

Д-р техн. наук В. В. Чигиринский, канд. техн. наук С. П. Шейко
 Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье

ЗАМКНУТАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В обработке металлов давлением имеют место динамические задачи теории упругости и пластичности. Поставлена и решена пространственная задача теории пластичности в аналитическом виде. Использование метода гармонических функций позволило замкнуть решение в напряжениях и скоростях деформаций. Аналитически удалось описать участки перехода по напряжениям и скоростям деформации, удовлетворить граничные условия по этим параметрам.

Ключевые слова: обработка металлов давлением, теория пластичности, динамическая задача, гармоническая функция.

Введение

Анализ показывает, если удастся математически описать участки перехода из одной зоны пластичного течения металла в другую, то появляется возможность аналитического решения задач теории пластичности. В работах [1–5] предложено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности с использованием гармонических функций. В напряжениях решена пространственная задача [6]. Использование гармонических функций, как показывает дальнейший анализ, позволяет аналитически получить замкнутое решение пространственной задачи, как с учетом статистической, так и кинематической составляющих.

Принимается $\tau_{xy} = 0$. Во многих задачах обработки металлов давлением влиянием данного компонента тензора напряжений пренебрегают [7, 8]. На рис. 1 показаны компоненты тензоров напряжений в общей постановке и предлагаемой. Кроме этого показан очаг деформации с переходными зонами и соответствующими касательными напряжениями.

В этом случае имеет место 14 неизвестных $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \xi_x, \xi_y, \xi_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, k_1, k_2, \beta_1, \beta_2$, где k_1, k_2 – сопротивление пластической деформации вдоль осей симметрии β_1, β_2 – фрагмент интенсивности сдвиговой деформации. Отсюда в постановочной части замкнутой задачи теории пластичности в системе должно присутствовать 14 уравнений.

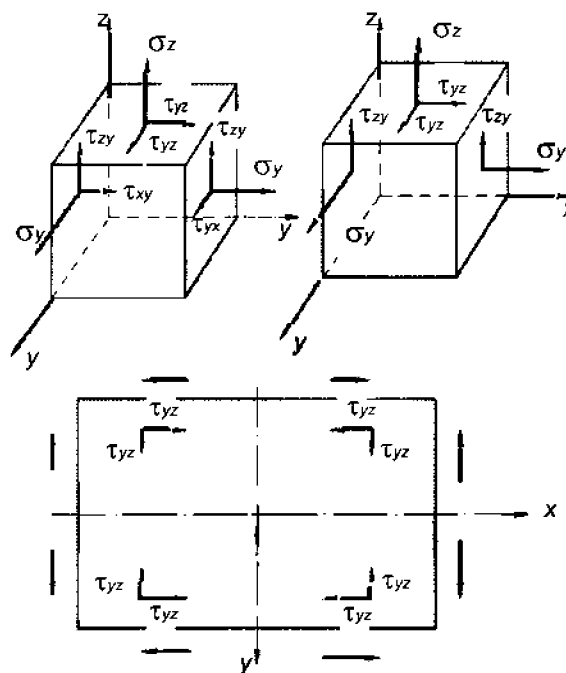


Рис. 1. Компоненты тензоров напряжений и схема действия касательных напряжений в плане для пространственной задачи

Постановка задачі

1. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Обобщенные уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} 2k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xz}}{k_1}\right)^2}, \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} 2k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{yz}}{k_2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Уравнения связи

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} &= \frac{\xi_x - \xi_z}{\gamma_{xz}} = \frac{2\xi_x + \xi_y}{\gamma_{xz}}, \\ \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} &= \frac{\xi_y - \xi_z}{\gamma_{yz}} = \frac{2\xi_y + \xi_x}{\gamma_{yz}}. \end{aligned} \quad (3)$$

4. Уравнение несжимаемости

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0. \quad (4)$$

5. Уравнения неразрывности скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y}. \quad (5)$$

6. Граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_{n1} &= k_1 \cdot \sin(A_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \tau_{n2} = k_2 \cdot \sin(A_2 \Phi_2 - 2\alpha_2), \\ \gamma_{n1} &= 2 \cdot \beta_1 \cdot \sin(B_1 \Phi_1 - 2\alpha_1), \quad \gamma_{n2} = 2 \cdot \beta_2 \cdot \sin(B_2 \Phi_2 - 2\alpha_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Решение задачи в напряжениях

Использование обобщенных уравнений равновесия (2) позволяет привести полученный результат в соответствие с уравнениями (5). Граничные условия (6) математически описывают зоны перехода от одного участка пластического течения металла к другому, как в напряжениях, так и деформациях.

