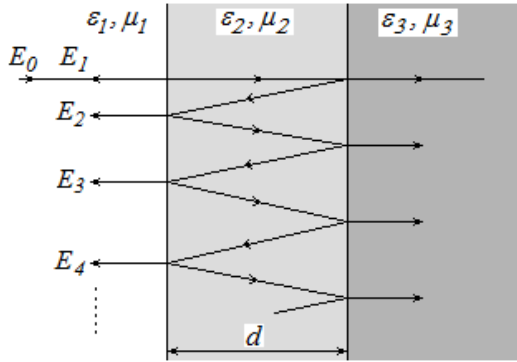


Рисунок 5.2 – Проходження хвилі через шар речовини

Практично важливим є дослідження явища повного проходження хвилі з середовища 1 в середовище 3. Цьому відповідає відсутність хвилі, відбитої від шару в перше середовище ( $E_{\text{від1}} = 0$ ).

Один із способів вирішення цієї задачі полягає в розгляді інтерференційних явищ при багатократному відбитті хвилі від меж розділу.

Використовуючи формули Френеля для перпендикулярного падіння, знаходимо, що амплітуда хвилі, однократно відбитої від першої межі, запишеться у вигляді  $E_1 = R_{12}E_0$ , де  $R_{12} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$  – коефіцієнт відбиття від першої межі. Амплітуда тієї хвилі, яка пройшла усередину шару  $E_{12} = T_{12}E_0$ , де  $T_{12} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$  – коефіцієнт заломлення для першої межі.

Тоді повна амплітуда хвилі, відбитої від плоского шару, дорівнює сумі всіх парціальних амплітуд, що дає:

$$E_{\text{від1}} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k = E_0 \left\{ R_{12} + R_{23} T_{12} T_{21} e^{-2\gamma_2 d} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ R_{23} R_{21} e^{-2\gamma_2 d} \right]^{k-1} \right\}$$

Використання формули для нескінченно спадної геометричної прогресії дає співвідношення

$$E_{\text{від1}} = E_0 \cdot \frac{R_{12} + R_{23} e^{-2\gamma_2 d}}{1 + R_{12} R_{23} e^{-2\gamma_2 d}}. \quad (5.29)$$

З умови  $E_{\text{від1}} = 0$  маємо

$$R_{12} + R_{23} e^{-2\gamma_2 d} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} + \frac{Z_{c3} - Z_{c2}}{Z_{c3} + Z_{c2}} e^{-2\gamma_2 d} = 0. \quad (5.30)$$

За відсутності втрат ( $\alpha = 0$ ), для існування вирішення необхідно, щоб  $2\beta_2 d = \frac{4\pi d}{\lambda_2} = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Звідси отримаємо

$$d = n \frac{\lambda_2}{4}. \quad (5.31)$$

З виразу (5.31) витікає, що при  $n$  – непарному ( $n = 2k + 1$ ), з (5.30) неважко отримати

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c3}}. \quad (5.32)$$

Якщо ж  $n$  – парне число ( $n = 2k$ ), то в цьому випадку з (5.30) випливає, що для існування вирішення необхідно, аби  $Z_{c1} = Z_{c3}$ . При цьому величина  $Z_{c2}$  може бути будь-якою.

Для немагнітних середовищ без втрат ( $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} = 1$ ) вираз (5.32) набуває вигляду

$$\varepsilon_{r2} = \sqrt{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_{r3}}. \quad (5.33)$$

**Висновки:** електромагнітна хвиля без відбиття пройде через шар речовини, якщо:

1. Товщина шару  $d$  кратна чверті довжини хвилі в речовині шару і параметри середовищ зв'язано співвідношенням (5.32);

2. Товщина шару  $d$  кратна половині довжини хвилі в речовині шару і параметри середовищ зв'язано співвідношенням  $Z_{c1} = Z_{c3}$ , при цьому величина  $Z_{c2}$  може мати довільне значення.

### 5.6 Наближені граничні умови Леонтовича. Розрахунок потужності втрат в провідниках

Хай плоска хвиля падає під кутом  $\varphi$  на плоску межу розділу двох середовищ, причому *друге* середовище оптично *набагато щільніше*, ніжперше, тобто  $k_2 \gg k_1$  або  $n_2 \gg n_1$ . З

другого закону Снелліуса  $\sin \theta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$  витікає, що при

цьому кут заломлення  $\theta$  близький до нуля, і в другому середовищі хвиля поширюється *практично по нормалі* до межі розділу *при будь-якому куті падіння*. Важливим є випадок, коли *друге* середовище має велику провідність або високу діелектричну проникність і оптично є *набагато щільніше* першого, тобто

$$|\dot{k}_2| \gg k_1. \quad (5.34)$$

Частинними випадками таких середовищ є метали з високою питомою провідністю, а також водне середовище на низьких частотах. У металів  $|\dot{k}_2| = \sqrt{\omega \mu_{a2} \sigma_2}$ , оскільки питома

провідність  $\sigma_2$  велика, то умова (5.34) практично завжди виконується. Можна показати, що у випадку (5.34) заломлена хвиля і в добре провідному середовищі поширюється практично вздовж нормалі до поверхні розділу при будь-якому куті падіння. Ця хвиля є поперечною, причому вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в ній зсунуті за фазою на кут  $\pi/4$ .

Амплітуди векторів  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  поля заломленої хвилі дуже швидко зменшуються при поширенні її від межі розділу (вглиб провідника) і на високих частотах хвиля фактично існує лише в тонкому шарі поблизу поверхні розділу. Це явище називається поверхневим ефектом або скін-ефектом (skin – шкіра). Явище поверхневого ефекту дозволяє використовувати на високих частотах металеві екрани для захисту різних пристроїв від впливу на них зовнішнього електромагнітного поля. *Слід зазначити, що в разі сталих у часі і низькочастотних полів металевий екран не пропускає електричне поле, але пропускає магнітне, якщо екран виконано з парамагнітного або діамагнітного металу.*

Хвилю в другому, добре провідному середовищі (металі) можна вважати плоскою однорідною, для якої повинно виконуватися співвідношення

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{Z}_{c2}[\vec{n}, \dot{\vec{H}}_2], \quad (5.35)$$

де  $\vec{n}$  – одинична нормаль, зовнішня до другого (провідного) середовища.

Оскільки припускається, що хвиля в другому (провідному) середовищі поширюється перпендикулярно межі розділу, то вектори  $\dot{\vec{E}}_2$  та  $\dot{\vec{H}}_2$  будуть паралельні (дотичні, тангенціальні) до межі розділу, отже

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{E}_{2\tau} \tau \quad \text{та} \quad \dot{\vec{H}}_2 = \dot{H}_{2\tau'} \tau'. \quad (5.36)$$

Різні індекси  $\tau$  та  $\tau'$  у векторів  $\dot{\vec{E}}_2$  та  $\dot{\vec{H}}_2$  підкреслюють, що дотичні складові векторів поля на площині розділу ортогональні між собою. Згідно з точними граничними

умовами, дотичні складові векторів  $\dot{\vec{E}}$  та  $\dot{\vec{H}}$  неперервні на межі розділу

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} \text{ та } \dot{H}_{1\tau'} = \dot{H}_{2\tau'}, \quad (5.37)$$

і тоді з врахуванням рівностей (5.36), (5.37) співвідношення (5.35) набуває вигляду

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{Z}_{c2}[\vec{n}, \dot{H}_{1\tau'}]. \quad (5.38)$$

Якщо ввести на поверхні провідника декартову систему координат, то (5.38) можна переписати в скалярному вигляді

$$\dot{E}_x = \dot{Z}_{c2}\dot{H}_y, \quad \dot{E}_y = -\dot{Z}_{c2}\dot{H}_x. \quad (5.39)$$

Співвідношення (5.38), (5.39) зуться *наближеними граничними умовами Леонтовича*. З (5.38) витікає, що на поверхні реального провідника тангенціальна складова електричного поля відмінна від нуля. В граничному випадку  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  гранична умова Леонтовича збігається з точною граничною умовою  $E_{1\tau} = 0$  на поверхні ідеального провідника. Оскільки характеристичний опір в разі високої провідності середовища (металу) має дуже мале значення (на рівні одиниць мОм), то і тангенціальна складова вектору  $\vec{E}$  на поверхні такого середовища буде мати мале значення. В інженерних розрахунках амплітуд полів поблизу провідних поверхонь її зазвичай не враховують, тобто вважають, що структура поля над реальним провідником така ж, як і над ідеальним провідником.

Але врахування тангенціальної складової (5.38) електричного поля на поверхні реального провідника *необхідне при розрахунку втрат в провідниках*. Ця тангенціальна складова  $\vec{E}_{1\tau}$  визначає нормальну до поверхні, тобто направлену углиб провідника компоненту вектора Пойнтінга – це та течія енергії, яка рухається вглиб металу. Тут ця енергія перетворюється на

теплову енергію, яка розсіюється в довколишньому просторі, тобто *безповоротньо втрачається*.

Граничні умови Леонтовича дозволяють *не розглядати* електромагнітне поле в добре провідному середовищі (металі) і враховувати вплив цього середовища на електромагнітні поля поза ним (металом) лише через граничні умови на поверхні. У опорі  $\dot{Z}_{c2}$  закладена інформація про параметри провідника і поведінку електромагнітного поля усередині нього.

Втрати енергії в провіднику можна обчислити таким чином. Хай металевий провідник, розміри і мінімальний радіус кривизни поверхні  $S$  якого великі в порівнянні з глибиною проникнення, знаходиться в монохроматичному електромагнітному полі. Під впливом цього поля в металі наводяться струми провідності, на підтримку яких витрачається електромагнітна енергія. Відповідна цьому процесу середня за період потужність теплових втрат, яка визначається як течія середнього значення вектору Пойнтінга через поверхню  $S$  провідника, дорівнює

$$P_{сер} = \operatorname{Re} \int_S \dot{\Pi} d\vec{S}. \quad (5.40)$$

Для обчислення потужності (5.40) немає необхідності визначати поле усередині провідника, досить обчислити складову комплексного вектора Пойнтінга, яку направлено всередину провідника перпендикулярно (нормально) до його поверхні. Нормальна складова вектора Пойнтінга визначається тангенціальними складовими векторів поля на поверхні провідника

$$\dot{\Pi}_n = \frac{1}{2} \left[ \dot{E}_{1\tau}, \dot{H}_{1\tau'} \right]. \quad (5.41)$$

Звідси після використання граничної умови Леонтовича (5.38) буде

$$\dot{\Pi}_n = \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \left[ \left[ \vec{n}, \dot{H}_{1\tau'} \right] \dot{H}_{1\tau'} \right] = -\vec{n} \cdot \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \left| \dot{H}_{1\tau'} \right|^2. \quad (5.42)$$

Підстановка (5.42) в (5.40), з урахуванням того, що потік енергії направлено всередину провідника, а  $\vec{n}$  – одинична нормаль, зовнішня до поверхні провідника, дає

$$P_{cep} = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \dot{Z}_{c2} \int_S \left| \dot{H}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.43)$$

Таким чином, для середньої за період потужності теплових втрат в провіднику з використанням виразу для  $\dot{Z}_{c2}$  отримаємо

$$P_{cep} = \frac{1}{2\sigma_2\Delta} \cdot \int_S \left| \dot{H}_{1\tau'} \right|^2 dS. \quad (5.44)$$

Як вже раніше наголошувалося, структура поля біля поверхні *реального* провідника близька до структури поля біля такої ж поверхні *ідеального* провідника. Тому при обчисленні потужності втрат амплітуда тангенціальної складової магнітного поля береться рівною амплітуді тангенціальної складової магнітного поля на поверхні ідеального провідника, яка в разі нормального падіння має вигляд

$$H_{1\tau} = 2H_{\text{пад}} = \frac{2E_{\text{пад}}}{Z_{c1}}. \quad (5.45)$$

Це припущення істотно спрощує розрахунки, забезпечуючи достатню для практики точність результатів.

Слід зазначити, що розглянуті вище явища, які мають місце при падінні плоскої однорідної хвилі на межу розділу двох середовищ, мають широку сферу застосування. По-перше, розглянуті закони відбиття та заломлення використовуються і у випадках, коли і електромагнітні хвилі і поверхні розділу не є

плоскими. Наближено правильні результати будуть отримані, якщо радіуси кривизни поверхні розділу і поверхні фронту хвилі значно більше глибини проникнення. По-друге, закони можуть бути застосовані і для розрахунку проходження хвиль через пластинки і більш складні шаруваті середовища. По-третє, ці ж закони застосовні і до ліній передачі.

### 5.7 Повне внутрішнє відбиття

Явище повного внутрішнього відбиття може виникати, якщо електромагнітна хвиля падає з середовища з *більшим* значенням оптичної густини на середовище з *меншим* значенням оптичної густини, тобто коли  $n_2 > n_1$ . Цей процес пояснено на рис. 5.3. Другий закон Снелліуса в формі (5.11) при падінні хвилі на межу розділу із середовища з більшим показником заломлення  $n_2$  можна записати у вигляді

$$\sin \theta = \frac{n_2}{n_1} \sin \varphi. \quad (5.46)$$

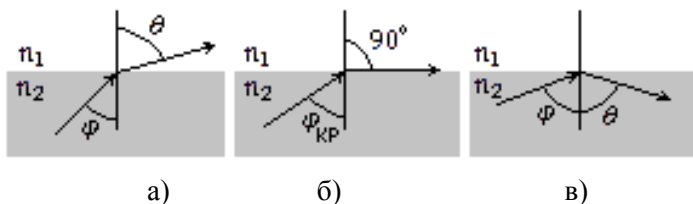


Рисунок 5.3 – Повне внутрішнє відбиття

Оскільки відношення  $\frac{n_2}{n_1} > 1$ , то з (5.46) витікає, що при деякому значенні кута падіння  $\varphi$  може бути значення  $\sin \theta = 1$ , а звідси  $\theta = 90^\circ$ . Той кут падіння  $\varphi$ , який відповідає цьому значенню  $\theta = \pi/2$  звать *граничним кутом повного внутрішнього відбиття*  $\varphi_{кр}$  (рис.5.3 б). Якщо значення кута падіння  $\varphi > \varphi_{кр}$ , то це означає, що хвиля в середовище з  $n_1$  взагалі не

заломлюється, а буде лише відбита хвиля, яка існує в середовищі з  $n_2$  (рис. 5.3 в).

Таким чином, граничний кут повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр}$  можна знайти з (5.46) при  $\theta = \pi/2$

$$\sin \varphi_{кр} = \frac{n_1}{n_2}, \text{ звідки } \varphi_{кр} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right). \quad (5.47)$$

Для обчислення значення граничного кута повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр}$  треба знати лише значення показників заломлення середовищ по обидві сторони від межі розділу. Для прикладу розглянемо межу розділу «вода – повітря». Тоді в інфрачервоному діапазоні маємо для води  $n_2 = 1.33$ , а для повітря  $n_1 = 1$ . За (5.47) обчислимо значення кута повного внутрішнього відбиття  $\varphi_{кр} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \arcsin(0.75) = 49^\circ$ .

Ефект повного внутрішнього відбиття знаходить широке коло застосувань в різних галузях науки і техніки. Зокрема, цей ефект безпосередньо використовується в оптичному волокні. Оптичне волокно має діаметр порядку декількох мікронів, виробляється з надзвичайно якісного скла і є прямою системою для оптичного проміню інфрачервоного діапазону. Така пряма система має дуже мале значення сталої згасання та є дуже широкосмуговою. Ці властивості забезпечують такі об'єми і швидкість передачі даних, які недосяжні при використанні класичних напрямних систем електрозв'язку (вита пара, коаксіальна лінія). Декілька оптичних волокон об'єднують загальним конструктивом, вводять захисні оболонки а інколи і бронепокриви і таким чином отримують оптичний кабель. Сучасним станом оптичний кабель є найбільш перспективним для будівництва нових ліній зв'язку. В більшості країн нормативними документами не рекомендовано при будівництва нових ліній зв'язку застосовувати «мідні» кабелі.

## 5.8 Явище деполяризації хвилі на межі розділу середовищ

Як вже згадувалось у пункті 5.3, при поширенні поляризованих ЕМХ може виникати явище *деполяризації*. Сутність: при деяких умовах поширення *тип поляризації поширюваної ЕМХ може змінюватись*. Природньо, що при цьому для ефективного приймання таких (деполяризованих) хвиль треба деяким чином змінювати (або коригувати) і приймальну техніку.

Розглянемо це питання на прикладі тих явищ деполяризації, які можуть виникати при відбитті та заломленні електромагнітних хвиль на межі розділу двох середовищ. Як відомо з попереднього розгляду, параметри відбитих та заломлених хвиль визначаються їх комплексними коефіцієнтами відбиття  $\dot{R}$  та заломлення  $\dot{T}$ .

На рис.5.4 наведено залежності коефіцієнтів відбиття нормально  $\dot{R}_{\perp}$  та паралельно  $\dot{R}_{\parallel}$  поляризованих хвиль від кута падіння  $\phi$  для двох значень відносного коефіцієнту заломлення  $n^{(r)} = n_2/n_1$ . Аналіз цих залежностей показує:

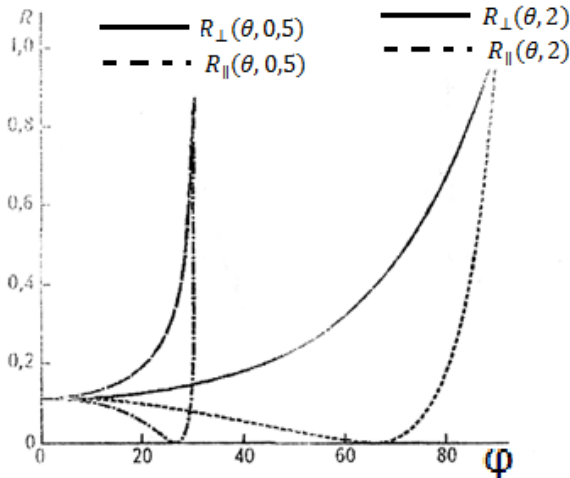


Рисунок 5.4 – Залежності  $\dot{R}_{\perp}$  та  $\dot{R}_{\parallel}$  від кута падіння  $\phi$  при  $n^{(r)} = \text{const}$

1. Значення  $\dot{R}_{\perp}$  завжди більше, ніж значення  $\dot{R}_{\parallel}$ . Таким чином, в відбитій хвилі завжди переважає нормально поляризована складова порівняно з паралельно поляризованою складовою;

2. В випадку паралельної поляризації при значенні кута падіння, яке дорівнює значенню кута Брюстера, значення  $\dot{R}_{\parallel} = 0$ . Значення кута Брюстера зростає із збільшенням величини  $n^{(r)} = n_2/n_1$  в відповідності до виразу (5.24). Так, при  $n^{(r)} = 2$ , значення  $\varphi_B \approx 63,4^\circ$

а при  $n^{(r)} = 0,5$  це  $25,6^\circ$ .

При прояві ефекту деполаризації може змінитися кут нахилу вектора  $\vec{E}$  лінійно поляризованої хвилі. Якщо приймати таку деполаризовану хвилю на антену з лінійною поляризацією, то неспівпадання кутів нахилу антени та вектору  $\vec{E}$  призведе до зниження рівня сигналу в антені.

Розглянемо варіант з встановленням приймальної антени побутового телебачення (горизонтальна лінійна поляризація) на горищі приватного будинку – рис.5.5. Така ситуація виникає, коли власник хоче приховати факт встановлення антени від зловмисників.

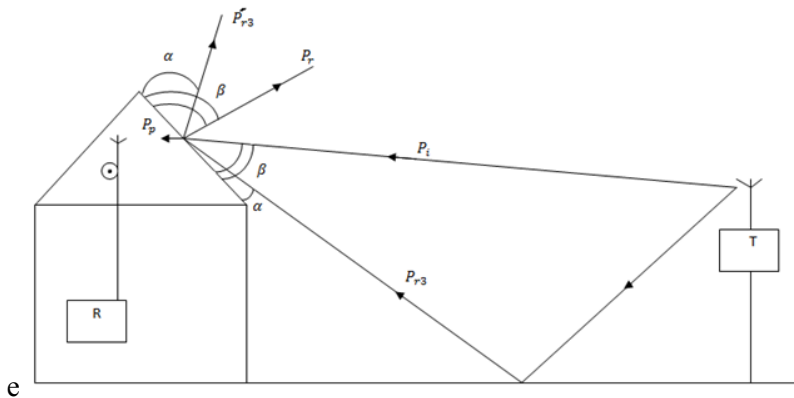


Рисунок 5.5 – Варіант розташування ТВ антени на горищі будівлі

Тут в залежності від товщини зовнішнього покриття можуть виникати різні ефекти з різним значенням потужності заломленої хвилі  $P_p$ . Наприклад, якщо товщина досить значна (наприклад, за рахунок теплоізолювального шару) - рис.5.6, то при  $n_2 > n_1$  може виникнути хвиля «сковзання» за рахунок прояви ефекту повного внутрішнього відбиття, коли щезає заломлена хвиля.

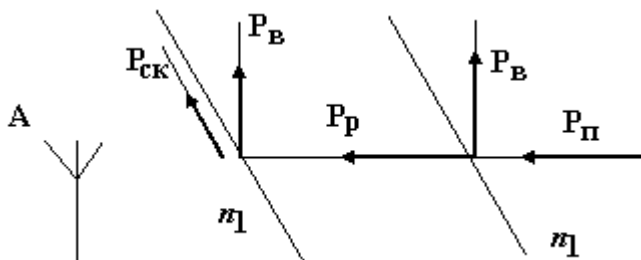


Рисунок 5.6 – До розгляду появи хвилі «сковзання»

### Контрольні запитання

1. Що таке межа розділу середовищ? Що таке площина падіння
2. хвилі? Чим відрізняються одна від одної нормально та паралельно поляризовані хвилі?
3. Як визначається показник заломлення середовища? Як записати закони Снеліуса для межі розділу?
4. На якій підставі можна стверджувати, що структури падаючої, відбитої та заломленої хвиль є однаковими?
5. Яка різниця в застосуванні граничних умов на межі розділу для нормально та паралельно поляризованих хвиль?
6. Як вводяться коефіцієнти відбиття та заломлення для обох різновидів хвиль?
7. Як встановлюються умови при яких може спостерігатися повне проходження хвилі через межу розділу?
8. Що таке ефект Брюстера та як знайти кут Брюстера?

9. В чому особливість прояви ефекту Брюстера для хвиль обох поляризацій?

10. Чому величини  $R$  та  $T$  для хвиль обох поляризацій однакові при умові нормального падіння хвиль?

11. Чому при знаходженні коефіцієнту відбиття від шаруватого середовища треба розглядати інтерференційні явища?

12. Чому при знаходженні коефіцієнту відбиття від шаруватого середовища можна застосовувати формулу для спадної геометричної прогресії?

13. При яких умовах може спостерігатися повне проходження хвилі через шарувате середовище?

14. Чому для тої межі розділу середовищ, де виконується умова  $|k_2| \gg k_1$  можна вважати, що заломлена хвиля поширюється за напрямом нормалі до межі розділу незалежно від значення кута падіння?

15. В чому сутність наблнжених граничних умов Леонтовича? Чому вони «наблнжені»?

16. Як розраховується потужність втрат в провідниках?

17. При яких умовах проявляється ефект повного внутрішнього відбиття?

18. Які існують напрями практичного застосування ефекту повного внутрішнього відбиття?

19. В чому сутність явища деполяризації?

20. Якими прикладами можна продемонструвати прояву явища деполяризації?

### Приклади вирішення задач

**Задача 5.1.** Межа розділу повітря – ідеальний діелектрик з  $\varepsilon_r = 3.2$ ,  $\mu_r = 1$ . Плоска хвиля падає з повітря під кутом  $\varphi = \pi/6$ . Знайти кути відбиття  $\varphi_1$  та заломлення  $\theta$  (рис.5.1).

### Вирішення

1. За виразом (5.12) знайдемо кут відбиття  $\varphi_1 = \varphi = \pi/6$ .

2. За виразом (5.10) знайдемо кут заломлення

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \varphi\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3.2}}\right) = 16.2^\circ.$$

Тут  $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}}$  показник заломлення  $i$ -го середовища.

**Задача 5.2.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\varepsilon_r = 3.2$ ,  $\mu_r = 1$ . Плоска нормально поляризована хвиля, у якій амплітуда вектору  $E_{nad} = 1$  В/м падає з повітря під кутом  $\varphi = \pi/6$ . Знайти амплітуди векторів напруженості електричного та магнітного полів відбитої та заломленої хвиль.

### Вирішення

1. Оскільки умова задачі за параметрами межі розділу та падаючої хвилі співпадає з умовами задачі 5.1 то кут заломлення  $\theta = 16.2^\circ$ . При таких умовах зручно від виразів (5.16) та (5.17) перейти до більш простих, де фігурують лише кути  $\varphi$  та  $\theta$ .

$$R_{\perp} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(\theta + \varphi)}. \quad (5.48)$$

2. За виразом (5.48) знайдемо значення  $R_{\perp}$ ,  $T_{\perp}$ .

$$R_{\perp} = \frac{\sin(16.2^\circ - 30^\circ)}{\sin(16.2^\circ + 30^\circ)} = -0.33, \quad T_{\perp} = \frac{2 \sin(16.2^\circ) \cdot \cos(30^\circ)}{\sin(16.2^\circ + 30^\circ)} = 0.67$$

3. За виразом (5.18) знайдемо амплітуду вектору  $E_{eid}$ .

$$E_{eid} = |R_{\perp}| \cdot E_{nad} = 0.33 \cdot 1 = 0.33 \frac{B}{M}.$$

4. За виразом (5.19) знайдемо амплітуду вектору  $E_{zal}$ .

$$E_{zal} = |E_{\perp}| \cdot E_{nad} = 0.67 \cdot 1 = 0.67 \frac{B}{M}.$$

5. За виразом (4.26) при  $\mu_r=1$  знайдемо величину  $Z_{c2}$ , а  $Z_{c1} = 120\pi$ .

$$Z_{c2} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120 \cdot 3.14}{\sqrt{3.2}} = 211 \text{ Ом}.$$

6. За виразом (4.26) при  $\mu_r=1$  знайдемо амплітуди векторів магнітного поля  $H_{\text{від}}$  та  $H_{\text{зал}}$ .

$$H_{\text{від}} = \frac{E_{\text{від}}}{Z_{c1}} = \frac{0.33}{120 \cdot 3.14} = 8.8 \cdot 10^{-4} \text{ А/м},$$

$$H_{\text{зал}} = \frac{E_{\text{зал}}}{Z_{c2}} = \frac{0.67}{211} = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}$$

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 5.3.** Межа розділу повітря–ідеальний діелектрик з  $\varepsilon_r = 3.2$ ,  $\mu_r = 1$ . Плоска хвиля, у якої амплітуда вектору  $E_{\text{пад}} = 20$  В/м падає в напрямку нормалі до межі розділу. Знайти амплітуди векторів електричного і магнітного полів та середні значення векторів Пойнтінга у відбитої та заломленої хвиль.

**Вказівка.** Може викликати здивування той факт, що в умові задачі не вказано тип поляризації падаючої хвилі. Але при падінні хвилі в напрямі нормалі вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  падаючої хвилі при обох типах поляризації будуть мати *лише дотичні* до межі розділу складові поля.

**Задача 5.4.** Межа розділу повітря – ідеальний діелектрик з  $\varepsilon_r = 3.2$ ,  $\mu_r = 1$ . Знайти значення кута Брюстера для паралельно поляризованої падаючої хвилі.

**Задача 5.5.** Плоска хвиля з амплітудою вектору  $E = 300$  В/м падає у напрямі нормалі на мідну площину. Частота  $f = 10$  ГГц. Знайти середні значення векторів Пойнтінга падаючої та заломленої хвиль, порівняти їх за порядком отриманих величин, зробити висновки.

## 6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ В ЛІНІЯХ ПЕРЕДАЧІ

### 6.1 Класифікація ліній передачі

Лінією передачі називається пристрій, який призначено для передачі електромагнітних хвиль від їх джерела до навантаження. Розрізняють регулярні і нерегулярні лінії передачі.

Регулярна лінія передачі являє собою прямолінійну структуру, геометричні і електричні параметри якої є незмінними за її поздовжньою координатою.

У нерегулярній лінії передачі електричні параметри є функцією поздовжньої координати.

Основні відмінності ліній одна від одної визначаються типом електромагнітних хвиль, які поширюються вздовж лінії. Відповідно до цього розрізняють:

- лінії передачі з *поперечними електромагнітними хвилями* (типу  $T$ ); сюди відносяться дво- і багатопровідні лінії, коаксіальні і смужкові лінії передачі;
- *хвилеводні лінії передачі з хвилями електричного ( $E_{mn}$ ) або магнітного ( $H_{mn}$ ) типів*; сюди відносяться хвилеводи прямокутного, круглого і інших форм поперечного перетину;
- *лінії передачі поверхневих хвиль*; сюди відносяться діелектричні хвилеводи, а також металеві стрижні з періодичною структурою поверхні.

### 6.2 Рівняння однорідних ліній

В структурах з багатозв'язним поперечним перетином можуть існувати поперечні електромагнітні хвилі (ТЕМ або  $T$  – хвилі). У поперечних хвиль відсутні поздовжні компоненти векторів  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ , вони не мають частоти відсічки, тобто можуть існувати при будь-якому значенні частоти.

Частинним випадком ліній передачі з багатозв'язним поперечним перетином є двозв'язні лінії передачі, які мають два паралельних провідника (коаксіальна лінія, двопровідна лінія,

смужкова лінія та ін.). Такі лінії передачі широко використовуються на практиці і основним робочим типом хвилі в них є саме  $T$  – хвилі (у мікросмужковій і подібній до неї лінії чиста  $T$  – хвиля існувати не може, в цих лініях основною є квазі –  $T$  хвиля).

### **6.2.1 Нормування напруг та струмів в ЛП з хвилею TEM. Універсальна модель ЛП**

При строгому електродинамічному підході до задач високочастотних вузлів пристроїв телекомунікацій найбільші ускладнення виникають в основному з-за врахування трьох факторів:

- велика кількість різновидів ЛП та їх комбінацій;
- велика кількість типів хвиль, які треба враховувати;
- складність знаходження векторних функцій розподілів

внутрішніх ЕМП  $\vec{E}(v_1, v_2), \vec{H}(v_1, v_2)$  навіть для найпростіших елементів НВЧ пристроїв.

Але ці ускладнення можна в більшості випадків так би мовити обійти, якщо взяти до уваги, що електродинамічний опис хвильових процесів в ЛП в вигляді відповідних векторних функцій несе в собі набагато більше інформації, ніж треба розробнику. Трохи забігаючи наперед, зауважимо, що розробника в першу чергу цікавлять ті параметри, які легко піддаються безпосереднім вимірам за допомогою стандартної вимірювальної апаратури – коефіцієнт передавання (питання зміни потужності), коефіцієнт відбиття (питання узгодженості) та фазова затримка. Величини ж векторів поля, подробиці їх розподілу в хвилі, орієнтації і т. і. після того, як уже вибраний конкретний тип ЛП (тобто відомі геометричні та електрофізичні параметри системи напрямних елементів, які створюють відповідну ЛП), уже мають другорядне значення і при подальшому проектуванні тракту від них бажано б було відстронитися (абстрагуватися).

Отже поставимо задачу ввести таку просту і універсальну математичну модель лінії передавання, яка б, з однієї сторони, годилась для опису процесу передавання потужності в ЛП за допомогою падаючих та відбитих хвиль вибраного типу в будь-

якій регулярній ЛП, а з іншої – мала б таку кількісну характеристику, яка точно відслідковує поздовжню зміну ЕМП хвилі в ЛП і заміняла б векторні функції розподілу ЕМП в поперечному перерізі деякою інтегральною мірою інтенсивності електромагнітного поля.

Очевидно, що таку інтегральну міру інтенсивності електромагнітного поля хвилі можна отримати, якщо знайти потужність, яку ця хвиля переносить; після інтегрування по поперечним координатам щезає залежність від координат поперечного перерізу ЛП (вже нема потреби аналізувати векторні функції  $\vec{E}(v_1, v_2)$ ,  $\vec{H}(v_1, v_2)$  розподілу) і в той же час зміну цієї інтегральної величини за поздовжньою координатою можна проаналізувати, якщо передбачити її у вигляді рухомих хвиль (або їх сукупності).

**Визначення:** в якості міри інтенсивності електромагнітного поля в будь-якій регулярній ЛП приймають **нормовану напругу** рухомої хвилі (падаючої та відбитої), яку обчислюють за формулою:

$$\dot{u}_{П,В}(\xi) = \sqrt{P(0)} \cdot e^{-j\varphi_0} e^{\mp j\xi} = \dot{u}_{П,В}(0) \cdot e^{\mp j\xi}, \quad (6.1)$$

де  $P(0)$  – потужність ЕМХ, яка розраховується інтегруванням вектору Пойнтинга, тобто

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \vec{P}_\xi d\bar{S} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \left( \vec{E}_S \times \vec{H}_S^* \right) \cdot d\bar{S} \right\}, \quad (6.2)$$

за перерізом  $S$  лінії передавання при значенні  $\xi = 0$ ;

$\varphi_0$  – початкова фаза;

$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta_x$  – комплексна стала розповсюдження, визначена для розглядуваного типу хвилі досліджуваної ЛП.

В експоненті знак «-» відповідає падаючій хвилі, яка поширюється в додатному напрямі поздовжньої вісі  $\xi$ , а знак «+» – відноситься до відбитої хвилі, яка поширюється (рухається) назустріч падаючій хвилі.

Множник  $\dot{i}_{П,В}(0)$  є комплексним чисельним коефіцієнтом, який розраховується за допомогою інтегрування вектору Пойнтинга за поперечними координатами  $v_1, v_2$  ЛП при  $\xi = 0$  і, відповідно, являє собою **нормовану** напругу рухомої хвилі в цьому перерізі.

Фазу нормованої напруги рухомої хвилі приймають рівній фазі поперечної складової напруженості електричного поля ЕМХ в ЛП в деякій характерній точці перерізу ЛП з координатами  $v'_1, v'_2$ :

$$\arg \dot{i}_{П,В}(\xi) = \arg \dot{E}_{П,В}(v'_1, v'_2, \xi). \quad (6.3)$$

Модуль нормованої напруги рухомої хвилі в (6.1) є коренем квадратним із потужності рухомої хвилі, а тому нормована напруга рухомої хвилі має розмірність  $\sqrt{B_T}$ .

Якщо ж деяким чином величина  $|\dot{i}_{П}(0)|$  знайдена, то тоді потужність рухомої хвилі в точці  $\xi = 0$

$$P(0) = |\dot{i}_{П}(0)|^2. \quad (6.4)$$

Аналогічно можна ввести і нормований струм деякої рухомої хвилі. Тоді можна для ЛП будь-якого виду з будь-яким типом хвилі в якій існують ЕМХ з векторами Пойнтинга падаючої  $\bar{P}_П$  та відбитої  $\bar{P}_В$  хвиль – рис. 6.1 – ввести універсальну модель у вигляді деякої гіпотетичної двопровідної лінії (ГДЛ), в якій можуть існувати рухомі хвилі напруги та струму – рис. 6.2.

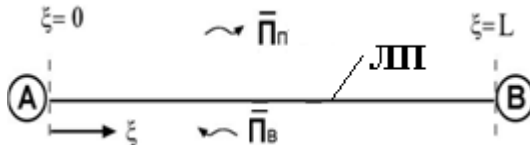


Рисунок 6.1 – ЛП з падаючими та відбитими ЕМХ

Домовимося, що надалі параметри ГДЛ (хвильевий опір  $Z_X$ , стала втрат  $\alpha$ , фазова стала  $\beta_X$  і ін.) співпадають з параметрами фізично існуючої ЛП.

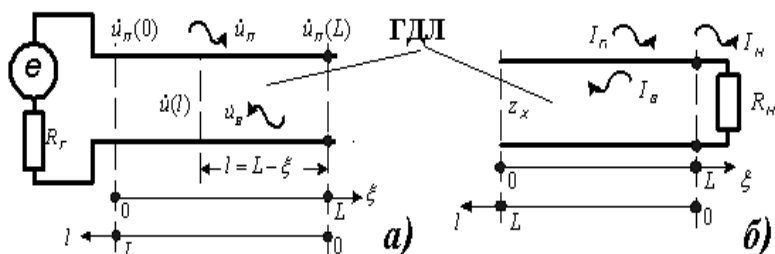


Рисунок 6.2 – Перехід до універсальної моделі ЛП у вигляді ГДЛ

### 6.2.2 Телеграфні рівняння

Поперечні хвилі в двозв'язній лінії передачі можна описати за допомогою так званих телеграфних рівнянь. Телеграфні рівняння формулюються відносно двох величин – напруги  $U = U(z, t)$  та струму  $I = I(z, t)$  – які задаються для кожного поперечного перетину  $z$  даної лінії передачі в кожен момент часу  $t$ :

$$-\frac{\partial U(z, t)}{\partial z} = RI + L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (6.5)$$

$$-\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = GU + C \frac{\partial U(z, t)}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Тут  $L$  – це погонна (тобто та, що приходить на одиницю довжини) індуктивність лінії в Гн/м;

$C$  – погонна ємність лінії у Ф/м;

$R$  – погонний опір лінії в Ом/м;

$G$  – погонна провідність (погонний коефіцієнт витоку) в См/м.

При часовій залежності у вигляді множника  $e^{j\omega t}$  після диференціювання за часом в правих частинах (6.5) і (6.6) і скорочення на  $e^{j\omega t}$  отримаємо

$$-\frac{dU(z)}{dz} = (R + j\omega L)I(z), \quad (6.7)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = (G + j\omega C)U(z), \quad (6.8)$$

де частинні похідні за координатою  $z$  позначено через  $\frac{d}{dz}$ , оскільки значення  $U$  та  $I$  тепер залежать лише від однієї змінної  $z$ .

Для отримання загального вирішення рівнянь (6.7) і (6.8) з них треба вилучити одну з величин, наприклад, струм  $I$ . Після диференціювання за змінною  $z$  обох частин рівняння (6.7) і підстановки в праву частину  $\frac{dI(z)}{dz}$  з (6.8) отримаємо

$$\frac{d^2U}{dz^2} = -\gamma^2 U, \quad (6.9)$$

де  $\gamma$  – стала або коефіцієнт поширення, яка дорівнює

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}. \quad (6.10)$$

У загальному випадку цей параметр комплексний:  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  – коефіцієнт згасання, тобто величина втрат, які вносяться відрізком лінії одиничної довжини;  $\beta = \frac{\omega}{v_\Phi}$  – коефіцієнт фази, тобто фазовий зсув на тій же довжині.

Загальне вирішення диференціального рівняння другого порядку (6.9) записується у вигляді додатку двох експонент

$$U(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}. \quad (6.11)$$

Підстановка цього виразу в (6.7) дає рівняння для струму

$$I(z) = \frac{1}{Z_X} (Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}), \quad (6.12)$$

де величина

$$Z_X = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (6.13)$$

зветься *хвильвим опором лінії*.

З формул (6.11) і (6.12) витікає, що загальне вирішення телеграфних рівнянь є сумою двох хвиль, які рухаються (біжать) назустріч одна одній, з деякими комплексними амплітудами  $A$  та  $B$ , відповідно. Ці амплітуди визначаються з застосуванням граничних умов на початку та на кінці лінії. Наявність зворотньої хвилі, що характеризується амплітудою  $B$ , зв'язано (як буде показано далі) з процесами відбиття прямої хвилі (амплітуда  $A$ ), яке може виникати внаслідок неузгодженості лінії.

Для ідеальних ліній ( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $tg \delta \rightarrow 0$ )  $R = 0$ ,  $G = 0$ . Тоді, як витікає з (6.10), коефіцієнт загасання  $\alpha = 0$ , а коефіцієнт фази

$$\beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (6.14)$$

Крім цього, з (6.13) витікає

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.15)$$

У реальних лініях передачі  $R \neq 0$  і  $G \neq 0$ , проте на досить високих частотах  $\omega L \gg R$  та  $\omega C \gg G$ , тому у формулах (6.10) і (6.13) величинами  $R$  і  $G$  можна нехтувати в порівнянні з  $\omega L$  і  $\omega C$ . В результаті знову отримаємо вирази (6.14) та (6.15).

Це, так зване «високочастотне» наближення, яке буде справедливим для більшості типів ліній передачі, які застосовують в телекомунікаціях.

Детальний аналіз структури електромагнітного поля Т – хвилі в багатозв'язній лінії показує, що електричне поле такої хвилі задовільняє рівнянню Лапласа і, отже, збігається по конфігурації з електростатичним полем.

Стала поширення поперечної хвилі *збігається зі сталою поширення плоских хвиль у вільному просторі*. Фазова швидкість

Т–хвиль не залежить від частоти:  $v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ . Поширення

можливе для будь-яких частот від 0 до  $\infty$ .

Після того, як знайдено електричне поле, магнітне поле може бути отримано з першого рівняння Максвелла

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot}\vec{E}.$$

Підстановка в це рівняння виразу для  $\vec{E}$

показує, що вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  для Т–хвилі в будь-якій точці мають бути перпендикулярними один одному.

Далі, оскільки магнітне поле також поперечне, струми в провідниках є чисто поздовжніми і, отже, структура магнітного поля в Т–хвилі збігається за конфігурацією з магнітостатичним полем.

Збіг структур електричного і магнітного полів Т–хвилі в багатозв'язній лінії з електростатичним і магнітостатичним полями дозволяє вводити в розгляд відповідні статичні параметри – погонну ємність і погонну індуктивність лінії. Для деяких типів ліній передачі ці параметри можуть бути легко знайдені.

### 6.3 Основні електричні характеристики ліній передачі

Процес передачі енергії електромагнітною хвилею в будь-якій регулярній лінії передачі може досліджуватися за допомогою моделі у вигляді двопровідної лінії, основні електричні характеристики якої збігаються з характеристиками досліджуваної лінії. Таке узагальнення (фактично перенесення) теорії двопровідних ліній на інші типи ліній можливо в тих

випадках, коли властивості лінії можна охарактеризувати обмеженою кількістю зовнішніх параметрів. Скрізь далі (якщо не обумовлено зворотнє) при аналізі процесів в лініях передачі використовуватиметься саме така модель на основі двопровідної лінії.

### 6.3.1 Комплексний коефіцієнт відбиття

Навантаженням в лінії передачі (рис. 6.3) може бути або зосереджений опір, або відрізок лінії передачі з хвильовим опором, який відрізняється від хвильового опору основної лінії. У загальному випадку величина опору навантаження  $Z_H$  не дорівнює хвильовому опору лінії  $Z_X$ .

Раніше вже наголошувалося, що в загальному випадку в лінії поширюються хвилі, які рухаються (біжать) в протилежних напрямках і характеризуються комплексними амплітудами А та В – вираз (6.11). Це можуть бути хвилі напруги (6.11), або струму (6.12), або якого-небудь з компонентів електромагнітного поля. Є очевидним той факт, що ці хвилі переносять енергію по лінії.

