Д.І. Анпілогов – доцент кафедри прикладної математики національного університету «Запорізька політехніка».

Н.В. Сніжко – доцент кафедри вищої математики національного університету «Запорізька політехніка».

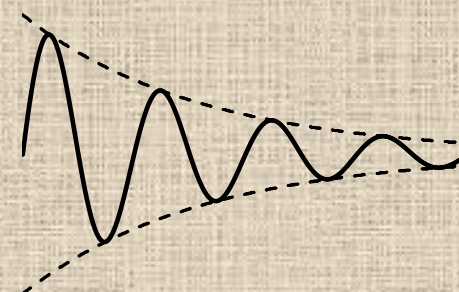
Диференціальне числення

Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко

Д.І. Анпілогов

Н.В. Сніжко

Диференціальне числення



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Д. І. Анпілогов
Н. В. Сніжко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2021

УДК 517.2(075.8)
А69

Рекомендовано до друку вченою радою
національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 8/21 від 01.03.2021)

Р е ц е н з е н т и:

С.В.Чопоров – професор кафедри програмної інженерії
Запорізького національного університету,
доктор технічних наук

517.2(075.8)

Ю. В. Мастиновський – завідувач кафедри прикладної
математики НУ «Запорізька політехніка»,
кандидат технічних наук, професор

Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В.

А69 Диференціальне числення: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 308 с.

ISBN 978-617-529-300-3

Посібник містить теоретичні відомості і значну кількість ілюстративних прикладів та розв’язаних задач з диференціального числення у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців інженерно-технічних спеціальностей. В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів та приклади їх розв'язку, які не потребують застосування обчислювальної техніки.

Видання може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи, докторантів та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

УДК 517.2(075.8)

ISBN978-617-529-300-3

З М І С Т

Вступ 7

1 Границі і неперервність **9**

1.1 Границя числової послідовності 9
1.2 Існування і єдиність границі послідовності 16
1.3 Число e 17
1.4 Теореми про границі 19
1.5 Границя функції на нескінченності 21
1.6 Границя функції в точці 22
1.7 Неперервність функції в точці 30
1.8 Питання для перевірки 32

2 Техніка обчислення границь **35**

2.1 Елементарні випадки 35
2.2 Невизначеності та їх типи 37
2.3 Про порівняння порядків малості 39
2.4 Еквівалентність нескінченно малих 47
2.4.1 Означення еквівалентності 47
2.4.2 Теореми про еквівалентні нескінченно малі 48
2.4.3 Таблиця еквівалентних нескінченно малих . 49
2.4.3.1 Перша важлива границя 49
2.4.3.2 Друга важлива границя 52
2.4.3.3 Подальші наслідки 52
2.4.4 Операції з нескінченно малими 54
2.4.4.1 Множення нескінченно малих . . . 54
2.4.4.2 Додавання нескінченно малих 56
2.5 Про експоненціальне зростання 59
2.6 Практичні прийоми усунення невизначеності . . . 63
2.6.1 Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ 63
2.6.2 Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 64
2.6.2.1 Загальний підхід 64

2.6.2.2 Границя відношення многочленів . . 65
2.6.3 Робота з ірраціональностями 67
2.6.3.1 Квадратні корені 67
2.6.3.2 Корені вищих степенів 68
2.6.4 Невизначеності типу $[\infty - \infty]$, $[\infty \cdot 0]$ 69
2.6.5 Невизначеність типу $[1^\infty]$ 72
2.6.6 Невизначеності типів $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$ 73
2.6.7 Правило Лопіталя 75
2.7 Питання для перевірки 78