Решение плоских задач в аналитическом виде представлено в работах [1–5]. Для удовлетворения граничных условий вида (6) необходимо

$$\tau_{xz} = k_1 \cdot \sin A_1 \Phi_1, \quad \tau_{yz} = k_2 \cdot \sin A_2 \Phi_2, \quad (7)$$

где A_1 и A_2 – постоянные, определяющие параметры пластической среды; Φ_1 и Φ_2 – неизвестные координатные функции, определяемые решением задачи, k_1, k_2 – сопротивление пластической деформации сдвига вдоль осей X и Y , зависящие от координат очага деформации.

натные функции, определяемые решением задачи, k_1, k_2 – сопротивление пластической деформации сдвига вдоль осей X и Y , зависящие от координат очага деформации.

Особенностью решения уравнений (2), кроме тригонометрической подстановки, является использование фундаментальных функций. Они применяются, если дифференциальное уравнение в частных производных является линейным [9]. Из этого следует

$$k_1 = C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1', \quad k_2 = C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2', \quad (8)$$

где $C_{\sigma 1}$ и $C_{\sigma 2}$ – постоянные, определяющие размерность сопротивления сдвигу в направлениях осей X и Y ; θ_1 и θ_2 – координатные неизвестные функции, определяемые решением задачи вдоль этих же осей. При этом необходимо иметь в виду, что $\tau_{xz} = f(x, z)$, $\tau_{yz} = f(y, z)$.

Подставляя вводимые функции (7) и (8) в (2) получим следующее

$$\begin{aligned} C_{\sigma 1} \left[\theta_{1xx}' + (\theta_{1x}' + A_1 \Phi_{1z})^2 - \theta_{1zz}' - (\theta_{1z}' - A_1 \Phi_{1x})^2 \right] \times \\ \times \sin A_1 \Phi_1 + C_{\sigma 1} \left[2 \cdot (A_1 \Phi_{1x} - \theta_{1z}') \cdot (\theta_{1x}' + A_1 \Phi_{1z}) + \right. \\ \left. + (A_1 \Phi_{1xx} - A_1 \Phi_{1zz}') \right] \cdot \cos A_1 \Phi_1 = -2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot A_1 \Phi_{1xz} \times \\ \times \sin A_1 \Phi_1 + 2 \cdot C_{\sigma 1} \cdot \theta_{1xz}' \cdot \cos A_1 \Phi_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Появляются одинаковые скобки $(\theta_{1x}' + A_1 \Phi_{1z})$ и $(\theta_{1z}' - A_1 \Phi_{1x})$ в операторах тригонометрических функций (9). Принимая их равными нулю, избавляемся от нелинейности, получаем соотношения Коши-Римана, которые превращают уравнения в тождество. Покажем это. Имеем

$$\theta_{1x}' = -A_1 \Phi_{1z}, \quad \theta_{1z}' = A_1 \Phi_{1x}. \quad (10)$$

$$\theta_{1xx}' = -A_1 \Phi_{1zx},$$

$$\theta_{1zz}' = A_1 \Phi_{1xz}, \quad \theta_{1xz}' = A_1 \Phi_{1zz} = -A_1 \Phi_{1xx}'.$$

Из соотношений (10) и (11) определяются функции θ_1' и $A_1 \Phi_1$. Они гармонические и удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е.

$$\theta_{1xx}' + \theta_{1zz}' = 0, \quad A_1 \Phi_{1xx} + A_1 \Phi_{1zz} = 0. \quad (12)$$