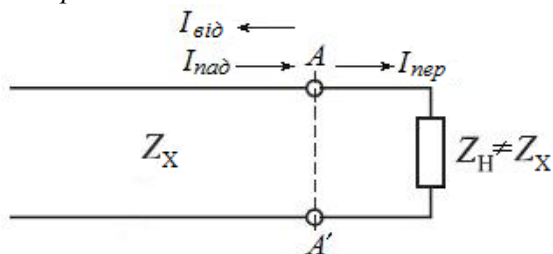


Рисунок 6.3 – Відбиття від навантаження

Відповідно до рис. 6.3 відбиття частини енергії падаючої хвилі відбувається в тому перетині, де встановлено навантаження. На рис. 6.3 це перетин AA'. Частина енергії падаючої хвилі, яка не зазнала відбиття, поширюється далі цього перетину (це та хвиля, яка передає енергію в навантаження  $I_{\text{пер}}, U_{\text{пер}}$ ).

Для опису процесу відбиття вводиться поняття коефіцієнту відбиття  $\Gamma$  за напругою в місці під'єднання навантаження

$$\Gamma = \frac{U_{\text{від}}}{U_{\text{пад}}}. \quad (6.16)$$

Запишемо рівняння Кірхгофа в перетині  $AA'$  для струму

$$I_{\text{над}} - I_{\text{від}} = I_{\text{пер}} \quad \text{або} \quad \frac{U_{\text{над}}}{Z_X} - \frac{U_{\text{від}}}{Z_X} = \frac{U_{\text{пер}}}{Z_H}, \quad (6.17)$$

та для напруги

$$U_{\text{над}} + U_{\text{від}} = U_{\text{пер}}. \quad (6.18)$$

Підстановка (6.18) в (6.17) з урахуванням (6.16) дає

$$\Gamma = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X}. \quad (6.19)$$

Оскільки опори  $Z_H$  та  $Z_X$  в загальному випадку комплексні, то і величина  $\Gamma$  теж комплексна і її можна представити у вигляді

$$\Gamma = |\Gamma| \exp(j\theta), \quad (6.20)$$

$$\text{де } |\Gamma| = \left| \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} \right|, \quad \theta = \text{arctg} \left( \frac{\text{Im} \Gamma}{\text{Re} \Gamma} \right).$$

Слід підкреслити, що коефіцієнт  $\Gamma$  може характеризувати процес відбиття в будь-якому місці тракту за умови, що в цьому місці відома величина еквівалентного опору навантаження.

### 6.3.2 Коефіцієнт стоячої хвилі

В результаті інтерференції падаючої і відбитої хвиль в лінії встановлюється режим, так званих змішаних хвиль, при якому уздовж лінії спостерігаються (рис. 6.4) максимуми і мінімуми напруги (струму), які зв'язано з амплітудами падаючих і відбитих хвиль.

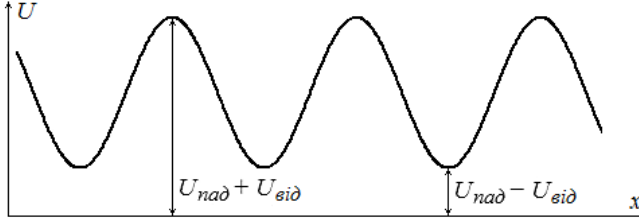


Рисунок 6.4 – Режим змішаних хвиль

Окрім коефіцієнту  $\Gamma$  для характеристики режиму роботи лінії вводиться також коефіцієнт стоячої хвилі за напругою (КСХН) або просто коефіцієнт стоячої хвилі (КСХ) за виразом:

$$КСХ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|U_{nad}| + |U_{vid}|}{|U_{nad}| - |U_{vid}|}. \quad (6.21)$$

З цього виразу витікає, що КСХ – дійсна додатня величина, значення якої завжди більше 1. За відсутності втрат та в режимі повного узгодження  $U_{vid} = 0$  і тоді КСХ=1. У режимі повного відбиття  $U_{vid} = U_{nad}$ , в цьому випадку  $КСХ \rightarrow \infty$ .

Для отримання зв'язку між  $\Gamma$  і КСХ скористаємось (6.21)

$$КСХ = \frac{1 + |U_{vid}|/|U_{nad}|}{1 - |U_{vid}|/|U_{nad}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \text{ звідки}$$

$$|\Gamma| = \frac{КСХ - 1}{КСХ + 1}. \quad (6.22)$$

Зв'язок величини КСХ з долею потужності, яка надходить в навантаження, можна знайти із закону збереження енергії, згідно з яким  $P_{над} = P_H + P_{від}$ , отже

$$\frac{P_H}{P_{над}} = \frac{P_{над} - P_{від}}{P_{над}} = 1 - \frac{P_{від}}{P_{над}}.$$

Величини  $P_{від}$  та  $P_{пад}$  пропорційні  $U^2/Z$ , тоді з урахуванням (6.22) отримуємо

$$\frac{P_H}{P_{над}} = 1 - \left( \frac{КСХ - 1}{КСХ + 1} \right)^2 = \frac{4КСХ}{(КСХ + 1)^2}. \quad (6.23)$$

З (6.23) витікає, що при КСХ=2 в навантаженні поглинається близько 90% потужності, при КСХ=3 – лише 75%, а при КСХ = 20 – лише 18%. На практиці при розробці високочастотних пристроїв прагнуть отримати величину КСХ близьку до 1. При цьому часто вважається допустимим, якщо  $КСХ \leq 2$ . Для вимірювальної техніки вимагають  $КСХ < 1,05$ .

Для експериментального дослідження розподілу напруги стоячої хвилі, треба ввести в неї переміщуваний вздовж  $\xi$  металевий зонд і тоді величина наведеного на ньому струму буде пропорційна напрузі сумарної (стоячої) хвилі.

Але отримати залежність  $i(\xi)$  в тому вигляді, як її зображено на рис.6.4 важко, бо струм чи напруга, які наводяться в зонді змінним у часі електромагнітним полем, будуть усереднюватися вимірювальним приладом, так що **зберігається** інформація лише про **амплітуду** компонент поля і **втрачається** інформація про **фазу**. За цією причиною розподіл напруги стоячої хвилі звичайно зображають так, як показано на рис. 6.5 (при короткому замиканні та холостому ході в перерізі  $\xi = L = \lambda$ ).

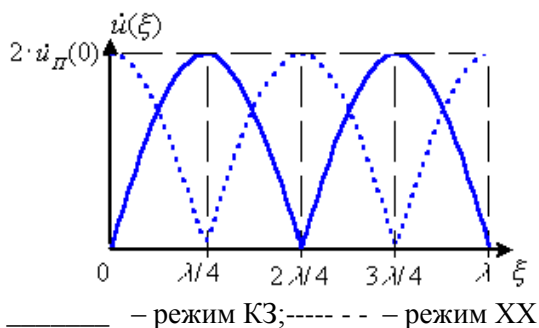


Рисунок 6.5–Розподіл напруги стоячої хвилі

Розподіл напруги стоячої хвилі в режимі холостого ходу зображено на рис. 1.8 пунктиром. Як видно з цих рисунків, структура стоячої хвилі в обох характерних режимах повторюється через кожні півхвилі.

### 6.3.3 Повні нормовані напруга, струм, опори та провідності в ЛП

Аналіз роботи ЛП виконувався через нормовані напруги падаючих  $\dot{u}_\Pi$  та відбитих  $\dot{u}_B$  хвиль. Величини  $\dot{u}_\Pi$  та  $\dot{u}_B$  визначають окремо одна від одної через потужності відповідних хвиль. В той же час, параметри режиму визначаються суперпозицією падаючої та відбитої хвиль. За цією причиною доцільно ввести деякі узагальнені величини, які б характеризували саме суперпозицію цих парціальних хвиль. Ці характеристики також введемо через потужність тієї хвилі, що створюється в результаті суперпозиції падаючої та відбитої хвиль.

При одночасному існуванні в ЛП падаючої та відбитої хвиль активна потужність  $P$ , що проходить через вибраний перетин  $\xi$  буде визначатися різницею потужностей які переносяться падаючою  $P_\Pi$  та відбитою  $P_B$  хвилями.

$$P = P_\Pi - P_B = |\dot{u}_\Pi|^2 - |\dot{u}_B|^2 = |\dot{u}_\Pi|^2 \cdot \left(1 - |\dot{\Gamma}_H|^2\right), \quad (6.27)$$

Для подальшого розгляду представимо потужність  $P$  в дещо іншому вигляді

$$P = \operatorname{Re}\left\{\dot{u}_H \cdot (1 + \dot{\Gamma}) \cdot \left[\dot{u}_H^* \cdot (1 - \dot{\Gamma}^*)\right]\right\} = |\dot{u}_H|^2 \cdot \left[1 - |\dot{\Gamma}|^2 + \operatorname{Re}(\dot{\Gamma} - \dot{\Gamma}^*)\right] = |\dot{u}_H|^2 \cdot \left(1 - |\dot{\Gamma}_H|^2\right).$$

Тут знак рівності можна ставити, бо для будь-якої комплексної величини  $\dot{A}$  виконується рівність  $\operatorname{Re}(\dot{A} - \dot{A}^*) = 0$ , оскільки величина у дужках є чисто уявною.

В той же час потужність можна визначити, як  $\operatorname{Re}(\dot{u} \cdot \dot{i}^*)$ . Порівнюючи це визначення потужності з попереднім виразом, бачимо, що величину в перших квадратних дужках можна **формально** інтерпретувати, як деяку напругу, а в других-як деякий струм. Ця аналогія дозволяє **формально** ввести для будь-якого хвильового процесу в ЛП наступні характеристики:

– повну нормовану напругу  $\dot{u}$  в вигляді суми нормованих напруг падаючої  $\dot{u}_H$  та відбитої  $\dot{u}_B$  хвиль:

$$\dot{u} = \dot{u}_H + \dot{u}_B = \dot{u}_H \cdot (1 + \dot{\Gamma}), \sqrt{Bm}; \quad (6.28)$$

– повного нормованого струму  $\dot{i}$  в вигляді різниці нормованих напруг падаючої  $\dot{u}_H$  та відбитої  $\dot{u}_B$  хвиль:

$$\dot{i} = \dot{u}_H - \dot{u}_B = \dot{u}_H \cdot (1 - \dot{\Gamma}), \sqrt{Bm}. \quad (6.29)$$

В відповідності з визначенням (6.28) повна нормована напруга в ЛП виявляється пропорційною напруженості повного електричного поля в ЛП для суперпозиції падаючої та відбитої хвиль.

З врахуванням введених визначень для повної нормованої напруги  $\dot{u}$  та повного нормованого струму  $\dot{i}$ , формула для визначення активної потужності, яка проходить через обраний

переріз ЛПІ буде мати точно такий же вигляд, як і для теорії низькочастотних електричних кіл:

$$P = \operatorname{Re}(\dot{u} \cdot \dot{i}^*). \quad (6.30)$$

Після введення повної нормованої напруги  $\dot{u}$  та повного нормованого струму  $\dot{i}$  для дослідження режиму ЛПІ можна ввести і додаткові величини:

– повний нормований опір

$$\dot{z} = r + jx = \frac{\dot{u}}{\dot{i}} = \frac{1 + \dot{\Gamma}}{1 - \dot{\Gamma}}; \quad (6.31)$$

– повна нормована провідність

$$\dot{y} = g + jb = \frac{\dot{i}}{\dot{u}} = \frac{1 - \dot{\Gamma}}{1 + \dot{\Gamma}}. \quad (6.32)$$

Величини  $\dot{z}$  та  $\dot{y}$ , визначені, відповідно, за (6.31) та (6.32) вже є безрозмірними. Вони також є взаємо оберненими (за визначенням) величинами

$$\dot{z} = \frac{1}{\dot{y}}; \dot{y} = \frac{1}{\dot{z}}. \quad (6.33)$$

З розглянутого витікають співвідношення нормування напруг та струмів в лініях передачі з хвилею TEM:

$$\dot{u}_{II} = \frac{\dot{U}_{II}}{\sqrt{Z_X}} = \dot{I}_{II} \cdot \sqrt{Z_X}; \dot{i} = \frac{\dot{U}}{\sqrt{Z_X}}; i = \dot{I} \cdot \sqrt{Z_X}. \quad (6.34)$$

В свою чергу, з співвідношення (6.34) витікає правило для нормування повних опорів (провідностей) та опору (провідності) навантаження:

$$\dot{z} = \frac{\dot{u}}{\dot{i}} = \frac{\dot{U}}{\sqrt{Z_X} \cdot \dot{i} \cdot \sqrt{Z_X}} = \frac{\dot{Z}}{Z_X} = \frac{1 + \dot{\Gamma}}{1 - \dot{\Gamma}}; \quad \dot{z}_H = \frac{\dot{Z}_H}{Z_X};$$

$$\dot{y} = \dot{Y} \cdot Z_X = \frac{1 - \dot{\Gamma}}{1 + \dot{\Gamma}}; \quad \dot{y}_H = \dot{Y}_H \cdot Z_X. \quad (6.35)$$

## 6.4 Коаксіальна лінія

Одною з найбільш поширених ліній передачі з Т – хвилею є коаксіальна лінія (коаксіальний кабель КК), яка складається з двох аксіально розташованих провідних циліндрів (рис. 6.6).

Внутрішній простір між провідниками заповнюється діелектриком з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon_r > 1$ , відносна магнітна проникність діелектрика  $\mu_r = 1$ . Однією з функцій діелектричного заповнення є центрування внутрішнього провідника відносно зовнішнього.

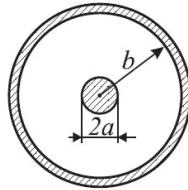


Рисунок 6.6 – Поперечний перетин коаксіальної лінії

Погонну ємність лінії можна обчислити, використовуючи співпадання електричного поля в лінії з електростатичним полем втакій же структурі. Хай між внутрішнім і зовнішнім провідниками прикладено різницю потенціалів  $U$ , під дією якої на провідниках підтримується погонна густина зарядів  $+q$  (наприклад, на внутрішньому провіднику) та  $-q$  (на зовнішньому провіднику).

Тоді, з теореми Гауса  $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q$ , де  $Q$  – повний заряд будь-якого провідника, витікає, що при  $a \leq r \leq b$  радіальна складова вектору електричної індукції  $D = \frac{q}{2\pi r} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \right]$ .

Оскільки в електростатичному полі різниця потенціалів  $U = \int \vec{E} d\vec{r}$ , то її можна обчислити, використовуючи матеріальне рівняння  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$ . При цьому знаки векторів можна вилучити, оскільки електричне поле має лише одну радіальну складову. Інтегрування дає:

$U = \int_a^b \frac{q}{2\pi\epsilon_a r} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ , звідки погонна ємність коаксіальної лінії

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left[ \frac{\Phi}{\text{М}} \right]. \quad (6.36)$$

Аналогічно, використовуючи співпадання магнітного поля в лінії з магнітостатичним полем, знаходиться погонна індуктивність.

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int_a^b \frac{\mu_a I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\text{Гн}}{\text{М}} \right]. \quad (6.37)$$

Хвилевий опір відповідно до (6.15) буде:

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (6.38)$$

Підстановка значень  $\mu_0$  і  $\epsilon_0$  с урахуванням  $\mu_r = 1$  дає:

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [\text{Ом}]. \quad (6.39)$$

Слід зазначити, що поперечна хвиля існує в коаксіальній лінії лише за умови, що лінію заповнено *однорідним* діелектриком.

#### 6.4.1 Експериментальне визначення параметрів режиму ЛП

Режим роботи навантаженої ЛП (якщо навантаження неузгоджене  $\dot{Z}_H \neq Z_X$ ) характеризується коефіцієнтом відбиття  $\dot{\Gamma}_H$ , який визначається з співвідношення (6.19) у випадку чисто активного навантаження, або коли опір навантаження має комплексний характер.

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{\dot{Z}_H - Z_X}{\dot{Z}_H + Z_X} = \frac{\dot{z}_H - 1}{\dot{z}_H + 1}, \quad (6.40)$$

Тут  $\dot{Z}_H$  ненормований,  $\dot{z}_H$  – нормований опори навантаження, а  $Z_X$  ненормований хвильовий опір ЛП. Ці величини зв'язано співвідношеннями нормування (6.35). На практиці вимір величини  $\dot{\Gamma}_H$ , або її модуля  $|\dot{\Gamma}_H|$  зустрічає деякі труднощі, які зв'язано з тим, що необхідно «відокремити» падаючу та відбиту хвилі.

Більш доступними для виміру є ті параметри, які можуть бути визначені *безпосередньо* з розподілу повної напруги вздовж ЛП –  $\dot{U}(l)$ , або відповідній їй повної нормованої напруги  $\dot{u}(l)$ . Це є величина КСХ – вираз (6.21), через яку визначається модуль коефіцієнту відбиття  $|\dot{\Gamma}_H|$  – вираз (6.22).

Для визначення КСХ достатньо вимірів напруг в максимумі та в мінімумі:

$U(l_{MAX})=U_{MAX} = |\dot{U}_I| + |\dot{U}_B|, U(l_{MIN})=U_{MIN} = |\dot{U}_I| - |\dot{U}_B|$  –  
 поздовжнього розподілу повної напруги  $\dot{U}(l)$ . Вимір  $U_{MAX}$  та  $U_{MIN}$  можна виконати безпосередньо шляхом переміщення вздовж досліджуваної лінії ідеального високочастотного вольтметра (рис.6.7а), або такого прибору, покази якого були б пропорційними напрузі в даному перетині лінії ( $l_{MAX}, l_{MIN}$ ). Суттєво, щоб такий вимірювальний прилад не вносив спотворень в розподіл поля вздовж лінії, або, іншими словами, не змінював розподілу напруги.

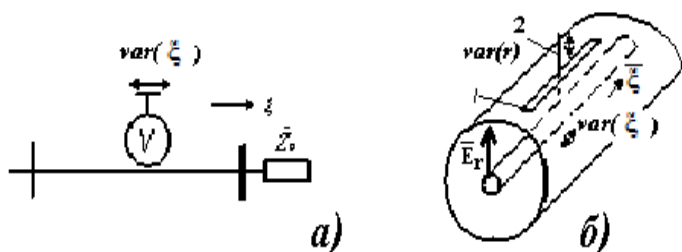


Рисунок 6.7 – До створення вимірювальної лінії з відрізка КК

Відрізок регулярної ЛП, вздовж якого пересувається вольтметр (в загальному випадку – деякий індикаторний пристрій) прийнято називати **вимірювальною лінією**. Якщо досліджувану ЛП виконано на основі коаксіального кабелю, то вимірювальну лінію також виконують на основі відрізка КК. Він будуть слугувати основою коаксіальної **вимірювальної лінії**. В КК треба ввести електричний зонд, який треба розташувати так, щоб його поздовжня вісь співпадала з напрямом електричних силових ліній електромагнітного поля хвилі в КК. На рис.6.7б вісь електричного зонду 2 співпадає з напрямком  $\vec{E}_r$  хвилі типу ТЕМ в коаксіальному кабелі. В зонді буде наводитись струм ВЧ за рахунок чого буде здійснюватись відгалуження досить малої частки від тої потужності, яка передається по КК. Для того, щоб введення зонду не визвало суттєвого спотворення структури

електромагнітного поля в КК, глибина його занурення повинна бути мінімально можливою при заданій чутливості вимірювального приладу. З цією метою конструкція пересувної каретки, на якій встановлюється зонд, звичайно передбачує можливість регулювання глибини занурення зонду. Цей факт на рис.6.7б відображено позначкою  $\text{var}(r)$  та двоспрямованою вертикальною стрілкою. Можливість пересування каретки в напрямі поздовжньої вісі відображено позначкою  $\text{var}(\xi)$  та двоспрямованою горизонтальною стрілкою. Звичайно відгалужується не більше 1...2 % від потужності хвилі в КК, що забезпечує досить малі спотворення структури поля.

Для того, щоб забезпечити можливість введення зонду у внутрішню область КК, треба у його зовнішньому провіднику виконати поздовжню щілину. Для того, щоб введення цієї щілини не призводило до суттєвого спотворення структури електромагнітного поля в ЛП треба виконати наступні умови:

- поперечні розміри (в напрямку вісі  $\phi$  для коаксіального кабеля) повинні бути мінімально можливими;

- щілину треба розташувати так, щоб її в поперечному напрямку не перетинали поверхневі струми (вектор густини поверхневого струму  $\vec{\eta} = -\vec{n}_0 \times \vec{H}_\tau$ ,  $\vec{H}_\tau$  – тангенційна складова напруженості магнітного поля безпосередньо біля провідної поверхні).

Виконання другої умови забезпечить мінімально можливе значення ефекту випромінення зі щілини. Біля внутрішньої поверхні зовнішнього провідника коаксіального кабеля (для хвилі типу TEM) існує лише складова магнітного поля  $H_\phi = H_\tau$ , напруженість якої не залежить від  $\phi$ , а тому поверхневий струм буде мати лише складову  $\eta_\xi$ . При цій умові будь-яка поздовжня щілина в зовнішньому провіднику коаксіального кабеля не буде випромінювати.

Для виміру використовують непрямі (або опосередковані) методи в основі яких лежить процес детектування ВЧ сигналу.

Загальну схему індикаторних пристроїв, які використовуються в коаксіальних вимірювальних лініях наведено на рис. 6.8.

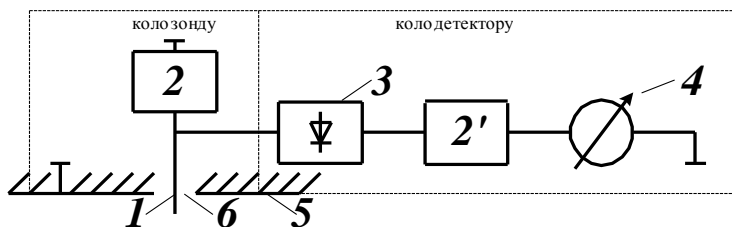


Рисунок 6.8 – Схема індикаторної головки

Цей пристрій зветься індикаторною головкою. Індикаторна головка складається з двох кіл: зонду та детектору. Перша складається з зонду та резонансного контуру для настроювання зонду в резонанс; коло зонду, як уже було зазначено вище, електрично слабко зв'язане з ЛП вимірювальної лінії. Коло детектору з ЛП вимірювальної лінії безпосередньо взагалі не зв'язано і збуджується від кола зонду через деякі елементи зв'язку (найчастіше зв'язок або гальванічний, або ємнісний). Коло детектору складається з елемента зв'язку, детектору (НВЧ випростувальний діод), резонансного контуру низької частоти, що виконує функції ФНЧ для детектору та індикатору.

Таким чином, при пересуванні каретки з детектором вздовж вимірювальної лінії безпосередньо вимірюється не ВЧ напруга і не напруженість ЕМП, а **випростуваний струм детектору**. Але детектор – це нелінійний пристрій і для виміру КСХ необхідно спочатку проградувати весь пристрій в одиницях ВЧ напруги. Але виміри напруги безпосередньо в вольтах і не вимагається, оскільки в вираз для КСХ входить лише *відношення* напруг. Але навіть при такому підході треба мати на увазі, що при малих потужностях використовуваних ВЧ генераторів ( $P < 10 \cdot 10^{-3}$  Вт) вольт-амперна характеристика напівпровідникових ВЧ детекторних діодів  $I_{ДЕТ} = f(|U_{Д}|)$  має приблизно квадратичний характер. Такий режим прийнято

називати квадратичним детектуванням, а відповідний детектор – квадратичним детектором. Його вольт-амперна характеристика

$$I_{ДЕТ} \approx k \cdot |\dot{U}|^2, \quad (6.41)$$

де  $k$  – параметр, який залежить від властивостей ВЧ діоду та режиму його роботи і в першу чергу від величини  $\dot{U}$ , а тоді в максимумі та в мінімумі стоячої хвилі маємо

$$I_{ДЕТ.МАХ} \approx k \cdot |\dot{U}|_{ДЕТ.МАХ}^2; I_{ДЕТ.МІН} \approx k \cdot |\dot{U}|_{ДЕТ.МІН}^2,$$

звідки

$$КСХ = \frac{|\dot{U}|_{МАХ}}{|\dot{U}|_{МІН}} = \sqrt{\frac{I_{ДЕТ.МАХ}}{I_{ДЕТ.МІН}}}. \quad (6.42)$$

Відмітимо, що описана методика використовує в якості інформативного параметру сталий струм детектору, а в якості індикаторного приладу – прибор для вимірювання сталого струму. Чутливість таких приборів звичайно обмежена величиною в  $1 \cdot 10^{-6} \text{ А}$ , що в більшості випадків недостатньо. Для підвищення чутливості вимірювальної лінії треба перейти від виміру сталого у часі струму до виміру змінних у часі величин. В цьому випадку ВЧ-генератор, який живить вимірювальну лінію, повинен працювати в режимі низькочастотної амплітудної модуляції. Найчастіше використовують меандрову модуляцію з періодом  $T_M = 1 \cdot 10^{-3} \text{ С}$ . Всі стандартні ВЧ генератори забезпечують можливість роботи в режимі внутрішньої амплітудної модуляції меандрового типу. Тоді після детектування та низькочастотної фільтрації для індикації можна застосувати звичайний мілівольтметр типу ВЗ-34 з чутливістю  $\sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ В}$ .

Для визначення модуля вхідного опору треба пересуванням каретки з зондом вздовж щілини в ЛП (робоча частина

вимірювальної лінії з покажчиком відстані) зняти криву розподілу повної напруги по поздовжній координаті  $u(l)$ . З цієї кривої визначаємо  $u(l_{MAX}) = |\dot{u}_I| + |\dot{u}_B| = u_{MAX}$  та  $u(l_{MIN}) = |\dot{u}_I| - |\dot{u}_B| = u_{MIN}$  і по цим значенням обраховуємо  $KCX = u_{MAX}/u_{MIN}$ . Після цього, у відповідності з (6.21) знаходимо модуль коефіцієнту відбиття від навантаження  $|\Gamma(0)| = |\Gamma_H| = (KCX - 1)/(KCX + 1)$ . В свою чергу, у відповідності з (6.19) після нормування отримаємо для чисто активного навантаження

$$\Gamma_H = \frac{r_H - 1}{r_H + 1} = \frac{1 - g_H}{1 + g_H}, \quad (6.43)$$

а коефіцієнт стоячої хвилі, оскільки значення його  $\infty > KCX > 1$ , буде

$$KCX = \frac{1 + \Gamma_H}{1 - \Gamma_H} = \begin{cases} r_H, & \text{якщо } r_H > 1; \\ 1/r_H, & \text{якщо } r_H < 1. \end{cases} \quad (6.44)$$

## 6.5 Двопровідна лінія

Поперечний перетин і структуру поля в двопровідній лінії показано на рис. 6.9.

По аналогії з коаксіальною лінією, використовуючи співпадання полів в лінії із статичними полями, знаходяться погонні ємність, індуктивність і хвилевий опір двопровідної лінії.

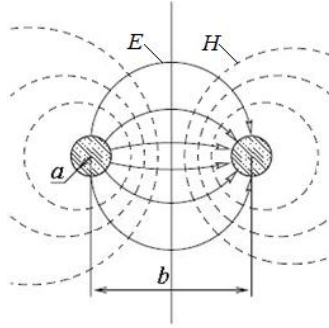


Рисунок 6.9 – Поперечний перетин та структура поля двопровідної лінії

Погонна ємність:

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)} \left[ \frac{\Phi}{\text{М}} \right]. \quad (6.45)$$

Погонна індуктивність:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \left[ \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{М}} \right]. \quad (6.46)$$

Хвильовий опір:

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right). \quad (6.47)$$

Слід звернути увагу, що в двопровідній ЛП зовсім відсутні будь-які елементи, які б обмежували область існування її ЕМП. Це призводить до того, що ЕМП двох поряд розташованих двопровідних ЛП будуть сильно впливати одна на одну. В той же час, цей різновид ЛП є основним для організації телефонного зв'язку, де в осерді одного кабеля розташовують до 3...4 тис. симетричних пар. Для зменшення взаємного впливу між ними застосовують метод скручення як самої симетричної пари, так і їх сукупностей (жмутки, повиви).

## 6.6 Несиметрична смужкова лінія (НСЛ)

Конструкцію НСЛ наведено на рис. 6.10. Сучасним станом це – основна структура для створення гібридних планарних ІС ВЧ.

Це двозв'язана структура. Вище наголошувалося, що в мікросмужковій лінії чиста Т-хвиля існувати не може, оскільки діелектричне заповнення в лінії неоднорідне (підкладка з  $\epsilon_r > 1$  і над нею повітря з  $\epsilon_r = 1$ ). Це приводить до того, що в

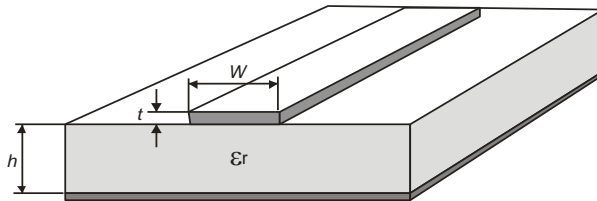
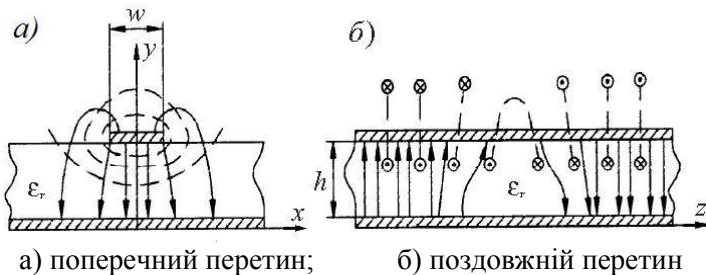


Рисунок 6.10 – Конструкція несиметричної смужкової лінії

структурі електромагнітного поля лінії з'являються поздовжні складові, за рахунок яких виникає дисперсія. Наближено розподіл електромагнітного поля в НСЛ наведено на рис. 6.11, де суцільними лініями наведено силові лінії напруженості електричного поля, а пунктирними – силові лінії напруженості магнітного поля.



а) поперечний перетин;

б) поздовжній перетин

Рисунок 6.11 – Структура полів в НСЛ

Складний характер електромагнітного поля не дозволяє отримати строгі аналітичні вирази для основних параметрів НСЛ. У зв'язку з цим, в інженерній практиці використовуються наближені співвідношення, які забезпечують достатню точність моделювання. В основі цих методів лежить електростатичне наближення.

Одним з наближених параметрів є так звана ефективна відносна діелектрична проникність, яку може бути визначено за виразом:

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{C}{C_0}, \quad (6.48)$$

де  $C_0$  – погонна ємність лінії з повітряним заповненням;  
 $C$  – погонна ємність лінії за наявності діелектричної пластини.

Величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  характеризує співвідношення між енергіями, які концентруються в повітрі та в діелектричній пластині. НСЛ з широкою смужкою ( $\frac{W}{h} \rightarrow \infty$ ) близька за своїми властивостями до плоского конденсатора, в якому практично вся енергія електричного поля концентрується в діелектриці під смужкою. Тому величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  вельми близька до  $\varepsilon_r$ . Якщо

смужка вузька ( $\frac{W}{h} \rightarrow 0$ ), то енергія електричного поля розподіляється практично порівну між повітрям і діелектриком. В цьому випадку величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$  близька до напівсуми  $\varepsilon_r$  повітря і діелектричного шару, тобто  $\varepsilon_{\text{еф}} = (\varepsilon_r + 1)/2$ . Таким чином, величина  $\varepsilon_{\text{еф}}$ , залежно від ширини смужки, змінюється в межах:

$$\frac{(\varepsilon_r + 1)}{2} < \varepsilon_{\text{еф}} < \varepsilon_r.$$

Довжина хвилі в НСЛ визначається виразом:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}}. \quad (6.49)$$

де  $\lambda_0$  і  $c_0$  – довжина хвилі і швидкість світла в повітрі, відповідно.

Наближені вирази для розрахунку параметрів несиметричних смужкових ліній при  $\varepsilon_r < 17$  та  $0.05 < W/h < 20$  при нульовій товщині смужки мають вигляд:

для  $W/h < 1$

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} \ln \left( \frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right), \quad (6.50)$$

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{12h}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} + 0.041 \left( 1 - \frac{W}{h} \right)^2 \right], \quad (6.51)$$

для  $W/h \geq 1$

$$Z_X = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{\text{еф}}}} \left( \frac{W}{h} + 0.667 \ln \left( \frac{W}{h} + 1.4444 \right) + 1.393 \right)^{-1}, \quad (6.52)$$

$$\varepsilon_{\text{еф}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left( 1 + \frac{12h}{W} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.53)$$

Похибка розрахунку за наведеними формулами не перевищує 1%.

Величина хвильового опору НСЛ на підкладинці з полікору, які використовуються на практиці, лежить в межах  $20 < Z_X < 125 \text{ Ом}$ . Верхню межу обумовлено технологічними обмеженнями і підвищеним випромінюванням, а нижню зв'язано з можливістю появи вищих мод в поперечній площині лінії.

Використання НСЛ досить довгий час було домінуючим при створенні ІС НВЧ, але створювані конструкції були виключно планарними, тобто інтегралізація здійснювалась лише в площині смужки. За цими обставинами абсолютно природним виглядало прагнення винахідників, дослідників та розробників організувати інтегралізацію ще й по третій координаті.

Це прагнення матеріалізувалось в створенні наприкінці ХХ сторіччя нового підходу до побудови ІС НВЧ вже в тривимірному варіанті, яке отримало назву **«об'ємні інтегральні структури (схеми) НВЧ»** (ОІС НВЧ). В ОІС НВЧ при створенні елементної бази використовується принцип **комбінування ЛП смужкового та щілинного типів**.

## 6.7 ЛП щілинного типу

Однією з перших було досліджено симетричну щілинну лінію (СЩЛ); її перетин та ізометрію наведено на рис.6.12. Треба **звернути увагу** на те, що тут металізації А та Б, поперше, нанесено лише на одну сторону діелектричної підкладки а, по-друге, вони є напівнескінченими: металізація А в напрямі  $-x$ , а металізація Б в напрямі  $+x$ . Як побачимо далі, ці обставини накладають свій відбиток на структуру складових ЕМП головної хвилі СЩЛ. Але дослідження виявило, що комбінування ЛП лише двох типів – НСЛ та СЩЛ не завжди дозволяє побудувати досить досконалу елементну базу вже ОІС НВЧ – потрібен був ще такий, так би мовити, «елемент зв'язку» між ними, який би дозволив створювати довершену за своїми властивостями конструкцію.

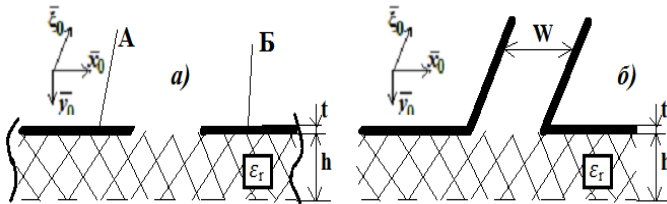


Рисунок 6.12 – До розгляду СЩЛ

Таким «зв'язковим елементом» виявилася несиметрична щілинна лінія (НСЩЛ) – рис.6.13; НЩЛ являє собою дві напівнескінчені металізації, які нанесено на обидві сторони (нижню та верхню) діелектричної підкладки, при цьому можливі два варіанти взаємного розміщення металізацій, поперечні перетини яких наведено на рис. 6.13.

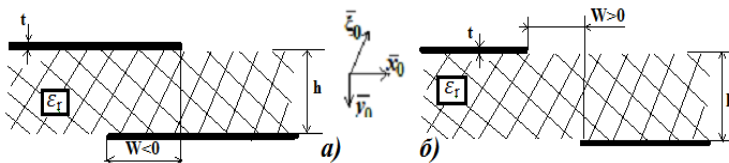


Рисунок 6.13 – До розгляду НЩЛ

Тут позначення  $W < 0$  та  $W > 0$  чисто умовні та не несуть ніякого фізичного змісту. Позначення  $W < 0$  (рис.6.13а) означає, що металізації нанесено з перекриттям, а  $W > 0$  (рис.6.13б) – металізації нанесено без перекриття.

Одним із різновидів щілинних структур є копланарна лінія (КЛ). Її застосовують для створення елементної бази з високим ступенем симетрії та зручним вмиканням навісних елементів. На рис.6.14 наведено поперечний переріз а) та ізометрію, б) для КЛ.

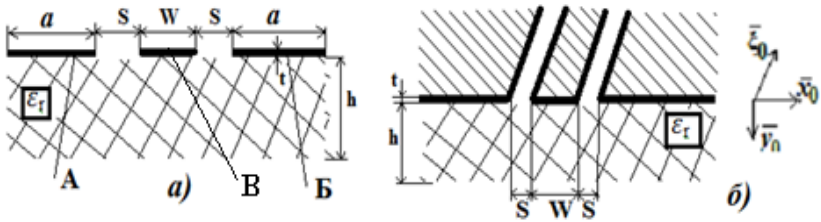


Рисунок 6.14 – До розгляду КЛ

КЛ складено з двох напівнескінчених металізацій А та Б і смужкового провідника В, які нанесено на **одну** (верхню) сторону діелектричної підкладки. Металізація А є напівнескінченою в напрямі вісі  $-x$ , а металізація Б - в напрямі вісі  $+x$ . Смужковий провідник В має розмір  $W$  порядку 1 мм.

### 6.7.1 Симетрична щілинна лінія (СЩЛ)

Перед розглядом структури поля і, відповідно, типу головної хвилі, проведемо дослідження на предмет можливості існування в СЩЛ хвилі типу ТЕМ. Для цього подумки нанесемо на ліву та праву частини металізації статичні заряди  $+q$  та  $-q$  (див.рис.6.15).

Внаслідок цього з'явиться поперечне електричне поле з напруженністю  $\vec{E}_S$ ; силові лінії цього поля буде зосереджено в

основному в підкладинці, оскільки  $\epsilon_r > 1$  ( $\epsilon_r$  зазвичай має значення порядку 10). Але, для того, щоб існувала хвиля типу ТЕМ, яка поширюється в додатньому напрямку вісі  $\xi$ , тобто має вектор Пойнтинга  $\vec{P}_\xi = \vec{E}_S \times \vec{H}_S$ , повинна існувати *поперечна* складова напруженості магнітного поля  $\vec{H}_S$ . Встановимо властивості силової лінії складової  $\vec{H}_S$ :

–  $\vec{H}_S$  повинна бути всюди перпендикулярною до  $\vec{E}_S$ , оскільки  $\vec{P}_\xi = \vec{E}_S \times \vec{H}_S$ , а це векторний добуток і вектори  $\vec{P}_\xi$ ,  $\vec{E}_S$ ,  $\vec{H}_S$  повинні складати праву трійку;

– силова лінія  $\vec{H}_S$  повинна бути замкнутою, бо, як витікає з третього рівняння Максвелла  $\text{div} \vec{H} = 0$ , тобто магнітного заряду в природі не існує.

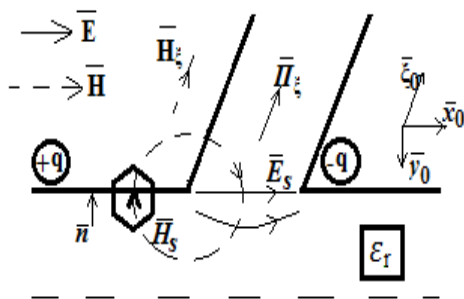


Рисунок 6.15 – До з'ясування структури поля в СЩЛ

**Висновок:** силова лінія вектору  $\vec{H}_S$  повинна мати вигляд, як зображено на рис.6.15.

Але, з другої сторони, існування такої силової лінії протирічить граничній умові для магнітного поля  $H_n = 0$  на провідній поверхні, а в районі, який виділено шестикутником, силова лінія  $\vec{H}_S$  є нормальною (перпендикулярною) до поверхні. Таким чином, *поперечна* складова  $\vec{H}_S$  зобов'язана *перейти в поздовжню* складову  $\vec{H}_\xi$ , як і показано на рис.6.16.

Якщо виходити з умови обов'язкової замкнутості магнітної силової лінії, то вона повинна утворити сідлоподібну криву. Щоб уникнути захарашення, на рис.6.16 показано тільки ліву частину. Права частина аналогічна.

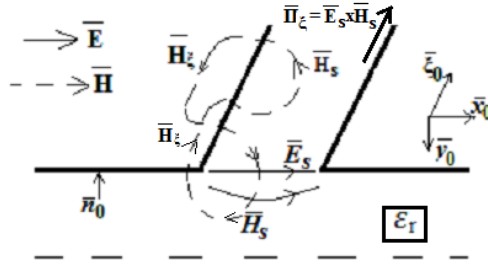


Рисунок 6.16 – До обґрунтування структури магнітного поля в СЩЛ

**Висновок:** оскільки магнітне поле СЩЛ зобов’язано мати поздовжню складову  $\bar{H}_\xi \neq 0$ , то **головною хвилею СЩЛ є хвиля типу Н**; особливість цієї хвилі в СЩЛ полягає в тому, що ця хвиля типу Н **не має відсічки**, тобто її критична частота  $f_{\text{КР}}^{\text{СЩЛ}} = 0$ . Це твердження обґрунтовано можливістю існування в СЩЛ сталого струму ( $f = 0$ ). Таким чином в СЩЛ головною хвилею буде не «чисто хвиля типу Н», а хвиля, яку можна назвати «квазі Н типу».

Оскільки поздовжні  $\bar{H}_\xi$  та поперечні  $\bar{H}_s$  складові магнітного поля зсунуто за фазою на  $\pi/2$ , то можна сказати, що магнітне поле в СЩЛ має еліптичну поляризацію (порівняти з ПХ), що використовується при створенні не взаємних пристроїв з феритами.

### 6.7.2 Порівняння властивостей НСЛ та СЩЛ

Практично цікавим є питання порівняння властивостей НСЛ та СЩЛ при їх однакових геометричних ( $W$ ,  $h$ ) та електрофізичних ( $\epsilon_r$ ) параметрах. Будемо вважати, що екрани віддалено так далеко, що з ними можна не рахуватися і вважати обидві лінії неекраниваними. На рис.6.17а наведено криві залежностей хвильових опорів обох ліній від геометричного параметру  $W/h$ .

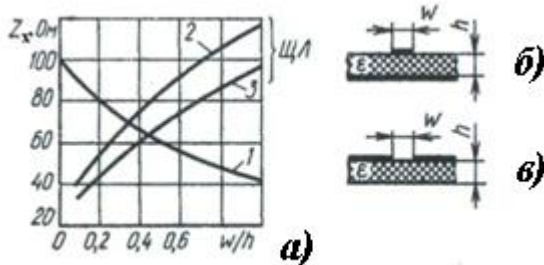


Рисунок 6.17 – Порівняння характеристик СЩЛ та НСЛ

Як видно із рисунку, при однаковій геометрії ліній більші значення хвильового опору легше реалізувати в СЩЛ; можна сказати, що СЩЛ – це «високоомна» лінія, а НСЛ – це «низькоомна» лінія. Для реалізації низькоомної СЩЛ доведеться виконувати щілину дуже малого розміру (при  $h = 1\text{мм}$   $W < 100\text{мкм}$ ), що технологічно важко реалізувати.