3 Похідна та її застосування 81
3.1 Означення і зміст похідної 81
3.2 Властивості диференційовних функцій 87
3.2.1 Про неперервність 87
3.2.2 Про монотонність 88
3.3 Техніка диференціювання 90
3.3.1 Правила диференціювання 90
3.3.2 Таблиця похідних 93
3.3.3 Похідна складної функції 96
3.3.4 Про обернені функції 100
3.3.5 Логарифмічне диференціювання 112
3.4 Диференціал функції однієї змінної 113
3.4.1 Означення диференціалу 113
3.4.2 Геометричний зміст диференціалу 117
3.4.3 Диференціали вищих порядків 120
3.4.4 Застосування диференціалу 121
3.5 Подальші прийоми техніки диференціювання . . . 122
3.5.1 Диференціювання функції, заданої параметрично 122
3.5.2 Диференціювання функції, заданої неявно . 126
3.6 Повне дослідження функції та побудова її графіку 128
3.6.1 Область визначення функції 129
3.6.2 Множина значень функції 129
3.6.3 Нулі функції 129
3.6.4 Парність функцій 130
3.6.5 Періодичність 130
3.6.6 Неперервність 132
3.6.7 Диференційовність 132
3.6.8 Інтервали монотонності 132
3.6.9 Локальні екстремуми 133

3.6.10 Інтервали опуклості 140
3.6.11 Точки перегину 145
3.6.12 Асимптоти 152
3.6.12.1 Горизонтальні асимптоти 152
3.6.12.2 Вертикальні асимптоти 153
3.6.12.3 Похилі асимптоти 156
3.7 Найбільше і найменше значення функції на відрізку 158
3.8 Формула Тейлора 163
3.9 Питання для перевірки 173

4 Функції багатьох змінних 177
4.1 Основні означення 177
4.2 Графічне зображення функцій багатьох змінних . 180
4.2.1 Графічне зображення функцій двох змінних 180
4.2.2 Графічне зображення функцій більш ніж двох змінних 184
4.3 Границя і неперервність 185
4.4 Частинні похідні 193
4.5 Нормаль і дотична площина 197
4.6 Диференціал 199
4.6.1 Означення диференціалу 199
4.6.2 Геометричний зміст диференціалу 203
4.6.3 Зауваження про диференційовність 203
4.7 Похідна за напрямком. Градієнт 205
4.8 Подальший розвиток техніки диференціювання . . 216
4.8.1 Вступне зауваження 216
4.8.2 Неявна функція одного аргументу 217
4.8.3 Неявна функція двох аргументів 219
4.8.4 Складна функція одного аргументу 221
4.8.4.1 Загальний випадок 221
4.8.4.2 Один окремий випадок 222
4.8.5 Складна функція двох аргументів 223
4.9 Похідні вищих порядків 225
4.10 Диференціали вищих порядків 226
4.11 Багатовимірна формула Тейлора 229
4.12 Екстремуми 231
4.13 Умовні екстремуми 245
4.13.1 Елементарні відомості 245
4.13.2 Метод Лагранжа 250

4.13.3 Метод Лагранжа (загальний випадок) 254
4.14 Найбільше і найменше значення функції в області 259
4.15 Питання для перевірки 263

5 Індивідуальні завдання 267
5.1 Границі. Функції однієї змінної 267
5.2 Функції багатьох змінних 275

6 Приклади розв'язків 280
6.1 Границі. Функції однієї змінної 280
6.2 Функції багатьох змінних 294
Література 307

Вступ

Серед багатьох фундаментальних розділів математики *математичний аналіз* посідає, мабуть, найголовніше і найпочесніше місце. Історично це одна з перших системно розвинених математичних дисциплін. Крім того, ця дисципліна зазвичай є головним робочим інструментом інженера. Отже, викладений матеріал є невід'ємною складовою частиною сучасної вищої освіти в галузі інженерно-технічних прикладних наук.

Основними об'єктами, які вивчає математичний аналіз, є: *границя*, *похідна*, *інтеграл*, *ряд*. Власне, три останні об'єкти є границями, визначеними в певний спосіб.

Посібник охоплює перші розділи курсу математичного аналізу; він містить теоретичні відомості з тем «Границі», «Похідна та її застосування», «Функції багатьох змінних». Тематичний обсяг та рівень викладення провадиться з дотриманням сучасних вимог, у відповідності до програми курсу вищої математики багатоступеневої підготовки фахівців інженерно-технічних спеціальностей.