Аналогичные преобразования имеют место и для второго обобщенного уравнения равновесия при подстановке (7) и (8) в (2). Действительно, можно записать

$$\begin{aligned} C_{\sigma 2} \left[\theta_{2yy}' + (\theta_{2y}' + A_2 \Phi_{2z})^2 - \theta_{2zz}' - (\theta_{2z}' - A_2 \Phi_{2y})^2 \right] \times \\ \times \sin A_2 \Phi_2 + C_{\sigma 2} \left[2 \cdot (A_2 \Phi_{2y} - \theta_{2z}') \cdot (\theta_{2y}' + A_2 \Phi_{2z}) + \right. \\ \left. + (A_2 \Phi_{2yy} - A_2 \Phi_{2zz}') \right] = -2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot A_2 \Phi_{2yz} \cdot \sin A_2 \Phi_2 + \\ + 2 \cdot C_{\sigma 2} \cdot \theta_{2yz}' \cdot \cos A_2 \Phi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее

$$\begin{aligned}\theta'_{2y} &= -A_2\Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = A_2\Phi_{2y}, \\ \theta'_{1yy} &= -A_2\Phi_{2zy}, \quad \theta'_{2zz} = A_2\Phi_{2yz}, \\ \theta'_{2yz} &= A_2\Phi_{2zz} = -A_2\Phi_{2yy},\end{aligned}\quad (14)$$

$$\theta'_{2yy} + \theta'_{2zz} = 0, \quad A_2\Phi_{2yy} + A_2\Phi_{2zz} = 0.$$

С учетом (13),(14) появляется определенность для функций θ'_2 и $A_2\Phi_2$.

Подставляя выражения для касательных напряжений в уравнения равновесия (1), интегрируя, получим аналитические зависимости для нормальных напряжений. Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_x = C_{\sigma 1} \cdot \exp\theta'_1 \cdot \cos A_1\Phi_1 + \sigma + f(y, z) + C_1,$$

$$\sigma_y = C_{\sigma 2} \cdot \exp\theta'_2 \cdot \cos A_2\Phi_2 + \sigma + f(x, z) + C_2,$$

$$\sigma_z = -\left(C_{\sigma 1} \cdot \exp\theta'_1 \cdot \cos A_1\Phi_1 + C_{\sigma 2} \cdot \exp\theta'_2 \cdot \cos A_2\Phi_2\right) + \sigma + f(x, y) + C_3,$$

$$\tau_{xz} = C_{\tau 1} \cdot \exp\theta'_1 \cdot \sin A_1\Phi_1,$$

$$\tau_{yz} = C_{\tau 2} \cdot \exp\theta'_2 \cdot \sin A_2\Phi_2 \quad (15)$$

при $\theta'_{1x} = -A_1\Phi_{1y}$, $\theta'_{1y} = A_1\Phi_{1x}$,

$$\theta'_{1xx} + \theta'_{1zz} = 0, \quad A_1\Phi_{1xx} + A_1\Phi_{1zz} = 0.$$

$$\theta'_{2y} = -A_2\Phi_{2z}, \quad \theta'_{2z} = A_2\Phi_{2y},$$

$$\theta'_{2yy} + \theta'_{2zz} = 0, \quad A_2\Phi_{2yy} + A_2\Phi_{2zz} = 0.$$

Определены условия существования вводимых функций и дифференциальные уравнения, определяющие их значения. Таким образом, решения (15) удовлетворяют систему уравнений для пространственной задачи в напряжениях.

Уравнения связи пространственной задачи теории пластичности

Воспользуемся уравнениями связи (3). Подставим в левую часть выражения, формулы (15), тогда

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2\tau_{xz}} = \operatorname{ctg} A_1\Phi_1 + \frac{C_{\sigma 2} \exp\theta'_2 \cdot \cos A_2\Phi_2}{2C_{\sigma 1} \exp\theta'_1 \cdot \sin A_1\Phi_1},$$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2\tau_{yz}} = \operatorname{ctg} A_2\Phi_2 + \frac{C_{\sigma 1} \exp\theta'_1 \cdot \cos A_1\Phi_1}{2C_{\sigma 2} \exp\theta'_2 \cdot \sin A_2\Phi_2}.$$