При більш ретельному і уважному дослідженні, з застосуванням підходу на електродинамічному рівні строгості, виявляється, що НСЛ має більше значення коефіцієнту сповільнення та суттєво меншу залежність параметрів від частоти (меншу дисперсію), ніж СЩЛ. Втрати на одиницю довжини ліній (погонні втрати) ліній обох типів є величинами одного порядку.

За металізаціями нижньої та верхньої сторін підкладки СЩЛ та НСЛ є антиподами. Це видно з порівняння рис.6.17б (НСЛ) та рис.6.17в (СЩЛ), бо там, де НСЛ має металізацію, у СЩЛ вона відсутня і навпаки.

### 6.7.3 Несиметрична щілинна лінія (НЩЛ)

Наголосимо ще раз, що тут напрямну систему створюють дві напівнескінчені металізації, які нанесено на обидві сторони (нижню та верхню) діелектричної підкладки. Неохідно відмітити, що в НЩЛ відсутні конструкторсько-технологічні обмеження, які зв'язано з технічною реалізацією вузьких смужок або вузьких щілин. Це дозволяє виконувати НЩЛ з практично будь-яким значенням хвильового опору. Зі сторони великих значень хвильового опору тут обмеження накладає тільки

можливість виникнення випромінювання, оскільки НЩЛ – це принципово відкрита напрямна структура, а зі сторони малих (коли існує велике перекриття металізацій – рис.6.13а), – можливістю виникнення хвиль хвилеводного типу та поверхневих хвиль на межі розділу діелектрик-повітря.

Для побудови поля в НЩЛ застосуємо той же підхід, як і при дослідженні СЩЛ і тоді отримаємо структуру поля, яку наведено на рис.6.18. Щоб не захарашувати рисунок тут наведено тільки одну половину. Оскільки магнітне поле має поздовжню складову  $\bar{H}_z$ , то це хвиля типу Н, але, з другої сторони, в такій напрямній структурі може існувати сталий струм ( $f=0$ ), отже *це хвиля квазі-Н типу*.

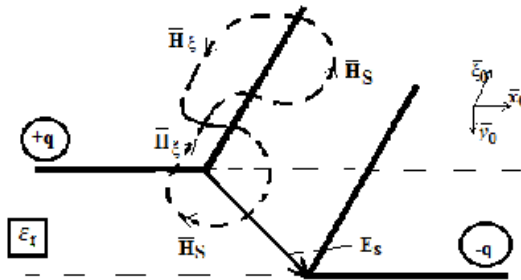


Рисунок 6.18 – Структура поля в НЩЛ (одна ліва половина)

На рис.6.19 наведено експериментальні дані (крапки) по вивченню НЩЛ з підкладинкою із полікору ( $\epsilon_r = 9.8$ ).

Виміри виконувались в довгохвильевій області сантиметрового діапазону; результати розрахунку за наближеними формулами – це криві 1. Для порівняння на цьому ж малюнку наведено результати розрахунку НСЛ (криві 2) та СЩЛ (криві 3).

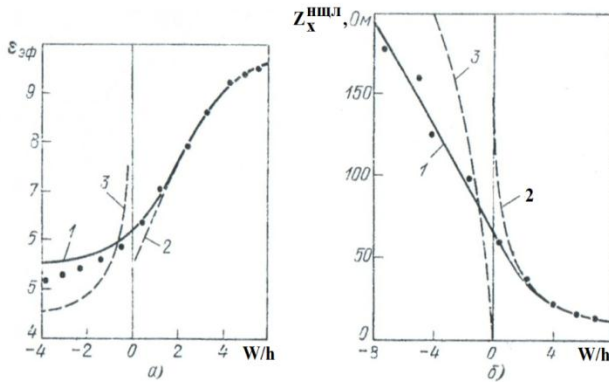


Рисунок 6.19 – Залежності  $\epsilon_{\text{реф}}$  (а) та  $Z_X^{\text{НСЦЛ}}$  (б) НЩЛ від  $W/h$ ; підкладка - полікор,  $\epsilon_r = 9.8$

Аналіз наведених результатів показує, що НЩЛ володіє рядом цікавих властивостей. По-перше, у випадку перекриття металізацій ( $W > 0$ )  $Z_X^{\text{НСЦЛ}}$  практично співпадає з  $Z_X^{\text{НСЛ}}$ . У випадку відсутності перекриття ( $W < 0$ ) НЩЛ за своїми властивостями «схожа» на СЩЛ.

Ще раз наголосимо, що в НЩЛ відсутні конструктивно-технологічні особливості (фактично, це обмеження при технічній реалізації), які зв'язано з реалізацією вузьких смужок та вузьких щілин. Це дозволяє виконувати НЩЛ з практично будь-якою потрібною величиною  $Z_X^{\text{НСЦЛ}}$ .

#### 6.7.4 Копланарна лінія

Тут напрямну систему створює смужка та дві напівнескінчені металізації, які нанесено на одну сторону діелектричної підкладки. КЛ за своєю геометрією в деякій мірі можна асоціювати з СЩЛ. Тут провідні (металеві) елементи нанесено на одну сторону підкладки, отже для аналізу можливої структури поля можна застосувати той же підхід, що і було застосовано для СЩЛ. Він показує, що зобов'язана з'явитись поздовжня складова магнітного поля  $\vec{H}_z$ . Але наявність

$\vec{H}_z$  властива хвилям типу  $H$ , отже треба зробити висновок, що в КЛ будуть поширюватись хвилі типу  $H$ , але з критичною частотою  $f_{KP} = 0$  (бо може існувати сталий струм); таким чином – це хвиля квазі- $H$  типу.

Оскільки це трипровідна напрямна структура, то в ній можливе збудження парних та непарних хвиль. Структуру поля парної хвилі наведено на рис.6.20 (а), а структуру поля непарної хвилі – на рис.6.20 (б). На рис.6.20 (в), рис.6.20 (г) наведено структуру позовжніх струмів (зв'язано з поперечним магнітним полем).

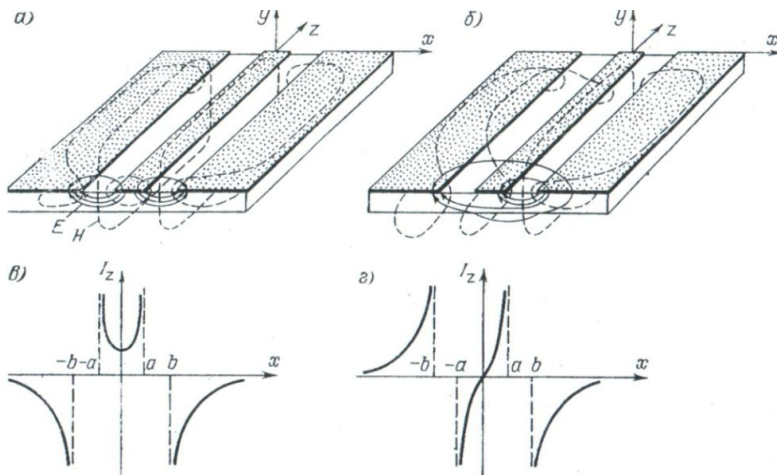


Рисунок 6.20 – До розгляду поля в копланарній лінії

Непарна хвиля виникає при будь-якому порушенні симетрії, наприклад при вмиканні в лінію змішувальних діодів. Ця хвиля є паразитною, вона має велику дисперсію та ряд других негативних властивостей, які спотворюють роботу пристроїв, побудованих з застосуванням КЛ; за цими причинами її завжди прагнуть позбутися (придушити). Для цього застосовують різні технічні прийоми, але найпростіший і досить надійний – це вирівнювання потенціалів периферійних металізацій за рахунок встановлення дротяних перемичок – рис.6.21. З метою зменшення

паразитної індуктивності ці перемички встановлюють парами, а інколи і трійками.

На КЛ зручно розташовувати зовнішні зосереджені елементи при розробці ПС. Як і в СЩЛ магнітне поле на поверхні підкладинки має еліптичну поляризацію (близька до кругової), що дозволяє створювати різні невзаємні пристрої з феритами.

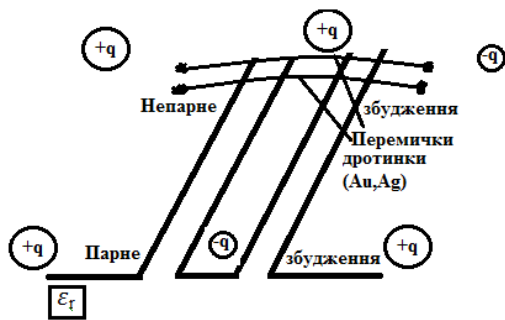


Рисунок 6.21 – Придушення непарної хвилі в КЛ

### Контрольні запитання

1. За якими критеріями класифікують лінії передачі?
2. Як вводиться нормована напруга рухомої хвилі в лінії?
3. Як визначаються параметри нормованої напруги рухомої хвилі в лінії?
4. Яка вводиться поняття гіпотетичної двопровідної лінії? Які її параметри?
5. Що таке телеграфні рівняння лінії?
6. Яка фізична сутність величин  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ?
7. Яка фізична сутність обох доданків в загальному вираженні для розподілу напруги та струму в лінії?
8. Які особливості розподілу  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  спостерігаються в лініях з хвилею типу Т?
9. Як вводиться та визначається коефіцієнт відбиття  $\Gamma$ ?
10. Як вводиться та визначається КСХ?
11. Як вводиться та визначається ККД в лінії?

12. Як вводиться повна нормована напруга та струм в лінії?
13. Як вводиться повний нормований опір та повна нормована провідність в лінії?
14. Як визначаються погонні параметри  $L$  і  $C$  для коаксіальної лінії? Як знайти хвильовий опір?
15. Як експериментально визначаються параметри режиму ЛП?
16. Яку конструкцію має коаксіальна вимірювальна лінія?
17. В чому особливості індикаторної головки вимірювальної лінії?
18. Для чого при вимірюваннях застосовують амплітудну модуляцію?
19. Чим принципово структура поля двопровідної лінії відрізняється від структури поля коаксіальної лінії?
20. Як визначаються параметри двопровідної лінії?
21. Яка фізична сутність параметру  $\mathcal{E}_{\text{еф}}$  для НСЛ?
22. Які обмеження властиві НСЛ? Як визначаються її параметри?
23. Які особливості розподілу поля спостерігаються в СЩЛ та яка хвиля є головною?
24. Порівняння властивостей НСЛ та СЩЛ.
25. За якими властивостями можна віддати перевагу НЩЛ порівняно з НСЛ та СЩЛ?
26. Як розраховуються параметри НЩЛ та який діапазон їх значень?
27. Як утворюється КЛ та які особливості має ЕМП в ній?
28. Як в КЛ придушується хвиля непарного типу?

### Приклади вирішення задач

**Задача 6.1.** Коаксіальний кабель з розмірами  $a = 1\text{ мм}$ ,  $b = 3\text{ мм}$  має суцільне діелектричне заповнення з поліетилену. Визначити хвильовий опір.

### Вирішення

1. За даними табл.3.1 для поліетилену маємо значення відносної діелектричної проникності  $\epsilon_r = 2.3$ .

2. За виразом (6.30) визначаємо хвильовий опір.

$$Z_X = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{2.3}} \cdot \ln\left(\frac{3}{1}\right) \approx 43.5 \text{ Ом}.$$

**Задача 6.2.** Двопровідна повітряна лінія має розміри  $a = 1$  мм,  $b = 10$  мм. Матеріал проводу латунь, частота  $f = 100$  МГц. Визначити погонні параметри  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $G$  та хвильовий опір цієї лінії.

### Вирішення

1. За даними табл.2.2 для латуні маємо значення питомої провідності  $\sigma = 1.4 \cdot 10^7$  См/м.

2. Оскільки лінія повітряна, то  $\epsilon_a = \epsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ .

3. За формулою (6.31) розраховуємо  $C$ .

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b-a}{a}\right)} = \frac{\pi \cdot 10^{-9}}{36\pi \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right)} = 1.264 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}.$$

За формулою (6.32) розраховуємо  $L$ .

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right) = 8.886 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$$

4. Формулу для розрахунку погонного опору  $R$  візьмемо з літератури.

$$R = \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} = \frac{1}{\pi \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1.4 \cdot 10^7}} = 1.615 \frac{\text{Ом}}{\text{м}}$$

5. Величина погонної провідності є  $G = \omega C \cdot \text{tg} \delta$ . Для повітря  $\text{tg} \delta = 0$ , отже і  $G = 0$ .

6. За виразом (6.11) розраховуємо хвильовий опір.

$$Z_X = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{8.886 \cdot 10^{-7}}{1.264 \cdot 10^{-11}}} = 265 \text{ Ом.}$$

З іншої сторони, цей розрахунок можна перевірити, якщо застосувати вираз (6.33).

$$Z_X = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi}{10^{-9}}} \cdot \ln\left(\frac{10-1}{1}\right) \approx 265 \text{ Ом}$$

Бачимо, що результати розрахунків співпадають. Зауважимо, що знання величин  $R$  та  $Z_X$  дозволяє знайти величину сталої згасання  $\alpha_m$  в цій лінії за рахунок втрат в її металевих елементах  $\alpha_m = R/(2Z_X)$ . Щоб знайти повне значення сталої згасання  $\alpha$  треба додатково знайти сталу втрат в діелектричних елементах  $\alpha_d = G \cdot Z_X/2$ . Тоді  $\alpha = \alpha_m + \alpha_d$ .

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 6.3** Лінію передачі, яка має  $Z_X = 75 \text{ Ом}$ , навантажено на комплексний опір, де  $R_H = 150 \text{ Ом}$ ,  $X_H = 50 \text{ Ом}$ . Знайти модуль і фазу коефіцієнту відбиття. За цими параметрами визначити КСХ в лінії передачі і ту частину потужності падаючої хвилі, яку може поглинути навантаження. Визначити ККД цієї лінії. Зробити висновки.

**Задача 6.4** В лініях міжміського широкосмугового електрозв'язку застосовується коаксіальний кабель магістрального типу, для якого нормативними документами рекомендовано значення хвильового опору  $75 \text{ Ом}$ . З метою мінімізації сталої втрат обирають розміри так, щоб  $b/a = 3.6$ . В кабелях марки МК розмір  $b = 9.6 \text{ мм}$ . Визначити розмір  $a$  для цієї марки кабеля та з'ясувати, яким при цьому повинно бути значення відносної діелектричної проникності заповнення кабеля та як досягти такого значення.

**Задача 6.5** Мікросмужкову лінію з  $Z_X = 50 \text{ Ом}$  (рис.6.4) виконано на підкладинці з полікору ( $\epsilon_r = 9.6$ ,  $\text{tg} \delta = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ) товщиною  $h=1 \text{ мм}$ . Визначити ширину смужкового провідника  $W$ . Знайти геометричну довжину чвертьхвильового відрізка цієї лінії.

## 7 ТРАНСФОРМУВАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ КОРОТКИХ ВІДРІЗКІВ ЛП

Найбільш поширені в пристроях телекомунікації напрямні системи – коаксіальні лінії, двопровідні лінії (скручена пара), лінії смужкового та щілинного типу і т. і. – мають досить малі втрати і при малій довжині відрізка (відрізок вважається коротким, якщо його довжина  $L \leq \lambda_x$ ) такої ЛП втратами в ній можна знехтувати; далі будемо вважати, що  $\dot{\gamma} = j\beta_x$ .

### 7.1 Закон трансформації опору короткими відрізками ЛП

Розглянемо короткий відрізок ЛП з ненормованим хвилевим опором  $Z_x$  та фазовою сталою  $\beta_x$ . Виконавши відповідне нормування, перейдемо до еквівалентної лінії з одиничним нормованим безрозмірним опором  $z_x = 1$  та фазовою сталою  $\beta_x$ . Для цієї лінії введемо повздовжню вісь  $l$ , як показано на рис. 7.1 і в перетині  $l = 0$  підключимо навантаження з нормованим опором  $\dot{z}_H$ , а в перетині  $l = L$  – узгоджений генератор  $G$ , який забезпечує існування рухомої хвилі з нормованою напругою  $\dot{u}_H(l) = \dot{u}_H(L) \cdot e^{+j\beta_x l}$ .

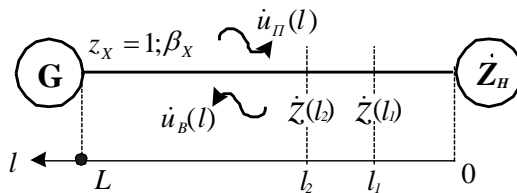


Рисунок 7.1 – До розгляду явища трансформування

Якщо навантаження не узгоджено, то це призведе до появи рухомої відбитої хвилі з нормованою напругою  $\dot{u}_B(l) = \dot{u}_B(L) \cdot e^{-j\beta_x l}$ , причому  $\dot{u}_B(0)$  визначається

співвідношенням між  $\dot{z}_H$  та  $z_X$ , тобто  $\dot{i}_B(l)$  «пам'ятає» про це співвідношення (або «пам'ятає» про значення  $\dot{z}_H$ ). Якщо характеризувати лінію повним нормованим опором  $\dot{z}(l) = [\dot{u}_П(l) + \dot{u}_B(l)] / [\dot{u}_П(l) - \dot{u}_B(l)] = \dot{u}(l)/\dot{i}(l)$  або провідністю  $\dot{y}(l) = 1/\dot{z}(l)$ , то можна сказати, що в будь-якому перетині значення  $\dot{z}(l_1)$ ,  $\dot{z}(l_2)$ , ... «пам'ятає» про значення  $\dot{z}_H$ , бо значення  $\dot{u}_B(l)$  залежить від  $\dot{z}_H$ . Це явище можна трактувати з однієї сторони, як зміну (*трансформацію*) опору навантаження вздовж лінії, а з іншої  $\dot{z}(l_1)$ ,  $\dot{z}(l_2)$ , можна розуміти, як вхідний опір лінії в її відповідному перетині, або, іншими словами, як той опір, який «відчує» генератор, якщо його під'єднати в цьому перетині.

При першому трактуванні можна казати про трансформацію опору навантаження вздовж відрізка лінії, а при другому – про залежність вхідного опору лінії від опору навантаження та поздовжньої координати. Якщо узагальнити, то можна сказати, що в *короткому відрізку лінії її вхідний опір змінюється за поздовжньою координатою за рахунок явища трансформації опору навантаження*.

За визначенням, повний нормований опір лінії передачі  $\dot{z} = \dot{u}/\dot{i} = (1 + \dot{\Gamma}) / (1 - \dot{\Gamma})$ . В свою чергу  $\dot{\Gamma}$  є функцією від  $l$ , яка при умові  $\alpha = 0$ , тобто  $\dot{\gamma} \approx j\beta_X$  має вигляд  $\dot{\Gamma}(l) = \dot{\Gamma}(0) \cdot e^{-j2\beta_X l} = \dot{\Gamma}(0) \cdot e^{-j2\theta}$ , а опір навантаження є  $\dot{z}_H = \frac{1 + \dot{\Gamma}_H}{1 - \dot{\Gamma}_H}$ . Після нескладних перетворень можна отримати вираз для  $\dot{z}(l)$  у наступному вигляді:

$$\dot{z}(l) = \frac{\dot{z}_H + j \cdot \text{tg}(\beta_X l)}{1 + j \cdot \dot{z}_H \cdot \text{tg}(\beta_X l)}. \quad (7.1)$$

Цей вираз можна трактувати, з однієї сторони, як закон трансформації опору навантаження  $\dot{z}_H$  вздовж відрізка ЛП з нормованим хвилевим опором  $z_X = 1$ , а з іншої – як закон поздовжньої зміни вхідного опору лінії, яку навантажено на нормований опір  $\dot{z}_H$ .

Зокрема, з (7.1) витікає, що коли  $\dot{z}_H = 1$ , тобто  $\dot{z}_H = z_X$ , вхідний опір лінії в будь-якому перерізі від  $l = 0$  до  $l = L$  збігається з хвилевим, тобто  $\dot{z}_{BX} = 1$ , або  $\dot{z}_{BX} = z_X$ , або  $\dot{z}_{BX} = \dot{z}_H$ . В цьому випадку кажуть, що  $\dot{z}_H$  трансформується саме в себе (або, іншими словами, не змінюється ні за модулем, ні за фазою). Таким чином, умова  $\dot{z}_H = z_X$  означає режим ідеального узгодження, тобто в лінії встановлюється режим рухомої хвилі з повною нормованою напругою  $\dot{y}(l) = \dot{y}_H(l)$  в довільному перерізі. Як вже було встановлено, в цьому режимі вся енергія передається від генератора до навантаження. Нагадуємо, що при врахуванні втрат ( $\alpha \neq 0$ ) потужність зменшується на величину  $\eta_\alpha = e^{-2\alpha l}$ .

В ряді випадків, наприклад при необхідності врахування декількох паралельно ввімкнутих в ЛП навантажень, більш зручно користуватись не опорами навантажень, а їх провідностями. Тоді, замінюючи в виразі (7.1)  $\dot{z}(l)$  на  $1/\dot{y}(l)$  та  $\dot{z}_H$  на  $1/\dot{y}_H$ , отримуємо закон трансформації провідності навантаження:

$$\dot{y}(l) = \frac{\dot{y}_H + j \cdot \operatorname{tg}(\beta_X l)}{1 + j \cdot \dot{y}_H \cdot \operatorname{tg}(\beta_X l)}, \quad (7.2)$$

який має точно такий же вигляд, як і закон трансформації опорів і це природно, оскільки маємо справу з лінійними перетвореннями.

Трансформувальні властивості коротких відрізків ЛП знайшли дуже багато застосувань для вирішення задач розробки трансформувально-узгоджувальних, частотно-вибіркових, розв'язувальних і т.і. пристроїв і їх елементів, які часто використовуються в високочастотних і надвисокочастотних трактах сучасної телекомунікації.

Вираз (7.1) можна представити і в ненормованому вигляді:

$$\frac{\dot{z}_{BX}}{z_X} = \frac{\dot{z}_H + jt g(\beta_X l)}{1 + j \frac{\dot{z}_H}{z_X} tg(\beta_X l)}. \quad (7.3)$$

Тут  $\dot{Z}_{BX}$ ,  $\dot{Z}_H$  – в загальному випадку комплексні ненормовані опори (вхідний та навантаження, відповідно), а  $z_X$  – ненормований хвильовий опір відрізка ЛП.

Якщо врахувати наявність втрат, тобто  $\alpha \neq 0$ , то (7.1) буде:

$$\dot{z}(l) = \frac{\dot{z}_H + \text{th}(\beta_X l)}{1 + \dot{z}_H \cdot \text{th}(\beta_X l)}. \quad (7.4)$$

## 7.2 Приклади застосування трансформувальних властивостей відрізків ЛП

### 7.2.1 Зауваження щодо термінів

Найбільш поширеними елементами телекомунікації в високочастотному та надвисокочастотному діапазонах є реактивні шлейфи та трансформатори. Для аналізу їх властивостей будемо використовувати закони трансформації. Загальною властивістю цих формул є те, що при заданому значенні  $\dot{z}_H$  та  $z_X$  (при його неединичній нормованій величині) трансформувального відрізка аргументом (незалежною величиною) в цих виразах є електрична довжина  $\Theta = \beta_X \cdot l$  цього відрізка. Таким чином, в виразах (7.1)...(7.4) більш коректним було б позначення  $\dot{z}(\Theta)$  або  $\dot{y}(\Theta)$ , а не  $\dot{z}(l)$  або  $\dot{y}(l)$ . Але переважна більшість авторів підручників, посібників та монографій використовує позначення  $\dot{z}(l)$  або  $\dot{y}(l)$  і було визнано доцільним зберегти цю традицію, незважаючи на деяку її некоректність. Взявши до уваги це зауваження, розглянемо більш ретельно аргумент виразів (7.1)...(7.4)  $\Theta = \beta_X \cdot l$ . Фазова стала напрямної системи  $\beta_X = 2\pi/\lambda_X$ , де  $\lambda_X$  – довжина хвилі в такій системі. В свою чергу  $\lambda_X = f/v_\phi$ , де  $v_\phi$  – фазова швидкість

електромагнітної хвилі в розглядуваній напрямній системі (ЛП). Звідси отримаємо, що

$$\Theta = \frac{1}{v_\phi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot l = \frac{\omega \cdot l}{v_\phi}. \quad (7.5)$$

Таким чином в аргумент виразів (7.1)...(7.4) кутова частота  $\omega$  та довжина відрізка  $l$  входять абсолютно симетрично і будуть впливати на його зміну абсолютно однаково, якщо ЛП не має властивості дисперсії, тобто  $v_\phi$  не залежить від частоти. Звідси витікає, що  $\dot{z}(\Theta)$  з однієї сторони можна розглядати як функцію залежності вхідного опору відрізка ЛП від частоти  $\omega$  при сталому значенні його довжини  $l$ , тобто  $\dot{z}(\Theta) = \dot{z}(\omega)|_{l=\text{const}}$ , а з іншої – як функцію залежності вхідного опору відрізка ЛП від його довжини  $l$  при сталому значенні частоти  $\omega$ , тобто  $\dot{z}(\Theta) = \dot{z}(l)|_{\omega=\text{const}}$ . Зауважимо, що довжину трансформувального відрізка  $l$  найчастіше задають в частках від довжини хвилі  $\lambda_x$ , тобто  $\lambda_x/8$ ,  $\lambda_x/4$ ,  $\lambda_x/2$ , тоді відповідні значення електричної довжини  $\Theta$  будуть  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ .

**Визначення:** *реактивними шлейфами* (РШ) називають короткі (звичайно  $l \leq \lambda_x/2$ ) відрізки ЛП з режимом короткого замикання (КЗ) або холостого ходу (ХХ) в перетині навантаження. В режимі КЗ нормована напруга в перетині навантаження  $\dot{u}_{K3} = 0$ , значить нормований опір навантаження  $r_H = 0$ , а в режимі холостого ходу нормований струм в перетині навантаження  $\dot{i}_{XX} = 0$ , значить нормована провідність навантаження  $g_H = 0$ . Розглянемо РШ<sup>КЗ</sup> та РШ<sup>ХХ</sup> окремо

### 7.2.2 Реактивний шлейф короткого замикання

Підставимо  $\dot{z}_H = 0$  в вираз (7.1) і для вхідного опору  $\dot{z}_{K3}(l)$  РШ<sup>КЗ</sup> та провідності  $\dot{y}_{K3}(l)$  отримаємо

$$\dot{z}_{K3}(l) = j \cdot z_X \cdot \operatorname{tg}(\beta_X l); \quad \dot{y}_{K3}(l) = \frac{-j}{z_X} \cdot \operatorname{ctg}(\beta_X l) \quad (7.6)$$

Ці величини є чисто уявними, значить вхідний опір та вхідна провідність при будь-якому значенні  $f$  та довжини  $l$  є чисто реактивними (звідси і назва – РШ) з властивістю періодичної зміни свого значення від 0 до  $\infty$  і від  $-\infty$  до 0 у відповідності з властивостями тригонометричних функцій  $\operatorname{tg}(\Theta)$  та  $\operatorname{ctg}(\Theta)$ .

На рис. 7.2 наведено графіки залежності реактивного вхідного опору  $\dot{z}_{K3}$  від довжини РШ<sup>K3</sup> при зафіксованому значенні частоти  $f_0$ . Як видно з цих залежностей, при малій довжині РШ<sup>K3</sup>  $0 < l < \lambda_X/4$  його опір чисто реактивний і додатній, тобто при цій умові РШ<sup>K3</sup> буде сприйматися, як індуктивність, значення якої залежить від довжини шлейфу; при  $\lambda_X/4 < l < \lambda_X/2$  – відповідно ємність, як і позначено на рис. 7.2. При подальшому збільшенні довжини ці значення повторюються з періодом  $\lambda_X/2$ .

При  $l = \lambda_X/4$  на зафіксованій частоті  $f_0$  (для цього значення частоти виконано розрахунок) значення  $\operatorname{tg}(\Theta)$  нескінченно велике  $\operatorname{tg}(\Theta) \rightarrow \infty$ , бо  $\Theta = \pi/2$ .

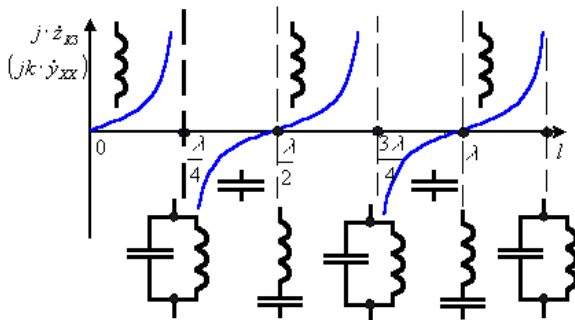


Рисунок 7.2 – Графіки залежності  $\dot{z}_{K3}(l)|_{\omega=\text{const}}$

Нескінченно великий опір має також паралельний коливальний контур на резонансній частоті (якщо знехтувати втратами в ньому). По цій причині РШ<sup>КЗ</sup> довжиною  $\lambda_x/4$  на частоті  $f_0$  за своїми властивостями еквівалентний паралельному коливальному контуру на зосереджених елементах без втрат, тобто з нескінченною провідністю.

При довжині РШ<sup>КЗ</sup>  $l \approx \lambda_x/2$  реактивний вхідний опір шлейфу К.З. змінюється від ємнісного до індуктивного, проходячи через нуль при  $l = \lambda_x/2$  на частоті  $f_0$ . Таке саме явище спостерігається в послідовному коливальному контурі на зосереджених елементах.

При подальшому збільшенні довжини РШ<sup>КЗ</sup> розглянуті явища періодично повторюються з періодом  $\lambda_x/2$ .

Графіки відповідної залежності для провідності  $\dot{y}_{КЗ}(l)$  будуть мати такий же вигляд, але з зсувом на  $\lambda_x/4$ , як показано на рис. 7.2 потовщеною пунктирною лінією.

Графіки залежності реактивного вхідного опору  $\dot{z}_{КЗ}$  РШ<sup>КЗ</sup> від частоти  $f$  при сталому значенні довжини  $l$  шлейфу будуть відрізнятися від розглянутих залежностей лише значеннями аргументу в резонансних точках  $\frac{\lambda}{4} \rightarrow \frac{v_\phi}{4 \cdot L}$ ,  $\frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{v_\phi}{2 \cdot L}$ , .... Тут

частота  $f_{p1} = \frac{v_\phi}{4 \cdot L}$  відповідає паралельному резонансу,

$f_{p2} = \frac{v_\phi}{2 \cdot L}$  – послідовному і т. д. з періодом  $v_\phi/(2 \cdot L)$ . Фізична

сутність цього параметру: той час, який потрібен хвилі, щоб пройти довжину РШ, відбитися від К.З. (К.З. відбиває повністю, бо  $|\Gamma_{КЗ}| = 1$ ) і повернутися на вхід, тобто подвоєний час затримки

### 7.2.3 Реактивний шлейф холостого ходу

Підставимо  $g_H = 0$  в вираз (7.2) і для вхідної провідності  $\dot{y}_{ХХ}(l)$  та опору  $\dot{z}_{ХХ}(l)$  отримуємо:

$$\dot{y}_{XX}(l) = \frac{j}{z_X} \cdot \operatorname{tg}(\beta_X l); \quad \dot{z}_{XX}(l) = -j \cdot z_X \cdot \operatorname{ctg}(\beta_X l). \quad (7.7)$$

Як видно з (7.7) принципово (знакозмінність, періодичність і т. і.) властивості РШ<sup>XX</sup> нічим не відрізняється від властивостей РШ<sup>K3</sup>.

На рис. 7.3 наведено графіки залежності реактивного вхідного опору  $\dot{z}_{XX}(l)$  від довжини  $l$  РШ<sup>XX</sup> при зафіксованому значенні частоти  $f$ . По ним можна зробити ті ж висновки, як і для РШ<sup>K3</sup>.

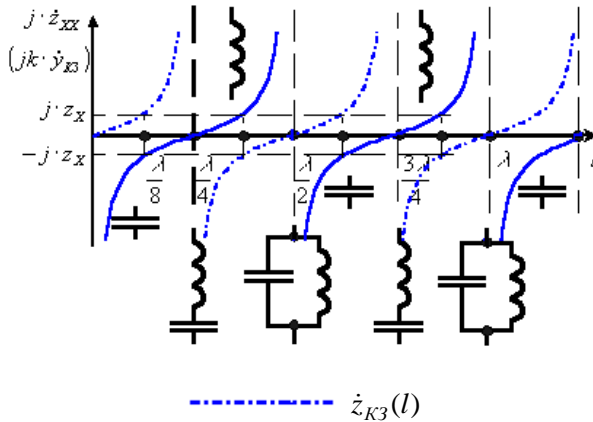


Рисунок 7.3 – Графіки залежності  $\dot{z}_{XX}(l)|_{\omega=\text{const}}$

## 7.2.4 Порівняння властивостей шлейфів КЗ та ХХ

З порівняння залежностей  $\dot{z}_{K3}(l)$  та  $\dot{z}_{XX}(l)$  видно, що при зменшенні довжини РШ в режимі КЗ на  $\lambda_X/4$  (по відношенню до попередньої довжини  $L$ ) РШ<sup>K3</sup> веде себе, як РШ<sup>XX</sup>; якщо виконаємо ті ж дії по відношенню до РШ<sup>XX</sup>, то отримаємо аналогічний результат – див. рис. 7.4. На рис. 7.2, рис. 7.3 ці взаємні перетворення відображено потовщеною пунктирною лінією.

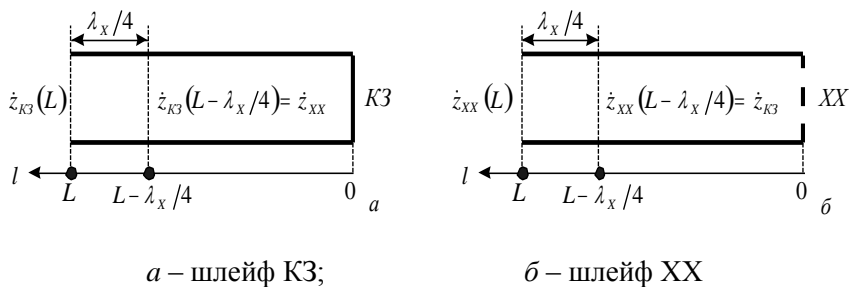


Рисунок 7.4 – Взаємні перетворення шлейфів КЗ та ХХ

На рис. 7.3 штрих пунктирною лінією зображено залежність  $\dot{z}_{K3}(l)|_{f_0=\text{const}}$ , що розрахована при тих же умовах, як і основна для цього рисунку залежність  $\dot{z}_{XX}(l)|_{f_0=\text{const}}$ . З порівняння цих кривих видно, що при  $l = \lambda_x/8$  (та при кратних довжинах з періодом  $\lambda_x/4$ ) будемо мати рівність  $\dot{z}_{K3}(\lambda_x/8) = -\dot{z}_{XX}(\lambda_x/8)$ , або

$$|\dot{z}_{K3}(\lambda_x/8)| \cdot |\dot{z}_{XX}(\lambda_x/8)| = z_X^2. \quad (7.8)$$

Властивість (7.8) можна використати для організації виміру параметрів ЛП.

### 7.2.5 Деякі можливості застосування РШ

Можливість реалізації будь-яких значень індуктивності та ємності, паралельних та послідовних коливальних контурів за допомогою КЗ та ХХ реактивних шлейфів дозволяє розглядати їх, як елементарні будівельні елементи («цеглинки») при побудові частотно-вибіркових систем НВЧ (фільтрів НЧ, фільтрів ВЧ, смугопрпускарних та смугозагороджувальних фільтрів), узгоджувально-трансформувальних схем і т. і.

Розглянемо для прикладу вирішення задачі узгодження комплексного навантаження  $\dot{z}_H$  з лінією, яка має одиничний

нормований хвильовий опір  $\dot{z}_X = 1$  (безрозмірний). В узгоджувальній схемі (рис. 7.5) будемо підключати узгоджувальний шлейф паралельно до основної ЛПІ, а тому розрахунок краще вести в термінах провідностей. Хай  $\dot{y}_H = 1/\dot{z}_H = g_H \mp jb_H$ ;  $y_X = 1/z_X = 1$ .

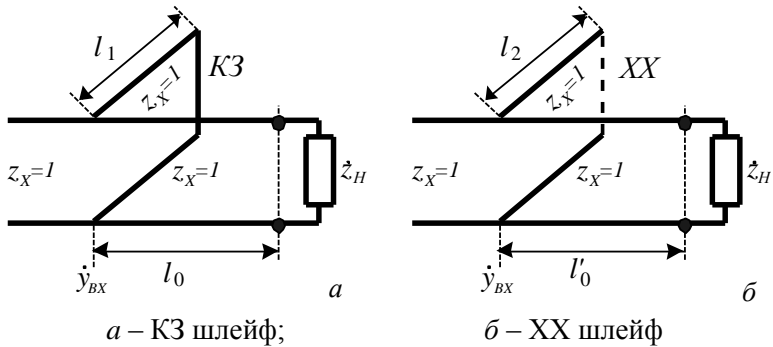


Рисунок 7.5 – Узгодження за допомогою поодинокого шлейфу

Узгодження забезпечується, якщо узгоджувальний шлейф під'єднати на такій відстані  $l_0$  (або  $l'_0$ ) від навантаження, щоб нормована вхідна провідність  $\dot{y}_{BX}(l_0)$  була  $\dot{y}_{BX}(l_0) = 1 \pm jb_{BX}(l_0)$ , тобто мала одиничне значення своєї дійсної частини  $g_{BX}(l_0) = 1 = y_X$ . А тоді задачею реактивного шлейфу (КЗ або ХХ), приєднаного паралельно в цьому перерізі, буде компенсація уявної частини вхідної провідності  $\pm jb_{BX}(l_0)$ , що досягається відповідним розрахунком довжини  $l_1$  КЗ шлейфу або  $l_2$  ХХ шлейфу.

## 7.2.6 Чвертьхвильовий трансформатор

Визначення: *чвертьхвильовим трансформатором* називають відрізок ЛП з довжиною  $L = \frac{\lambda_X}{4}(2n+1)$ ; електрична довжина  $\Theta = \beta_X \cdot L = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ , де  $n=0,1,2,\dots$

Підключимо до ЛП з одиничним нормованим хвильовим опором  $\dot{z}_X = 1$  навантаження з нормованим опором  $\dot{z}_H$  (провідність  $\dot{y}_H = 1/\dot{z}_H$ ) і знайдемо вхідний опір (провідність) в перетинах  $l=0$  та  $l = \lambda_X/4$  за виразами (7.6) та (7.7)

$$\dot{z}(0) = \dot{z}_H; \quad \dot{z}(\lambda_X/4) = 1/\dot{z}_H; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_H; \quad \dot{y}(\lambda_X/4) = 1/\dot{y}_H,$$

або

$$\dot{z}(\lambda_X/4) \cdot \dot{z}(0) = 1; \quad \dot{y}(\lambda_X/4) \cdot \dot{y}(0) = 1. \quad (7.9)$$

Це означає, що чвертьхвильовий відрізок ЛП з  $z_X = 1$  перетворює (трансформує) навантаження з нормованим опором  $\dot{z}_H$  (або провідністю  $\dot{y}_H$ ) в опір величиною  $1/\dot{z}_H$  (або провідність  $1/\dot{y}_H$ ), тобто в опір (провідність), який чисельно дорівнює провідності (опору) навантаження.

Якщо ЛП має неединичний нормований хвильовий опір  $z_X \neq 1$ , то за допомогою виразу (7.4) отримаємо відповідні значення вхідних опорів (провідностей), а (7.9) прийме вигляд:

$$\dot{z}(\lambda_X/4) \cdot \dot{z}(0) = z_X^2; \quad \dot{y}(\lambda_X/4) \cdot \dot{y}(0) = y_X^2, \quad (7.10)$$

де  $y_X = 1/z_X$ .

Якщо під  $\dot{z}(0)$  розуміти активне навантаження з нормованим опором  $r_2$ , а під  $\dot{z}(\lambda_X/4)$  – деякий генератор з внутрішнім нормованим опором  $r_1$ , то з (7.10) витікає, що  $\lambda_X/4$  трансформатор з нормованим хвильовим опором «приведе» опір

$r_2$  до  $r_1$ , тобто може використовуватися для узгодження опорів  $r_2$  та  $r_1$ . Звісно під  $r_2$  та  $r_1$  можна розуміти і деякі ЛП з відповідними нормованими хвилевими опорами.

$$z_{X.TP} = \sqrt{r_1 \cdot r_2} \quad (7.11)$$

Тоді схема узгодження між ними має вигляд, як на рис. 7.6, де  $z_{X.TP} = \sqrt{z_{X1} \cdot z_{X2}}$ .

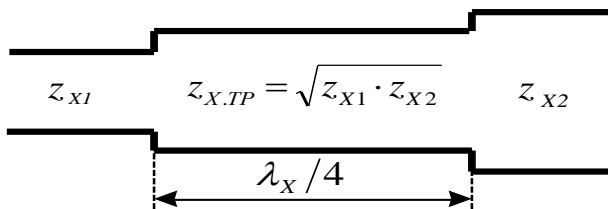


Рисунок 7.6 – Узгодження за допомогою  $\lambda_x/4$  трансформатора

Природно, що точне узгодження забезпечується лише на розрахунковій частоті  $\omega_0 = 2\pi \cdot \nu_\phi / \lambda_x$ , а також на кратних частотах  $\omega_{0K} = \omega_0 \cdot (2n + 1)$ , коли довжина трансформатора складає чверть довжини хвилі в ЛП плюс ціле число  $n$  півхвиль  $\lambda_x/2$ . Поблизу розрахункової частоти  $\omega_0 \pm \Delta\omega$ , (де  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ) чвертьхвильовий трансформатор виконує лише наближене узгодження, яке погіршується із збільшенням  $\Delta\omega$ .