Переважну більшість тверджень доведено з дотриманням досить високого рівня математичної строгості. Це дозволяє розглядати матеріал як викладений системно. Крім того, з практичної точки зору мати в наявності доведення зручно, оскільки при цьому легше прийняти рішення про відповідність конкретної ситуації до меж застосування тих чи інших ознак, теорем, формул тощо.

Усі основні теоретичні положення ілюструються великою кількістю відповідних прикладів. Значний об'єм посібника зумовлений значною кількістю наведених прикладів, які пояснюють специфіку принципово нових термінів. Автори, зокрема, ретельно добирали приклади, які ілюструють хід постановки математичних задач для опису фізичних процесів. В багатьох прикладах також розв'язано низку типових задач курсу вищої математики для студентів інженерно-технічних спеціальностей.

Певні фрагменти матеріалу набрано дрібним шрифтом. Як правило, при першому читанні ці фрагменти можна пропустити, але автори настійливо рекомендують повернутись до них пізніше при повторному читанні. В кінці кожного розділу наведено список контрольних питань. За їх допомогою можна систематизувати опанований матеріал та перевірити рівень його засвоєння.

В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів і приклад розв'язку одного варіанта. Жодна задача не потребує застосування обчислювальної техніки. Завдання дібрано в такий спосіб, щоб розрахунки були простими в обчислювальному плані. На думку авторів, зручність розрахунків дозволяє не відволікатись на громіздкі арифметичні дії, а зосередитись на ідеях і практичних аспектах застосування математичного аналізу.

В кінці посібника наведений список літератури. Цей список, звичайно, не є повним. Автори свідомо обмежились лише класичними фундаментальними підручниками, які перевидаються та не втрачають актуальності впродовж десятиліть.

В посібнику прийнято наступні умовні позначення. Означення супроводжуються символом ⧫. Формулювання теорем супроводжуються чорним квадратом ■. Доведення теорем містяться між білими квадратами: □ *текст доведення* □, а приклади – між білими трикутниками: ◁ *текст прикладу* ▷.

Матеріали посібника можуть використовуватись студентами для самостійної роботи при вивченні курсу математичного аналізу і виконанні практичних розрахунково-графічних завдань. Посібник може бути корисним і для викладачів при організації та плануванні лекційних та практичних занять з математичного аналізу; зокрема, задачі індивідуальних завдань можуть бути використані для створення банків задач в системах дистанційного навчання.

Автори будуть вдячні за будь-які зауваження та пропозиції щодо задуму, плану та змісту даного посібника.

1 ГРАНИЦІ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1 Границя числової послідовності

Розглянемо набір чисел. Їх кількість може бути нескінченною. Домовимось ці числа позначати однією літерою, і супроводжувати індексом, який їх розрізняє:

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots .$$

⧫ **Означення 1.1.** Кажуть, що задано **числову послідовність** $\{a_n\}$, якщо кожному номеру $n \in \mathbb{N}$ поставлено у відповідність певне числове значення a_n.

Нехай для деякої числової послідовності $\{a_n\}$ вдалося виявити деякий вираз $f(x)$ (f – деяка функція дійсної змінної), при підстановці до якого натуральних значень $x = n$ виникають відповідні значення a_n. Тоді можна написати, що $a_n = f(n)$. Про такий випадок кажуть, що числову послідовність задано **аналітично**.

◁ *Приклад 1.1.* Лінійна функція $f(x) = 2x-1$ при підстановці $x = n$ породжує числову послідовнсть $a_n = 2n - 1$. Відповідно, маємо: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, і т.д., тобто маємо послідовність непарних чисел. ▷

З огляду на цей приклад можна вважати, що числова послідовність є **функцією натурального аргументу**: $a_n = f(n)$.