На основании равенства аналогично скомбинируем правую часть уравнений связей для составляющих скоростей деформаций с учетом условия несжимаемости. Имеем

$$\dot{\gamma}_{xz} = 2 \cdot \dot{\xi}_x \cdot \operatorname{tg} B_1\Phi_1, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot \dot{\xi}_y \cdot \operatorname{tg} B_2\Phi_2.$$

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}_y}{\dot{\gamma}_{xz}} &= \frac{C_{\xi 2} \exp\theta''_2 \cdot \cos B_2\Phi_2}{2C_{\xi 1} \exp\theta''_1 \cdot \sin B_1\Phi_1}, \\ \frac{\dot{\xi}_x}{\dot{\gamma}_{yz}} &= \frac{C_{\xi 1} \exp\theta''_1 \cdot \cos B_1\Phi_1}{2C_{\xi 2} \exp\theta''_2 \cdot \sin B_2\Phi_2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Определение составляющих тензора скоростей деформаций

Следуя вторым соотношениям выражений (16) можно принять

$$\dot{\xi}_y = C_{\xi 2} \cdot \exp\theta''_2 \cdot \cos B_2\Phi_2, \quad (17)$$

$$\dot{\xi}_x = C_{\xi 1} \cdot \exp\theta''_1 \cdot \cos B_1\Phi_1, \quad (18)$$

подставляя (17) и (18) в первые соотношения (16) получим для сдвиговых скоростей деформаций

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{xz} &= 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp\theta''_1 \cdot \sin B_1\Phi_1, \\ \dot{\gamma}_{yz} &= 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp\theta''_2 \cdot \sin B_2\Phi_2,\end{aligned}\quad (19)$$

С учетом условия нежимаемости.

Для линейных скоростей деформации

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_x &= C_{\xi 1} \cdot \exp\theta''_1 \cdot \cos B_1\Phi_1, \quad \dot{\xi}_y = C_{\xi 2} \cdot \exp\theta''_2 \cdot \cos B_2\Phi_2, \\ \dot{\xi}_z &= -\left(C_{\xi 1} \cdot \exp\theta''_1 \cdot \cos A_1\Phi_1 + C_{\xi 2} \cdot \exp\theta''_2 \cdot \cos A_2\Phi_2\right).\end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{xz} = 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp\theta''_1 \cdot \sin B_1\Phi_1, \quad \dot{\gamma}_{yz} = 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp\theta''_2 \cdot \sin B_2\Phi_2. \quad (20)$$

Согласованные с полями напряжений поля скоростей деформаций необходимо привести в соответствие с уравнениями неразрывности скоростей деформаций (5). Для этого необходимо подставить выражения (24) в (5) и определить условия, при которых данные зависимости будут удовлетворять дифференциальным уравнениям.

При этом $\dot{\gamma}_{xz} = f_4(x, z)$, $\dot{\gamma}_{yz} = f_5(y, z)$.

Проанализируем полученный результат для каждого из шести дифференциальных уравнений неразрывности скоростей деформаций, имеем [10]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \dot{\xi}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{\xi}_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \dot{\xi}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \dot{\xi}_z}{\partial y^2} =, \\ \frac{\partial^2 \dot{\xi}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\xi}_y}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \dot{\xi}_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\gamma}_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \dot{\xi}_y}{\partial z \partial x},\end{aligned}\quad (22)$$

Первое дифференциальное уравнение (22) представляется в виде

$$\frac{\partial^2(C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi_1)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1 \Phi_1)}{\partial z \partial x}.$$

Второе уравнение совместности скоростей деформаций (22)

$$\frac{\partial^2(C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi_2)}{\partial z \partial y}.$$

Третье уравнение (22) при подстановке значений (25) тождественно равно нулю. Четвертое, пятое и шестое дифференциальные уравнения (22), также тождественно равны нулю и в плане определения функций ничего не дают, т. к.