### 7.2.7 Півхвильовий трансформатор

**Визначення:** *півхвильовим трансформатором* називають відрізок ЛП з довжиною  $L = \frac{\lambda_x}{2} (2 \cdot n + 1)$ ; електрична довжина  $\Theta = \beta_x \cdot L = \pi \cdot (2 \cdot n + 1)$ , де  $n = 0, 1, 2, \dots$

Якщо до ЛП під'єднати навантаження з нормованим опором  $\dot{z}_H$ , то при будь-якому значенні нормованого хвилевого

опору  $z_{X,TP}$  ЛП, для вхідного опору в перетинах  $l=0$ ,  $l=\lambda_X/2$ , чи за виразом (7.6), чи за (7.7) отримаємо

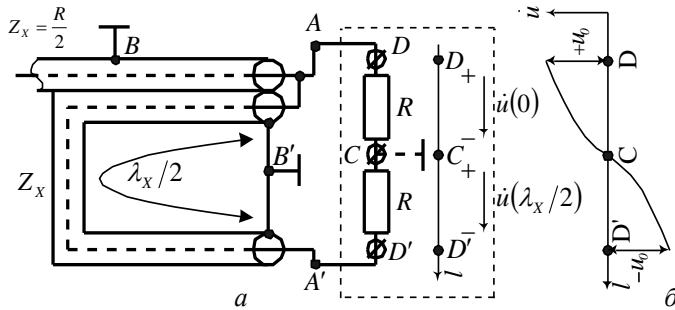
$$\dot{z}(0) = \dot{z}_H ; \quad \dot{z}(\lambda_X/2) = \dot{z}_H .$$

Таким чином, на розрахунковій частоті півхвильовий відрізок ЛП при будь-яких значеннях  $z_{X,TP}$  не трансформує опору (або провідності) навантаження, тобто перетворює їх самих в себе. Однак на других частотах вхідний опір змінюється (по відношенню до розрахункового значення) тим більше, чим більше відхилення за частотою. Цю властивість можна використовувати для коригування частотної характеристики опору навантаження.

Ще одна важлива властивість півхвильових трансформаторів – додатковий зсув за фазою  $\Delta\varphi=180^\circ$ , бо  $\dot{i}(\lambda_X/2) = \dot{i}(0) \cdot [1 + \dot{I}(0) \cdot e^{-j2\beta_X l}] \cdot e^{j\beta_X l} = -\dot{i}(0)$  при  $\beta_X \cdot l = \pi$ . Ця властивість використовується, наприклад, в узгоджувально-симетрувальному пристрої, призначеному для строго протифазного живлення симетричної відносно центру симетрії активного навантаження з ненормованим опором  $2 \cdot R$  від коаксіального кабеля з ненормованим хвильовим опором  $Z_X = R/2$ . Цей пристрій (рис. 7.7) отримав назву U-коліно.

Для розгляду принципу його роботи врахуємо наступне:

–для того, щоб коаксіальний кабель був несприйнятливим до зовнішнього ЕМП (екранованою системою), його зовнішній провідник (точка В) повинен бути заземленим, тобто мати нульовий потенціал;



*a* – схема;      *б* – розподіл потенціалу по навантаженню

Рисунок 7.7 – Симетрувальний пристрій типу U-коліно

– якщо навантаження з загальним опором  $2 \cdot R$  є строго симетричним і повинно живитись строго протифазно, то, розділивши його на дві рівні частини з опорами  $R$ , ми повинні отримати нульовий потенціал точки симетрії (точка  $C$ ). Тоді заземлення точки  $C$  не вплине на потенціал ні точки  $D$ , ні точки  $D'$  (заземлення точки  $C$  показано на рис. 7.7 пунктиром).

При цих умовах ввімкнення півхвильового відрізка кабелю між точкою  $A$  (точки  $A$  та  $D$  екіпотенціальні) та точкою  $A'$  (точки  $A'$  та  $D'$  екіпотенціальні) забезпечує виконання умови строго протифазного живлення навантаження. Тоді опір навантаження для живильного коаксіального кабелю в точці  $A$  внаслідок дії півхвильового трансформатора складається з двох паралельно ввімкнених опорів (точки  $D$  та  $D'$  екіпотенціальні) величиною  $R$  і таким чином його значення  $R_H = (R \cdot R)/(R + R) = R/2$ , тобто  $Z_x = R/2$ , що забезпечує і виконання умови узгодження.

Трансформувальні властивості півхвильових відрізків ЛП (не трансформувати  $\dot{Z}_H$ ) можна використати для виконання операції поділу потужності генератору на  $N$  частин. Схему подільника потужності наведено на рис. 7.8.

Доля потужності в кожному навантаженні пропорційна величині відповідної провідності, оскільки напруги на навантаженнях однакові. Всі провідності навантажень

перераховуються до входу без зміни своєї величини, бо всі вони включені через півхвильові трансформатори; тоді вхідна

$$\text{провідність } \dot{Y}_{BX} = \sum_{i=1}^N \dot{Y}_i.$$

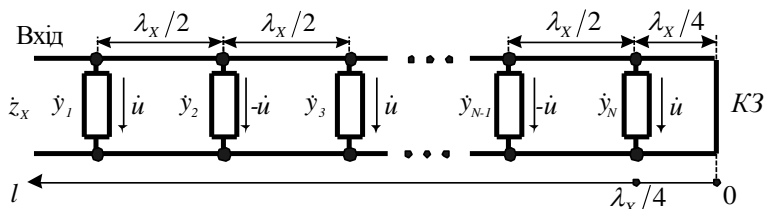


Рисунок 7.8 – Подільник потужності на півхвильових відрізках ЛП

Для того, щоб подільник був узгодженим необхідно виконати умову  $\dot{z}_X = \dot{z}_{BX} = 1/\dot{Y}_{BX}$ , де  $\dot{z}_X$  – нормований хвильовий опір живильної лінії.

Після останнього навантаження ввімкнено  $\lambda_x/4$  шлейф в режимі КЗ. Його вхідний опір в перетині  $l = \lambda_x/4 \dot{z}_{BX}(\lambda_x/4) \rightarrow \infty$ , тобто  $\dot{Y}_{BX}(\lambda_x/4) = 0$  і цей елемент не впливає на розподіл потужності.

Якщо прийняти, що напруга на виході  $N$  буде  $\dot{u}$ , то на виході  $N-1$  це буде  $-\dot{u}$  і т. д., тобто особливістю такого подільника буде синфазно-протифазний фазовий розподіл сигналів сусідніх виходів, але розподіл за фазою не буде впливати на розподіл за потужністю.

Недоліком такої системи поділу потужності є вузькосмуговість, яка буде посилюватись із збільшенням кількості каналів розподілу.

## 7.2.8 Кругова номограма повних опорів та провідностей

Інформацію, необхідну для вирішення задач узгодження можна отримати з виразів (7.6)...(7.8), які пов'язують вхідний опір відрізка ЛП з опором навантаження на його кінці. Ці вирази

досить прості, але «ручні» розрахунки по ним досить обтяжливі, бо вимагають акуратності в поводженні з комплексними числами. Якщо не вимагати великої точності розрахунків (порядку двох цифр), то можна скористатися графічним вирішенням в основі якого лежить кругова номограма повних опорів. Цю номограму в 1939 р. одночасно запропонували радянський вчений А.Р. Вольперт та американський інженер Ф. Сміт. В зв'язку з цим в американських джерелах її звуть діаграмою Сміта. Кругова номограма опорів базується на графічному поданні коефіцієнту відбиття від навантаження  $\dot{\Gamma}_H = \frac{\dot{z}_H - 1}{\dot{z}_H + 1}$  в поєднанні з залежністю

$$\dot{\Gamma}(l) = \dot{\Gamma}_H \cdot e^{-j2\beta x l}$$

Введемо позначення  $\dot{\Gamma} = \eta + j\nu$ ;  $\dot{z}_H = r_H + jx_H$  і, після нескладних перетворень, отримаємо систему двох дійсних рівнянь відносно введених величин  $\eta$  та  $\nu$ :

$$\nu^2 + \left( \eta - \frac{r_H}{1 + r_H} \right)^2 = \frac{1}{(1 + r_H)^2}. \quad (7.12)$$

$$(\eta - 1)^2 + \left( \nu - \frac{1}{x_H} \right)^2 = \left( \frac{1}{x_H} \right)^2. \quad (7.13)$$

Проаналізуємо вираз (7.12). Якщо розуміти  $\eta$  та  $\nu$ , як вісі декартової системи координат, то вираз (7.12) є рівнянням сім'ї кіл з центром у точці  $\eta = r_H / (r_H + 1)$ ;  $\nu = 0$  та радіусом  $1 / (r_H + 1)$ . Ці кола при різних значеннях  $r_H$  наведено на рис. 7.9а; вони є геометричним місцем точок (колами), де активні частини нормованих опорів навантаження є сталими величинами  $r_H = \text{const}$ .

Центри всіх кіл лежать на вісі  $\eta$ , а кожне з кіл, де  $r_H = \text{const}$  проходить через точку з координатами  $\eta = 1$ ,  $\nu = 0$ . Цікаво відмітити, що  $|\dot{\Gamma}_H|$  має одне і те ж значення при  $r_H = A$

та  $r_H = 1/A$ , де  $0 \leq A \leq \infty$ , але при виконанні умови  $x_H = 0$ ; в цьому

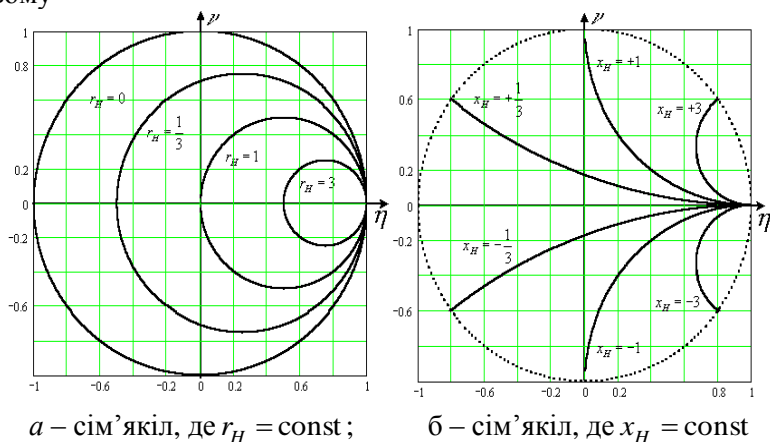


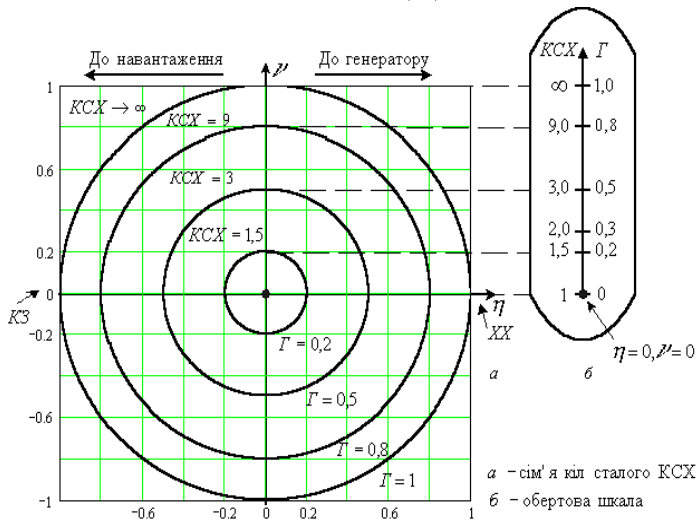
Рисунок 7.9 – Кола сталого значення нормованого активного  $r_H$  та реактивного  $x_H$  опорів

випадку  $r_H = \eta$  дійсне число. Режиму КЗ відповідає коло одиничного радіусу, де  $r_H = 0$ ,  $|\dot{I}_H| = 1$ . Режиму ХХ відповідає коло нульового радіусу, де  $r_H \rightarrow \infty$ . Це точка з уже згадуваними координатами  $\eta = 1$ ;  $v = 0$ , де  $|\dot{I}_H| = 1$ .

Щодо дослідження виразу (7.13) відносно величини реактивної частини  $x_H$  нормованого опору навантаження  $\dot{z}_H$ . У декартових координатах  $\eta$ ,  $v$  ця рівність є рівнянням сім'ї кіл з радіусами  $1/x_H$  та центрами, які розташовано на лінії  $v_{Ц} = +1$ , а координата  $\eta_{Ц}$  (центру відповідного кола) має значення  $\eta_{Ц} = 1/x_H$ . Індуктивним опором навантаження (додатнім  $x_H$ ) відповідають кола, розташовані над горизонтальною віссю  $\eta$ , а ємнісним (від'ємним) – нижче цієї вісі. Ці кола при різних значеннях  $x_H > 0$  та  $x_H < 0$  наведено на рис. 7.9б. Всі можливі значення  $\dot{I} = \eta + jv$ , як і відмічалось раніше лежать всередині

кола одиничного радіусу, яке відповідає режиму КЗ, тобто кола  $r_H = \text{const}$ , де  $r_H = 0$ , як і відмічено на рис. 7.9б пунктирною лінією.

Для розширення можливостей на кругову номограму опорів можна нанести ще кола сталого значення КСХ (або КРХ), або  $|\dot{I}_H|$ . Нагадаємо, що  $КСХ = \frac{(1+|\dot{I}|)}{(1-|\dot{I}|)}$ . Коефіцієнт відбиття на круговій номограмі зображається в полярній системі координат (рис. 7.10а), де радіальна координата відповідає  $|\dot{I}_H|$  (КСХ), а полярний кут  $\varphi$  – подвоєній електричній відстані вздовж ЛП, тобто фазовий кут коефіцієнту відбиття  $\Theta = 2 \cdot \beta_X \cdot l$ . В повністю узгодженій ЛП  $|\dot{I}_H| = 0$ , КСХ=1. Цьому значенню КСХ відповідає точка з координатами  $\eta = 0$ ,  $\nu = 0$  в центрі діаграми. Якщо  $|\dot{I}_H| = 1$ , то  $КСХ \rightarrow \infty$ , тому кола з  $|\dot{I}_H| = 1$ ,  $КСХ \rightarrow \infty$ ,  $r_H = 0$  співпадають. Оскільки для пасивних пристроїв значення модулю коефіцієнту відбиття не можна перевищувати 1,  $|\dot{I}| \leq 1$ , то сім'я кіл сталого значення КСХ обмежена колом одиничного радіусу  $|\dot{I}| = 1$ .



## Рисунок 7.10 – Кола сталого значення КСХ та Г

Щоб не захаращувати номограму додатковими графіками, кола сталого значення  $|\dot{I}_H|$ , КСХ на ній не зображують, а в центрі встановлюють обертову шкалу на якій нанесено відповідні значення  $|\dot{I}|$  та КСХ – рис. 7.10б; ця обертова шкала грає роль радіальної координати (радіус-вектору), а тоді кут між радіусом-вектором і додатною частиною вісі  $\eta$  дорівнює фазі коефіцієнту відбиття. Ці значення фази наносяться на зовнішнє коло кругової діаграми або в градусах, або в відносних одиницях  $l/\lambda_x$ . Фаза коефіцієнту відбиття змінюється в межах від  $\pm 180^\circ$  при КЗ до  $0^\circ$  в режимі ХХ. Один повний оберт по круговій номограмі відповідає зміщенню вздовж ЛП на відстань  $l = \lambda_x/2$ . Руху в напрямку «до навантаження» відповідає обертання радіус-вектору проти годинникової стрілки, а у напрямку «до генератору» – за годинниковою стрілкою.

Раніше було встановлено що для чвертьхвильового трансформатору з одиничним нормованим хвильовим опором справедлива властивість  $\dot{z}(\lambda_x/4) \cdot \dot{z}(0) = 1$ , або іншими словами, він трансформує опір  $\dot{z}(0)$  в опір  $\dot{z}(\lambda_x/4)$ , який чисельно дорівнює провідності, тобто  $\dot{z}(\lambda_x/4) = 1/\dot{z}(0)$ . З цього випливає, що перехід від опорів  $\dot{z}$  до провідностей  $\dot{y}$  буде відповідати повороту за діаграмою на  $180^\circ$ , тобто зміщенню вздовж лінії на чверть довжини хвилі  $\lambda_x/4$ , ( $2 \cdot \beta_x \cdot \lambda_x/4 = \pi$ ). Якщо кожному пункту, яка відповідає деякому значенню нормованого комплексного опору  $\dot{z}$  повернути на  $180^\circ$  та отримані таким чином комплексні числа знову нанести в координатах  $\eta$ ,  $\nu$ , то отримаємо кругову діаграму для нормованих провідностей – рис. 7.11.

Тепер точці з координатами  $\eta = 1$ ;  $\nu = 0$  відповідає режим КЗ, в точці з координатами  $\eta = 0$ ,  $\nu = 1$  провідність чисто реактивна і носить ємнісний характер і навпаки точка з

координатами  $\eta = 0$ ,  $\nu = -1$  відповідає чисто індуктивній провідності. Режиму ХХ відповідає точка з координатами  $\eta = -1$ ,

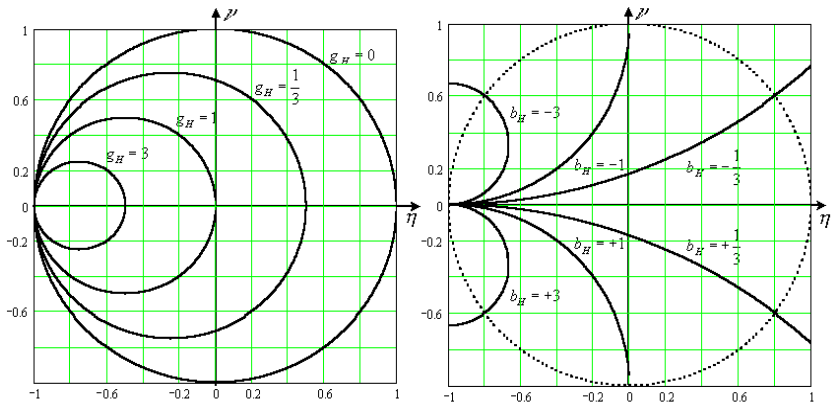


Рисунок 7.11 – Сім'я кіл сталого значення  $g_N$  та  $b_N$

$\nu = 0$ , через яку проходить коло, де  $g_N = 0$ . Точка в центрі діаграми відповідає, як і раніше, режиму повного узгодження лінії.

Вибір того, чи іншого виду діаграми залежить від ситуації. Наприклад, при розрахунках послідовно сполучених опорів зручніше використовувати діаграму нормованих опорів, а паралельно сполучених – діаграму нормованих провідностей.

### 7.2.9 Вузкосмугове узгодження

З точки зору передавання енергії (і за деякими іншими критеріями також) оптимальним режимом роботи лінії передавання є режим узгодження, тобто режим чисто рухомої хвилі. Цей режим забезпечується застосуванням узгоджувальних пристроїв. Якщо ставиться вимога максимального ККД тракту, то узгоджувальні елементи повинні виконуватись на основі винятково реактивних елементів, які не повинні мати омичних втрат (не перетворюють енергію ЕМП в теплову енергію).

Існуючі методи узгодження можна **умовно** розділити на дві групи – вузькосмугові та широкосмугові.

При вузькосмуговому узгодженні режим чисто рухомої хвилі ( $KCX = 1$ ) досягається строго кажучи лише на єдиній розрахунковій частоті  $f_0$ . При відхиленні частоти від розрахункового значення виникає розузгодження і спостерігається збільшення  $KCX$ . Характерну частотну залежність поведінки (частотну характеристику)  $KCX$  при вузькосмуговому узгодженні наведено на рис. 7.15. Максимально допустимий рівень розузгодження задають максимально допустимим значенням  $KCX_{MAX}$  (наприклад  $KCX_{MAX}=1,5$ ). Тоді смугу частот  $\Delta f_{vзг}$  в межах яких  $KCX$  в тракті не перевищує  $KCX_{MAX}$  називають смугою узгодження.

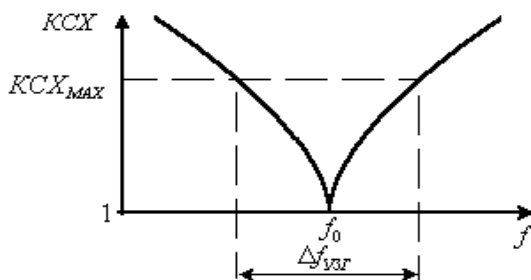


Рисунок 7.12 – Типова залежність  $KCX$  від частоти при вузькосмуговому узгодженні

Особливістю вузькосмугового узгодження є те, що при розрахунку номіналів елементів узгоджувальних пристроїв смуга частот  $\Delta f_{vзг}$  взагалі не контролюється; алгоритм розрахунку орієнтовано на досягнення ідеального узгодження з  $KCX = 1$  строго кажучи на одній частоті  $f_0$ , а смуга узгодження визначається шляхом перевірного розрахунку або експерименту вже після того, як завершено розрахунок номіналів узгоджувальних елементів. Якраз ця обставина є підґрунтям до вживання терміну «вузькосмугове узгодження».

Для проведення порівняльного аналізу (за критерієм ширини смуги узгодження) узгоджувальних пристроїв в різних частотних діапазонах (наприклад в дециметровому та сантиметровому, абов десятисантиметровому та

трьохсантиметровому) використання абсолютного значення  $\Delta f_{\text{узг}}$  не дає чіткого уявлення про широкосмуговість відповідних пристроїв. Наприклад,  $\Delta f_{\text{узг}} = 100$  МГц в дециметровому діапазоні – це досить широка частотна смуга узгодження і в той же час в трьохсантиметровому – це досить вузька смуга.

Для таких випадків зручніше користуватись поняттям відносної величини смуги узгодження  $(\Delta f_{\text{узг}}/f_0) \cdot 100\%$  (тут  $f_0$  – розрахункова частота), яку вже визначають в відсотках. Доречно відмітити, що в реальних пристроях значення  $f_0$  не завжди розташовано симетрично в смузі  $\Delta f_{\text{узг}}$ . Відносна величина смуги узгодження, яку можливо досягти, залежить від частотних властивостей навантаження та узгоджувальних елементів, а також від величини максимально допустимого КСХ<sub>МАХ</sub>. При цьому в результаті перевірного розрахунку може виявитись, що величина  $(\Delta f_{\text{узг}}/f_0) \cdot 100\%$ , наприклад, для одного пристрою  $\sim 1 \cdot 10^{-2}\%$ , а для другого  $\sim 1 \cdot 10^{+2}\% \dots \sim 2 \cdot 10^{+2}\%$  (тобто порядку октави), тобто від задачі до задачі може змінюватись в досить широких межах, а тому сама по собі величина відносної смуги узгодження не має прямого відношення до терміну «вузькосмугове узгодження».

Цей термін скоріше відноситься до особливостей постановки задачі на узгодження.

## Приклади вирішення задач

**Задача 7.1** Виконати узгодження навантаження яке має комплексний опір  $\dot{Z}_H = 120 + j60$  Ом на частоті 1 ГГц ( $\lambda_0 = 30$  см) з коаксіальним кабелем, який має  $Z_X = 50$  Ом і заповнений поліетиленом з  $\epsilon_r = 2,25$ . Застосувати чвертьхвильовий трансформатор.

Як виходить з попереднього розглядання, для вирішення задачі узгодження треба провести деяке перетворення (трансформацію) опору навантаження і тип цього перетворення залежить від особливостей застосованого методу узгодження.

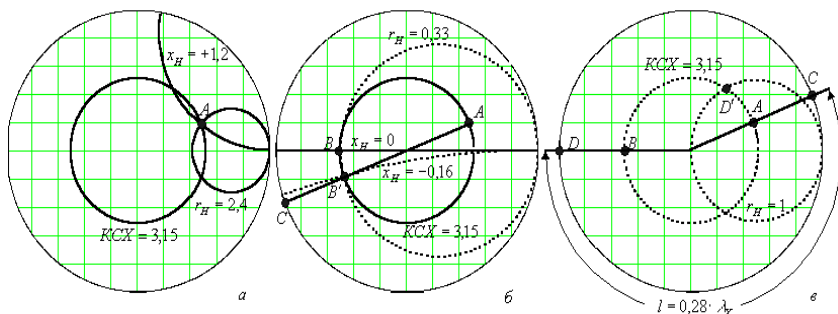
Зважаючи на те, що за допомогою чвертьхвильового трансформатору узгоджується звичайно чисто активний опір, необхідно перед безпосередньо узгодженням компенсувати реактивну складову опору навантаження. Це можливо зробити, якщо підключити між лінією та узгоджуваним навантаженням трансформувальний відрізок лінії передачі, підібравши її довжину таким чином, щоб опір на вході цього трансформувального відрізка став чисто активним.

Розв'язання задачі буде включати наступні дії:

1. Нормуємо опір навантаження

$$\dot{z}_H = \frac{\dot{Z}_H}{Z_X} = \frac{120 + j60}{50} = 2,4 + j1,2.$$

2. Відмічаємо на діаграмі точку А, яка відповідає знайденому нормованому опору  $\dot{z}_H = r_H + jx_H = 2,4 + j1,2$ . Ця точка буде на перетині кривої сталого значення  $r_H = 2,4$  та кривої сталого значення  $x_H = 1,2$  – рис. 7.16, а.



— до задачі з  $\lambda/4$  трансформатором;  
 - - - до задачі з реактивними шлейфами;

Рисунок 7.13 – До вирішення задачі узгодження за допомогою чвертьхвильового трансформатору

3. По кривій сталого значення КСХ, яка проходить через точку А знаходимо  $КСХ \approx 3,1$ .

4. Переміщуємо точку А (по кривій сталого значення  $КСХ=3,1$ ) у напрямку «до генератору» (за годинниковою

стрілкою) і знаходимо перетин кола  $KCX = 3,1$  з лінією, де  $x_H = 0$  – точка В на рис. 7.16, б.

5. Знаходимо  $\dot{z}_{BX}$  лінії передачі в точці В;  $\dot{z}_{BX} = 0,33 + j0$ , бо точку В перетинає крива сталого значення  $r_H = 0,33$ .

6. Проводимо радіус через точку А і відмічаємо точку С (рис. 7.16в) його перетину з зовнішньою кривою ( $r_H = 0$ ) «до генератору» в довжинах хвилі; координата  $l_C$  точки С  $l_C = 0,22 \cdot \lambda_X$ .

7. Аналогічну операцію виконуємо для точки В і отримуємо точку D, якій відповідає зміщення  $0,5 \cdot \lambda_X$  в напрямку «до генератору» – рис. 7.16в; координата  $l_D$  точки D  $l_D = 0,5 \cdot \lambda_X$ .

8. Знаходимо довжину відрізка  $l$ , який дорівнює відстані між точками С та D

$$l = l_D - l_C = (0,5 - 0,22) \cdot \lambda_X = 0,28 \cdot \lambda_X.$$

9. Знаходимо ненормований вхідний опір на відстані  $l$  від навантаження

$$\dot{Z}_{BX}(l) = 0,33 \cdot 50 = 16,5 \text{ Ом.}$$

10. Знаходимо ненормований хвильовий опір  $\lambda/4$  трансформатору

$$Z_{X,TP} = \sqrt{50 \cdot 16,5} \approx 28,7 \text{ Ом.}$$

11. Знаходимо довжину хвилі в коаксіальному кабелі

$$\lambda_X = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3,0 \cdot 10^{-1}}{\sqrt{2,25}} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ М} = 20 \text{ см.}$$

12. Знаходимо довжину відрізка  $l$

$$l = 0,28 \cdot \lambda_X = 0,28 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ М} = 5,6 \text{ см.}$$

13. Знаходимо довжину чвертьхвильового трансформатору

$$\frac{\lambda_X}{4} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{4} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ М} = 5 \text{ см.}$$

При визначених параметрах схема буде мати вигляд, як на рис. 7.17, де використано математичну модель коаксіального кабелю у вигляді гіпотетичної двопровідної лінії. Для визначення розмірів внутрішнього та зовнішнього провідників коаксіальних

кабелів (з діелектричним заповненням  $\epsilon_r = 2,25$ ) з хвилевим опорами  $Z_{X1} = 50$  Ом та  $Z_{X2} = 28,7$  Ом достатньо скористатися виразами, отриманими в розділі 6.

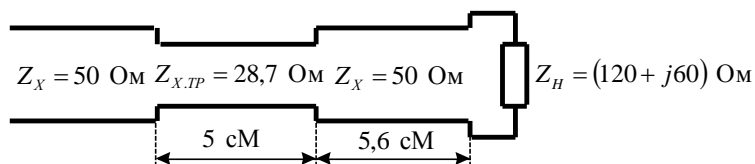


Рисунок 7.14 – Схема узгодження за допомогою чвертьхвильового трансформатора

**Задача 7.2** За вихідними даними задачі 7.1 виконати узгодження за допомогою поодинокого реактивного шлейфу КЗ.

Як виходить з попереднього розгляду, реактивний шлейф треба під'єднувати в тому перерізі ЛП (тобто на такій відстані  $l_0$  від навантаження), де активна складова  $g_{BX}(l_0)$  вхідної провідності  $\dot{y}_{BX}(l_0) = g_{BX}(l_0) + jb_{BX}(l_0)$  має одиничне значення  $g_{BX}(l_0) = 1$ .

Розв'язання задачі буде включати наступні дії:

1. Визначаємо нормований опір навантаження (безрозмірний)

$$\dot{z}_H = \frac{\dot{Z}_H}{Z_X} = \frac{120 + j60}{50} = 2,4 + j1,2.$$

2. Відмічаємо на діаграмі точку А, що відповідає  $\dot{z}_H = 2,4 + j1,2$  – див. рис. 7.16а.

3. Знаходимо  $KСХ = 3,1$ ; проводимо коло сталого значення  $KСХ$  через цю точку – див. рис. 7.16б.

4. Для знаходження провідності навантаження можна зразу нанести точку А на кругову діаграму провідностей і отримати  $\dot{y}_H = 0,33 - j0,16$ ; але можна скористатися властивістю чвертьхвильових відрізків ЛП, які трансформують  $\dot{z}_H$  в  $1/\dot{z}_H = \dot{y}_H$ . Тоді значення  $\dot{y}_H$  можна отримати по круговій

діаграмі опорів, якщо зміститися по зовнішньому колу діаграми на відстань  $l/\lambda_X = 0,25$ , або в значеннях кутів на  $180^\circ$ . Для цього через точку А та центр діаграми проводимо пряму лінію і на колі сталого значення  $KСХ = 3,1$  знаходимо точку В', яка є точкою перетину кола  $r_H = 0,33$  та  $x_H = -0,16$  –рис. 7.16б, пунктирні лінії.

5. Через точку В' та центр діаграми проводимо пряму лінію. Вона перетинає зовнішню шкалу в напрямі «до генератору» в точці С' (рис. 7.16б), якій відповідає значення  $l_{C'} = 0,472 \cdot \lambda_X$ .

6. Знаходимо точку D', де перетинаються коло сталого значення  $KСХ = 3,1$  та коло сталого значення  $r_H = 1$ , рис. 7.16в, пунктирні лінії.

7. Знаходимо повний нормований опір в точці D' – рис. 7.18а. В цій точці перетинаються  $r_H = 1$  та  $x_H = +j1,2$ , отже  $\dot{z}_{D'} = 1 + j1,2$ .

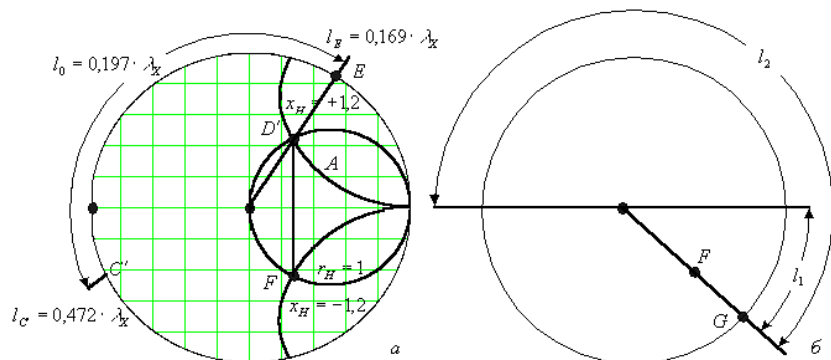


Рисунок 7.14 – До вирішення задачі узгодження за допомогою реактивних шлейфів

8. З центру діаграми через точку D' проводимо радіус і знаходимо точку Е, якій відповідає значення  $l_E = 0,169 \cdot \lambda_X$  в напрямі «до генератору» рис. 7.18а.

9. Визначаємо відстань  $l_0$  від навантаження до місця вмикання шлейфу; вона дорівнює довжині дуги (в напрямі «до генератору») від точки С' до точки Е – рис.7.18а

$$l_0 = 0,5 \cdot \lambda_X - l_{C'} + l_E = 0,5 \cdot \lambda_X - 0,472 \cdot \lambda_X + 0,169 \cdot \lambda_X = 0,197 \cdot \lambda_X .$$

10. Для визначення довжини  $l_1$  (або  $l_2$ ) реактивного шлейфу, необхідного для компенсації реактивної складової опору в точці D' ( $\dot{z}_{D'} = 1 + j1,2$ ) проводимо вертикальну лінію з точки D' до перетину її з колом сталого значення реактивного опору  $x_H = -j1,2$  і отримуємо точку F, де  $\dot{z}_F = 1 - j1,2$  – рис.7.18а.

11. Проводимо пряму з центру діаграми через точку F до перетину з зовнішнім колом діаграми – точка G на рис. 7.18б. Цій точці відповідає значення  $l_G = 0,332 \cdot \lambda_X$ .

12. Для визначення довжини  $l_1$  короткозамкнутого шлейфу визначаємо довжину дуги, відрахованої від точки короткого замикання в термінах провідностей  $\dot{y}_{K3} = \infty + j0$  в напрямку «до генератору» до точки G – рис.7.18б

$$l_1 = l_G - 0,25 \cdot \lambda_X = 0,332 \cdot \lambda_X - 0,25 \cdot \lambda_X = 0,082 \cdot \lambda_X .$$

13. З врахуванням вже визначеного значення довжини хвилі

в коаксіальному кабелі ( $\lambda_X = 2 \cdot 10^{-1} \text{ М} = 20 \text{ см}$  – Задача 7.1) визначаємо фізичні розміри відрізків ЛП  $l_{0\phi}$ ,  $l_{1\phi}$ ,  $l_{2\phi}$

$$l_{0\phi} = 0,197 \cdot \lambda_X = 0,197 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 3,94 \text{ см} ,$$

$$l_{1\phi} = 0,082 \cdot \lambda_X = 0,082 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 1,64 \text{ см} ,$$

$$l_{2\phi} = 0,332 \cdot \lambda_X = 0,332 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 6,64 \text{ см} .$$

На тому розрахунок закінчується.

## 7.2.10 Широкосмугове узгодження

Альтернативою вузькосмуговому узгодженню є широкосмугове узгодження, при якому номінали узгоджувальних елементів визначаються із умови досягнення заданої (або, в залежності від умов задачі, максимальної) смуги частот узгодження. При широкосмуговому узгодженні вимога ідеальної

узгодженості на розрахунковій частоті  $KCX(f_0) = 1$  взагалі не ставиться і не може слугувати підґрунтям до розрахунку номіналів узгоджувальних елементів. Більш того, було строго доведено [11], що при використанні реактивних узгоджувальних пристроїв неможливо досягти режиму чисто рухомої хвилі в неперервній кінцевій смузі частот і не всяке комплексне навантаження можна узгодити в заданій смузі частот при заздалегідь вказаному значенні допустимого  $KCX_{MAX}$  (теореми Фано).

При широкосмуговому узгодженні розрахунок номіналів реактивних узгоджувальних елементів виконують таким чином, щоб досягти однієї з двох можливих цілей:

- отримати мінімально можливе значення  $KCX$  в заданій смузі частот  $\Delta f_{vзг}$  ;

- отримати максимальне значення  $\Delta f_{vзг}$ , при вказаній величині допустимого  $KCX_{MAX}$ .

В якості прикладу розглянемо задачу широкосмугового узгодження активного навантаження. Така задача найчастіше виникає при необхідності зчленування двох ліній передачі з різними розмірами (або формою) поперечного перерізу (а звідси і різними значеннями хвильового опору). Вирішення задачі узгодження при зчленуванні двох ліній передачі здійснюється за допомогою спеціального пристрою – переходу. Перехід являє собою відрізок нерегулярної лінії передачі. Розрізняють плавні переходи, в яких розміри поперечного перерізу (в межах переходу) змінюються по неперервному закону та сходинчасті. Технічне завдання на розробку переходу встановлює смугу частот  $\Delta\omega_{vзг} = \omega_2 - \omega_1$ , та допустиме розузгодження  $K = KCX_{MAX}$  в цій смузі. Природно, що на практиці завжди бажано, щоб довжина переходу була мінімальною при заданих перепаді хвильового опору,  $\Delta\omega_{vзг}$  та  $K$ .

Для розширення смуги частот при одночасному покращенні якості узгодження застосовують багатосходинокві переходи. Приклад такого переходу наведено на рис. 7.19.

Довжини сходинок  $L_i$  (тобто регулярних ділянок переходу) звичайно обирають однаковими  $L_i = \lambda_x / 4$ , а необхідна

форма залежності КСХ від частоти (амплітудно-частотна характеристика ступеню узгодженості) забезпечується належним вибором хвильових опорів ліній передачі  $Z_{Xi}$ , що утворюють парціальну сходинку, та кількості сходинок. При цьому

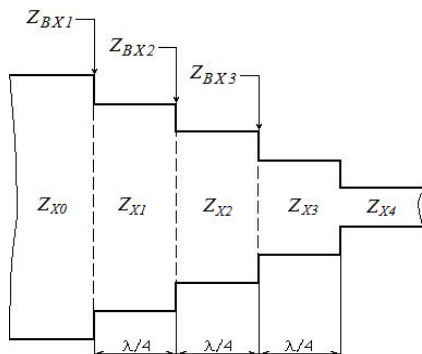


Рисунок 7.15 – Багатоступінчатий широкопasmовий перехід

загальна довжина переходу  $L = \sum_{i=1}^n L_i = n \cdot \lambda_x / 4$  суттєво збільшується у порівнянні з найпростішим чвертьхвильовим трансформатором з  $n = 1$  (тут  $n$  – кількість сходинок, які утворюють перехід).

Просту методику розрахунку багатоступінчастого трансформатора засновано на підборі відношення хвильових опорів у виразі:

$$\frac{Z_H}{Z_{Xn}} = \frac{Z_{Xn}}{Z_{exn}} = \frac{Z_{exn}}{Z_{Xn-1}} = \frac{Z_{Xn-1}}{Z_{exn-1}} = \dots = \frac{Z_{X1}}{Z_{ex1}}. \quad (7.14)$$

Групування членів, що попарно стоять поряд дає:

$$Z_{Xn}^2 = Z_H \cdot Z_{exn}, \quad Z_{Xn-1}^2 = Z_{exn} \cdot Z_{exn-1} \text{ и т.д.} \quad (7.15)$$

Комбінуючи різні співвідношення в (7.15), можна знайти хвилеві опори всіх сходинок. Довжина кожної секції трансформатору дорівнює чверті довжини хвилі в лінії на центральній частоті. Якщо в лінії є дисперсія, то довжина кожної секції обчислюється за формулою:

$$l = \frac{\lambda_B \cdot \lambda_H}{2(\lambda_B + \lambda_H)}, \quad (7.16)$$

де  $\lambda_B$  і  $\lambda_H$  – відповідають найвищій і найнижчій частотам використовуваного діапазону.

Відносну смугу пропускання трансформатору  $P$  може бути розраховано за формулою:

$$P = \frac{2(\lambda_H - \lambda_B)}{\lambda_H + \lambda_B}. \quad (7.17)$$

Амплітудно-частотні характеристики ступінчастих трансформаторів апроксимуються або за Баттервортом (максимально плоска), або за Чебишевим (рівнохвильова) - рис.7.20.

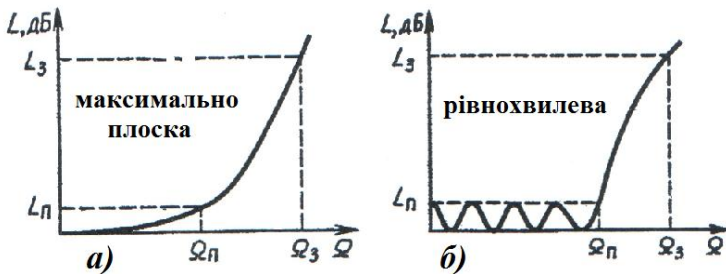


Рисунок 7.16 – Різновиди апроксимації

Точні формули для їх розрахунку наведено в таблиці 7.1, де  $n=2$  – відповідає двоступінчастому, а  $n=3$  – тріступінчастому трансформатору.

Додаткова інформація:

$$D = \frac{k^2(R-1)}{2(2-k^2)}; k = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot P\right)$$

Таблиця 7.1 – Формули розрахунку параметрів ступінчастих трансформаторів

<b>n = 2</b>	<b>n = 3</b>
Апроксимація за Баттервортом	
$Z_{X1} = Z_{X0} \cdot \left(\frac{Z_H}{Z_{X0}}\right)^{1/4}$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot \left(\frac{Z_H}{Z_{X0}}\right)^{3/4}$	$V_1^2 + 2R^{1/2} \cdot V_1 - \frac{2R^{1/2}}{V_1} -$ $-\frac{R}{V_1^2} = 0$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot R^{1/2}$ $Z_{X3} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$
Апроксимація за Чебишевим	
$V_1^2 = (D^2 + R)^{1/2} + D$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$ <p>де <math>R = \frac{Z_{X0}}{Z_H}</math> при <math>Z_{X0} &gt; Z_H</math> або <math>R = \frac{Z_H}{Z_{X0}}</math></p>	$V_1^2 + 2R^{1/2} \cdot V_1 - \frac{2R^{1/2}}{V_1} -$ $-\frac{R}{V_1^2} = \frac{3k^2(R-1)}{4-3k^2}$ $Z_{X1} = Z_{X0} \cdot V_1$ $Z_{X2} = Z_{X0} \cdot R^{1/2}$ $Z_{X3} = Z_{X0} \cdot \frac{R}{V_1}$

при $Z_{X0} < Z_H$	де $R = \frac{Z_{X0}}{Z_H}$ при $Z_{X0} > Z_H$ або $R = \frac{Z_H}{Z_{X0}}$ при $Z_{X0} < Z_H$
--------------------	---

Узгоджувальні елементи будуються не лише на основі ступінчастих трансформаторів, але і з відрізків ліній із змінним профілем поперечного перетину, як в разі плавних переходів. При цьому профіль переходу описується якою-небудь добре відомою функцією. Наприклад, досить часто використовується перехід, який описується експоненціальною функцією. На рис. 7.21 наведено такий перехід, який встановлено між лініями з різними значеннями хвильових опорів.