Окрім аналітичного, існують інші способи задати числову послідовність. В разі **табличного** способу подають таблицю з двох рядків; перший рядок містить номери 1, 2 і т.д., а другий – відповідні значення a_1, a_2 і т.д. В разі **графічного** способу на координатній площині зображають сукупність точок з координатами (n, a_n). Існують також інші способи задати числову послідовність.

⧫ **Означення 1.2.** Кажуть, що числова послідовність $\{a_n\}$ є **монотонно зростаючою**, якщо *кожний* наступний член послідовності більший за попередній, тобто при *довільному* $n \in \mathbb{N}$ виконано нерівність $a_{n+1} > a_n$.

⧫ **Означення 1.3.** Кажуть, що числова послідовність $\{a_n\}$ є **монотонно спадною**, якщо *кожний* наступний член послідовності менший за попередній, тобто при *довільному* $n \in \mathbb{N}$ виконано нерівність $a_{n+1} < a_n$.

Монотонно зростаючі і монотонно спадні послідовності домовились об'єднувати терміном «монотонні послідовності». Решту послідовностей вважають немонотонними.

Якщо з двох нерівностей $a_{n+1} > a_n$, $a_{n+1} < a_n$ жодну не виконано для довільних номерів $n \in \mathbb{N}$ (наприклад, $a_{n+1} > a_n$ виконано для всіх парних номерів, а $a_{n+1} < a_n$ – для всіх непарних номерів), то послідовність є немонотонною.

$\lhd$ *Приклад 1.2.* Послідовність $a_n = \sqrt{n}$ є монотонно зростаючою. Справді: $a_{n+1} = \sqrt{n+1}$ (щоб отримати вираз для наступного члену a_{n+1}, достатньо у вираз для поточного члену a_n замість n підставити $n+1$). Тоді нерівність $a_{n+1} > a_n$ набуває вигляду

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}, \qquad n+1 > n, \qquad 1 > 0,$$

що виконано для довільних $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.3.* Послідовність $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ є монотонно спадною. Справді: $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{n+1}$. Тоді нерівність $a_{n+1} < a_n$ набуває вигляду

$$3 + \frac{1}{n+1} < 3 + \frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \qquad n < n+1, \qquad 0 < 1,$$

що виконано для довільних $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.4.* Послідовність $a_n = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$ є немонотонною. Справді: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$ і т.д. Отже, $a_1 > a_2$, $a_2 < a_3$, $a_3 > a_4$ і т.д., тобто для деяких номерів n виконується нерівність «більше», а для деяких інших номерів – «менше». Але жодна з нерівностей не виконується для довільних номерів $n \in \mathbb{N}$. $\rhd$

⧫ **Означення 1.4.** Кажуть, що числова послідовність $\{a_n\}$ є **обмеженою знизу**, якщо існує таке m, що за будь-яких значень $n \in \mathbb{N}$ виконано нерівність $a_n > m$.

На рисунку 1.1 ліворуч наведено геометричний зміст обмеженості знизу. Послідовність зображено сукупністю точок. Гарантується, що кожна з них розташована вище рівня m.

⧫ **Означення 1.5.** Кажуть, що числова послідовність $\{a_n\}$ є **обмеженою зверху**, якщо існує таке M, що за будь-яких значень $n \in \mathbb{N}$ виконано нерівність $a_n < M$.

На рисунку 1.1 праворуч подано геометричний зміст обмеженості зверху. Послідовність зображено сукупністю точок. Гарантується, що кожна з них розташована нижче рівня M.