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial z \partial x} = 0.$$

Таким образом, дееспособными являются только первые два дифференциальных уравнения системы (22), позволяющие установить зависимости между вводимыми неизвестными функциями, для скоростей деформаций.

$$\frac{\partial^2(2 \cdot H_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1 \Phi_1)}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2(H_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2(H_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos B_2 \Phi_2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(2 \cdot H_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi_2)}{\partial z \partial y}.$$

Если имеем соотношения (20) тогда дифференциальные уравнения примут вид

$$C_{\xi 1} \left[-\theta_{1xx}'' - (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_{1z})^2 + \theta_{1zz}'' - (\theta_{1z}'' - B_1 \Phi_{1x})^2 \right] \cdot \cos B_1 \Phi_1 + C_{\xi 1} \left[2 \cdot (B_1 \Phi_{1x} - \theta_{1z}'') \cdot (\theta_{1x}'' + B_1 \Phi_{1z}) + (B_1 \Phi_{1xx} - B_1 \Phi_{1zz}) \right] \cdot \sin B_1 \Phi_1 = 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot B_1 \Phi_{1xz} \cdot \cos B_1 \Phi_1 + 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \theta_{1xz}'' \cdot \sin B_1 \Phi_1. \quad (23)$$

Далее

$$C_{\xi 2} \left[-\theta_{2yy}'' - (\theta_{2y}'' + B_2 \Phi_{2z})^2 + \theta_{2zz}'' - (\theta_{2z}'' - B_2 \Phi_{2x})^2 \right] \times \cos B_2 \Phi_2 + C_{\xi 2} \cdot \left[2 \cdot (B_2 \Phi_{2y} - \theta_{2z}'') \cdot (\theta_{2y}'' + B_2 \Phi_{2z}) + (B_2 \Phi_{2yy} - B_2 \Phi_{2zz}) \right] \cdot \sin B_2 \Phi_2 = 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot B_2 \Phi_{2yz} \times \cos B_2 \Phi_2 + 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \theta_{2yz}'' \cdot \sin B_2 \Phi_2. \quad (24)$$

Условия, которым удовлетворяют (23)...(32) имеют вид

$$\theta_{1x}'' = -B_1 \Phi_{1z}, \quad \theta_{1z}'' = B_1 \Phi_{1x}, \quad \theta_{2y}'' = -B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = B_2 \Phi_{2y}, \quad (25)$$

$$\xi_x = C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos B_1 \Phi_1. \quad (26)$$

$$\xi_z = -(C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \cos A_1 \Phi_1 + C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \cos A_2 \Phi_2), \quad \gamma_{xz} = 2 \cdot C_{\xi 1} \cdot \exp \theta_1'' \cdot \sin B_1 \Phi_1, \quad \gamma_{yz} = 2 \cdot C_{\xi 2} \cdot \exp \theta_2'' \cdot \sin B_2 \Phi_2.$$

Условия существования решений (39)

$$\theta_{1x}'' = -B_1 \Phi_{1z}, \quad \theta_{1z}'' = B_1 \Phi_{1x}, \quad \theta_{2y}'' = -B_2 \Phi_{2z}, \quad \theta_{2z}'' = B_2 \Phi_{2y}, \quad \theta_{1xx}'' + \theta_{1zz}'' = 0, \quad B_1 \Phi_{1xx} + B_1 \Phi_{1zz} = 0, \quad \theta_{2yy}'' + \theta_{2zz}'' = 0, \quad B_2 \Phi_{2yy} + B_2 \Phi_{2zz} = 0.$$

Из выше приведенных соотношений следует, что подходы, сформулированные в постановочной части задачи и при ее решении, с помощью метода гармонических функций, в аналитическом виде позволяют полностью удовлетворить систему уравнений пространственной задачи теории пластичности, как по напряжениям, так и по скоростям деформациям.