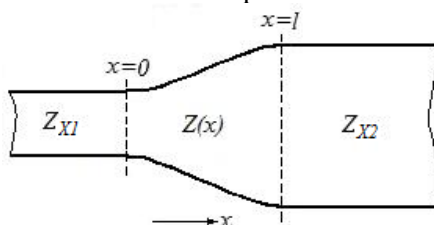


Рисунок 7.17 – Схема експоненціального переходу

Для експоненціальної функції, яка описує перехід, можна записати:

$$\frac{Z(x)}{Z_{X1}} = \exp\left(\frac{\theta \cdot x}{l}\right), \quad (7.18)$$

де  $\theta$  – параметр, який характеризує перехід і обирається різними способами. Зазвичай обирають  $\theta = \ln(Z_{X2}/Z_{X1})$ , тоді:

$$\frac{Z(x)}{Z_{X1}} = \exp\left(\frac{\ln(Z_{X2}/Z_{X1}) \cdot x}{l}\right). \quad (7.19)$$

Перевірка граничних умов дає:

при  $x=0$ ,  $Z(0) = Z_{X1} \exp(0) = Z_{X1}$ ,

при  $x=l$ ,  $Z(l) = Z_{X1} \exp(\ln(Z_{X2}/Z_{X1})) = Z_{X2}$ .

Графік нормованого коефіцієнту відбиття для переходу, який описано виразом (7.19), наведено на рис. 7.22.

Можна показати, що ця залежність описується функцією  $|\sin(x)/x|$ . Нульові значення коефіцієнту відбиття спостерігаються при  $l/\lambda = 0.5, 1.0, 1.5, \dots$ , тобто в цих точках має місце найкраще узгодження.

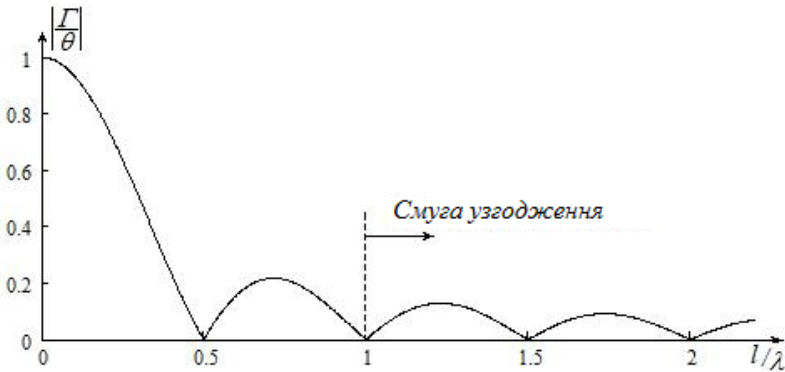


Рисунок 7.18 – До розгляду широкопasmового переходу

З графіку видно, що при виборі довжини переходу такою, щоб вона дорівнювала довжині хвилі ( $l/\lambda = 1.0$ ), або більше, можна отримати досить широкопasmовий узгоджувальний елемент.

### Контрольні запитання

1. При якій умові відрізок лінії передачі вважається коротким і як пояснити його трансформувальні властивості? Що таке недисипативне наближення?
2. Яку фізичну сутність має величина  $Z_{BX}$  лінії та за яким виразом його розраховують?
3. Які властивості має півхвилевий трансформатор?

4. Які властивості має чвертьхвильовий трансформатор?
5. Що таке реактивні шлейфи КЗ та ХХ і як знайти їх  $Z_{ВХ}$  ?
6. Яким є співвідношення між величинами вхідних опорів реактивних шлейфів КЗ і ХХ та як його застосовують?
7. Який вигляд мають частотні залежності  $Z_{ВХ}$  реактивних шлейфів КЗ і ХХ та як ці властивості застосовують?
8. Як розуміється режим узгодження та що таке узгоджувальний чотириполюсник?
9. За якими критеріями виконуються вузькосмугове та широкосмугове узгодження?
10. Який вигляд мають криві сталого значення  $n$  на круговій діаграмі повних опорів?
11. Який вигляд мають криві сталого значення  $x_n$  на круговій діаграмі повних опорів?
12. Який вигляд мають криві сталого значення  $KСХ$  на круговій діаграмі повних опорів?
13. Як відобразити точку  $\dot{z}_H = r_H \pm jx_H$  (або для провідності) на круговій діаграмі повних опорів?
14. Як на круговій діаграмі повних опорів відображаються фазові співвідношення?
15. Який алгоритм вирішення задач узгодження за допомогою кругової діаграми повних опорів?
16. Чим відрізняється вирішення задачі узгодження за допомогою  $\lambda/4$  трансформатору від узгодження за допомогою РШ? Якому підходу і за якими критеріями віддають перевагу?
17. Чим відрізняється кругова діаграма для провідностей від кругової діаграми для опорів?
18. За якими критеріями відрізняються вузькосмугове та широкосмугове узгодження?
19. Який алгоритм виконання вузькосмугового узгодження за допомогою шлейфу та трансформатору?
20. Який алгоритм виконання вузькосмугового узгодження за допомогою одного лише КЗ шлейфу?
21. Який алгоритм виконання широкосмугового узгодження за допомогою багатоступінчастого трансформатору?

22. Який алгоритм виконання широкосмугового узгодження за допомогою трансформатору, який виконано у вигляді експоненціального переходу?

## Приклади вирішення задач

**Задача 7.3** Лінію передачі з повітряним заповненням і хвильвим опором  $Z_X = 50$  Ом навантажено в перетині  $z_2 = 25$  мм (рис.7.23) активним опором  $R_H = 100$  Ом. Яким буде вхідний опір цієї лінії в перетині  $z_1 = 0$  мм? Частота  $f = 3$  ГГц

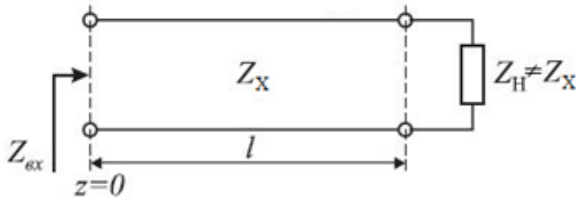


Рисунок 7.19 – До розгляду задачі 7.1

### Вирішення

1. Оскільки заповнення повітряне, то  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\text{tg}\delta=0$  і швидкість хвилі  $V_{\phi} = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Тоді довжина хвилі  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^9 = 0.1$  м = 100мм.

2. Знайдемо фазову сталу  $\beta$ .

$$\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.1 = 20\pi \text{ рад/м.}$$

3. Знайдемо довжину трансформувального відрізка

$$l = z_2 - z_1 = 25 - 0 = 25 \text{ мм та його електричну довжину}$$

$$\beta l = 20\pi \cdot 0.025 = \pi/2. \text{ Електричну довжину звичайно}$$

позначають грецькою літерою  $\theta$ . Тоді  $\theta = \beta l = \pi/2$ .

4. В техніці НВЧ прийнято користуватися нормованими до хвильового опору значеннями опорів та провідностей. Їх звичайно позначають відповідними малими літерами. Знайдемо нормовані опір  $z_n$  та провідність  $y_n$  навантаження.

$$z_n = R_H/Z_X = 100/50 = 2; y_n = (1/R_H) \cdot Z_X = 1/z_n = 0.5.$$

5. Якщо підставити отримані значення в вираз (7.3)

то отримаємо невизначеність типу  $\frac{\infty}{\infty}$ . Розкриємо її за правилом

Лопітала і тоді для нормованого вхідного опору  $z_{вх}$  в перетині  $z_1 = 0$  отримаємо

$$z_{вх} = 1/z_n = 1/2 = 0.5 = y_n$$

Звернемо увагу на те, що, по – перше, за нашими вихідними даними довжина  $l$  трансформувального відрізка лінії дорівнює **чверті** довжини хвилі  $\lambda$  в лінії ( $l = \lambda/4$ ), а по – друге, що чвертьхвильовий ( $l = \lambda/4$ ) відрізок лінії трансформує опір навантаження в такий, що **чисельно** дорівнює провідності навантаження.

**Задача 7.4** Двопровідну лінію з задачі 7.3 (розміри  $a, b$ ) під'єднано до двопровідної лінії з розмірами  $a_1 = 1$  мм,  $b_1 = 3.72$  мм. Треба обґрунтувати спосіб узгодження цих ліній і знайти поперечні та поздовжні розміри узгоджувального елемента. Частота  $f = 100$  МГц.

### Вирішення

1. Хвильовий опір лінії з задачі 7.2  $Z_X = 265$  Ом. Знайдемо хвильовий опір  $Z_{X1}$ .

$$Z_{X1} = 120 \cdot \ln \frac{a_1 - b_1}{b_1} = 120 \cdot \ln \frac{3.72 - 1}{1} \approx 120 \text{ Ом}$$

2. Оскільки з'єднані елементи мають дійсні значення хвильових опорів то доцільно для узгодження застосувати чвертьхвильовий трансформатор опору.

3. Оскільки заповнення повітряне, то  $\epsilon_a = \epsilon_0, \mu_a = \mu_0, \text{tg} \delta = 0$  і швидкість хвилі  $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Тоді довжина хвилі  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^8 = 3$  м, а  $l = \lambda/4 = 3/4$  м.

4. Знайдемо хвильовий опір трансформатору

$$Z_{TP} = \sqrt{Z_X \cdot Z_{X1}} = \sqrt{265 \cdot 120} \approx 178 \text{ Ом}$$

5. Для лінії з хвильовим опором  $Z_{TP}$  знайдемо

$$e^{Z_{TP} / 120} = \frac{b_{TP} - a_{TP}}{a_{TP}}$$

і при умові, що  $a_{TP} = a$ , отримаємо

$$b_{TP} = a \cdot (e^{Z_{TP} / 120} + 1) = 1 \cdot (e^{178/120} + 1) = 5.4 \text{ мм}.$$

## Задачі для самостійного вирішення

**Задача 7.5** Двопровідну лінію з задачі 7.3 (розміри  $a$ ,  $b$ ) навантажено на комплексний опір  $Z_H = 120 - j50$  Ом. Виконати узгодження за допомогою чвертьхвильового трансформатору та шлейфу.

**Задача 7.6** Двопровідну лінію з задачі 7.3 (розміри  $a$ ,  $b$ ) навантажено на комплексний опір  $Z_H = 120 - j50$  Ом. Виконати узгодження за допомогою одного КЗ шлейфу.

**Задача 7.7** За вихідними даними задачі 7.3 виконати узгодження за допомогою поодинокого реактивного шлейфу ХХ.

## Зауваження щодо вибору методу узгодження

Порівнюючи різні схеми узгодження треба враховувати такий аспект, як можливість їх технічної реалізації. Річ у тому, що в електрозв'язку застосовують напрямні системи (коаксіальні та симетричні кабелі, які масово випускає промисловість), в яких регламентують значення хвильового опору. Наприклад, коаксіальні кабелі випускають з номінальними значеннями  $Z_{XH1} = 75$  Ом або  $Z_{XH2} = 50$  Ом. В той же час, для реалізації чвертьхвильового трансформатору треба застосовувати трансформувальні відрізки з різними значеннями хвильового опору  $Z_{ХТР} \neq Z_{XH}$ , які промисловість не випускає.

## 8 ЧАСТОТНОВИБІРКОВІ КОЛА В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

При вирішенні як схемотехнічних, так і системотехнічних задач телекомунікації часто доводиться застосовувати частотновибіркові кола. Але в діапазоні досить високих частот застосовувані частотновибіркові кола вже не можна розглядати, як кола з зосередженими параметрами; В цьому випадку для дослідження та розробки частотновибіркових елементів телекомунікації вже треба застосовувати теорію кіл з розподіленими параметрами.

Частотнозалежними колами в телекомунікаціях є не тільки фільтрувальні елементи в різних діапазонах частот, але і частотнокоригувальні кола, які широко застосовують в лінійній частині апаратури класичного електрозв'язку. Але класичним прикладом частотновибіркових елементів є електричні фільтри.

За електричними властивостями розрізняють чотири різновиди фільтрів: ФНЧ, ФВЧ, СПФ, СЗФ. СЗФ ще звать режекторними фільтрами.

### 8.1 Різновиди електричних фільтрів

Електричний фільтр є звичайним 2-входовим (4-полюсним) пасивним взаємним пристроєм; часто при дослідженні нехтують ще й їх внутрішніми втратами і тоді фільтр стає ще й педисипативним. В цьому випадку для оцінки його властивостей достатньо задати частотні характеристики двох параметрів:

– затухання, яке фільтр вносить в тракт  $L(\omega)$

$$L(\omega) = 10 \lg \frac{1}{|S_{21}(\omega)|^2}, \text{ дБ}; \quad (8.1)$$

– фазова характеристика ФНВЧ  $\varphi(\omega)$ ; це фаза коефіцієнту передачі  $\varphi_{21}(\omega)$ , тобто  $\varphi(\omega) = \varphi_{21}(\omega)$ . Інколи треба задавати ще й час затримки  $\tau_3$ ; ця величина визначається через  $\varphi(\omega)$ .

Фільтри, як і будь-які інші частотновибіркові структури, розрізняють за частотними характеристиками їх затухання. Смуга

частот з малим значенням затухання зветься смугою пропускання, а з великим– смугою загородження– рис.8.1.

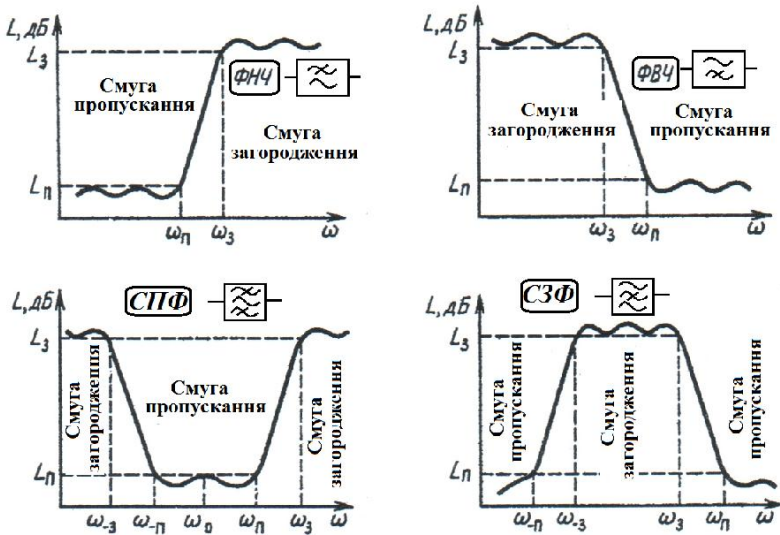


Рисунок 8.1 – Частотні характеристики та позначення фільтрів

Для характеристики частотних властивостей користуються величиною нормованої частоти

$$\Omega = \omega/\omega_п. \quad (8.2)$$

Зміст величин, які входять в (8.2) зрозумілий з рис.8.1.

Треба звернути увагу, що ЧХ кожного фільтру має перехідну область між смугою пропускання та смугою загородження, тобто між частотами  $\omega_п$  та  $\omega_з$ . В цій області затухання змінюється від максимального до мінімального. Звичайно прагнуть зменшити цю область (збільшити крутизну скатів ЧХ), але часто це призводить до ускладнення конструкції.

Виділяють розподілені та квазісореджені структури.

## 8.2 Використання відрізків ліній в якості коливальних систем

У наведених в розділі 7 співвідношеннях для вхідного опору КЗ і ХХ шлейфів приймалося, що втрати в лініях відсутні ( $\alpha l = 0$ ). Проте реальні лінії передачі завжди мають втрати ( $\alpha l \neq 0$ ), які, як правило, можна вважати малими. Розглянемо цей випадок детальніше, наприклад, для КЗ відрізка.

З формули  $Z_{\text{вх.КЗ}} = Z_X \text{th}(j\beta l)$  витікає:

$$Z_{\text{вх.КЗ}} = Z_X \text{th}(\alpha l + j\beta l) = Z_X \frac{\text{th}(\alpha l) + \text{th}(j\beta l)}{1 + \text{th}(\alpha l)\text{th}(j\beta l)} = Z_X \frac{\text{th}(\alpha l) + j \text{tg}(\beta l)}{1 + j \text{th}(\alpha l)\text{tg}(\beta l)} \quad (8.3)$$

При малих втратах, що відповідає умові  $\alpha l \rightarrow 0$ , справедливі відомі співвідношення для малого аргументу  $\sin(\alpha l) \approx \text{sh}(\alpha l) \approx \text{th}(\alpha l) \approx \alpha l$ .

Тоді з (8.3) отримуємо:

$$Z_{\text{вх.КЗ}} \approx Z_X \frac{\alpha l + j \text{tg}(\beta l)}{1 + j \alpha l \cdot \text{tg}(\beta l)}. \quad (8.4)$$

При  $\beta l = k\pi$ , де  $k=0,1$ ,  $\text{tg}(\beta l) = 0$ . Тоді вхідний опір буде мати мінімальне значення, яке дорівнює:

$$Z_{\text{вх.КЗ}} = Z_{\text{min КЗ}} = Z_X \cdot \alpha l. \quad (8.5)$$

При  $\beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $\text{tg}(\beta l) = \infty$ . В цьому випадку в чисельнику (8.4) можна знехтувати величиною  $\alpha l$ , а в знаменнику 1, в результаті вхідний опір матиме максимальне значення, яке дорівнює:

$$Z_{\text{вхКЗ}} = Z_{\text{max КЗ}} = \frac{Z_X}{\alpha l}. \quad (8.6)$$

Для розімкненого на кінці відрізка лінії (XX) вхідний опір буде:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_X \operatorname{cth}(\alpha l + j\beta l) = Z_X \frac{1 + j \operatorname{th}(\alpha l) \operatorname{tg}(\beta l)}{\operatorname{th}(\alpha l) + j \operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (8.7)$$

Звідси при малих втратах  $\alpha l \ll 1$  буде:

$$Z_{\text{вхXX}} \approx Z_X \frac{1 + j \alpha l \cdot \operatorname{tg}(\beta l)}{\alpha l + j \operatorname{tg}(\beta l)}. \quad (8.8)$$

Тоді при  $\beta l = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg}(\beta l) = \infty$ , маємо мінімальне значення вхідного опору розімкненого відрізка:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_{\text{min XX}} = Z_X \cdot \alpha l. \quad (8.9)$$

При  $\beta l = k\pi$ ,  $\operatorname{tg}(\beta l) = 0$ , і вхідний опір розімкненого відрізка буде мати максимальне значення:

$$Z_{\text{вхXX}} = Z_{\text{max XX}} = \frac{Z_X}{\alpha l}. \quad (8.10)$$

На рис. 8.2 наведено залежності вхідного опору КЗ і XX відрізків лінії від відношення  $l/\lambda$ . Як видно, максимуми (і мінімуми) КЗ і XX відрізків однакової довжини зміщено на  $\lambda/4$  і вони мають яскраво виражений резонансний характер.

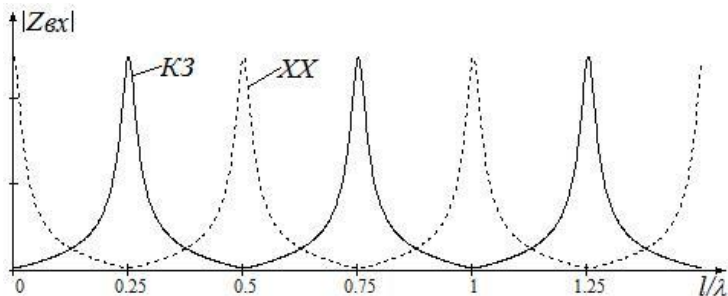


Рисунок 8.2 – Вхідні опори КЗ і ХХ відрізків лінії

Перший максимум для КЗ відрізка спостерігається при  $l = \lambda/4$ . Ця довжина хвилі зветься основною резонансною довжиною хвилі  $\lambda_{\text{рез}}$ . При цьому вхідний опір:

$$Z_{\text{вх.рез}} = \frac{4Z_X}{\alpha\lambda_{\text{рез}}}. \quad (8.11)$$

На практиці в якості високодобротних резонаторів широко використовуються, зокрема, чвертьхвильові відрізки КЗ. Розімкнені на кінці (ХХ) відрізки використовуються рідко, оскільки з відкритого кінця лінії випромінюється досить велика частка корисної потужності.

*Добротність* чвертьхвильового резонатора КЗ можна отримати, розглядаючи невеликі за значенням відхилення від резонансної частоти, тобто коли:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1. \quad (8.12)$$

Величина  $\delta$  зветься *відносним* відхиленням частоти, а  $\Delta\omega$  – *абсолютним*.

При цьому вхідний опір чвертьхвильового КЗ відрізка на частоті  $(\omega_0 + \Delta\omega)$  з достатньою точністю описується формулою:

$$Z_{\text{BX}}(\omega) = \frac{Z_X}{\alpha l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\delta}{2\alpha l}\right)^2}}. \quad (8.13)$$

На резонансній частоті  $\omega_0$  ( $\Delta\omega = 0$ )

$$Z_{\text{BX}}(\omega_0) = \frac{Z_X}{\alpha l}. \quad (8.14)$$

Тоді рівняння резонансної кривої буде мати вигляд:

$$\frac{Z_{\text{BX}}(\omega)}{Z_{\text{BX}}(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\delta}{2\alpha l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4\alpha l} \cdot \frac{1}{Q}\right)^2}}. \quad (8.15)$$

Звідси, з врахуванням визначення смуги пропускання за спадом значення резонансної кривої (8.15) до рівня  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , отримаємо вираз для добротності резонатора, утвореного чвертьхвильовим КЗ відрізком лінії довжиною  $l$ :

$$Q = \frac{\pi}{4\alpha l}. \quad (8.16)$$

З формули (8.16) витікає, що резонансні властивості КЗ відрізків лінії виявляються тим різкіше, чим менші втрати.

### 8.3 Елементи фільтрів на квазізосереджених структурах

Короткий відрізок лінії передачі довжиною  $l \ll \lambda$ , з хвильовим опором  $Z_x$  і сталою поширення  $\gamma$  можна представити у

вигляді Т- або П-подібної еквівалентної схеми заміщення із зосереджених елементів (рис. 8.3).

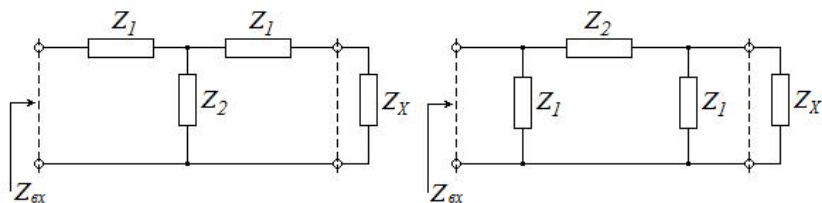


Рисунок 8.3 – Еквівалентні схеми заміщення відрізка лінії

Ці схеми заміщення точно характеризують відрізок лінії лише на тій частоті, на якій розраховано величини елементів, які входять в еквівалентні схеми.

За еквівалентними схемами нескладно знайти вхідні опори  $Z_{вх}$  для кожної з схем. Наприклад, для Т – подібної схеми:

$$Z_{вх} = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1 + Z_X)}{Z_1 + Z_2 + Z_X}. \quad (8.17)$$

Крім цього, вхідний і вихідний струми зв'язано співвідношенням:

$$I_{вх} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_X} I_{вх}. \quad (8.18)$$

Оскільки відрізок лінії вважається узгодженим, то в ньому поширюватиметься лише падаюча хвиля і, отже, струми на вході і виході зв'язані рівнянням:

$$I_{вх} = I_{вх} \exp(-\gamma l). \quad (8.19)$$

Комбінуючи (8.17), (8.18), (8.19), з урахуванням того, що для узгодженої лінії  $Z_{вх} = Z_X$ , після нескладних перетворень отримаємо:

$$Z_1 = Z_X \operatorname{th} \left( \frac{\gamma l}{2} \right), \quad (8.20)$$

$$Z_2 = \frac{Z_X}{sh(\gamma l)}. \quad (8.21)$$

Аналогічно розглядаючи П – подібну схему, отримаємо вирази для елементів, що в неї входять:

$$Z_1 = \frac{Z_X}{th\left(\frac{\gamma l}{2}\right)}, \quad (8.22)$$

$$Z_2 = Z_X sh(\gamma l). \quad (8.23)$$

Для короткого відрізка лінії втратами можна нехтувати ( $\alpha l = 0$ ), і тоді, з врахуванням малого аргументу  $\beta l$  (оскільки  $l \ll \lambda$ ) з (8.20) і (8.21), отримуємо:

$$Z_1 = Z_X tg\left(j \frac{\beta l}{2}\right) = jZ_X tg\left(\frac{\beta l}{2}\right) \approx jZ_X \frac{\beta l}{2} = jZ_X \frac{\omega l}{2v_\phi}, \quad (8.24)$$

$$Z_2 = \frac{Z_X}{\sin(j\beta l)} = \frac{Z_X}{j \sin(\beta l)} \approx \frac{Z_X}{j\beta l} = \frac{Z_X}{j \frac{\omega l}{v_\phi}}. \quad (8.25)$$

З (8.24) та (8.25) витікають еквівалентні схеми відрізків лінії на зосереджених елементах, які відповідають схемам на рис. 8.3; їх показано на рис. 8.4.

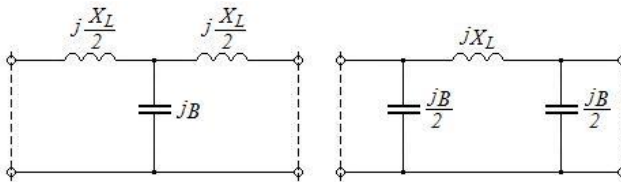


Рисунок 8.4 – Схеми відрізків лінії на зосереджених елементах

Використання (8.24) і (8.25) для Т – подібної схеми на рис. 8.4 дає величини  $X_L$  і  $B$ :

$$X_L = \omega L = Z_X \frac{\omega l}{v_\Phi}, \quad (8.26)$$

$$B = \omega C = \frac{1}{Z_X} \frac{\omega l}{v_\Phi}. \quad (8.27)$$

Аналогічні формули отримують і для П – подібної схеми.

З (8.26) і (8.27) витікає, що характеристики зосереджених елементів і елементів з розподіленими параметрами зв'язано співвідношеннями:

$$L = Z_X \frac{l}{v_\Phi}, \quad (8.28)$$

$$C = \frac{1}{Z_X} \frac{l}{v_\Phi}. \quad (8.29)$$

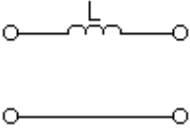
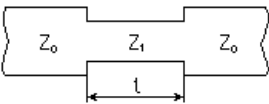
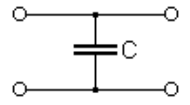
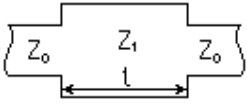
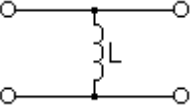
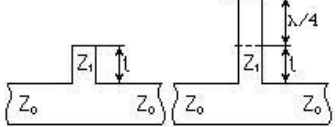
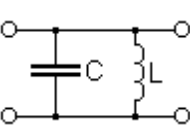
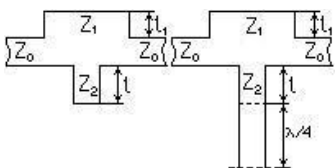
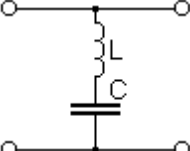
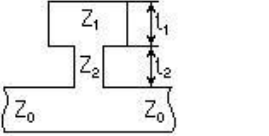
Ці формули показують, що при встановленні короткого відрізка лінії передачі з високим значенням хвильового опору в розрив лінії з нижчим значенням хвильового опору, то в (8.29) ємність  $C \rightarrow 0$ . З цього витікає, що такий відрізок буде еквівалентним послідовно ввімкнутій індуктивності. Якщо ж в розрив лінії з високим хвильовим опором встановити відрізок з малим хвильовим опором, то згідно (8.28) і (8.29) такий відрізок поводитиметься як ємність, яку ввімкнуто в лінію паралельно.

Використовуючи розглянуті елементи з розподіленими параметрами, які за властивостями еквівалентні зосередженим, можна реалізувати ряд елементів з іншими схемами ввімкнення: паралельна індуктивність, послідовний контур, що ввімкнено паралельно, і ін. У таблиці 8.1 наведено еквівалентні схеми на зосереджених елементах і відповідні їм реалізації на розподілених елементах на основі смужкової (мікросмужкової) лінії передачі, а також вказано межі їх застосовності.

Реалізація за допомогою відрізків смужкових і мікросмужкових ліній послідовної ємності, або ввімкнутого послідовно паралельного коливального контуру, можлива лише з використанням спеціальних прийомів. Наприклад, для реалізації ємності, яку ввімкнуто послідовно, в лініях передачі смужкового

типу прорізаються поперечні щілини. Необхідність в таких елементах виникає при створенні фільтрів верхніх частот і смугопропускальних фільтрів.

Таблиця 8.2 – Перехід від зосереджених до розподілених елементів

Кола на зосереджених елементах	Елементи розподіленими параметрами	Формула переходу
		$L = \frac{Z_1 \cdot l}{f \cdot \lambda},$ $Z_1 > Z_0, l < \lambda/8$
		$C = \frac{l}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda},$ $Z_1 < Z_0, l < \lambda/8$
		$L = \frac{Z_1 \cdot l}{f \cdot \lambda}$
		$C = \frac{l_1}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda};$ $L = \frac{Z_2 \cdot l_2}{f \cdot \lambda}$
		$C = \frac{l_1}{Z_1 \cdot f \cdot \lambda};$ $L = \frac{Z_2 \cdot l_2}{f \cdot \lambda}$

## 8.4 Приклади топологій фільтрів на ЛП інтегрального типу

На рис. 8.5 наведено схему фільтру низьких частот на зосереджених елементах і реалізація цієї схеми на елементах з розподіленими параметрами з використанням відрізків несиметричних смужкових ліній.

Приклад топології смужкових провідників смугопропускального фільтру при реалізації на несиметричних смужкових лініях з використанням властивостей чвертьхвильових шлейфів показано на рис. 8.6.

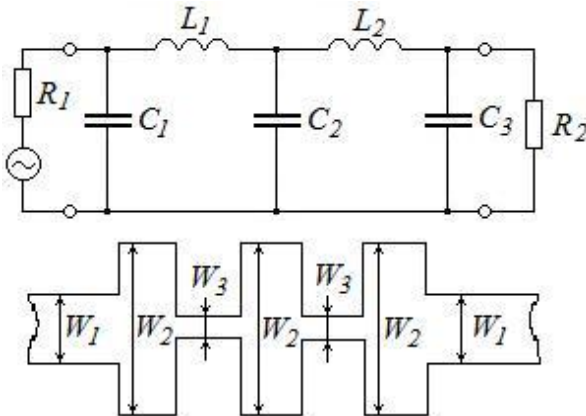


Рисунок 8.5 – Фільтр низьких частот

Якщо в наведеній схемі коротке замикання в чвертьхвильових шлейфах замінити на холостий хід, то отримаємо смугозагороджувальний (режекторний) фільтр.

Слід зазначити, що для точнішого розрахунку характеристик фільтрів необхідно враховувати реактивний характер впливу неоднорідностей, які виникають в місцях Т-подібних розгалужень несиметричних смужкових ліній і стику ліній з різними значеннями хвильових опорів.

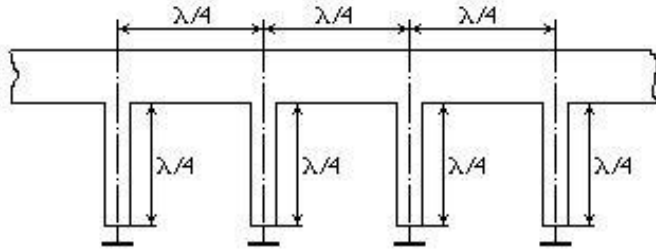


Рисунок 8.6 –Смуговий фільтр на мікросмужкових лініях

На рис.8.7а наведено схему ФВЧ, а на рис.8.7б – його топологічну реалізацію на НСЛ. Тут послідовно ввімкнуті ємності (рис.8.7г) виконано розривами в смужці НСЛ (рис.8.7в). Такі конденсатори мають невелику ємність (одиниці пФ). Дещо більшу ємність (до 5...6 пФ) можна отримати на основі гребінчастої структури – рис.8.7д. Паралельні індуктивності виконують з застосуванням РШ КЗ довжиною  $l_L$  – рис.8.7б. Тут  $l_L < \lambda/4$ .

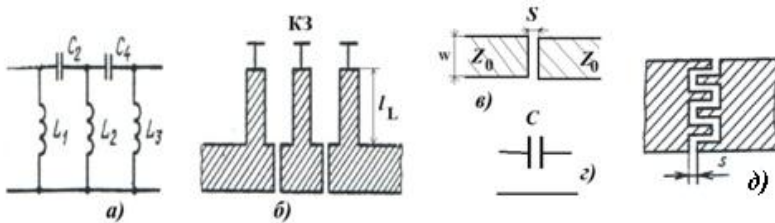


Рисунок 8.7 – До розгляду ФВЧ

Значно більшої ємності можна досягти з використанням тришарової конструкції – рис.8.8а. Подальше збільшення ємності досягається використанням тонких плівок ( $t=1...2$  мкм) в якості діелектричного прошарку. В якості дроселів та контурних індуктивностей в разі необхідності застосовують спіральні індуктивні елементи; на рис.8.8б наведено приклад круглої

спіральної індуктивності на основі НСЛ. Застосовують і другі форми.



Рисунок 8.8 – Варіанти виконання елементів фільтрів

Таким чином можна досягти значення індуктивності до сотень нГн.

На рис.8.9а наведено схему СПФ, а на рис.8.9б – його топологію на подинюких НСЛ з розривами, яка являє собою каскадно з'єднані через торцеві ємності (розриви НСЛ) напівхвильові розімкнуті резонатори (РШ з режимом ХХ на обох кінцях).

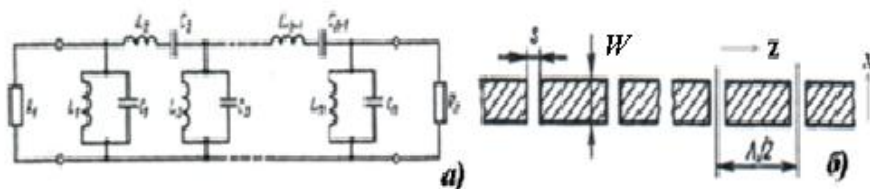


Рисунок 8.9 – До розгляду СПФ

Відстань між центрами розривів складає  $\lambda/2$ , а розмір  $s$  самого розриву визначає величину смуги пропускання. Широка смуга пропускання таких фільтрів забезпечується при сильному зв'язку між резонаторами, тобто при великих значеннях послідовної ємності; цього можна досягти при дуже малих значеннях розміру  $s$ . В свою чергу, цей розмір обмежується існуючою технологією на рівні приблизно 40...50 мкм. Внаслідок цього фактору ширина смуги такого фільтру не перевищує 20%. Подібні фільтри є сенс застосовувати в тому випадку, коли дуже

обмежено розмір по координаті  $x$  – рис.8.9б, але розмір за поздовжньою координатою зможе бути досить великим.

Варіанти топологій СПФ на паралельних зв'язаних напівхвильових резонаторах наведено на рис.8.10. Кожен напівкаскад має чвертьхвильову довжину на центральній частоті СПФ і хвильові опори (провідності) парного  $Z_{oe}$  ( $Y_{oe}$ ) та непарного  $Z_{oo}$  ( $Y_{oo}$ ) коливань. З'єднання двох чвертьхвильових напівкаскадів утворюють одну секцію напівхвильового резонатору. Схему СПФ на рис. 8.10б можна отримати безпосередньо із схеми рис. 8.10а, замінивши ланки в режимі ХХ ланками в режимі КЗ.

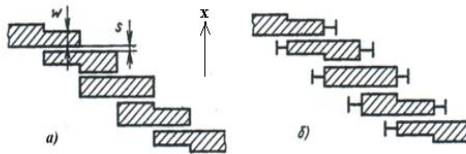


Рисунок 8.10 – Варіанти топологій СПФ

Якщо необхідно зменшити розмір фільтру в напрямі координати  $x$  (рис.8.10), то застосовують топологічні вирішення або зі шпильковими резонаторами – рис.8.11а, або на зустрічних стрижнях – рис.8.11б та 8.11в.

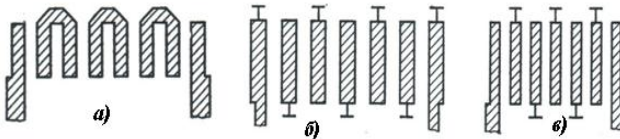


Рисунок 8.11 – Варіанти топологій СПФ зі зменшеними розмірами

Відмітимо, що для організації режиму КЗ (рис.8.10б, рис.8.11б, рис.8.11в) необхідно виконувати отвір в підкладинці. Оскільки підкладинку найчастіше виконують із полікору, а це досить тверда та ламка кераміка, то це є складною технологічною операцією і бажано її уникати.

Схему СЗФ наведено на рис.8.12а, а на рис.8.12б – топологію на резонаторах з  $\lambda/4$  зв'язками.

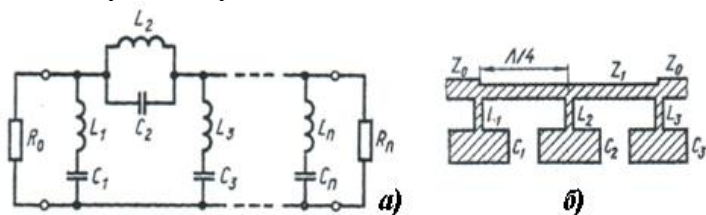


Рисунок 8.12 – До розгляду СЗФ

Такі СЗФ прості за конструкцією, але мають досить великі розміри. Зменшення розмірів можна досягти з використанням схеми СЗФ на зв'язаних лініях – рис.8.13а, оскільки в ній резонатори розташовано паралельно основній лінії.



Рисунок 8.13 – Різновиди топологій СЗФ

Окрім того, тут резонатори ввімкнуто послідовно один за одним, вони мають електромагнітний зв'язок з основною лінією та різні режими на своїх протилежних кінцях – ХХ та КЗ. Недолік фільтру – необхідність режиму КЗ в НСЛ. Позбавитись цього недоліку можна різними способами. Топологію СЗФ з використанням комбінування НСЛ та СЩЛ наведено на рис.8.13б. Тут режим КЗ не застосовано; смужку 1 та щілину 2 розташовано по різні сторони діелектричної підкладки (кераміка).  $\lambda/2$  – щілинні резонатори мають максимальний зв'язок з НСЛ при симетричному розташуванні СЩЛ та НСЛ. В цьому випадку затухання СЗФ (в смужі загородження) та відносна ширина смуги загородження є максимальними. При віддаленні щілинного резонатора від вісєвої лінії НСЛ значення обох

параметрів зменшуються. Відстань між щілинними резонаторами дорівнює  $\lambda/4$ . Такі СЗФ зручні в виробництві, бо не вимагають свердлення підкладки, але вимагають наявності двосторонньої технології для виготовлення НСЛ та СЩЛ, які розташовано по різні сторони підкладки.

На рис.8.14 наведено другий варіант топології СЗФ на НСЛ без застосування режиму КЗ. Тут застосовано чвертьхвильову чотириохпровідну зв'язану НСЛ та чвертьхвильові шлейфи ХХ.

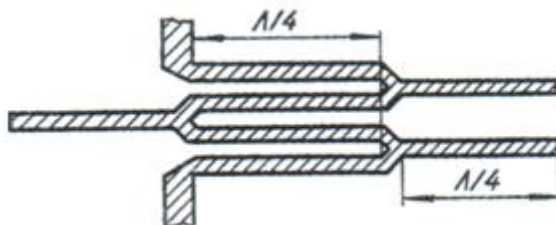


Рисунок 8.14 – Поліпшена топологія СЗФ на зв'язаних НСЛ

Суттєвого зменшення габаритів фільтрів можна досягти при застосуванні об'ємних інтегральних схем (ОІС), які засновано на використанні принципів комбінування інтегральних ліній передачі різного типу. Одним із прикладів є фільтр на рис.8.13б, де застосовано комбінування НСЛ та СЩЛ, які виконано по різні сторони підкладки.

Цікавими можливостями володіє конструкція багаторезонаторного СПФ на основі використання принципів комбінування ЛП інтегрального типу – ССЛ, НСЛ та СЩЛ. Його ескіз наведено на рис.8.15а. Тут застосовано чотири шари діелектрику та п'ять шарів металізації, які утворюють два  $\lambda/2$  резонатори ХХ на СЩЛ, а між ними розташовано  $\lambda/2$  резонатор КЗ на ССЛ.

В першому та п'ятому шарах металізації розташовано підвідні ЛП на НСЛ. Резонатори на СПЛ та СЩЛ розташовано в сусідніх діелектричних прошарках і вони мають між собою зв'язок квазізосередженого характеру. При ортогональному розташуванні вісей ( $\varphi = 0$ , рис.8.15б) зв'язок між резонаторами

максимальний ( $K_{ЗВ} = 1$ ), а при паралельному – мінімальний ( $K_{ЗВ} = 0$ ).

Величину зв'язку можна також змінювати шляхом зміщення ортогональних вісей резонаторів відносно один одного; при цьому електрична довжина між резонаторами дорівнює  $\theta$ . Відповідні залежності наведено на рис. 8.15б (крива 1, кружки, відповіде зміні  $\theta$ , а крива 2, трикутники, – зміні  $\varphi$ ).

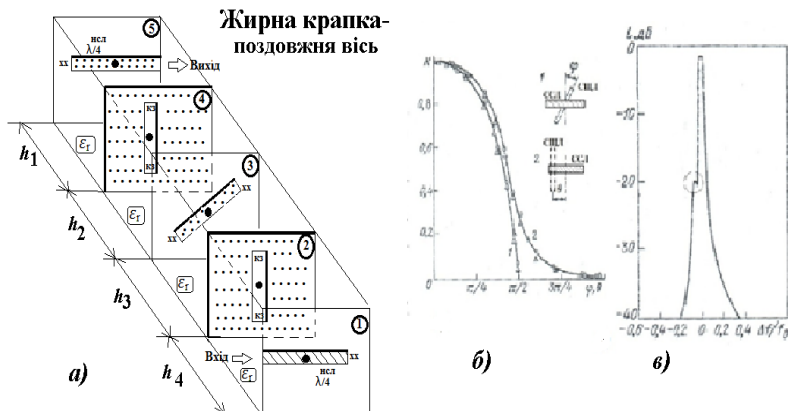


Рисунок 8.15 – СПФ на основі застосування принципів ОІС

Існування двох видів зміни зв'язку між резонаторами збільшує можливості попереднього механічного налаштування фільтру при його експериментальному дослідженні. В данному випадку зв'язок резонаторів здійснюється по магнітному полю в вертикальній площині відносно площини резонаторів. Електродинамічний аналіз в цій ситуації являє собою досить складну задачу, а тому було проведено експериментальне дослідження.

Експериментально отримані АЧХ затухання цього фільтру наведено на рис.8.15б. Спотворення крутизни лівого скату АЧХ (рис.8.15в) зумовлено (це гіпотеза) додатковим зв'язком 1-го та 3-го резонаторів (2-й та 4-й шари металізації) по магнітному полю «мимо» резонатору 2 (3-й шар металізації). Це

відкриває перспективу створення нового класу фільтрів з «нетрадиційними» зв'язками між окремими резонаторами.