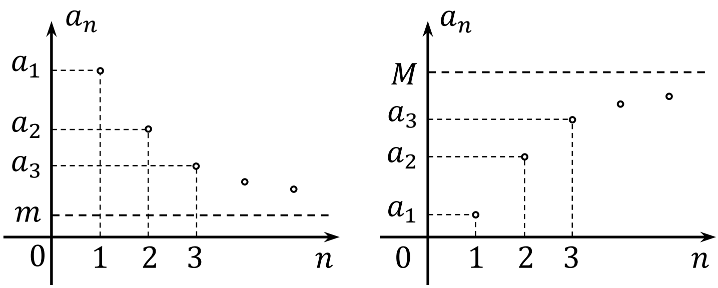


Рисунок 1.1 – До означення обмеженості послідовності

♦ **Означення 1.6.** Якщо числова послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху і знизу, то кажуть, що вона є **обмеженою.**

Інакше: числова послідовність a_n обмежена, якщо існують числа m, M, такі, що для довільних номерів $n \in \mathbb{N}$ виконано нерівність $m < a_n < M$. Геометрично: точка, яка зображує *довільний* член послідовності a_n, потрапляє всередину горизонтальної смуги з берегами на рівнях m і M.

◁ *Приклад 1.5.* Розглянемо послідовність $a_n = \frac{1}{n}$. Вона є обмеженою знизу. Справді, достатньо покласти $m = 0$. Очевидно, при довільних $n \in \mathbb{N}$ маємо $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Також вона обмежена зверху. Справді, достатньо покласти $M = 2$. Очевидно, при довільних $n \in \mathbb{N}$ маємо $a_n = \frac{1}{n} < 2$. Отже, розглядувана послідовність є обмеженою. Зауважимо, можна покласти, наприклад, $m = -13$ і $M = 28$; нерівність $m < a_n < M$ для довільних номерів n тим паче буде виконано. ▷

◁ *Приклад 1.6.* Розглянемо послідовність $a_n = 1 - 2^{-n}$. Очевидно, вона є обмеженою. Справді, достатньо покласти $m = 0$, $M = 1$. Нерівність $0 < 1 - 2^{-n} < 1$ при $n \in \mathbb{N}$ довести легко. ▷

◁ *Приклад 1.7.* Розглянемо послідовність $a_n = n$. Очевидно, вона є обмеженою знизу. Справді, достатньо покласти $m = 0$. Але вона не є обмеженою зверху. Справді, при як завгодно великому M завжди можна знайти номер n, який перевищує M. Тому для цього номера, а також для усіх подальших номерів замість нерівності $a_n < M$ виконано нерівність $a_n = n > M$. Отже, ця послідовність не є обмеженою. ▷

◁ *Приклад 1.8.* Розглянемо послідовність $a_n = \ln n$. Очевидно, вона є обмеженою знизу (наприклад, $m = -1$). Але вона не є обмеженою зверху. Справді, при як завгодно великому M завжди можна знайти номер n такий, що $\ln n > M$. Достатньо покласти $n > e^M$. Тут символом e позначено основу натурального логарифму (див. п. 1.3). Тому для цього номера, а також для усіх подальших номерів замість нерівності $a_n < M$ буде виконано нерівність $a_n = \ln n > M$. Отже, ця послідовність не є обмеженою. ▷

Члени послідовності a_n можуть виявитись близькими до деякого сталого числа b (мало відрізнятись від b). Кількісно близькість членів a_n до числа b зручно характеризувати величиною $|a_n - b|$ абсолютного відхилення: що менше $|a_n - b|$, то ближче a_n до b (а при $|a_n - b| = 0$ взагалі маємо збіг $a_n = b$). Нехай ε – довільне *додатне* число. Можна сказати, що a_n є близьким до b (або a_n дорівнює b з точністю, не гіршою за ε), якщо виконано нерівність $|a_n - b| < \varepsilon$. Її розв'язок:

$$-\varepsilon < a_n - b < \varepsilon, \qquad b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon.$$

♦ **Означення 1.7.** Інтервал $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ називають $\boldsymbol{\varepsilon}$**-околом** точки b.

Очевидно, якщо ε-окіл точки b містить точку a_n, то число a_n відрізняється від числа b (в той чи інший бік) на величину, яка не перевищує ε. Суттєво, що ε є довільним. В тому числі воно може бути як завгодно малим. Тому, зменшуючи ε, можна описати близькість a_n до b з як завгодно високою точністю.