Анализ полученных решений

Полученные решения должны соответствовать общепринятым физическим данным и не противоречить установленным понятиям в прикладной теории пластичности. Рассмотрим тестовые решения. Имеем осадку прямоугольной полосы параллельными шероховатыми бойками. Приводя выражения (15) к виду, который предусматривает в очаге деформации нормальные напряжения одинакового знака, имеем

$$\sigma_x = -C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos A_1 \Phi_1 + C, \quad \sigma_y = -C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2 + C, \quad \sigma_z = -3 \cdot C_{\sigma 1} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos A_1 \Phi_1 - 3 \cdot C_{\sigma 2} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos A_2 \Phi_2 + C. \quad (27)$$

После подстановки граничных условий в (15) определяем постоянные интегрирования

$$C_{\sigma 1} = \frac{k_0}{2 \cdot \exp \theta_{10}' \cdot \cos A_1 \Phi_{10}},$$

$$C_{\sigma 1} = \frac{k_0}{2 \cdot \exp \theta_{10}' \cdot \cos A_1 \Phi_{10}},$$

$$A_1\Phi_{10} = A_1A_6 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{h}{2}, \quad A_2\Phi_{20} = A_2A_7 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2},$$

$$A_1A_6 = 4 \frac{A_1\Phi_{10}}{lh}, \quad A_2A_7 = 4 \frac{A_2\Phi_{20}}{bh}.$$

Переходя к точке на контактной поверхности, имеем

$$k_0\psi_1 = k_0 \frac{\sin A_1\Phi_{10}}{\cos A_1\Phi_{10}}, \quad k_0\psi_2 = k_0 \frac{\sin A_2\Phi_{20}}{\cos A_2\Phi_{20}},$$

или $A_1\Phi_{10} = \arctg\psi_1$, $A_2\Phi_{20} = \arctg\psi_2$.

При этом

$$\theta'_{10} = -2 \cdot \frac{A_1\Phi_{10}}{l \cdot h} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right), \quad \theta'_{20} = -2 \cdot \frac{A_2\Phi_{20}}{b \cdot h} \cdot \left(\frac{b^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right).$$

Интегрируя, получим

$$\sigma_x = -\frac{k_0}{2 \cdot \cos A_1\Phi_{10}} \cdot \exp(\theta'_1 - \theta'_{10}) \cdot \cos A_1\Phi_1 + \frac{k_0}{2},$$

$$\sigma_y = -\frac{k_0}{2 \cdot \cos A_2\Phi_{20}} \cdot \exp(\theta'_2 - \theta'_{20}) \cdot \cos A_2\Phi_2 + \frac{k_0}{2},$$

$$\sigma_z = -\left(\frac{3k_0}{2 \cdot \cos A_1\Phi_{10}} \exp(\theta'_1 - \theta'_{10}) \cos A_1\Phi_1 + \frac{3k_0}{2 \cdot \cos A_2\Phi_{20}} \exp(\theta'_2 - \theta'_{20}) \cos A_2\Phi_2 \right) + k_0. \quad (28)$$

При этом, один из вариантов решения уравнения Лапласа являются выражения

$$A_1\Phi_1 = A_1A_6 \cdot x \cdot z, \quad A_2\Phi_2 = A_2A_7 \cdot y \cdot z,$$

$$\theta'_1 = -\frac{1}{2} \cdot A_1A_6 \cdot (x^2 - z^2), \quad \theta'_2 = -\frac{1}{2} \cdot A_2A_7 \cdot (x^2 - z^2).$$

На рис. 2 и 3 показано распределение нормальных контактных напряжений (28) вдоль осей X и Y соответственно, на разных от них расстояниях.

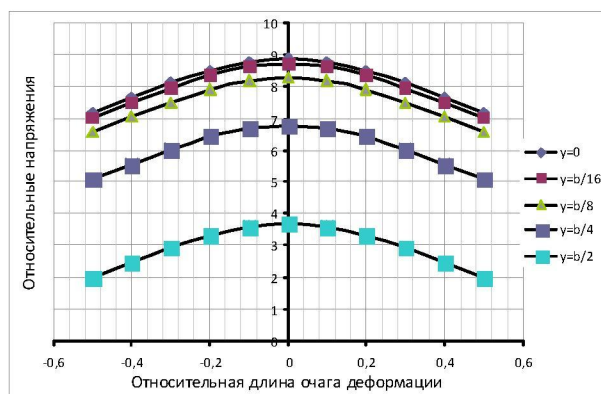


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности, вдоль оси X , при $h = 10$ мм, $b = 140$ мм,

$$f = 0,3, \quad l = 70 \text{ мм, при } y = 0; \frac{b}{16}; \frac{b}{8}; \frac{b}{4}; \frac{b}{2}$$

Вдоль осей X и Y напряжения σ_z распределены по выпуклой кривой, что определяется касательными контактными напряжениями τ_{xz} и τ_{yz} .