Відмітимо досить малі габарити такого фільтру: при  $h_i \approx 1$  мм загальна товщина  $\approx 4$  мм, а поперечний розмір  $\approx \lambda/2$ .

### Контрольні запитання

6. Які існують різновиди фільтрів та які їх параметри і АЧХ?
7. Як знайти вхідний опір для КЗ та ХХ відрізків лінії?
8. Як довести властивість частотної вибіркості КЗ та ХХ відрізків лінії?
9. Як знайти добротність чвертьхвильового резонатору?
10. Який вигляд має рівняння резонансної кривої резонатору?
11. Який вигляд мають еквівалентні схеми заміщення коротких відрізків лінії та як знайти параметри елементів цих схем?
12. Який вигляд мають схеми на зосереджених елементах для коротких відрізків лінії та як знайти параметри цих елементів?
13. Якими співвідношеннями зв'язано характеристики зосереджених елементів і елементів з розподіленими параметрами?
14. Як в мікросмужковому варіанті реалізуються елементи L та C для різних способів ввімкнення їх в лінію?
15. Як здійснюється перехід від зосереджених розподілених елементів?
16. Яка схема та смужкова реалізація фільтру низьких частот?
17. Яка топологія смужкових провідників смугопропускального фільтру при реалізації на несиметричних смужкових лініях?
18. Яка схема та смужкова реалізація фільтру високих частот?

19. Які застосовують варіанти виконання елементів фільтрів?
20. Які схема смугопрпускарального фільтру та його топологія?
21. Як будують варіанти топологій СПФ на зв'язаних смужкових лініях? Як зменшують їх розміри?
22. Яка схема смугозагороджувального фільтру та які різновиди його топології?
23. Якою є поліпшена топологія СЗФ на зв'язаних НСЛ?
24. Якою є конструкція СПФ на основі застосування принципів об'ємних інтегральних схем?

## 9 МАТРИЧНИЙ ОПИС КІЛ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Матричний аналіз як в низькочастотній (кола з зосередженими параметрами), так і в високочастотній (кола з розподіленими параметрами) областях є ефективним засобом опису і дослідження кіл. Цьому сприяє інтенсивний розвиток засобів обчислювальної техніки і математичних методів моделювання, заснованих на використанні різних матричних процедур, які вживаються при описі властивостей кіл.

В той же час, в області високих і надвисоких частот традиційний опис кіл за допомогою матриць опору  $Z$  та провідності  $Y$  інколи стає обтяжливим, а часто і неможливим. Це зв'язано з тим, що на високих частотах виміри опору за напругою та струмом (як в колах з зосередженими параметрами) практично неможливі з-за відсутності приладів для прямого виміру напруг та струмів. Тому в ВЧ техніці вимірюваними величинами, як правило, є не напруги та струми, а комплексні коефіцієнти відбиття та передачі, які однозначно зв'язано з амплітудами і фазами падаючих і відбитих рухомих хвиль (за нормованими напругою або струмом) на входах та виходах пристроїв.

Зазвичай вводять модель реального пристрою у вигляді деякого багатополосника і далі абстрагуються від внутрішньої структури пристрою і досліджують його властивості лише шляхом аналізу режимів на зовнішніх затисках введеного багатополосника.

Як математичну модель багатополосника в діапазоні ВЧ в більшості випадків використовують системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно нормованих (або ненормованих) комплексних амплітуд падаючих і відбитих хвиль в граничних перетинах багатополосника. Сукупність коефіцієнтів системи рівнянь являє собою матриці або *розсіювання*  $S$ , або *хвилеву матрицю передачі*  $T$ .

## 9.1 Матриця розсіювання

Моделлю реального лінійного двохходового пристрою ВЧ, є наведений на рис. 9.1 чотириполюсник, який описується відносно своїх плечей амплітудами нормованих напруг падаючих та відбитих (розсіяних) хвиль. У позначеннях на рис. 9.1 і далі в тексті прийнято падаючі хвилі позначати знаком (+), а відбиті – знаком (-). Слід звернути увагу, що падаючі хвилі з напругою  $U_i^+$  завжди мають напрям від зовнішнього середовища до чотириполюсника (багатополюсника), а відбиті  $U_i^-$  – від багатополюсника у бік зовнішнього середовища.

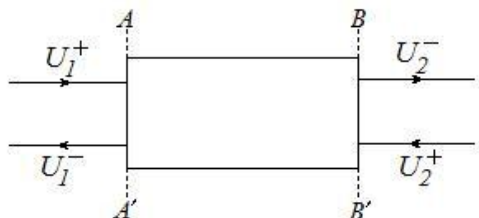


Рисунок 9.1 – Чотириполюсник і сигнали на його полюсах (плечах)

Властивості чотириполюсника можна однозначно описати (визначити) двома алгебраїчними рівняннями, які зв'язують нормовані амплітуди відбитих (розсіяних) хвиль з нормованими амплітудами падаючих хвиль в граничних перетинах  $AA'$  і  $BB'$  чотириполюсника

$$\left. \begin{aligned} U_1^- &= s_{11}U_1^+ + s_{12}U_2^+ \\ U_2^- &= s_{21}U_1^+ + s_{22}U_2^+ \end{aligned} \right\}, \quad (9.1)$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

де  $\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \end{pmatrix}$  – вектор-стовпець нормованих напруг відбитих

хвиль;

$\begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix}$  – вектор-стовпець нормованих напруг падаючих хвиль.

Матриця

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

зветься матрицею розсіювання (S–матрицею) чотиріполюсника.

У символічній формі рівняння (9.2) запишеться у вигляді:

$$U^- = S \cdot U^+. \quad (9.4)$$

Елементи  $s_{11}$  і  $s_{22}$  є комплексними коефіцієнтами відбиття за напругою відповідно від першого або другого плеча за умови, що до іншого плеча під'єднано узгоджене навантаження (узгоджений режим). Елементи  $s_{21}$  і  $s_{12}$  є комплексними коефіцієнтами передачі за напругою відповідно між першим та другим або другим та першим плечами в режимі узгодження. Як видно з цих означень, всі елементи матриці розсіювання мають чіткий фізичний зміст і всі вони можуть бути визначені експериментально за допомогою типової вимірювальної апаратури (вимірювальні лінії або панорамні вимірювачі АЧХ).

Для зручності при виконанні математичних операцій комплексні амплітуди напруг (або струмів) падаючих та відбитих хвиль нормуються таким чином, щоб виконувались рівності:

$$\frac{(U_1^+)^2}{2} = P_{1\text{пад}}, \quad \frac{(U_1^-)^2}{2} = P_{1\text{від}},$$

$$\frac{(U_2^+)^2}{2} = P_{2\text{пад}}, \quad \frac{(U_2^-)^2}{2} = P_{2\text{від}}.$$

За відсутності в «нутрошах» чотириполюсника дисипативних втрат застосування закону збереження енергії дає наступний зв'язок між модулями коефіцієнтів матриці розсіювання:

$$\left. \begin{aligned} |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 &= 1 \\ |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (9.5)$$

В літературі співвідношення типу (9.5) прийнято називати властивістю унітарності S-матриці, а саму матрицю – унітарною.

На рис. 9.2 показано довільний багатополіусник, який має  $n$  виходів (або плечей), і тому зветься  $2n$  – поліусником. На основі розглянутого вище підходу такий багатополіусник також може бути описано матрицею розсіювання.

По аналогії з чотириполюсником, система рівнянь, яка зв'язує нормовані амплітуди напруг відбитих хвиль з нормованими амплітудами напруг падаючих хвиль в усіх граничних перетинах  $2n$  – поліусника, має наступний вигляд:

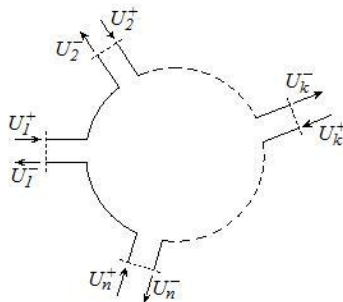


Рисунок 9.2 –  $2n$ –поліусник і сигнали на його полюсах

$$\left. \begin{aligned} U_1^- &= s_{11}U_1^+ + s_{12}U_2^+ + \dots + s_{1n}U_n^+ \\ U_2^- &= s_{21}U_1^+ + s_{22}U_2^+ + \dots + s_{2n}U_n^+ \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ U_n^- &= s_{n1}U_1^+ + s_{n2}U_2^+ + \dots + s_{nn}U_n^+ \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

В матричній формі

$$\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ \dots \\ U_n^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ \dots \\ U_n^+ \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Тут, як і у випадку чотириполосника,  $\begin{pmatrix} U_1^- \\ U_2^- \\ \dots \\ U_n^- \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \\ \dots \\ U_n^+ \end{pmatrix}$  – вектори-

стовпці нормованих напруг, відповідно, відбитих і падаючих хвиль. В символній формі запис (9.7) є аналогічним запису (9.4).

В (9.7) матриця коефіцієнтів є матрицею розсіювання  $2n$ -полосника:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Діагональний елемент  $s_{kk}$  цієї матриці є коефіцієнтом відбиття за напругою в  $k$  — му плечі багатополосника за умови, що до всіх інших плечей приєднано узгоджені навантаження. Елемент  $s_{ik}$  при  $i \neq k$  є коефіцієнтом передачі за напругою з плеча  $k$  в плече  $i$  при виконанні умови узгодження в усіх інших плечах. У загальному випадку елементи матриці  $S$  є комплексними величинами.

В випадку недисипативного багатополосника, на підставі закону збереження енергії, також має місце властивість унітарності:

$$\sum_{i=1}^n |s_{ik}|^2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.9)$$

Окрім того, якщо багатополосник взаємний, то його матриця розсіювання симетрична, а тоді сума квадратів модулів елементів  $i$  будь-якого рядка матриці розсіювання також дорівнює одиниці:

$$\sum_{k=1}^n |s_{ik}|^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.10)$$

## 9.2 Матриці розсіювання простих базових елементів

При аналізі складних ВЧ пристроїв часто застосовується принцип декомпозиції, при якому цей пристрій розбивається на прості складові частини – базові елементи (БЕ). При цьому БЕ обираються так, щоб їх матриці розсіювання можна було досить легко обчислити (або виміряти). Таким чином утворюється декомпозиційна схема складного пристрою. Якщо для кожного БЕ застосувати його математичну модель у вигляді відповідного багатополосника, то отримаємо математичну модель ДС у вигляді деякого з'єднання багатополосників. Тоді задача аналізу ВЧ пристрою зведеться до задачі знаходження результуючої матриці розсіювання цієї математичної моделі шляхом об'єднання  $S$ -матриць БЕ. Цей процес зветься рекомпозицією.

Розглянемо деякі різновиди БЕ.

**1. Відрізок регулярної лінії без втрат (недисипативний)** довжиною  $l$  (рис. 9.3). При умові узгодження його можна описати безпосередньо в термінах падаючих і відбитих хвиль в граничних перетинах. Враховуючи, що відрізок недисипативної узгодженої лінії вносить лише зсув за фазою, отримаємо систему рівнянь:

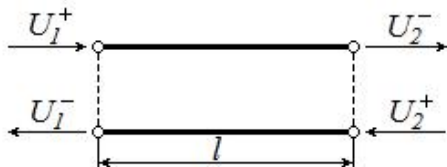


Рисунок 9.3 – Відрізок регулярної лінії

$$\left. \begin{aligned} U_1^- &= U_1^+ \cdot 0 + U_2^+ e^{-j\beta l} \\ U_2^- &= U_1^+ e^{-j\beta l} + U_2^+ \cdot 0 \end{aligned} \right\}. \quad (9.11)$$

Звідси зразу отримуємо матрицю розсіювання відрізка лінії:

$$S = \begin{vmatrix} 0 & e^{-j\beta l} \\ e^{-j\beta l} & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.12)$$

**2. Опір  $Z = R + jX$ , який ввімкнено паралельно в лінію передачі** з хвилевим опором  $Z_X$  (рис. 9.4, а). Опір  $Z$  в узгодженому режимі сумісно з хвилевим опором утворює навантаження  $Z_H = \frac{Z \cdot Z_X}{Z + Z_X}$ .

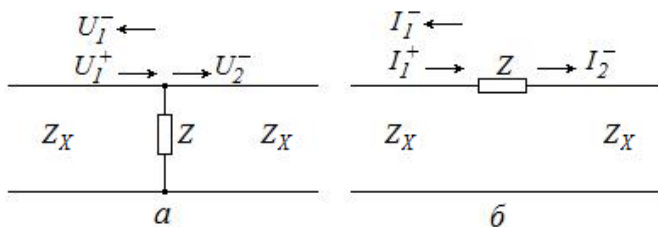


Рисунок 9.4 – а) паралельне включення опору в лінію,  
б) послідовне включення опору в лінію

Отже, коефіцієнт відбиття від цього навантаження буде:

$$\Gamma = s_{11} = s_{22} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = -\frac{Z_X}{Z_X + 2Z}. \quad (9.13)$$

Коефіцієнти передачі знаходяться безпосередньо за визначенням відповідного елементу S-матриці. В даному випадку:

$$s_{12} = s_{21} = \frac{U_2^-}{U_1^+} = \frac{U_1^+ + U_1^-}{U_1^+} = 1 + \frac{U_1^-}{U_1^+} = 1 + s_{11} = \frac{2Z}{Z_X + 2Z}. \quad (9.14)$$

Таким чином, матриця розсіювання схеми матиме вигляд:

$$S = \frac{1}{Z_X + 2Z} \begin{vmatrix} -Z_X & 2Z \\ 2Z & -Z_X \end{vmatrix}. \quad (9.15)$$

**3. Опір  $Z = R + jX$ , який ввімкнено послідовно в лінію передачі** з хвилевим опором  $Z_X$  (рис. 9.4, б). Опір  $Z$  в узгодженому режимі сумісно з хвилевим опором утворює навантаження  $Z_H = Z + Z_X$ , коефіцієнт відбиття від якого:

$$\Gamma = s_{11} = s_{22} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{Z}{Z + 2Z_X}. \quad (9.16)$$

Розгляд падаючих і відбитих хвиль струму на рис. 9.4б дозволяє знайти коефіцієнти передачі:

$$I_2^- = I_1^+ - I_1^- = \frac{U_1^+}{Z_X} - \frac{U_1^-}{Z_X} = \frac{U_1^+}{Z_X} \left( 1 - \frac{U_1^-}{U_1^+} \right) = \frac{U_1^+}{Z_X} (1 - s_{11})$$

Оскільки вочевидь  $I_2^- Z_X = U_2^-$ , то з попередньої формули витікає:

$$s_{12} = s_{21} = \frac{U_2^-}{U_1^+} = 1 - s_{11} = \frac{2Z_X}{Z + 2Z_X}. \quad (9.17)$$

Таким чином матриця розсіювання цього елементу буде:

$$S = \frac{1}{Z + 2Z_X} \begin{vmatrix} Z & 2Z_X \\ 2Z_X & Z \end{vmatrix}. \quad (9.18)$$

**4. Стрибок хвильового опору** (рис. 9.5) є стиком двох ліній передачі з різними хвильовими опорам.

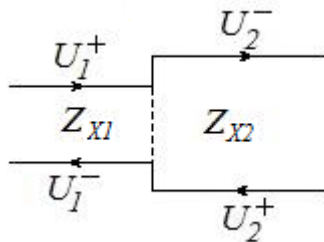


Рисунок 9.5 – Стрибок хвильового опору

В даному випадку навантаженням для першої лінії буде  $Z_{X2}$ , а для другої лінії –  $Z_{X1}$ . Отже, коефіцієнти відбиття в першому і другому плечах визначаються виразами:

$$\Gamma_1 = s_{11} = \frac{Z_H - Z_{X1}}{Z_H + Z_{X1}} = \frac{Z_{X2} - Z_{X1}}{Z_{X2} + Z_{X1}}, \quad (9.19)$$

$$\Gamma_2 = s_{22} = \frac{Z_{X1} - Z_{X2}}{Z_{X1} + Z_{X2}} = -s_{11}, \quad (9.20)$$

Оскільки в стик дисипативні втрати відсутні, коефіцієнти передачі  $s_{12}$  і  $s_{21}$  можна визначити з умов унітарності:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 = 1 \quad |s_{12}|^2 + |s_{22}|^2 = 1.$$

Звідки слідує:

$$s_{21} = s_{12} = \sqrt{1 - |s_{11}|^2} = \frac{2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}}}{Z_{X1} + Z_{X2}}. \quad (9.21)$$

Таким чином, матриця розсіяння стиків:

$$S = \frac{1}{Z_{X1} + Z_{X2}} \begin{vmatrix} Z_{X2} - Z_{X1} & 2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}} \\ 2\sqrt{Z_{X1}Z_{X2}} & Z_{X1} - Z_{X2} \end{vmatrix}. \quad (9.22)$$

**5. Розгалуження n ліній** показано на рис. 9.6. Хай, для простоти, хвилеві опори всіх ліній однакові і дорівнюють  $Z_X$ .

При паралельному розгалуженні (рис. 9.6 а), з-за симетрії схеми, опір навантаження для кожного плеча буде дорівнювати

$$Z_H = \frac{Z_X}{n-1},$$

а при послідовному розгалуженні (рис. 9.6б)  $Z_H = (n-1)Z_X$ . Тоді коефіцієнти відбиття для кожного плеча в обох схемах визначаються виразами:

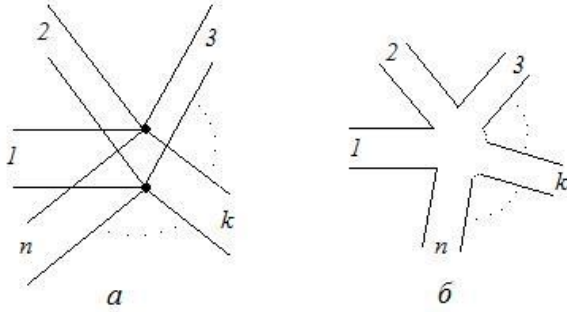


Рисунок 9.6 – Паралельне (а), і послідовне (б) розгалуження ліній

для паралельної схеми:

$$\Gamma = s_{ii} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{2-n}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.23)$$

для послідовної схеми:

$$\Gamma = s_{ii} = \frac{Z_H - Z_X}{Z_H + Z_X} = \frac{n-2}{n}. \quad (9.24)$$

З врахуванням симетрії і відсутності втрат, коефіцієнти передачі  $s_{ik}$  між будь-якими двома плечима в кожній схемі будуть однаковими і легко обчислюються з умови унітарності, наприклад, за першим стовпцем:

$$|s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 + \dots + |s_{n1}|^2 = |s_{11}|^2 + (n-1)|s_{21}|^2 = 1,$$

звідки

$$s_{21} = s_{12} = \dots = s_{ik} = \frac{2}{n}, \quad i \neq k. \quad (9.25)$$

Тоді для паралельної схеми матриця розсіювання буде мати вигляд:

$$S = \frac{1}{n} \cdot \begin{vmatrix} (2-n) & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & (2-n) & 2 & \dots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \dots & (2-n) \end{vmatrix}. \quad (9.26)$$

При визначенні S-матриці для послідовної схеми виникають деякі труднощі, які зв'язано з правильним визначенням фаз полів в різних плечах. Наприклад, при розгалуженні 3 ліній S-матриця послідовної схеми має вигляд:

$$S = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.27)$$

### 9.3 Хвилева матриця передачі T

У ряді випадків, наприклад, при аналізі параметрів каскадного з'єднання багатополосників з парною кількістю входів замість матриць розсіювання доцільніше використовувати хвилеві матриці передачі T, які встановлюють взаємозв'язок хвиль на вході з хвилями на виході. При цьому перевага матриці передачі полягає в тому, що результуюча T-матриця каскадного з'єднання ряду елементів дорівнює добутку T-матриць окремих елементів. Така схема аналізу, особливо з використанням обчислювальної техніки, вимагає значно менших витрат машинного часу, ніж при використанні матриць розсіювання. Не треба забувати, що каскадно можна з'єднати лише багатополосники з парною кількістю входів, отже T-матриці є сенс вводити лише для 4M-полосників (M=1,2,3, ...). Для практично важливого випадку чотириполосника система рівнянь,

яка встановлює залежність хвиль на вході від хвиль на виході, записується у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} U_1^+ &= t_{11}U_2^- + t_{12}U_2^+ \\ U_1^- &= t_{21}U_2^- + t_{22}U_2^+ \end{aligned} \right\}. \quad (9.28)$$

Звідси хвилева матриця передачі чотириполосника:

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}. \quad (9.29)$$

Комплексні елементи  $t_{ik}$  хвилевої матриці передачі не мають такої простої фізичної сутності, як елементи матриці розсіювання, а є деякими комбінаціями останніх. Зв'язок елементів  $T$ -матриці з елементами  $S$ -матриці чотириполосника має вигляд:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{s_{21}} & -\frac{s_{22}}{s_{21}} \\ \frac{s_{11}}{s_{21}} & s_{12} - \frac{s_{11}s_{22}}{s_{21}} \end{vmatrix}. \quad (9.30)$$

## 9.4 Матриця А

Ця матриця, яку інколи в літературі звать матрицею  $abcd$ , також може застосовуватися при розрахунку параметрів каскадного з'єднання. Як і матриця передачі  $T$ , результуюча матриця  $A$  каскадного з'єднання чотириполосників дорівнює добутку матриць  $A_i$  окремих елементів. І у разі, коли потрібно знати залежності між вхідними і вихідними струмами і напругами, зручніше використовувати матрицю  $A$ , оскільки матриці  $A_i$  чотириполосних елементів, які входять в каскадне

з'єднання, може бути знайдено безпосередньо за схемами цих елементів. На рис. 9.7 наведено схему чотириполосника з прийнятими напрямками струмів і напруг при визначенні матриці А.



Рисунок 9.7 – Струми і напруги в чотириполоснику

Для визначення матриці А використовуються рівняння, які зв'язують струм і напругу на виході чотириполосника зі струмом і напругою на вході:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= aU_2 - bI_2 \\ I_1 &= cU_2 - dI_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9.31)$$

або в матричній формі:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{vmatrix}. \quad (9.32)$$

Вище відмічено, що А-матриці простих чотириполосників можуть бути знайдені безпосередньо за їх схемами.

**1. Опір  $Z = R + jX$ , який ввімкнено послідовно в лінію передачі** (рис.9.8 а).

Як бачимоз рисунка 9.8а величини  $U_1, U_2, I_1, I_2$  зв'язано співвідношеннями:

$$U_1 = U_2 + I_2 Z, \quad I_1 = -I_2,$$

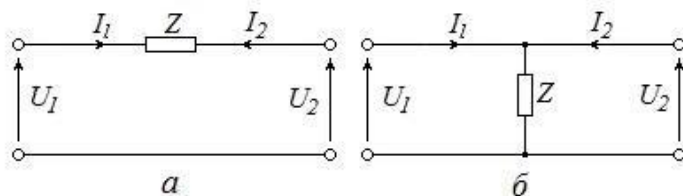


Рисунок 9.8 – Послідовний паралельний опір в лінії

звідки елементи матриці  $A$  такої схеми  $a=1$ ,  $b=Z$ ,  $c=0$ ,  $d=1$  і сама матриця:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.33)$$

**2. Опір  $Z = R + jX$ , який ввімкнено паралельно в лінію передачі** (рис.9.8б). В цьому випадку співвідношення між величинами мають вигляд:

$$U_1 = U_2, \quad I_1 + I_2 = \frac{U_1}{Z} = \frac{U_2}{Z},$$

або

$$I_1 = \frac{U_2}{Z} - I_2, \text{ тому } a=1, \quad b=0, \quad c = \frac{1}{Z}, \quad d=1.$$

Таким чином, матриця  $A$  даної схеми:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{vmatrix}. \quad (9.34)$$

**3. Несиметричний T-подібний чотириполюсник** (рис. 9.9 а).

Із закону Кірхгофа для контуру зі струмом  $I_1$  маємо:

$$U_1 = I_1 Z_1 + I_1 Z_3 + I_2 Z_3$$

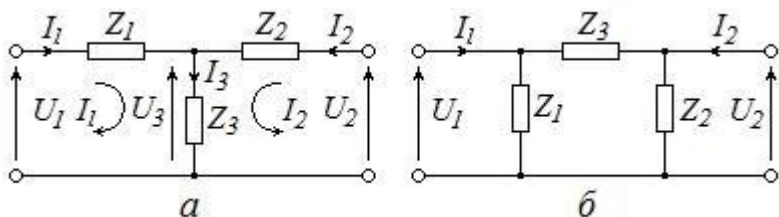


Рисунок 9.9 – Несиметричні Т- і П-подібні чотириполюсники

звідки

$$I_1 = (U_1 - I_2 Z_3) / (Z_1 + Z_3).$$

Аналогічно, для контуру зі струмом  $I_2$ :

$$U_2 = I_2 Z_2 + I_2 Z_3 + I_1 Z_3.$$

Підстановка сюди  $I_1$  з попереднього виразу дає:

$$U_2 (Z_1 + Z_3) = I_2 (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3) + U_1 Z_3,$$

звідки

$$U_1 = U_2 (1 + Z_1 / Z_3) - I_2 (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3).$$

З порівняння цього виразу з першим рівнянням в (9.31) витікає:

$$a = 1 + Z_1 / Z_3, \quad b = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 / Z_3. \quad (9.35)$$

Для визначення елементів  $id$  вираз для контуру зі струмом  $I_2$  можна переписати в наступному вигляді:

$$I_1 Z_3 = U_2 - I_2 (Z_2 + Z_3),$$

звідки

$$I_1 = U_2 / Z_3 - I_2 (1 + Z_2 / Z_3).$$

З порівняння цього виразу з другим рівнянням в (9.31) витікає:

$$c = 1/Z_3, \quad d = 1 + Z_2/Z_3. \quad (9.36)$$

Таким чином, з (9.35) і (9.36) витікає, що матриця А несиметричного Т-подібного чотириполюсника має вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} 1 + Z_1/Z_3 & Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2/Z_3 \\ 1/Z_3 & 1 + Z_2/Z_3 \end{vmatrix}. \quad (9.37)$$

**4. Несиметричний П-подібний чотириполюсник** (рис. 9.9б). По аналогії з Т-подібним чотириполюсником, використовуючи закони Кірхгофа, знаходяться елементи А-матриці П-подібного чотириполюсника. В результаті його матриця буде:

$$A = \begin{vmatrix} 1 + Z_3/Z_2 & Z_3 \\ (Z_1 + Z_2 + Z_3)/Z_1Z_2 & 1 + Z_3/Z_1 \end{vmatrix}. \quad (9.38)$$

**5. Відрізок лінії передачі** довжиною  $l$  з хвилевим опором  $Z_X$  і сталою поширення  $\gamma$  можна представити у вигляді Т-подібного еквівалентного чотириполюсника (рис. 8.11), для якого:  $Z_1 = Z_X \operatorname{th}\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$ ,  $Z_2 = \frac{Z_X}{\operatorname{sh}(\gamma l)}$ .

Підстановка цих значень у вирази для елементів А-матриці симетричного Т-подібного чотириполюсника дає:

$$a = d = 1 + \operatorname{th}\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \cdot \operatorname{sh}(\gamma l) = \operatorname{ch}(\gamma l), \quad (9.39)$$

$$c = 1/Z_2 = \operatorname{sh}(\gamma l)/Z_X, \quad b = Z_X \operatorname{sh}(\gamma l). \quad (9.40)$$

Таким чином, А-матриця відрізку лінії має вигляд:

$$A = \begin{vmatrix} ch(\gamma) & Z_X sh(\gamma) \\ sh(\gamma)/Z_X & ch(\gamma) \end{vmatrix}. \quad (9.41)$$

Елементи А-матриці відрізка недисипативної лінії знаходять з (9.41) шляхом заміни гіперболічних функцій тригонометричними:

$$A = \begin{vmatrix} \cos(\beta l) & jZ_X \sin(\beta l) \\ j\sin(\beta l)/Z_X & \cos(\beta l) \end{vmatrix}. \quad (9.42)$$

Перехід від S-матриці чотиріполюсника до його А-матриці і навпаки, проводиться за формулами:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{(1+s_{11})(1-s_{22})+s_{12}s_{21}}{2s_{21}} & \frac{(1+s_{11})(1+s_{22})-s_{12}s_{21}}{2s_{21}} \\ \frac{(1-s_{11})(1-s_{22})-s_{12}s_{21}}{2s_{21}} & \frac{(1-s_{11})(1+s_{22})+s_{12}s_{21}}{2s_{21}} \end{vmatrix}, \quad (9.43)$$

$$S = \frac{1}{(a+b+c+d)} \cdot \begin{vmatrix} a+b-c-d & 2(ad-bc) \\ 2 & -a+b-c+d \end{vmatrix}. \quad (9.44)$$

### Контрольні запитання

1. Яку модель реальних пристроїв використовують в задачах техніки телекомунікації?
2. Як вводиться математична модель чотиріполюсника?
3. Які з величин, що описують чотиріполюсник, зв'язує його матриця розсіювання?
4. Яка фізична сутність елементів матриці S?
5. Що таке властивість унітарності матриці S?
6. Що таке 2n-полюсник та як для нього вводиться матриця розсіювання?

7. Що таке недисипативний багатополіусник та які його основні властивості?
8. Як отримати матрицю  $S$  для відрізка недисипативної регулярної лінії?
9. Як отримати матрицю  $S$  для паралельно ввімкнутого опору?
10. Як отримати матрицю  $S$  для послідовно ввімкнутого опору?
11. Як отримати матрицю  $S$  для стрибка хвильового опору?
12. Як отримати матрицю  $S$  для розгалужень ліній?
13. Які з величин, що описують чотириполіусник, зв'язує його хвильова матриця передачі?
14. Як перейти від матриці  $S$  до матриці  $T$ ?
15. Які з величин, що описують чотириполіусник, зв'язує його матриця  $A$ ?
16. Як знайти матриці  $A$  для послідовного та паралельного опорів в лінії?
17. Як знайти матриці  $A$  для  $T$ - та  $\Pi$ -подібних 4-поліусників?
18. Як знайти матрицю  $A$  для відрізка регулярної лінії передачі?
19. Як перейти від матриці  $S$  до матриці  $A$ ?

### Задачі для самостійного вирішення

**Задача 9.1.** Відрізок регулярної недисипативної лінії (рис.9.3) має електричну довжину  $\theta = \beta l = \pi/4$  та  $Z_X = 50$  Ом. Визначити матриці  $S, A, T$  для цього елемента.

**Задача 9.2** Стрибок хвильового опору (рис. 9.5) є стиком двох недисипативних ліній передачі з хвильовими опорами  $Z_{X1} = 50$  Ом і  $Z_{X2} = 100$  Ом. Визначити матриці  $S, A, T$  для цього елемента.

**Задача 9.3** Паралельне та послідовне розгалуження ліній мають кожне по 3 плеча, причому хвильовий опір лінії в першому плечі  $Z_{X1} = 50$  Ом. Визначити, при яких значеннях  $Z_{X2}$  та  $Z_{X3}$  ці розгалуження будуть узгодженими з першого плеча, тобто буде виконуватись умова  $S_{11} = 0$ . Прийняти, що  $Z_{X2} = Z_{X3}$ .

## 10 ВИПРОМІНЕННЯ ЕМХ ЕЛЕМЕНТАРНИМИ ВИПРОМІНЮВАЛЬНИМИ СТРУКТУРАМИ

Відомо, що якісні характеристики пристроїв телекомунікації в значній мірі визначаються властивостями та конструктивно-електричними параметрами їх антено-фідерного тракту. Особливо це стосується галузі мобільного зв'язку. Тут лише застосування інтегральної технології дозволило з успіхом вирішувати задачі створення відповідних антено-фідерних пристроїв при досить жорстких вимогах та обмеженнях до їх масогабаритних та електродинамічних параметрів.

Строгий розрахунок напруженості електромагнітного поля, яке створюється випромінювачем, зводиться до вирішення рівнянь Максвелла за заданих граничних умов, проте в більшості випадків такий розрахунок математично складний і не завжди здійснимий. Тому на практиці широко застосовуються різні наближені методи розрахунку, один з яких засновано на тому, що реальний випромінювач розглядається як випромінювальна структура, яка складається з нескінченно великої кількості елементарних випромінювачів, а результуюче поле визначається як сума полів цих елементарних випромінювачів – принцип суперпозиції. За цією причиною в першу чергу треба розглянути властивості та параметри елементарних випромінювачів. Розрізняють наступні основні різновиди елементарних випромінювачів:

- елементарний електричний випромінювач (ЕЕВ);
- елементарний магнітний випромінювач (ЕМВ);
- елементарний випромінювач (ЕВГ);
- елементарний випромінювач смужкового типу.

Розрізняють далеку і близьку зони випромінення. При цьому найбільший інтерес являє поле в далекій зоні випромінювача, де уже формується електромагнітна хвиля з властивими їй параметрами. Іменно ця хвиля і характеризує спрямовані, поляризаційні і енергетичні властивості випромінювача, а поле в ближній зоні дозволяє обчислити вхідний опір антени. В свою чергу, дослідження вхідного опору дозволяє успішно вирішувати задачі узгодження випромінювача з апаратурою передавачів та приймачів.

## 10.1 Елементарний електричний випромінювач – диполь Герця

При аналізі випромінювання дротяних (проводових) структур зазвичай приймають, що випромінювач складається з великої кількості малих випромінювальних елементів, кожен з яких можна розглядати як елементарний електричний випромінювач (ЕЕВ), який зветься диполем Герця. Під диполем Герця розуміють елементарний випромінювач у вигляді нескінченно тонкого і короткого, в порівнянні з довжиною хвилі ( $r \ll \lambda$ ,  $l \ll \lambda$ ), відрізка прямолінійного дроту, вздовж якого амплітуда та фаза змінного струму не змінюються ( $I_0 = \text{const}$ ).

Для такого випромінювача може бути отримано замкнуті вирази для компонент електромагнітного поля. У сферичній системі координат (рис. 10.1,  $\varphi$  – азимут,  $\theta$  – кут місця) ці вирази мають вигляд:

$$\dot{H}_\varphi = \frac{I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{R^2} + j \frac{k}{R} \right) \cdot e^{-jkR},$$

$$(10.1) \dot{E}_R = -j \frac{2I_0 \cdot l \cdot \cos \theta}{4\pi\omega \cdot \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{R^3} + j \frac{k}{R^2} \right) \cdot e^{-jkR},$$

$$(10.2) \dot{E}_\theta = -j \frac{I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi\omega \cdot \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{R^3} + j \frac{k}{R^2} - \frac{k^2}{R} \right) \cdot e^{-jkR}.$$

(10.3)

З цих співвідношень витікає, що простір, який оточує диполь, можна умовно розбити на три зони:

1) **ближню зону**, яка зветься також зоною індукції, де в рівняннях для  $E$  і  $H$  істотне значення мають члени, які залежать від відстані  $R$  за законом  $1/R^2$  і  $1/R^3$ . У цій зоні електричний і магнітний вектори зсунуто за фазою на кут, близький до  $90^\circ$ .

2) **проміжну зону**, яка зветься також зоною дифракції Френеля, де всі члени виразів (10.1) – (10.3), які є залежними від

відстані, мають приблизно однакову величину.

3) **далеку зону**, яка зветься також хвильовою зоною або зоною дифракції Фраунгофера; вона знаходиться від вібратора на відстані  $R \geq 2 \cdot a^2 / \lambda$  ( $a$  – максимальний лінійний розмір випромінювача). У цій зоні напруженості полів зменшуються монотонно за законом  $1/R$ , поле має локально плоский характер, а напрям поширення збігається з напрямом радіус-вектору  $\mathbf{R}$ .

Як видно з формул, в хвильовій зоні можна знехтувати членами із залежністю  $1/R^2$  і  $1/R^3$ , що дає:

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{k \cdot I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}, \quad (10.4)$$

$$\dot{E}_R = 0, \quad (10.5)$$

$$\dot{E}_\theta = j \cdot \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot l \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot H_\varphi. \quad (10.6)$$

Таким чином, в хвильовій зоні вібратору напруженості його електричного і магнітного полів зв'язано співвідношенням:

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \cdot \dot{H} = Z_0 \cdot \dot{H}, \quad (10.7)$$

де  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = 120\pi$  – характеристичний опір вільного простору.

На однакових відстанях від диполя вектори поля синфазні при будь-яких  $\theta$  і  $\varphi$ , а їх амплітуди зменшуються обернено пропорційно  $r^2$  із збільшенням відстані, отже, диполь Герца випромінює сферичні хвилі.

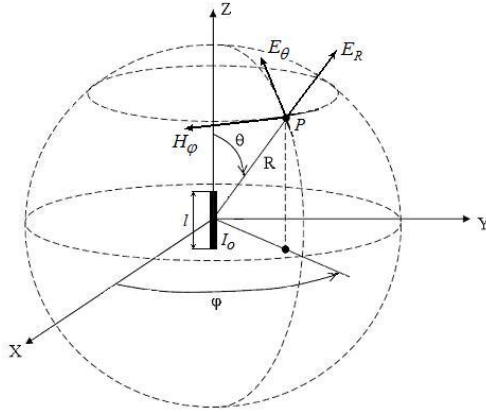


Рисунок 10.1 – Диполь Герця в сферичній системі координат

Вирази для модулів електричного і магнітного векторів поля випливають з формул (10.4) і (10.6):

$$H_{\varphi} = \frac{k \cdot I_0 \cdot l}{4\pi R} \cdot \sin \theta, \quad (10.8)$$

$$E_{\theta} = \frac{30 \cdot k \cdot I_0 \cdot l}{R} \cdot \sin \theta. \quad (10.9)$$

Множник  $\sin \theta$  в цих формулах вказує на те, що випромінення диполя у вертикальній (кутомісцевій, меридіональній) площині є спрямованим; в той же час, відносно кута  $\varphi$ , то такий множник відсутній, а це означає, що в горизонтальній (азимутальній) площині поле розподілено рівномірно (спрямованість відсутня). Функція залежності амплітуди векторів поля (одного з них) випромінювача від куткових координат зветься *діаграмою спрямованості* (ДС). На рис. 10.2 наведено діаграми спрямованості за модулем вектору електричного поля в просторі (рис. 10.2а) і в перетинах площинами  $\theta = 90^\circ$  (рис. 10.2б) і  $\varphi = \text{const}$  (рис. 10.2в).

З цих діаграм видно, що диполь не випромінює вздовж своєї вісі і максимально випромінює перпендикулярно своїй вісі.

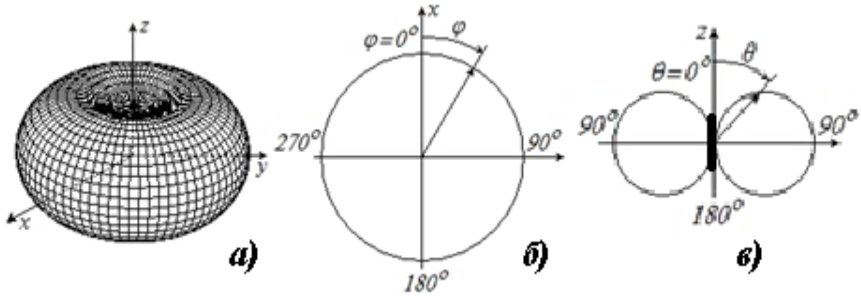


Рисунок 10.2 – Діаграми спрямованості ЕЕВ(диполя Герця)

### 10.2 Елементарний магнітний випромінювач (ЕМВ)

Елементарний магнітний випромінювач є замкнутим витком зі струмом  $I_0$ , при цьому розміри витка мають бути малі в порівнянні з довжиною хвилі, що при довільній формі витка може бути визначено співвідношенням  $\lambda \gg \sqrt{S}$ , де  $S$  – площа витка. Зважаючи на малі розміри витка, розподіл струму в ньому можна вважати рівномірним.

Для такого випромінювача також може бути отримано аналітичні вирази для компонент електромагнітного поля, які в сферичній системі координат (рис. 10.3) мають вигляд (передбачається, що вісь  $Z$  є перпендикулярною до площини витка зі струмом):

$$\dot{E}_\varphi = \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot S \cdot k^2 \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^2} + j \frac{1}{kR} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.10)$$

$$\dot{H}_R = -j \frac{2I_0 \cdot S \cdot k^3 \cdot \cos \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^3} + j \frac{1}{(kR)^2} \right) \cdot e^{-jkR}, \quad (10.11)$$

$$\dot{H}_\theta = -j \frac{I_0 \cdot S \cdot k^3 \cdot \sin \theta}{4\pi} \cdot \left( \frac{1}{(kR)^3} + j \frac{1}{(kR)^2} - \frac{1}{kR} \right) \cdot e^{-jkR}. \quad (10.12)$$

Як видно, структура цих співвідношень аналогічна структурі співвідношень (10.1), (10.2), (10.3) для вібратора Герца, тому і розгляд розподілу за зонами компонент поля елементарного магнітного випромінювача може бути проведено аналогічно.

Простір, що оточує магнітний диполь, також можна умовно розбити на три зони: ближню зону (у якій  $kR \ll 1$ ), проміжну зону ( $kr \approx 1$ ) і далекую зону ( $kR \gg 1$ ).

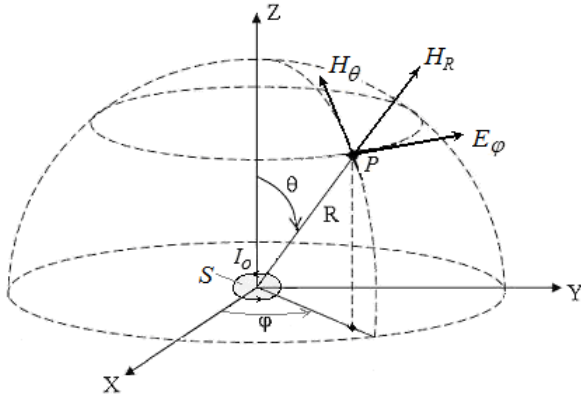


Рисунок 10.3 – Елементарний магнітний випромінювач в сферичній системі координат

У далекій (хвилевій) зоні вирази для поля елементарного магнітного випромінювача мають вигляд:

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{\omega \cdot \mu_a \cdot I_0 \cdot S \cdot k \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}, \quad (10.13)$$

$$\dot{H}_R = 0, \quad (10.14)$$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I_0 \cdot S \cdot k^2 \cdot \sin \theta}{4\pi R} \cdot e^{-jkR}. \quad (10.15)$$

Порівняння (10.13), (10.15) з виразами (10.4), (10.6) для випромінювача Герця показує, що при однакових струмах  $I_0$  в диполі Герця і у витку магнітного випромінювача, магнітний випромінювач в далекій зоні створює електромагнітне поле, співпадаюче з полем вібратора Герця, якщо довжина останнього  $l = kS$ . З цієї умови неважко отримати зв'язок між довжиною диполя Герця і розмірами витка. Якщо, наприклад, виток має форму квадрата із стороною  $a$ , те в цьому випадку зв'язок між  $l$  і

$a$  буде таким:  $a = \sqrt{\frac{l \cdot \lambda}{2\pi}}$ . Оскільки для диполя Герця повинна

виконуватися умова  $l \ll \lambda$ , то якщо покласти  $l = \frac{\lambda}{n}$ , де  $n$  – додатне число (для виконання умови  $l \ll \lambda$  необхідно, аби  $n \geq 10$ ), тоді з попереднього співвідношення неважко отримати

$\frac{a}{l} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ . З отриманої формули витікає, що при збільшенні  $n$

(при цьому умова  $l \ll \lambda$  виконується усе більш точно) відносний розмір сторони квадратної рамки із струмом (в

порівнянні з довжиною диполя  $l$ ) зростає згідно закону  $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$

(якщо, наприклад,  $n = 100$ , то  $a \approx 4l$ ). На практиці це означає, що при однаковій потужності випромінювання *розміри рамкових антен мають бути значно більші розмірів вібраторних антен.*

Порівняння співвідношень (10.10), (10.11) і (10.12) для магнітного вібратора і (10.1), (10.2), (10.3) для електричного вібратора показує, що поля відрізняються лише просторовою орієнтацією – вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  «помінялися» місцями. Звідси витікає, що діаграма спрямованості магнітного вібратора збігатиметься з діаграмою спрямованості електричного вібратора на рис. 10.2, але при цьому зміниться площина поляризації – вертикальна в електричного вібратора стане горизонтальною в

магнітного вібратора.