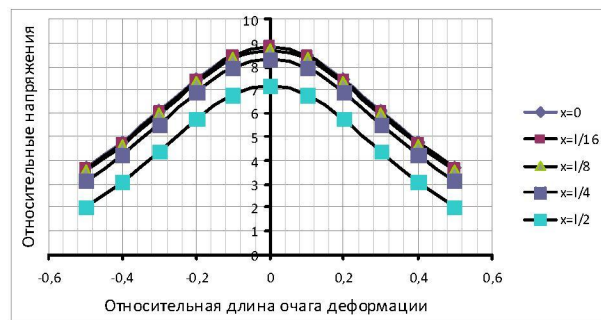


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений на контактной поверхности, вдоль оси Y , при $h = 10$ мм, $b = 140$ мм,

$$f = 0,3, \quad l = 70 \text{ мм,}$$

Причем, на разных расстояниях от осей их значения разные. Чем ближе к боковой или торцевой кромкам, тем они меньше, что соответствует выводам многих работ, включая [7]. На рис. 4, 5 видно, что ширина полосы влияет на величину и характер распределения контактных нормальных напряжений вдоль оси X , при разных значениях фактора формы

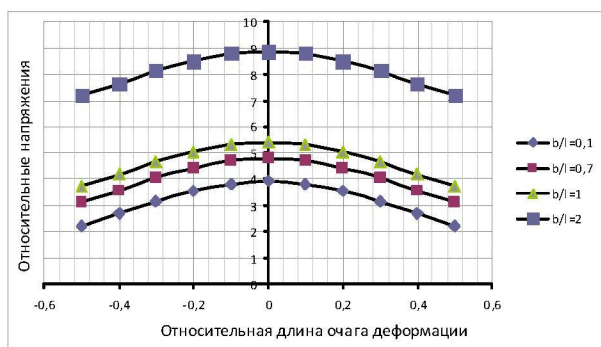


Рис. 4. Влияние ширины полосы на удельное давление, при

$$h = 10 \text{ мм, } l = 70 \text{ мм, } \left(\frac{l}{h} = 7 \right), f = 0,3, \text{ мм, } y = 0$$

С увеличением ширины контактные давления увеличиваются. Необходимо подчеркнуть, что при больших ширинах ($b \gg l$), величина нормальных напряжений резко возрастает, даже при малых значениях $\frac{l}{h}$, из-за увеличения коэффициента подпора в поперечном направлении. В работе Губкина [11], этот факт подтверждается. Расчеты показывают, что контактное трение и фактор формы существенным образом влияют на значение напряжения σ_z . С увеличением, их величина возрастает.

На рис. 6 представлена об'ємна епіюра розподілення удельного тиску при прокатці, згідно експериментальних даних В. Луєга. В кутовій частині заготовки удельні тиски мають мінімальне значення з збільшенням до осевих ліній розділа течія металу. Має місце зміщення максимуму епіюри розподілення контактної тиску в сторону виходу металу з валків, що характерно для процесу прокатки. В нашому випадку такого зміщення немає, так як осадка є симетричним процесом, лінії розділа течія металу знаходяться на осі симетрії. В якостевому відношенні розподілення контактних тисків є ідентичним, що дозволяє утверджувати про сопоставимість результату.

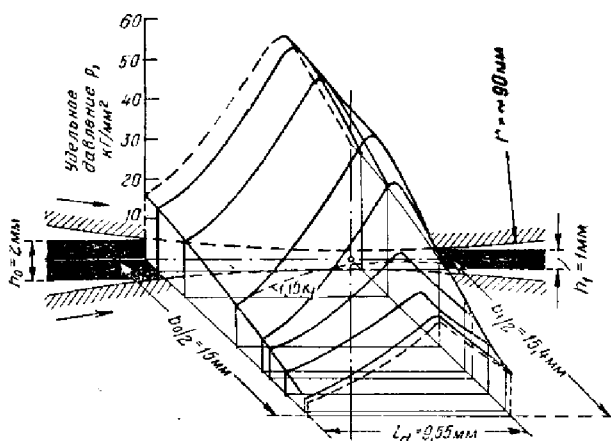


Рис. 6. Пространственная эпіюра удельного тиску для случая холодной прокатки алюминия, при $h_0 = 2 \text{ мм}$, $\Delta h = 1 \text{ мм}$, $b_0 = 30 \text{ мм}$, $D = 180 \text{ мм}$. (Луєга В.)

Кроме этого, тестовые сопоставления результатов показали, что полученные значения отражают ту физику процесса, которая заложена в решении, рис. 1.

Выводы

1. Поставлена и решена пространственной задаче теории пластичности в аналитическом виде. Использование метода гармонических функций позволило замкнуть решение в напряжениях и скоростях деформаций.

2. Аналитически удалось описать участки перехода по напряжениям и скоростям деформации, удовлетворить граничные условия по этим параметрам.

3. Тестовые расчеты напряженного состояния на контакте при осадке прямоугольной заготовки показали приемлемый результат, как в качественном, так и количественном отношении.

Список литературы

1. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности / Чигиринский В. В. // Сб. научных трудов, Обработка металлов давлением. – Краматорск. – 2009. – № 1(20). – С. 41–49.
2. Производство высокоэффективного металлопроката / [Чигиринский В. В., Мазур В. Л., Бергеман Г. В. и др.]. – Днепропетровск : «Дніпро-ВАЛ», 2006. – 265 с. с ил.
3. Чигиринский В. В. Новое решение плоской задачи теории пластичности / Чигиринский В. В. // Научные труды ДонНТУ, серия : Metallurgy, выпуск 10 (141). Донецк, 2008. – С. 105–115.
4. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / Чигиринский В. В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11–16.
5. Чигиринский В. В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД / Чигиринский В. В. // Тр. науч.-техн. конф. «Теория и технология процессов пластической деформации-96». – М. : МИСиС, 1997. – С. 568–572.
6. Чигиринский В. В. Пространственная задача теории пластичности / Чигиринский В. В., Шейко С. П., Ечин С. М. // Сб. научных трудов, Обработка металлов давлением. – Краматорск, 2013. – № 2(35). – С. 3–8.
7. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / Сторожев М. В., Попов Е. А. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.
8. Целиков А. И. Теория расчета усилий в прокатных станах / Целиков А. И. – М. : Metallurgizdat, 1962. – 495 с.
9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
10. Гун Г. Я. Теоретические основы обработки металлов давлением / Гун Г. Я. – М. : Metallurgy, 1980. – 456 с.
11. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением / Губкин С. И. – М. : Metallurgizdat, 1947. – 370 с.

Одержано 18.11.2013

Чигиринський В. В., Шейко С. П. Замкнуте просторове завдання теорії пластичності

В обробці металів тиском мають місце динамічні задачі теорії пружності і пластичності. Поставлено і вирішено просторову задачу теорії пластичності в аналітичному вигляді. Використання методу гармонічних функцій дозволило замкнути вирішення в напруженні і швидкостях деформацій. Аналітично вдалося описати ділянки переходу по напруженнях і швидкостях деформацій, задовольнити граничні умови по цих параметрах.

Ключові слова: обробка металів тиском, теорія пластичності, динамічна задача, гармонічна функція.

Chygyrynskiy V., Sheyko S. Closed spatial problems in the theory of plasticity

In metal forming dynamic problems of the theory of elasticity and plasticity are presented. Spatial problem of the theory of plasticity in an analytical form is solved. The use of harmonic functions allow the decision in stress and strain rate. Analytically it was able to describe the transition area for stress and strain rates and satisfy the boundary conditions on these parameters.

Key words: metal forming process, the theory of plasticity, the dynamic problem, the harmonic function.