Як і електричний, магнітний вібратор не випромінює вздовж вісі  $z$  і максимально випромінює перпендикулярно вісі. Нагадаємо, що для ЕМВ вісь  $z$  є перпендикулярною до площини рамки зі струмом

### 10.3 Елементарний випромінювач Гюйгенса (ЕВГ)

При дослідженні випромінювання апертурних антен зазвичай представляють розкриття антени у вигляді сукупності великої кількості елементарних ділянок, кожна з яких можна розглядати як елементарний випромінювач Гюйгенса, під яким розуміють невелику порівняно з довжиною хвилі площинку з рівномірним розподілом електричного і магнітного полів. При цьому вектори цих полів перпендикулярні один одному. Випромінювач Гюйгенса можна розглядати як невелику ділянку локально плоскої хвилі. На рис. 10.4 (а) показано площинку  $ds = dx \cdot dy$  прямокутної форми, але ця форма може бути довільною.

В системі координат на рис. 10.4 (а) і з показаними тут векторами  $E_n$  і  $H_n$  поле в далекій зоні випромінювача Гюйгенса у вільному просторі має наступні компоненти:

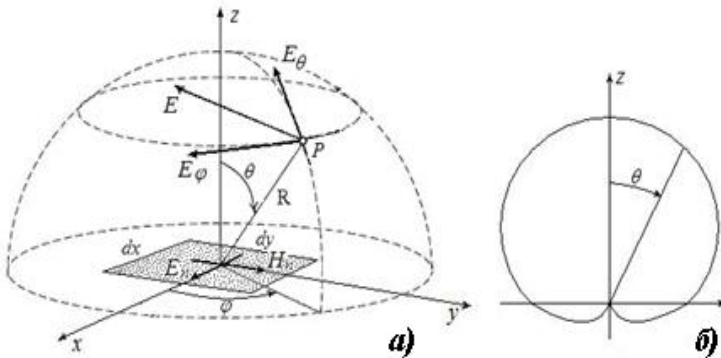


Рисунок 10.4 – Елемент Гюйгенса і його діаграма спрямованості

$$\dot{E}_\theta = j \cdot \frac{kE_n ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \theta) \cos \varphi, \quad (10.16)$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \cdot \frac{kE_n ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \theta) \sin \varphi. \quad (10.17)$$

Напрямок електричного вектора  $\vec{E}$  в хвильовій зоні змінюється в залежності від значення кута  $\varphi$ : у площині  $xOz$  ( $\varphi = 0$ ) вектор  $\vec{E}$  має лише компоненту  $E_\theta$ , а в площині  $yOz$  ( $\varphi = \pi/2$ ) лише компоненту  $E_\varphi$ . У проміжних меридіональних площинах вектор  $\vec{E}$  має обидві компоненти. Амплітуда вектору  $\vec{E}$ , яка дорівнює  $|E| = \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}$ , від кута  $\varphi$  не залежить, а від кута  $\theta$  змінюється за законом  $(1 + \cos \theta)$  – рис.10.4.б. Функція  $f(\theta) = 1 + \cos \theta$  є кардіоїдою, отже, залежність модуля електричного вектора від напрямку в об'ємі характеризується поверхнею, що утворюється обертанням кардіоїди довкола вісі  $Oz$ .

Випромінювач Гюйгенса створює *односпрямоване* випромінення, яке максимальне в напрямі, який визначається векторним добутком  $[\vec{E}_n \times \vec{H}_n]$  і дорівнює нулю у зворотньому напрямі. Як витікає з формул (10.16), (10.17) випромінювач Гюйгенса створює в хвильовій зоні сферичні хвилі. За наявності властивості односпрямованості, поле випромінення ЕВГ принципово відрізняється від полів випромінення ЕЕВ та ЕМВ, для яких характерною ознакою є відсутність спрямованості в азимутальній площині відносно вісі відповідного випромінювача.

#### 10.4 Елементарні випромінювачі смужкового типу (ЕВС)

Ефективність випромінення та простота виконання схеми збудження ставить смужковий вібратор на одно з перших місць за використанням при побудові малогабаритних антенних систем.

Сучасним станом застосовується велика кількість типів елементарних випромінювачів смужкової конструкції, але, узагальюючи, можна сказати, що типовими є:

- мікросмужковий вібратор – рис.10.5а;
- щілинний вібратор, щілина в суцільній провідній металізації – рис.10.5б.

Мікросмужковий вібратор (рис.10.5а) являє собою відрізок регулярної НСЛ, а щілина в суцільній провідній металізації (рис.10.5б) – відрізок регулярної СЦЛ з відповідними розмірами, які наведено на рисунках.

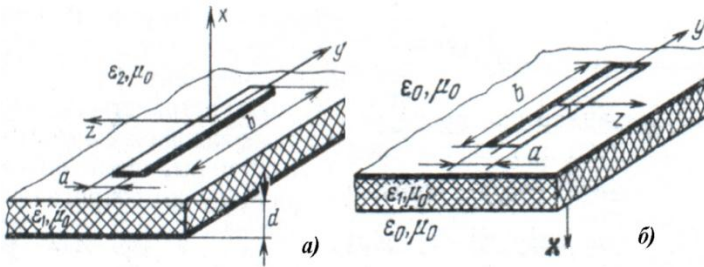


Рисунок 10.5 – Ескізи елементарних випромінювачів смужкового типу

Обов'язковим елементом обох структур є підкладка з якісного діелектрика, який має відносну діелектричну проникність  $\epsilon_1$ . Наявність цього елемента суттєво ускладнює електродинамічне дослідження таких випромінювальних структур, оскільки вимагає в розкладаннях для поля враховувати можливість виникнення поверхневих хвиль типів  $LE$  та  $LM$ . Однак в першому наближенні їх можна не враховувати і обмежитись припущенням, що в цих структурах існують в основному лише просторові хвилі типів  $E$  та  $H$  і розглядати діаграми спрямованості лише за цими основними типами хвиль. Але в окремих випадках для порівняння будемо розглядати і ті властивості, які витікають в результаті наявності поверхневих хвиль типів  $LE$  та  $LM$ . Характеристики спрямованості відносно поверхневих хвиль  $LE$  та  $LM$  застосовують для оцінки взаємного

впливу двох (або більше) поряд розташованих елементів смужкового типу.

На рис.10.6 наведено діаграми спрямованості просторових хвиль в двох головних площинах мікросмужкового вібратора (площина Н, рис.10.6а – поперечна площина; площина Е, рис.10.6б – поздовжня площина). Суцільні лінії відповідають значенню відносної діелектричної проникності підкладки  $\epsilon_1 = 2,4$ , а пунктирні лінії –  $\epsilon_1=5$ . Тут  $\theta$ ,  $\varphi$  – кути місця та азимуту в сферичній системі координат.

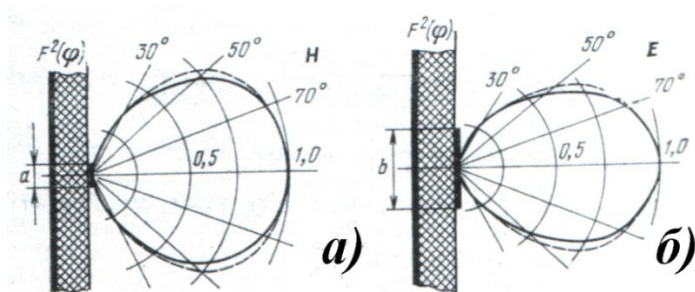


Рисунок 10.6 – ДС для просторових хвиль мікросмужкового вібратора

На рис. 10.7 а) наведено діаграми спрямованості поверхневої хвилі типу  $LM_1$  в поздовжній площині мікросмужкового вібратора при наступних параметрах підкладки та вібратору:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = 2,4; \quad 1-b = 0,1\lambda_0; \quad 2-b = 0,2\lambda_0; \quad \epsilon_1 = 5,0; \quad 3-b = 0,04\lambda_0; \quad 4-b = 0,1\lambda_0; \\ 5-b = 0,14\lambda_0; \quad 6-b = 0,2\lambda_0. \end{aligned}$$

На рис. 10.7 (б) наведено діаграми спрямованості поверхневої хвилі типу  $LE_1$  в поздовжній площині мікросмужкового вібратора при наступних параметрах підкладки та вібратору:

$$\epsilon_1 = 5,0; \quad 1-b = 0,14\lambda_0; \quad 2-b = 0,2\lambda_0; \quad \epsilon_1 = 7,0; \quad 3-b = 0,14\lambda_0; \quad 4-b = 0,2\lambda_0.$$

Тут  $\Phi$  – азимутальний кут циліндричної системи координат.

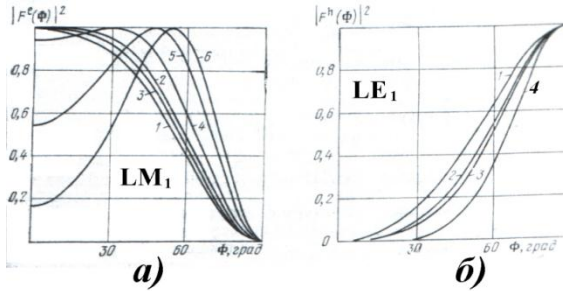


Рисунок 10.7 – ДС для поверхневих хвиль типів LE та LM

На рис.10.8 наведено ДС для просторової хвилі щілинного вібратора в головних площинах (рис. 10.8 а – при  $\varphi=0$ , поперечна площина, площина E; рис. 10.8 б – при  $\theta=\pi/2$ , поздовжня площина, площина H) при наступних параметрах підкладки та вібратора:

$\varepsilon_1 = 2,4$ ; 1 –  $b = 0,05\lambda_0$ ; 2 –  $b = 0,1\lambda_0$ ; 3 –  $\varepsilon_1 = 3,5, b = 0,1\lambda_0$ ; 4  $\varepsilon_1 = 5, b = 0,1\lambda_0$ .

Аналіз цих кривих показує, що ДС в площині E більш «чутлива» до зміни параметрів підкладки, ніж в площині H.

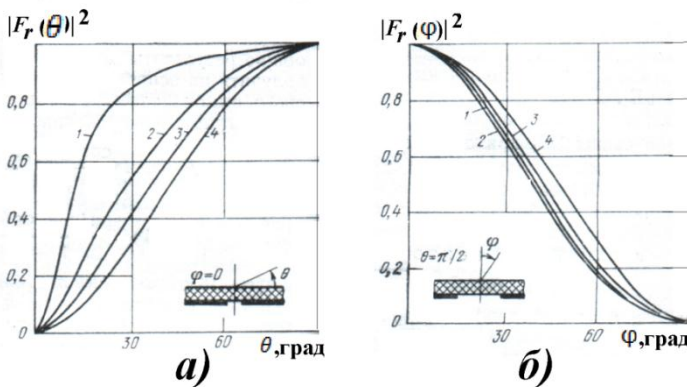


Рисунок 10.8 – ДС просторової хвилі щілинного вібратора

На рис.10.9а наведено ДС для поверхневої хвилі типу  $LM_1$  щілинного вібратора при наступних параметрах підкладки та вібратора:

$\varepsilon_1 = 2,4$ ;  $1-b = 0,1\lambda_0$ ;  $2 - \varepsilon_1 = 5,0$ ;  $b = 0,1\lambda_0$ ;  $3 - \varepsilon_1 = 7$ ,  $b = 0,2\lambda_0$ ;  $4 - \varepsilon_1 = 10$ ,  $b = 0,1\lambda_0$ .

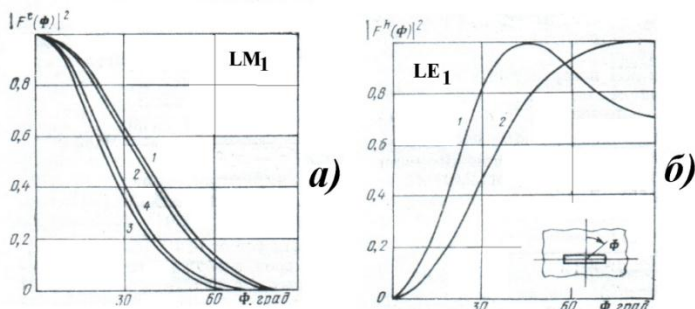


Рисунок 10.9 – ДС для поверхневих хвиль щілинного вібратора

На рис. 10.9б, наведено ДС для поверхневої хвилі типу  $LE_1$  щілинного вібратора при наступних параметрах підкладки та вібратора:

$\varepsilon_1 = 7,0$ ;  $1-b = 0,2\lambda_0$ ;  $2 - \varepsilon_1 = 10,0$ ;  $b = 0,1\lambda_0$ .

Тут  $\theta$ ,  $\phi$  – кути місця та азимуту в сферичній системі координат,  $\Phi$  – азимутальний кут циліндричної системи координат – дивись відповідні рисунки.

Недоліком щілинних вібраторів є двостороннє випромінювання щілини, тобто в напрямках  $x > 0$  та  $x < 0$  – див. рис.10.5 (б). Для створення односпрямованого випромінювання для таких вібраторів застосовують або додатковий екран зі сторони діелектричної підкладки, або в якості лінії живлення – екрановану НСЛ.

### Контрольні запитання

1. Яке наближення застосовується для розрахунку випромінювання реальних випромінювачів?
2. Які умови треба виконати, щоб випромінювач став диполем Герця?

3. Які властивості за фазою та амплітудою має поле випромінення в ближній, проміжній та далекій зонах? В якій з цих зон поле набуває характеру електромагнітної хвилі?
4. Що таке діаграма спрямованості (ДС) випромінювача?
5. Який вигляд має ДС диполя Герця в меридіональній та азимутальній площинах?
6. За якими властивостями елементарний магнітний випромінювач відрізняється від диполя Герця?
7. Як співвідносяться розміри витка зі струмом та диполя Герця?
8. Що таке елементарний випромінювач Гюйгенса? Які компоненти випроміненого поля він має?
9. Які особливості має ДС елементу Гюйгенса в вертикальній та горизонтальній площинах?
10. Які різновиди випромінювачів смужкового типу є типовими при створенні малогабаритних антенних систем?
11. Яка топологія та ДС мікросмужкового випромінювача для просторової хвилі?
12. Які особливості має ДС мікросмужкового випромінювача для поверхневих хвиль?
13. Яка топологія та ДС щілинного випромінювача для просторової хвилі?
14. Які особливості має ДС щілинного випромінювача для поверхневих хвиль?
15. Які недоліки мають щілинні випромінювачі та як їх усунути?

### Приклад вирішення задачі

**Задача 10.1** Диполь Герця з довжиною  $l=2$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 5$  А. Частота  $f = 1$  МГц. Знайти амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів на відстані  $r = 50$  км від випромінювача в повітряному середовищі при  $\theta = \pi/2$ .

### Вирішення

1. Знайдемо довжину хвилі  $\lambda$ . Для повітря швидкість хвилі

$V_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек, отже  $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^6 = 300$  м.

2. Знайдемо сталу поширення  $k = 2\pi/\lambda$  та величину  $1/kr$

$$k = 2\pi/300; 1/kr = 300/(2\pi \cdot 50 \cdot 10^3) = 9.5 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

З цього розрахунку витікає, що точка спостереження знаходиться в хвилевій зоні, де електричне поле має лише складову з амплітудою  $E_\theta$ , а магнітне –  $H_\phi$  в сферичній системі координат (рис.10.1).

3. За виразом (10.8) знаходимо  $H_\phi$ .

$$H_\phi = \frac{k \cdot I_0 \cdot l}{4\pi \cdot r} \sin \theta = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 2}{300 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^3} = 3.34 \cdot 10^{-7} \frac{A}{m}.$$

4. За виразом (10.7) знаходимо  $E_\theta$ .

$$E_\theta = Z_0 \cdot H_\phi = 120\pi \cdot 3.34 \cdot 10^{-7} = 1.26 \cdot 10^{-4} \frac{B}{m}.$$

## 11 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ПАРАМЕТРИ ТИПОВИХ АНТЕН ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

Однією з основних властивостей антен є властивість спрямованості. Спрямована дія антен оцінюється за допомогою діаграм спрямованості (ДС), які є залежностями інтенсивності випромінення від кутових координат в просторі.

### 11.1 Характеристики антен

1. **Комплексна векторна ДС антени** – це залежність від кутових сферичних координат комплексного векторуелектричного (або магнітного) поля в рівновіддалених від антени точках

$$\dot{\vec{E}}(\theta, \varphi) = \dot{\vec{p}}(\theta, \varphi) \cdot f(\theta, \varphi) \cdot \exp[j\psi(\theta, \varphi)], \quad (11.1)$$

де  $\dot{\vec{p}}(\theta, \varphi)$  – поляризаційний вектор;

$f(\theta, \varphi)$  – амплітудна ДС за полем;

$\psi(\theta, \varphi)$  – фазова ДС.

Окрім ДСза полем використовують також ДСза потужністю, при цьому ДСза потужністю пропорційна квадрату ДСза полем. Ненормована ДСза потужністю далі позначатиметься  $f^2(\theta, \varphi)$ .

Для зручності порівняння різних антен використовують нормовані ДСза полем  $F(\theta, \varphi)$  і за потужністю  $F^2(\theta, \varphi)$ , які отримують шляхом ділення ненормованих ДС на їх значення  $f_{\max}$  або  $f_{\max}^2$  у напрямі максимального випромінення:

$$F(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) / f_{\max}$$

$$F^2(\theta, \varphi) = f^2(\theta, \varphi) / f_{\max}^2.$$

Тоді нормована векторна комплексна ДС визначатиметься виразом

$$\dot{\vec{F}}(\theta, \varphi) = \dot{\vec{p}}(\theta, \varphi) \cdot F(\theta, \varphi) \cdot \exp[j\psi(\theta, \varphi)]. \quad (11.2)$$

Будуються ДС або в полярній (по азимуту  $\varphi$  і по куту місця  $\theta$ ), або в прямокутній системі координат. Для більшої наочності інколи будуються і тривимірні ДС в просторі. Як правило, ДС має декілька напрямів нольового випромінювання («нолів»). Частина ДС між сусідніми нолями називається пелюсткою. Пелюстка, яка відповідає напрямам максимальної інтенсивності випромінювання, називається *основною пелюсткою*, інші пелюстки називаються *бічними*. Ефективність антени, при заданій ДС, оцінюється рівнем бічних пелюсток (зазвичай першої).

Для оцінки спрямованих властивостей антени користуються поняттям ширини ДС. Для ДСза потужністю її ширина дорівнює куту  $2\theta_{0.5}$ , в межах якого інтенсивність випромінювання не падає нижче 50% від максимальної. Для ДСза полем її ширина визначається за рівнем 0.707 від максимального значення і позначається  $2\theta_{0.7}$ . Звичайно ці визначення відносяться до симетричних за кутом  $\theta$  ДС.

**2. Фазова ДС антени** – це залежність фази поля від кутових сферичних координат в рівновіддалених від початку координат точках. З цього визначення витікає, що вигляд фазової ДС (на відміну від амплітудної ДС) істотно залежить від вибору точки, в якій розташовано початок координат. Якщо існує таке розташування початку координат, при якому фаза в рівновіддалених точках однакова, то це означає, що антена формує сферичний фронт хвилі. Центр цієї сфери називається *фазовим центром антени*.

Антена може і не мати фазового центру. Дійсно, фаза поля на відстані  $R$  від початку координат дорівнює  $\phi = \psi(\theta, \varphi) - kR$ , де  $\psi(\theta, \varphi)$  – фазова ДС антени. На поверхні, де фаза незмінна  $\psi(\theta, \varphi) - kR = \phi_0$ , звідки рівняння поверхні рівних фаз (фронт хвилі) буде:

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\psi(\theta, \varphi) - \phi_0}{k}. \quad (11.3)$$

Якщо не існує початку координат, при якому  $\psi(\theta, \varphi) = const$ , то  $R(\theta, \varphi)$  не буде поверхнею сфери і, отже, антена не має фазового центру. Поняття фазового центру використовується, як правило, для апертурних антен.

**3. Поляризаційний вектор  $\dot{\vec{p}}(\theta, \varphi)$**  характеризує залежність поляризації поля випромінення від кутових сферичних координат.

У загальному випадку вектор  $\dot{\vec{E}}$  можна представити як суму двох лінійно поляризованих компонент:

$$\dot{\vec{E}} = \vec{e}_\theta \dot{E}_\theta + \vec{e}_\varphi \dot{E}_\varphi, \quad (11.4)$$

де  $\vec{e}_\theta$  і  $\vec{e}_\varphi$  – орти сферичної системи координат.

Компоненти  $\dot{E}_\theta$  і  $\dot{E}_\varphi$  можуть бути комплексними і мати різні аргументи, тобто між ними може існувати зсув за фазою. Якщо розділити обидві частини рівності (11.4) на  $\sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}$ , то отримаємо:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{e}_\theta \dot{p}_\theta(\theta, \varphi) + \vec{e}_\varphi \dot{p}_\varphi(\theta, \varphi), \quad (11.5)$$

$$\text{де } \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{E}} / \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}, \quad \dot{p}_\theta = \dot{E}_\theta / \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}$$

$$\dot{p}_\varphi = \dot{E}_\varphi / \sqrt{E_\theta^2 + E_\varphi^2}.$$

З цих формул видно, що компоненти поляризаційного вектору пропорційні компонентам вектору електричного поля.

## 11.2 Параметри антен

**1. Опір випромінення  $Z_\Sigma$** , формально визначається як відношення потужності  $P_\Sigma$ , яку випромінює антена, до квадрату

струму в пучності або до квадрату струму на вхідних затисках антени:

$$Z_{\Sigma} = \frac{P_{\Sigma}}{I_A^2}. \quad (11.6)$$

Потужність випромінення антени можна визначити інтегруванням вектору Пойнтінга в далекій зоні за поверхнею сфери радіусу  $R$ , яка оточує антену:

$$P_{\Sigma} = \int_S \Pi ds. \quad (11.7)$$

Площа елемента сферичної поверхні:

$$ds = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi. \quad (11.8)$$

Підстановка (11.8) в (11.7) з врахуванням зв'язку  $\Pi = E^2(\theta, \varphi) / 240\pi$  дає:

$$P_{\Sigma} = \frac{R^2}{240\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} E^2(\theta, \varphi) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi. \quad (11.9)$$

Потужність випромінення диполя Герца можна, наприклад, розрахувати за (11.9) підстановкою  $E$  з (10.9). Після інтегрування отримаємо:

$$P_{\Sigma Д} = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (11.10)$$

Оскільки  $P_{\Sigma Д} = \frac{1}{2} R_{\Sigma Д} I_0^2$ , то з (11.10) витікає, що для диполя Герца опір випромінення буде :

$$R_{\Sigma Д} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

У загальному випадку опір випромінення має комплексний характер  $Z_{\Sigma} = R_{\Sigma} + j \cdot X_{\Sigma}$ . У окремому випадку, для тонкого півхвильового вібратору  $R_{\Sigma} = 73.1 \text{ Ом}$ ;  $X_{\Sigma} = 42.5 \text{ Ом}$ .

**5. Вхідний опір**  $Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}$  визначається як відношення напруги на вхідних затисках антени до струму, який протікає через них, і в загальному випадку також носить комплексний характер. Вхідний опір характеризує антену як навантаження для генератору.

Активна складова вхідного опору  $R_{\text{вх}}$  є сумою опорів випромінення  $R_{\Sigma}$  і втрат  $R_B$ :

$$R_{\text{вх}} = R_{\Sigma} + R_B, \quad (11.11)$$

а реактивний опір характеризує ту частину електромагнітного поля, яка зосереджена поблизу антени і не випромінюється.

Точний розрахунок вхідного опору в загальному випадку складний і його виконано лише для деяких антен простої форми. В окремому випадку півхвильового вібратору ( $l = \lambda/2$ ) має місце резонанс і при цьому  $X_{\text{вх}}=0$ , а  $R_{\text{вх}}=73.1 \text{ Ом}$ . Резонанси також матимуть місце при довжині антени, яка кратна півхвилі, тобто  $l = n \cdot \lambda/2$ . В більшості випадків для розрахунку вхідного опору застосовуються наближені методи.

З вищесказаного виходить, що параметри  $R_{\Sigma}$ ,  $X_{\Sigma}$ ,  $R_{\text{вх}}$ ,  $X_{\text{вх}}$  за своїм фізичним змістом доцільно використовувати лише при розгляді лінійних (дротяних) антен.

**6. Коефіцієнт корисної дії (ККД)**  $\eta = P_{\Sigma} / P_0$  визначається як відношення випроміненої потужності  $P_{\Sigma}$  до повної потужності  $P_0$ , яка надходить в антену. Оскільки повна потужність дорівнює сумі випроміненої потужності  $P_{\Sigma}$  та потужності втрат  $P_B$ , вираз для коефіцієнту корисної дії можна записати у вигляді:

$$\eta = P_{\Sigma} / (P_{\Sigma} + P_B). \quad (11.12)$$

Якщо чисельник і знаменник (11.12) розділити на  $0.5I^2$ , то вираз для к.к.д. набуде вигляду:

$$\eta = R_{\Sigma} / (R_{\Sigma} + R_B). \quad (11.13)$$

З пониженням частоти к.к.д. зазвичай знижується із-за зменшення  $R_{\Sigma}$ ; на довгих хвилях к.к.д. інколи може складати одиниці відсотків.

**7. Коефіцієнт спрямованої дії (КСД) D** показує, в скільки разів треба збільшити потужність випромінення неспрямованої антени замість розглядуваної спрямованої, щоб потужність випромінення в місці прийому залишилася незмінною.

Якщо відома ненормована ДС антени за полем  $f(\theta, \varphi)$  і той опір випромінення  $R_{\Sigma}$ , який обраховано за струмом в пучності, то к.с.д. треба обраховувати за формулою:

$$D = \frac{120 \cdot f^2(\theta, \varphi)}{R_{\Sigma}}. \quad (11.14)$$

Величину  $D$  для симетричної за кутом  $\theta$  ДС можна оцінити (якщо відома величина  $2\theta_{0.7}$  в кутових градусах) за наближеним співвідношенням

$$D = 41200 / (2\theta_{0.7})^2. \quad (11.15)$$

**8. Коефіцієнт підсилення антени G** визначається як добуток к.с.д. антени на її к.к.д.

$$G = \eta \cdot D. \quad (11.16)$$

### 11.3 Симетричний вібратор

До простих антен належить симетричний електричний вібратор, який є прямолінійним відрізком тонкого дроту, який живиться в середині. При цьому довжина вібратору може бути

довільною, а радіус провідника має бути набагато менший довжини хвилі випроміненого поля і довжини вібратора.

Строгі методи розрахунку поля вібратора, які засновано на вирішенні рівнянь Максвелла, математично складні і вимагають громіздких розрахунків, які стали практично здійсними завдяки використанню обчислювальної техніки. В інженерній практиці широко застосовується наближений метод, який спирається на деяку аналогію між довгою лінією та симетричним вібратором.

### 11.3.1 Розподіл струму і напруги по вібратору

Симетричний вібратор з довжиною  $2l$  можна отримати, розвертаючи на  $90^\circ$  кожне плече розімкненого на кінці відрізка двопровідної лінії (рис. 11.1). Якщо радіус  $a$  провідників двопровідної лінії малий порівняно з довжиною плеча  $l$  вібратора, тобто  $a/l \ll 1$ , то теоретичні дослідження і практичні виміри показують, що розподіли струмів по вібратору і по відрізку двопровідної лінії майже однакові.

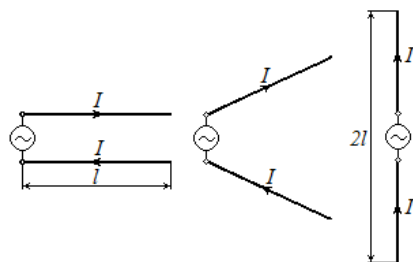


Рисунок 11.1 – Отримання симетричного вібратора

Таким чином, розподіл струму по тонкому вібратору без врахування втрат можна вважати близьким до синусоїдального з вузлами (нулями) на кінцях:

$$I(z) \approx I_0 \sin[k(l - z)], \quad (11.17)$$

де  $I_0$  – струм в пучності;

$i(z,t) = I(z) \cdot e^{j\omega t}$  – миттєве значення струму, а координата  $z$  відраховується від середини вібратора. Приклади розподілу струму по вібраторах різної довжини наведено на рис. 11.2.

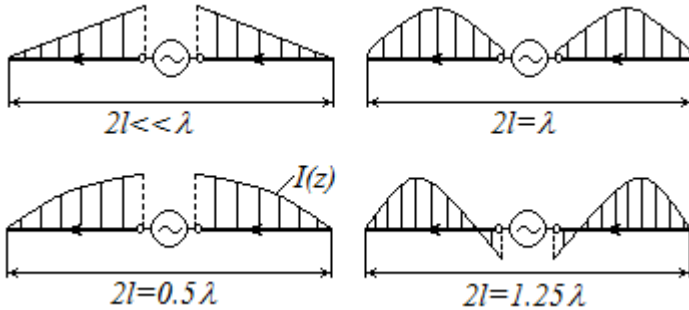


Рисунок 11.2 – Розподіл струму за довжиною симетричного вібратора

Під час переходу через вузол стоячої хвилі фаза струму змінюється на  $180^\circ$ . Якщо  $2l \leq \lambda$ , то розподіл струму синфазний, а при  $2l > \lambda$  на вібраторі з'являються ділянки із струмами протифаз.

Наявність випромінювання впливає на закон розподілу струму. По-перше, струм у вузлах хоча і малий, але не дорівнює нулю (за винятком кінців вібратора). По-друге, відстань між мінімумами струму у вібратора дещо менша, що можна трактувати як зменшення фазової швидкості хвилі струму. Таким чином, точнішим аналогом вібратору є відрізок довгої лінії з втратами. Тоді розподіл струму описуватиметься не круговим синусом, а гіперболічним, а стала поширення буде комплексною  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Коефіцієнт фази дорівнює  $\beta = \xi * k = \xi 2\pi / \lambda$ , а поправковий множник  $\xi$  визначається експериментально.

У довгій лінії напруга (різниця потенціалів дротів) в деякому її перетині має певну фізичну сутність, оскільки поле в

цьому перетині є потенційним. Поле ж симетричного вібратору не є потенційним, тому розподіл напруги по вібратору не відповідає розподілу в лінії.

Для коротких вібраторів ( $l < 0.1\lambda$ ) можна приблизно вважати поле потенційним, а розподіл напруги таким же, як в двопровідній лінії. Тоді пучність напруги буде розташовано на кінцях вібратора, а розподіл напруги від кінців до середини відбуватиметься по косинусоїдальному закону.

### 11.3.2 Поле випромінення симетричного вібратору

Напруженість електричного поля, що створюється симетричним вібратором в точці М, розташованій в далекій зоні і має координати  $R, \theta, \varphi$ , можна визначити як суму полів в цій точці від елементів  $dz$  вібратору. Можна вважати, що в межах малого відрізка  $dz$  розподіл струму рівномірний, і тоді вібратор можна розглядати як сукупність диполів Герця.

Вважаючи розподіл струму  $I(z)$  синусоїдальним (формула (11.17)), легко отримати:

$$E = j \frac{60kI_0 e^{-jkR}}{R} \cdot \sin \theta \int_0^l \sin[k(l-z)] \cdot \cos(kz \cos \theta) dz. \quad (11.18)$$

Перехід в (11.18) від добутку тригонометричних функцій до їх суми і виконання інтегрування дає вираз для амплітуди поля:

$$E = \frac{60I_0}{R} \cdot \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}. \quad (11.19)$$

Як видно з (11.19), електричне поле вібратора не залежить від кута  $\varphi$ , тобто є симетричним відносно вісі  $z$ . Звідси отримуємо ДС:

$$f(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}. \quad (11.20)$$

На практиці зазвичай застосовуються вібратори завдовжки  $2l < 5\lambda/4$ , ДС яких мають в інтервалі  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  лише одну петлю з максимумом, який є перпендикулярним довісі вібратору. З (11.20) витікає, що при  $\theta = \pi/2$  величина  $f(\pi/2) = f_{\max} = 1 - \cos(kl)$ . Тоді вираз для нормованої ДС вібратору набуває вигляду:

$$F(\theta) = \frac{f(\theta)}{f_{\max}} = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{[1 - \cos(kl)] \sin \theta}. \quad (11.21)$$

Для піхвильового вібратора ( $2l = \lambda/2$ ) з (11.21) витікає:

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (11.22)$$

На рисунку 11.3 наведено ДС симетричних вібраторів для деяких значень  $2l$ .

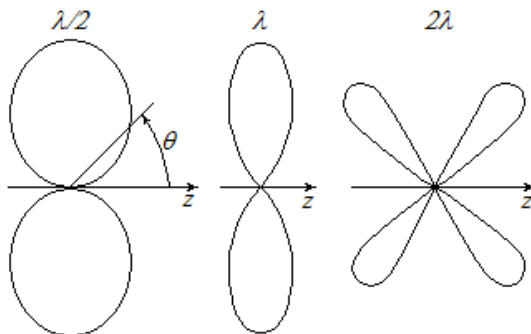


Рисунок 11.3 – ДС симетричного вібратору

Відповідні просторові ДСотримують обертанням цих кривих довкола вісі z (рис. 11.4). Відмітимо, що ширина ДС буде мінімальною при  $2l=1.25\lambda$ , але при подальшому збільшенні довжини вібратору його ДС починає роздвоюватися (рис.11.3), потім кількість пелюсток зростає, а ширина кожної пелюстки зменшується.

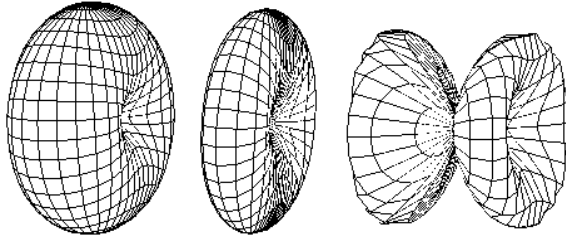


Рисунок 11.4 – Просторові ДС симетричного вібратору

Поляризаційний вектор симетричного вібратору має лише одну компоненту  $\dot{p}_\theta$ , яку зумовлено єдиною складовою електричного поля  $\dot{E}_\theta$ , отже, вібратор випромінює електромагнітні хвилі з лінійною поляризацією.

### 11.3.3 Опір випромінення симетричного вібратору

Опір випромінення симетричного вібратору по відношенню до струму в пучності можна розрахувати за допомогою співвідношень (11.6) та (11.7). Підстановка у формулу  $R_\Sigma = 2P_\Sigma / I_0^2$  виразу (11.9), з врахуванням вісевої симетрії поля вібратору, приводить до співвідношення:

$$R_\Sigma = 60 \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)]^2}{\sin \theta} d\theta. \quad (11.23)$$

Інтегрування в (11.23) дає вираз:

$$R_{\Sigma} = 30\{[Si(4kl) - 2Si(2kl)]\sin(2kl) + [C + \ln(kl) + Ci(4kl) - 2Ci(2kl)]\cos(2kl) + 2[C + \ln(kl) - Ci(2kl)]\} \quad (11.24)$$

де  $Si(x)$  і  $Ci(x)$  – інтегральні синус і косинус, а  $C=0.577$  – стала Ейлера.

Графік залежності  $R_{\Sigma}$  від  $l/\lambda$  наведено на рис. 11.5.

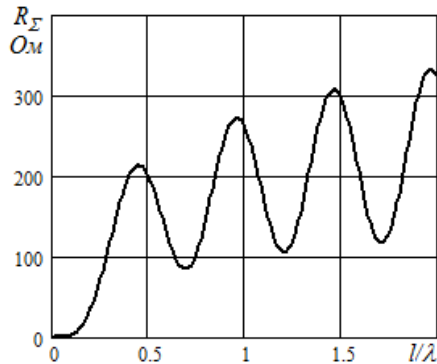


Рисунок 11.5 – Опір випромінювання симетричного вібратору

На графіку можна відзначити дві характерні точки: для півхвильового вібратору ( $l/\lambda = 0.25$ )  $R_{\Sigma} \approx 73.1$  Ом, для хвильового ( $l/\lambda = 0.5$ )  $R_{\Sigma} \approx 200$  Ом.

### 11.3.4 Вхідний опір симетричного вібратору

Вхідний імпеданс симетричного вібратору  $Z_{ex} = R_{ex} + jX_{ex}$  залежить від розмірів вібратору і довжини хвилі. Імпеданс  $Z_{ex}$  можна визначати, розглядаючи вібратор як відрізок розімкненої двопровідної лінії з втратами.

Згідно теорії довгих ліній вхідний опір розімкненого відрізка:

$$Z_{ex} = Z_X \operatorname{cth}(\gamma l) = Z_X \frac{\operatorname{sh}(2\alpha l) - j \sin(2\beta l)}{\operatorname{ch}(2\alpha l) - \cos(2\beta l)}, \quad (11.25)$$

де  $Z_X = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)}$ , а  $R, G, L, C$  – погонні параметри лінії, яка еквівалентна вібратору. Для вібратору можна вважати  $G \approx 0$  і  $R \ll \omega L$ . Тоді можна вираз для  $Z_X$  можнa розкласти в степеневий ряд і в розкладанні обмежитися першими двома членами:

$$Z_X \approx W_X \left( 1 - j \frac{R}{2\omega L} \right) = W_X \left( 1 - j \frac{\alpha}{k} \right). \quad (11.26)$$

Тут коефіцієнт згасання  $\alpha = R/2W_X$ ,  $W_X = \sqrt{L/C}$  – дійсна частина хвильового опору вібратора  $k = \omega\sqrt{LC}$ .

Підстановка (11.26) в (11.25), з врахуванням введеного раніше поправкового множника  $\xi$ , дає:

$$Z_{ex} = W_X \frac{\left[ \operatorname{sh}(2\alpha l) - \frac{\alpha}{k} \sin(2\xi k l) \right] - j \left[ \sin(2\xi k l) + \frac{\alpha}{k} \operatorname{sh}(2\alpha l) \right]}{\operatorname{ch}(2\alpha l) - \cos(2\xi k l)} \quad (11.27)$$

Оскільки в даному випадку відстань між симетричними елементами вібратора змінюється, то, отже, змінюється і хвильовий опір  $W_X$ . Для розрахунку величини  $W_X$  можна використовувати наближену формулу, отриману для тонких циліндричних вібраторів:

$$W_X = 120 \left( \ln \left( \frac{l}{a} \right) - 1 \right), \quad (11.28)$$

де  $l$  – довжина,  $a$  – радіус провідника вібратору.

Для визначення погонного параметру  $R$  треба прирівняти потужність випромінювання вібратору і потужність, яка розсіюється у відрізьку лінії

$$\frac{I_0^2 R_\Sigma}{2} = \int_0^l \frac{I^2(z) \cdot R}{2} dz, \quad (11.29)$$

звідки, вважаючи розподіл струму з врахуванням множника  $\xi$  синусоїдальним  $I(z) = I_0 \sin[\xi k(l - |z|)]$ , після інтегрування неважко отримати:

$$R = \frac{2R_\Sigma}{l \cdot \left[ 1 - \frac{\sin(2\xi kl)}{2\xi kl} \right]}. \quad (11.30)$$

І тоді коефіцієнт згасання:

$$\alpha = \frac{R_\Sigma}{W_X \cdot l \cdot \left[ 1 - \frac{\sin(2\xi kl)}{2\xi kl} \right]}. \quad (11.31)$$

На рис. 11.6 наведено залежності активної (рис.11.6а) і реактивної (рис.11.6б) складових вхідного імпедансу симетричного вібратору від його електричної довжини при двох значеннях радіусу провідника  $a$ .

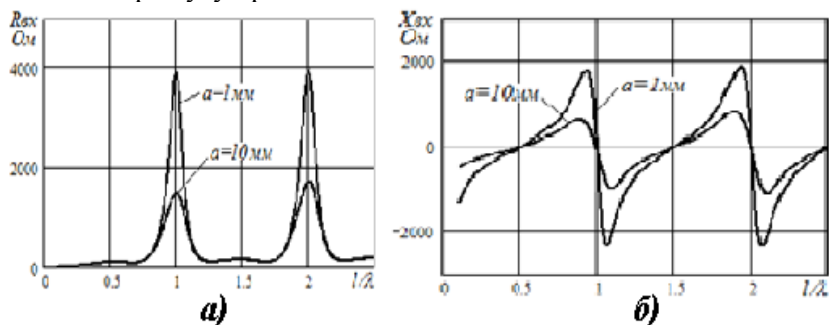


Рисунок 11.6 – Залежності активної та реактивної складових  $\dot{Z}_{ВХ}$  вібратору від електричної довжини

По характеру кривих видно, що перший резонанс ( $X_{\text{ВХ}} = 0$ ) є послідовним і спостерігається поблизу точки  $l = \lambda/4$ . При менших довжинах вібратору реактивний опір виявляється ємнісним.

Другий резонанс є паралельним і спостерігається поблизу точки  $l = \lambda/2$

При цьому  $R_{\text{ВХ}}$  досягає максимуму, величина якого залежить від радіусу провідника  $a$ .

У інтервалі між першим і другим резонансами реактивний опір вібратора є індуктивним. З наведених залежностей витікає, що із збільшенням товщини вібратору (при цьому менше  $W_X$ ), спостерігається меншазалежність його параметрів  $R_{\text{ВХ}}$  та  $|X_{\text{ВХ}}|$  від  $l/\lambda$  (частоти), отже тим більше робоча смуга частот вібратору.

## 11.4 Антени з обертовою поляризацією ЕМХ

Обертova поляризація (зокрема, кругова) електромагнітних хвиль набуває все більшого поширення при вирішенні задач сучасної телекомунікації, зокрема, в мобільному зв'язку. Найпростішими антенами з круговою поляризацією поля є турнікетна та спіральна. Розглянемо їх властивості та параметри.

### 11.4.1 Турнікетна антена

Турнікетна антена є простим варіантом антени з круговою поляризацією. Вона являє собою (рис. 11.7) два взаємно перпендикулярних симетричних вібратора, які збуджуються з різницею фаз  $90^\circ$ .

Для електромагнітної хвилі, яка поширюється вздовж вісі  $z$ , поле від вібратора 1 є:

$$\bar{E}_1 = \bar{x}_0 E_m \cos(\omega t - \beta z) . \quad (11.32)$$

Поле від вібратора 2 є:

$$\bar{E}_2 = \bar{y}_0 E_m \cos(\omega t - \beta z - \psi) . \quad (11.33)$$

В виразах (11.32), (11.33)  $\bar{x}_0, \bar{y}_0$  це ортивісей  $x$  і  $y$ , відповідно.

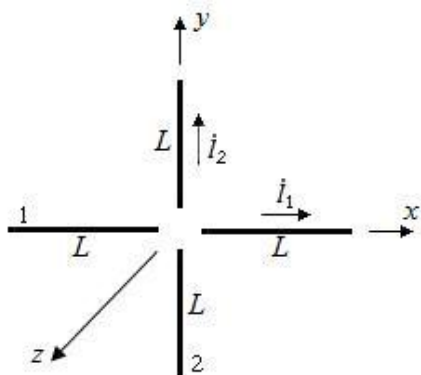


Рисунок 11.7 – Турникетна антена

Сумарне поле антени при зсуві фаз  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (для простоти хай також  $\beta z = 2\pi$ ) буде  $\bar{E}(t) = E_m[\bar{x}_0 \cos(\omega t) + \bar{y}_0 \sin(\omega t)]$ .

Модуль (довжина) вектору  $\bar{E}$ , або його миттєве значення:

$$|\bar{E}(t)| = E_m \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = E_m = const, \quad (11.34)$$

Кут нахилу вектору  $\bar{E}$  до вісі  $z$  (у площині, перпендикулярній вісі  $z$ ) буде дорівнювати:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{E_m \sin(\omega t)}{E_m \cos(\omega t)}\right) = \arctg[\tg(\omega t)] = \omega t. \quad (11.35)$$

З двох останніх виразів витікає, що модуль вектору результуючого електричного поля залишається сталим, а сам вектор обертається за часом з кутовою швидкістю  $\omega$  довкола напрямку поширення хвилі. Розглянутий випадок відповідає лівій

круговій поляризації. Якщо зсув фаз при збудженні вібраторів буде  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ , то в цьому випадку буде права кругова поляризація.

Для напрямів поширення хвилі, що не співпадають з віссю  $z$ , кругова поляризація переходить в еліптичну, як показано на рис. 11.8 (точки 2, 3, 4). При цьому коефіцієнт еліптичності  $m = \cos \theta$ .

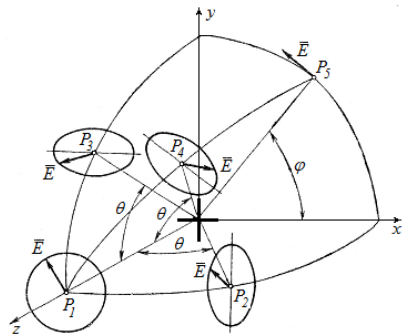


Рисунок 11.8 – Зміна поляризації ЕМХ турнікетної антени

Просторова ДС турнікетної антени, яку наведено на рис. 11.9, показує, що вона не має енергетичних нулів, тобто є квазіізотропною. Цю властивість турнікетної антени інколи застосовують в телекомунікації, якщо треба забезпечити рівномірне опромінення в межах повного кола за азимутом.

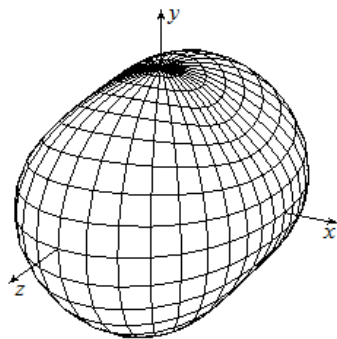


Рисунок 11.9 – Просторова ДС турнікетної антени

### 11.4.2 Спіральна антена

Спіральна антена здатна спрямовано випромінювати електромагнітні хвилі з круговою поляризацією в досить широкій смузі частот. Використання таких антен в системах рухомого радіозв'язку підвищує завадозахищенність і стійкість каналу зв'язку. Наприклад, при використанні на рухомих об'єктах антен кругової поляризації, замість традиційно використовуваних антен лінійної поляризації, стійкість зв'язку істотно підвищується. Для опису спіральної антени зазвичай вводять деяку поверхню, на якій розташовано її витки. Тоді спіральні антени можна класифікувати за формою цієї поверхні: циліндричні, конічні, сферичні і інші варіанти поверхонь. Як приклад на рис. 11.10 наведено ескіз однозаходової циліндричної спіральної антени. Тут  $\beta$  – кут підйому витків спіралі,  $s$  – крок витка спіралі.

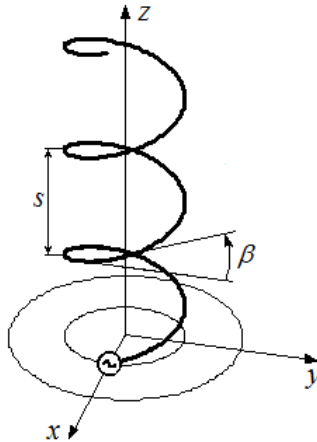


Рисунок 11.10 – Однозаходова циліндрична спіральна антена

За принципом дії спіральні антени відносяться до антен рухомих хвиль з періодичною структурою. Залежно від відношення сумарної довжини витків спіралі  $nL$  (де  $n$  – число

витків, а  $L$  – довжина одного витка) до довжини хвилі, може мінятися коефіцієнт спрямованої дії антени.

Строгий розрахунок характеристик спіральних антен пов'язано з досить великими математичними труднощами, що обумовлено відсутністю відповідної системи координат, в якій поверхня провідника спіралі точно збігалася б з координатними поверхнями. Тому на практиці використовуються різні наближені методи, які при чисельній реалізації дозволяють розрахувати параметри спіральних антен з досить високою точністю

Ширину ДС (у градусах) однозаходової циліндричної спіральної антени за рівнем половини потужності може бути визначено за наближеною формулою:

$$\Phi_H^o = \Theta_E^o = \frac{52}{\frac{L}{\lambda} \sqrt{\frac{n \cdot s}{\lambda}}}. \quad (11.36)$$

Коефіцієнт спрямованої дії антени:

$$D = 15 \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{n \cdot s}{\lambda}. \quad (11.37)$$

Вхідний опір антени є активним і знаходиться за формулою:

$$R_{ex} = 140 \cdot \frac{L}{\lambda}. \quad (11.38)$$

На рис. 11.11 наведено об'ємну ДС циліндричної спіральної антени з параметрами:  $\beta = 20^\circ$ ,  $s = 2,25$  см,  $n=3$ , радіус циліндру  $r=1$  см, частота  $f=3,7$  ГГц. Незначна несиметрія ДС пояснюється несиметричним розташуванням джерела збудження, яку видно з рис. 10.15. Слід відзначити, що позитивною якістю спіральних антен є досить велике значення робочої смуги частот.

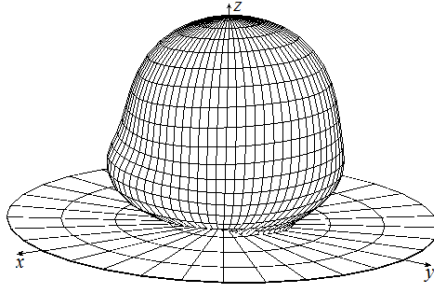


Рисунок 11.11 – Просторова ДС спіральної антени

Для циліндричної спіральної антени це майже октава, а для конусної спіральної ще більше – до 2.5...3 октав (нагадаємо, що октаві відповідає подвійна зміна значення робочої частоти).

### 11.5 Складена об'ємна спіральна антена з лінійною поляризацією

Принципи дії цієї антени витікають із розкладання лінійно-поляризованої ЕМХ в круговому базисі; ці принципи продемонстровано на рис.4.9. Тоді випромінення ЕМХ з правою круговою поляризацією буде виконувати спіральна антена з правим напрямом навивки спіралі, а для отримання ЕМХ з лівою круговою поляризацією – з лівим напрямом навивки спіралі. Якщо поєднати ці дві антени в єдину систему, то отримаємо складену спіральну антену з лінійною поляризацією; ескіз її наведено на рис.11.12а. Туткрапки Л та П відповідають точкам живлення парціальних спіралей. На рис.11.12б наведено розраховану в середовищі WinWire діаграму спрямованості такої антени (головну пелюстку). Її розгляд показує, що така антена є досить гостроспрямованою. Дослідження поляризаційної структури випроміненого поля, яке також було виконано в середовищі WinWire, показало, що в напрямі вісі Z спостерігається майже повністю лінійна поляризація.

Цікавою для подальшого розгляду є проблема дослідження шляхів зменшення габаритів розглянутого типу

спіральної антени. Цю цікавість обгрунтовано тим, що така антена буде «нечутливою» до впливу явища деполаризації, яке властиве хвилям з лінійною поляризацією (з іншими різновидами поляризації також).

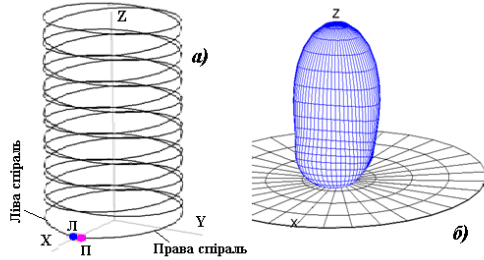


Рисунок 11.12 – До розгляду складеної спіральної антени

Явище деполаризації полягає в тому, що на трасі поширення у хвилі може змінитися тип поляризації, наприклад, лінійна вертикальна може перетворитися на лінійну похилу і т.і. Це актуально для мобільного зв'язку, організації прийому цифрового ТБ за стандартом T2 і т.і.

## 11.6 Вирішення питань узгодження антен зі спіральною структурою

Програма WinWire надає можливості враховувати фазові та амплітудні співвідношення струмів (напруг) живлення при розрахунках не тільки діаграм спрямованості деякої сукупності випромінювальних елементів з досить довільною геометричною формою, але і вхідного опору утворюваною такою сукупністю складеної антени.

Дослідження вхідного опору деяких складених спіральних антен показало, що їх вхідний опір може змінюватися від структури до структури в досить широких межах. Для вирішення питань узгодження таких антенних структур з лінією живлення треба мати можливість варіювати вхідним опором власне антен, причому без суттєвої зміни їх спрямованих та поляризаційних

властивостей. В багатьох випадках для живлення антен застосовують коаксіальний кабель. Тут треба прийняти до уваги, що промисловість випускає коаксіальні кабелі з унормованими значеннями хвилевого опору 50 Ом та 75 Ом.

Одним з найбільш простих підходів до вирішення цієї проблеми в складених спіральних антенах є застосування для намотування спіралі не поодинокого, а подвійного дроту. Ескіз фрагменту такої антени з двома спіралями протиспрямованого напрямку намотування наведено на рис.11.13 (а).

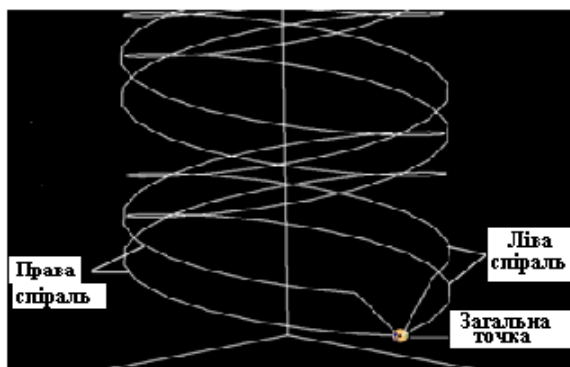


Рисунок 11.13 – Фрагмент складеної спіральної антени з подвійними проводами в спіралях

Дослідження такої системи (в середовищі WinWire) показали, що її ДС та поляризаційна структура практично не змінились порівняно з антеною, виконаною поодиноким дротом.

### **11.7 Складена плоска спіральна антена з лінійною поляризацією**

Поперечні (за вісями  $x$  та  $y$ ) і поздовжні (за віссю  $z$ ) розміри об'ємних складених спіральних антен «диктуються» розмірами об'ємних парціальних спіралей, з яких вони складаються. Для зменшення розміру в поздовжньому напрямі (напряму вісі  $z$ ) застосуємо в якості парціальних антен плоскі спіралі.

### 11.7.1 Геометрія парціальних плоских спіралей

Існує багато різновидів плоских спіральних структур. Застосовувані сучасним станом плоскі спіральні антени звичайно виконуються в вигляді або рівнокрокових спіралей (спіраль Архимеда), або рівнокутових спіралей. Математичний опис геометрії таких структур засновано на наступних залежностях радіуса  $\rho_s$ :

$$\rho_s = d \alpha + \rho_0 \text{ (рівнокрокова спіраль) } \quad (11.39)$$

$$\rho_s = \rho_0 \exp[\text{tg} \beta \alpha] \text{ (рівнокутова спіраль) } \quad (11.40)$$

Будемо розглядати рівнокрокові плоскі спіралі. Введемо фіксований габаритний розмір  $P_{\max}$  – периметр габаритного кола з радіусом  $\rho_{\max}$  – рис.11.14, а також кутовий коефіцієнт стиснення спіралі  $v$ . При цьому під  $\rho_{\max}$  розуміється значення  $\rho_s$  при  $\alpha = \alpha_{\max} = 2\pi n$ , а під  $\text{tg} v$  – сталу, яка характеризує швидкість розгортання спіралі.

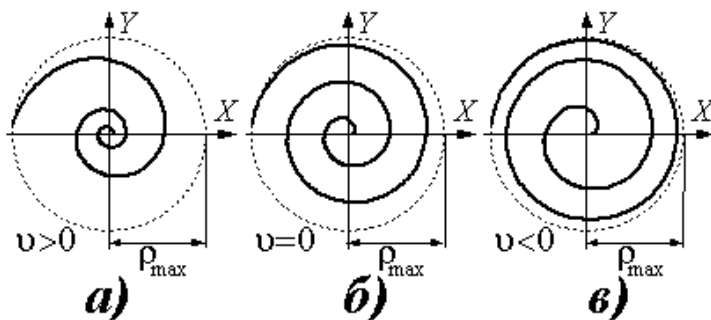


Рисунок 11.14 – Різновиди плоских спіральних структур

Розглянемо експоненційний закон намотування спіралі:

$$\rho_s = K(\rho_{max}, \rho_0, \operatorname{tg} \nu, n) [\exp(\operatorname{tg} \nu \alpha) - 1] + \rho_0, \quad (11.41)$$

$$\text{де } K(\rho_{max}, \rho_0, \operatorname{tg} \nu, n) = \frac{\rho_{max} - \rho_0}{\exp(2\pi n \operatorname{tg} \nu) - 1};$$

$\rho_{max}$  – радіус габаритного кола;

$\operatorname{tg} \nu \in (-\infty; +\infty)$ , що еквівалентно  $\nu \in (-\pi/2; +\pi/2)$ .

На основі закону намотування (11.39) при  $\rho_{max} = \text{const}$  можна розглянути різновиди спіралей, які наведено на рис.10.18.

При  $\nu > 0$  спіраль наближається до рівнокутової, причому стискається до центру (рис.11.14а). При  $K(\rho_{max}, \rho_0, \operatorname{tg} \nu, n) = \rho_0$  спіраль стає рівнокутовою (11.40), при цьому  $\nu$  відповідає  $\beta$  – куту намотування спіралі. При  $\nu = 0$  спіраль вироджується в рівнокрокову, яка визначається за (11.39) (див.рис.11.14б). При  $\nu < 0$  спіраль стискується до кола з радіусом  $\rho_{max}$  (див.рис.11.14в), а при  $\nu \rightarrow -\frac{\pi}{2}, n = 1, \rho_0 = \rho_{max}$  і спіраль вироджується в круглу рамку з радіусом  $\rho_{max}$ .

### 11.7.2 ДС парціальних плоских спіральних антен

Для оцінки спрямованих властивостей поодиноких спіралей плоского типу розраховано їх ДС в різних поляризаційних базисах (лінійному та круговому). Їх розміри відповідають оптимальним. На рис.11.15а наведено ДС для лінійних компонент ( $E_\theta$  – суцільна лінія,  $E_\varphi$  – штрихова) і, відповідно, на рис. 11.15б – ДС кругових компонент поля випромінення ( $E_{лів}$  – суцільна,  $E_{прав}$  – штрихова лінія).

Наведені ДС є типовими для всіх різновидів аналізованих парціальних антен. Порівнюючи ці ДС з аналогічними для об'ємних спіралей, маємо висновок, що плоскі структури в частині спрямованості поступаються об'ємним, але мають значно кращі габаритні параметри.

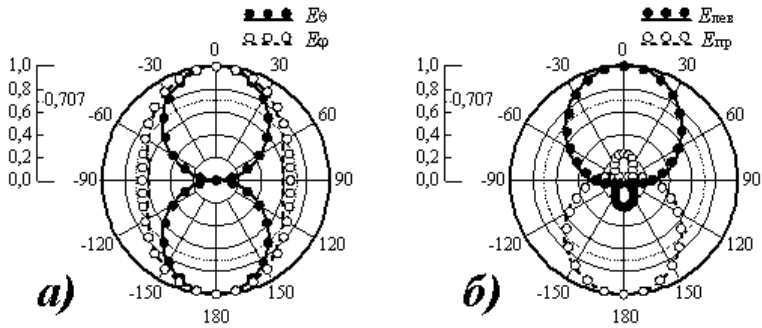


Рисунок 11.15 – ДС парціальних плоских поодиноких антен

### 11.7.3 Геометрія складених плоских спіральних антен

Із всіх існуючих різновидів плоских спіралей для створення складеної плоскої спіральної антени оберемо рівнокутову та рівнокрокову (див. рис.11.14). Тут пояснення по габаритним розмірам:  $\rho_{max}$  – радіус габаритного кола та  $\nu$  – коефіцієнт стиснення спіралі наведено в п.р.11.7.1.

Візьмемо дві плоскі рівнокрокові спіралі з протилежними напрямками намотування спіралей та розташуємо їх одну під другою зі зсувом в напрямі вісі  $Z$  на відстань  $h$ . В цьому випадку отримаємо складену (подвійну) спіральну антену плоского типу, яку наведено на рис.11.16. Тут на верхньому «поверсі» розташовано плоску спіраль з лівим напрямом намотування спіралі, а на нижньому – з правим напрямом намотування.

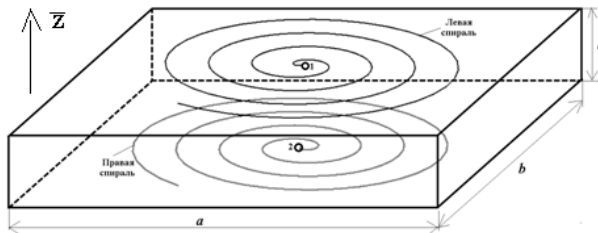


Рисунок 11.16 – Ескіз складеної спіральної антени плоского типу

Цифрами 1 та 2 позначено точки під'єднання живлення. Відмітимо, що габаритні розміри  $atab$  цієї антени є співрозмірними з габаритами об'ємного аналога, але розмір  $h$  може бути неспіврозмірно меншим. Для порівняльного аналізу треба додатково дослідити спрямовані властивості антен цього типу. Треба також відмітити, що в напрямі вісі  $Z$  така антена не володіє властивістю односпрямованості. Для надання такої властивості в цій площині треба додатково встановлювати рефлектор.

Ескіз складеної (подвійної) спіральної антени плоского типу з додатковим рефлектором наведено на рис.11.17. Тут рефлектор виділено жирною лінією та залито сірим кольором. Розмір  $h_1$  звичайно обирають порядку чверті довжини хвилі.

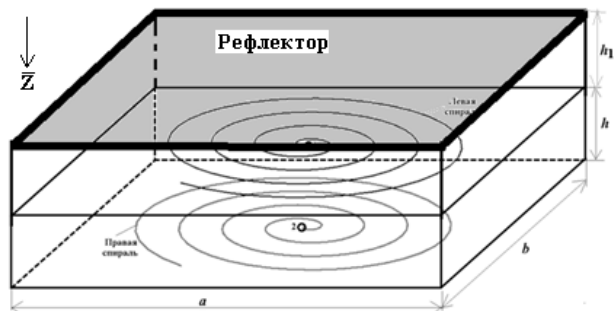


Рисунок 11.17 – Ескіз складеної спіральної антени плоского типу з рефлектором

Рефлектор являє собою суцільну поверхню із металу, а значить буде мати велику вітрильність. Для зменшення впливу цього ефекту рефлектор можна виконати із дротяної сітки.

#### 11.7.4 ДС складеної плоскої спіральної антени

Програма WinWire надає можливості враховувати фазові та амплітудні співвідношення струмів (напруг) живлення при розрахунках діаграм спрямованості деякої сукупності випромінювальних елементів з досить довільною геометричною

формою. Це відкриває широке поле діяльності для дослідження спрямованих та поляризаційних властивостей різних антенних систем, зокрема, і на основі досить довільної кількості спіральних елементів з об'ємною або плоскою структурою.

Для прикладу розглянемо плоску подвійну спіральну антену ескіз якої наведено на рис.11.16. Задамо частоту, яка відповідає стандарту T2,  $f=660$  МГц,  $\lambda=45,45$  см. ДС цієї антени наведено на рис.11.18а для площини XOZ(див.рис.11.16), а для площини YOZ – на рис.11.18б при  $a=b=46$  см,  $h=11,5$  см. Коефіцієнт спрямованої дії цієї антени  $KСД\approx 11$ дБ, що задовільняє вимогам стандарту T2 навіть на межі зони впевненого прийому.

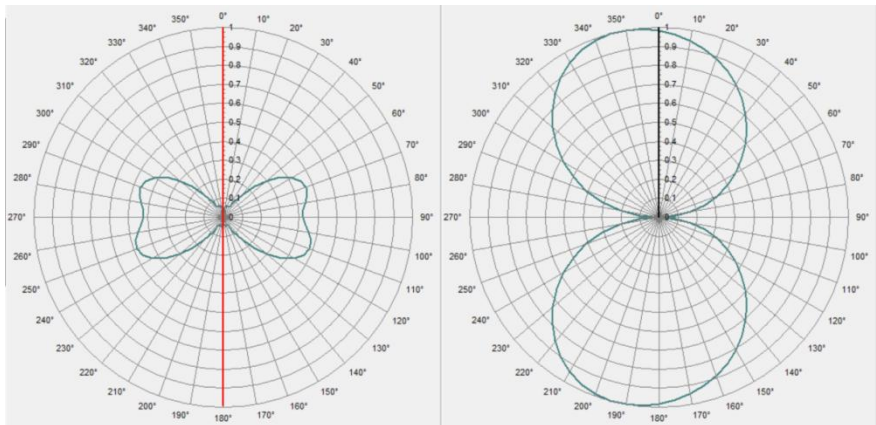


Рисунок 11.18 – ДС плоскої подвійної спіральної антени

Недолік – двоспрямоване випромінювання. Цей недолік можна усунути застосуванням рефлектору, як на рис.11.17.

### 11.8 Особливості антен індивідуальних мобільних терміналів

Як вже наголошено у вступній частині (див.рис.В.1), основними вимогами до цих антен є:

- мінімально можливі габарити;

– слабо виражена спрямованість.

Окрім того розрізняють ще антени лінійної та кругової поляризації. Розглянемо ці питання на прикладах.

### 11.8.1 Z-подібний смужковий випромінювач

Ескіз Z-подібного смужкового випромінювача наведено на рис.11.19. Тут же наведено вісі декартової системи координат та позначення розмірів цього випромінювача. Його складено з двох чвертьхвильових вібраторів, а необхідний додатковий зсув за фазою між ними забезпечується вмиканням напівхвильового відрізка лінії.

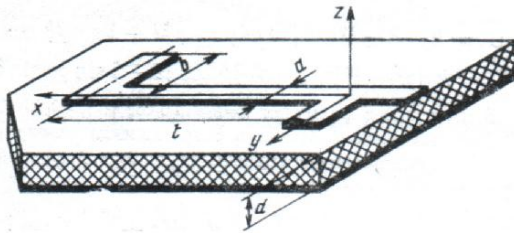


Рисунок 11.19 – Ескіз Z-подібного смужкового випромінювача

Таку антену можна застосувати як в якості самостійного елемента, так і в складі антенної решітки, бо тут органічно поєднуються випромінювальні елементи та схема живлення.

На рис.11.20 наведено кутові залежності  $\varphi$ -ї та  $\theta$ -ї компонент поля Z-подібного смужкового випромінювача для різних значень товщини діелектричної підкладки з відносною проникністю  $\epsilon_1=5$ :

$$1-d = 0,02\lambda_0; 2-d = 0,1\lambda_0; 3-d = 0,14\lambda_0; 4-d = 0,18\lambda_0; 5-d = 0,20\lambda_0.$$

Розміри  $b$  та  $l$  вібратора мають резонансні значення.

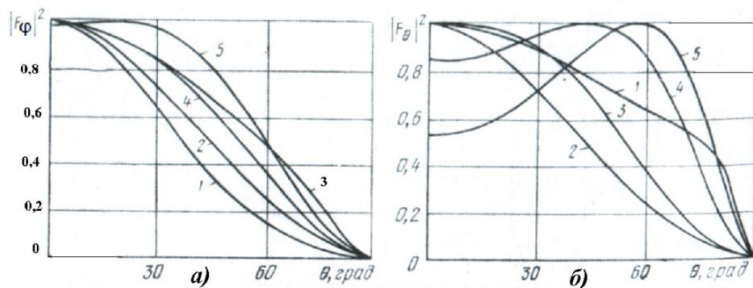


Рисунок 11.20 – Кутові залежності для компонент поля

Як видно з наведених залежностей, зміна товщини підкладки сильніше впливає на ДС для  $\theta$ -ї компоненти поля. Дослідження поляризаційної структури випроміненого поля показує, що при деяких товщинах підкладки може спостерігатися явище крос-поляризації.

На рис.11.21 наведено фотографії антено-фідерних трактів реальних мобільних трубок. На рис. 11.21а наведено смужкову, а на рис. 11.21б – щільну конструкцію.

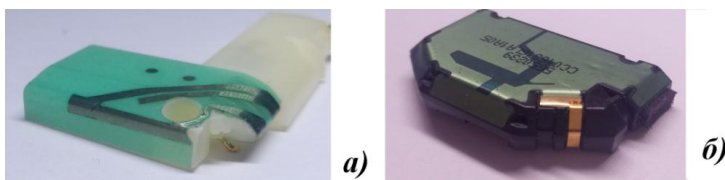


Рисунок 11.21 – Фотографії трактів реальних мобільних трубок

Розглянуті антени випромінюють лінійно поляризовану хвилю.

### 11.8.2 Антени смужкового типу з обертовою поляризацією поля

Відомо, що поле кругової поляризації утворюється шляхом суперпозиції двох лінійно-поляризованих полів, які

знаходяться в просторовій тв фазовій квадратурі. Антени смужкового типу можуть випромінювати поле кругової поляризації при збудженні в них двох вироджених ортогональних типів коливань з відносним зсувом за фазою  $90^\circ$ . Для забезпечення цієї дії можна застосувати квадратні або круглі смужкові диски при вмиканні двох ортогонально розташованих збуджувачів, як наведено на рис.11.22.

Дві ортогональні грані квадратного смужкового диску на рис.11.21а збуджуються вихідними сигналами квадратурного мосту, а на рис.11.21б функцію фазового зсуву на  $90^\circ$  здійснює додатковий відрізок лінії з довжиною  $\lambda/4$ . В цих схемах збудження подається до двох ортогональних у просторі граней смужкового диску з квадратною формою.



Рисунок 11.22 – Схеми збудження поля з круговою поляризацією

Застосовують і інші, більш прості схеми, де збудження подається в одну точку квадратного диска. Але в цьому випадку для усунення ефекту виродження в конструкцію квадратного диску треба вводити хоча б незначну асиметрію.

### 11.9 Особливості антен базових станцій мобільного зв'язку

Антенна базової станції мобільного зв'язку в азимутальній площині повинна бути неспрямованою (щоб своїм випроміненням «освітлювати» всіх абонентів, які можуть бути по азимуту від  $0^\circ$  до  $360^\circ$ ), а в меридіональній площині її діаграма

спрямованості повинна бути «притиснутою» до поверхні Землі, бо на значній висоті абонентів мобільного зв'язку немає.

Маючи на увазі ці особливості, антену з такими властивостями найпростіше утворити в вигляді лінійної антенної решітки з симетричних (або несиметричних) вібраторів – рис.11.23.

Звісно ж, для надання такій решітці діаграми спрямованості (в кутомісцевій площині) потрібної форми, треба організувати відповідну схему живлення для елементів решітки.

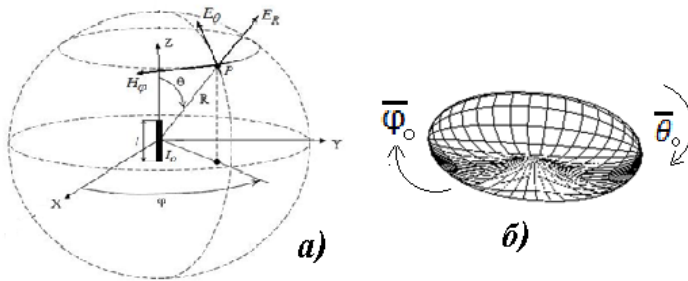


Рисунок 11.23 – До розгляду властивостей антени базової станції мобільного зв'язку

Задачами схеми живлення є забезпечення потрібного амплітудно-фазового розподілу між елементами лінійної антенної решітки, а тому в цій схемі повинні бути подільник потужності (забезпечить потрібний розподіл амплітуд в елементах лінійної решітки) та набір фазообертачів для забезпечення потрібного розподілу фаз в елементах лінійної решітки.

Структурну схему антенно-фідерної системи базової станції мобільного зв'язку, побудовану відповідно до розглянутих її особливостей, наведено на рис.11.24. Тут  $T$  – передавач,  $\Pi_i$  –  $i$ - тий блок подільника потужності,  $\Phi_i$  –  $i$ -тий блок фазообертача,  $V_i$  –  $i$ -тий випромінювач лінійної антенної решітки. Пунктирною лінією виділено розподільчо-формувальну систему застосованої лінійної решітки.

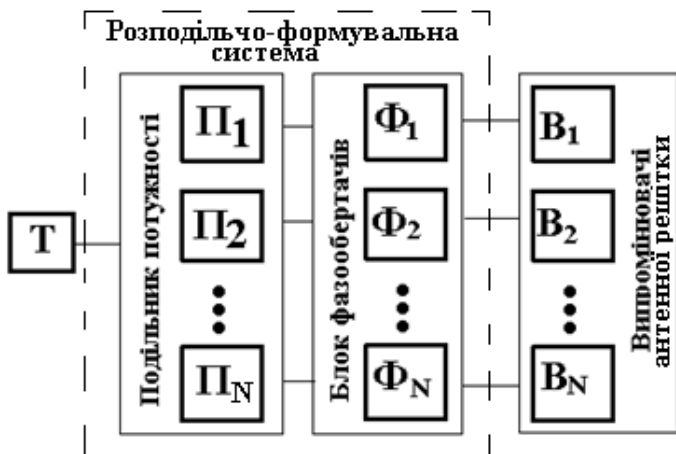


Рисунок 11.24 – Схема структурна антенно-фідерної системи базової станції мобільного зв'язку

Для живлення системи випромінювачів необхідно застосовувати когерентні сигнали. Застосування блоку подільника потужності є вимушеною мірою, оскільки побудувати  $N$  окремих генераторів (передавачів з високим рівнем когерентності) для живлення  $N$  випромінювачів практично неможливо. За цією причиною застосовують досить потужний генератор та блок подільника потужності, який розподіляє потужність передавача між випромінювача в потрібній пропорції. Таким чином утворено розподільчо-формувальну систему для організації когерентного живлення системи випромінювачів лінійної антенної решітки з потрібними властивостями її дивграми спрямованості.

В якості прикладу на рис.11.25 наведено фотографію антенної системи базової станції одного із операторів мобільного зв'язку.

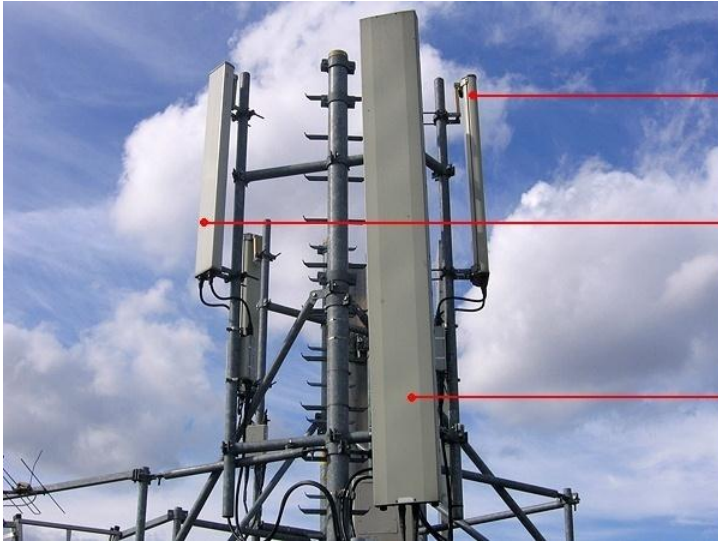


Рисунок 11.25 – Фотографія антенної системи базової станції одного із операторів мобільного зв'язку.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке комплексна векторна ДС антени?
2. Що таке нормована за амплітудою та потужністю ДС антени?
3. Як будуються ДС антен? Які пелюстки мають ДС і як вони оцінюються?
4. Що таке фазова ДС та як знайти фазовий центр антени?
5. За яким параметром визначаються поляризаційні властивості антени?
6. Що таке опір випромінення антени та як його знайти?
7. Що таке вхідний опір антени та як його знайти?
8. Як знаходиться к.к.д. антени?
9. Що таке КСД та коефіцієнт підсилення антени?
10. Що таке симетричний вібратор та які вимоги до його геометричних розмірів?

11. За яким наближенням встановлюється розподіл струму по тонкому вібратору та які особливості цього розподілу?
12. Як встановлюються розподіли напруги та заряду по вібратору?
13. Як знаходиться поле випромінення вібратору та його ненормована і нормована ДС?
14. Як залежить форма ДС вібратору від його довжини?
15. Як знаходиться опір випромінення симетричного вібратору?
16. Як знаходиться комплексний вхідний опір симетричного вібратору?
17. Які принципи роботи турнікетної антени?
18. Як змінюється поляризація поля випромінення турнікетної антени?
19. Який вигляд має ДС та які напрями застосування турнікетної антени?
20. Як визначаються параметри та який вигляд має ДС спіральної антени?
21. Які принципи роботи спіральної антени?
22. Які принципи роботи складеної об'ємної спіральної антени з лінійною лінійною поляризацією?
23. Які способи узгодження спіральних антен?
24. Яка геометрія та ДС парціальних плоских спіралей?
25. Яка геометрія складених плоских спіральних антен?
26. Які особливості мають геометрія та ДС складених плоских спіральних антен?
27. Які особливості має Z-подібний смужковий випромінювач?
28. Які топології мають смужкові антени з обертовою поляризацією поля?
29. Які особливості мають антени базових станцій мобільного зв'язку?

## Приклад вирішення задачі

**Задача 11.1** Лінійна дротоваантена з довжиною  $l = 3$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 10$  А. Частота  $f = 1$  МГц. Знайти потужність та опір випромінення цієї антени. Як зміняться ці величини при довжині антени  $l_l = 30$  м? Виконати порівняльний аналіз.

### Вирішення

1. Знайдемо довжину хвилі  $\lambda$ . Для повітря швидкість хвилі  $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек отже

$$\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 10^6 = 300 \text{ м.}$$

2. Відношення  $l/\lambda$  для цієї антени  $\epsilon l/\lambda = 3/300 = 0.01 \ll 1$ . Це свідчить за те, що для розрахунків можна застосовувати формули, які отримані для диполя Герця.

3. За виразом (10.27) знайдемо потужність випромінення.

$$P_{\Sigma Д} = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 40 \cdot 3.14^2 \cdot 10^2 \cdot (0.01)^2 = 3.95 \text{ Вт}$$

4. Оскільки  $R_{\Sigma Д} = \frac{1}{2} R_{\Sigma Д} I_0^2$ , то з (10.27) витікає, що для диполя Герця опір випромінення буде :

$$R_{\Sigma Д} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80 \cdot 3.14^2 \cdot (0.01)^2 = 0.079 \text{ Ом.}$$

Наголосимо, що таке низьке значення опору випромінення свідчить за низьку випромінювальну ефективність такої короткої антени. Розглянемо випадок антени з довжиною  $l_l = 30$  м.

Значення відношення  $l_l/\lambda$  для цієї антени  $\epsilon l_l/\lambda = 30/300 = 0.1 \ll 1$ . Це свідчить за те, що для розрахунків також можна застосовувати формули, які отримано для диполя Герця.

5. Виконавши аналогічні розрахунки, отримаємо

$$P_{\Sigma Д1} = 395 \text{ Вт}; \quad R_{\Sigma Д1} = 7.9 \text{ Ом.}$$

Із порівняння отриманих даних видно, що із збільшенням довжини антени її випромінювальна ефективність збільшується. За цією причиною на практиці звичайно прагнуть там, де це можливо, застосовувати антени з довжиною, яка є співрозмірною з довжиною хвилі.

### **Задачі для самостійного вирішення**

**Задача 11.2** Лінійна антена з довжиною  $l = 4$  м збуджується гармонічним струмом з амплітудою  $I_0 = 1$  А. Частота  $f = 1$  МГц.

Знайти потужність та опір випромінювання цієї антени. Як зміняться ці параметри, якщо з проводу антени довжиною 4 м утворити круглу рамку, яка живиться таким же струмом  $I_0$ ? Провести порівняльний аналіз. Зробити висновки.

**Задача 11.3** Порівняти КСД півхвильового вібратора та диполя Герца з  $l/\lambda = 0.05$ .

**Задача 11.4** Розрахувати нормовані ДС за полем для симетричних вібраторів з довжинами  $2l = \lambda/2, \lambda, 1.25\lambda, 1.5\lambda$ . Провести порівняльний аналіз. Зробити висновки.

## БІБЛОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / С.И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1992. – 416 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны [Текст]/ Л.А. Вайнштейн. – М., Радио и связь, 1988. – 440 с.
3. Вольман В.И. Техническая электродинамика [Текст]/ В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М.: Связь, 1971. – 487 с.
4. Марков Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Сов. радио, 1979. – 374 с.
5. Матвеев А.Н. Электродинамика [Текст]: учеб. пособие /А.Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1980. – 383 с.
6. Никольский В.В. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 544 с.
7. Альтман, Дж. Устройства СВЧ [Текст] / Дж. Альтман; пер. с англ.; под ред. И. В. Лебедева. – М.: Мир, 1968. – 488 с.
8. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами [Текст]: учеб. пособие для вузов / С. И. Баскаков. – М.: Высш. шк., 1980. – 152 с.
9. Бова, Н. Т. Антенны и устройства СВЧ [Текст] / Н. Т. Бова, Г. Б. Резников. – 2-е изд., перераб. и дополн. – К.: Вища шк., 1982. – 278 с.
10. Воскресенский, Д. И. Устройства СВЧ и антенны. 2-е изд., доп. и перераб. / Д. И. Воскресенский, В. Л. Гостюхин, В. М. Максимов, Л. И. Пономарев. – М: Радиотехника, 2006. – 376 с.
11. Микроэлектронные устройства СВЧ / Н. Т. Бова, Ю. Г. Ефремов, В. В. Конин и др. – К.: Техніка, 1984. – 184 с.
12. Григорьев, А.Д. Электродинамика и микроволновая техника [Текст]: учебник / А. Д. Григорьев. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб: Лань, 2007. – 704 с.
13. Интегральные устройства СВЧ телекоммуникационных систем [Текст] / М.Е. Ильченко, А.А. Липатов, Н.А. Могильченко, Т.Н. Нарытник, А.В. Савельев, Ю.И. Якименко. – К.:Техніка, 1998. – 110 с.

14. Неганов, В. А. Теория и применение устройств СВЧ [Текст]: Учебн. пособие для вузов / В. А. Неганов, Г. П. Яровой; Под ред. В. А. Неганова – М.: Радио и связь, 2006. – 720с.
15. Нефёдов, Е.И. Устройства СВЧ и антенны [Текст]: учебное пособие / Е. И. Нефёдов. – М.: Академия, 2009. – 384 с.
16. Сазонов, Д. М. Устройства СВЧ [Текст]: учеб. пособие / Д. М. Сазонов, А. Н. Гридин, Б. А. Мишустин. – М.: Высш. шк., 1981. – 295 с.
17. Фуско, В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование [Текст] / В. Фуско; пер. с англ.; под ред. В. И. Вольмана. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
18. Хелзайн, Дж. Пассивные и активные цепи СВЧ [Текст] / Дж. Хелзайн; пер. с англ.; под ред. А. С. Галина. - М.: Радиоисвязь, 1981. – 200 с.
19. Pozar, D. M., Microwave Engineering [Text] / D. M. Pozar. – 3-rd edition. – N.Y.: Wiley, 2005. – 700 p.
20. Colin, R. E. Foundations for Microwave Engineering [Text] / R. E. Colin. – 2-nd edition. – N.Y.: Wiley–Interscience, 2001. – 924 p.
21. Шокало В.М. Електродинаміка та поширення радіохвиль [Текст]: підручник / В.М. Шокало, В.І. Правда, В.А. Усін, В.С. Вунтесмері, Д.В. Грецьких. – Харків: Колегіум, 2009.
22. Каганов В.И. Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс [Текст]: Учеб. пособие для вузов / В.И. Каганов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2008. – 336 с.

*Наукове видання*

Дмитренко Віктор Панкратович  
Романенко Сергій Миколайович  
Мороз Гаррі Володимирович

## **ПОЛЯ І ХВИЛІ В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ**

*Навчальний посібник*

Укладач: *Дмитренко В. П.*  
Відповідальний за випуск: *Мороз Г. В.*  
Верстання: *Дяченко О. О.*

Підписано до друку 03.10.2019. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 16,92.  
Тираж 300 прим. Зам. № 1116.

Національний університет «Запорізька політехніка»  
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64  
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.