Геометричну інтерпретацію того, як члени a_n потрапляють всередину ε-околу точки b, подано на рисунку 1.2: член a_n є близьким до b, якщо відповідна йому точка потрапляє всередину смуги, обмеженої горизонтальними рівнями $b - \varepsilon$ і $b + \varepsilon$.

Інтерес становить випадок, коли близьким до b є не поодинокий член a_n, а *усі* такі члени, принаймні, починаючи з деякого номера N. В загальному випадку потрібний для близькості номер N може залежати від ε: що менше ε, то при більших номерах наступає близькість a_n до b.

♦ **Означення 1.8.** Число b називають **границею числової послідовності** $\{a_n\}$ при прямуванні n до нескінченності (пишуть $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), якщо для будь-якого як завгодно малого, але додатного ε, існує номер $N(\varepsilon)$ (можливо, залежний від ε) такий, що з нерівності $n > N$ випливає нерівність $|a_n - b| < \varepsilon$.

Щодо запису $n \to \infty$ зробимо два зауваження. По-перше, тут n треба розуміти як змінну величину. Безглуздим є, на-

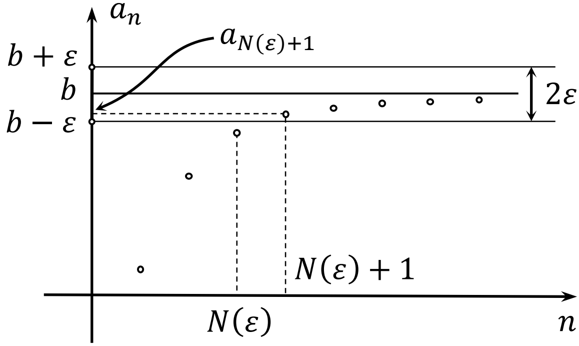


Рисунок 1.2 – До означення границі числової послідовності

приклад, запис вигляду $12 \to \infty$. По-друге, мають на увазі, що яким би великим не було число $M = \text{const}$, для величини n в результаті її зміни виконається нерівність $n > M$.

З означення границі числової послідовності випливає: якщо границя $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ існує, то всередину ε-околу точки b потрапляє *необмежена кількість* членів послідовності, а саме – *усі члени без виключення*, принаймні, починаючи з деякого номеру $N(\varepsilon)$. Наприклад, для значення ε, обраного на рис. 1.2, маємо $N(\varepsilon) = 3$, оскільки всередину смуги потрапляють усі точки, номер яких перевищує трійку, тобто усі точки, починаючи з четвертої.

$\lhd$ *Приклад 1.9.* Розглянемо послідовність $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$. Доведемо за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. За означенням границі достатньо пред'явити номер $N(\varepsilon)$. Маємо: $|a_n - b| < \varepsilon$,

$$\left|\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 2\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon, \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже, достатньо пред'явити номер $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тут квадратними дужками позначено цілу частину. Цей знак потрібен, оскільки при довільному ε дріб $\frac{1}{n}$ не є натуральним числом. Оскільки знаходження цілої частини додатного числа може зменшити його (наприклад, $[7{,}35] = 7 < 7{,}35$), але не більше, ніж на одиницю, то ми до цілої частини ще додали одиницю. Тепер можна стверджувати: якщо нерівність $n > N(\varepsilon)$ виконано, то нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконано тим паче, а тоді виконання нерівності $|a_n - b| < \varepsilon$ гарантується. Наприклад, при $\varepsilon = 0{,}12$ маємо: $N = \left[\frac{1}{0{,}12}\right] + 1 = 9$. Можна гарантувати: якщо $n > 9$, то $2 + \frac{(-1)^n}{n}$ відрізняється від 2 не більше, ніж на 0,12, тобто близькість членів до двійки з точністю 0,12 гарантується для *будь-яких* членів, принаймні, починаючи з десятого. Важливо, що отримана нами формула $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ спроможна забезпечити потрібну близкість a_n до b при *довільному* як завгодно малому додатному ε. ▷

◁ *Приклад 1.10.* Розглянемо послідовність $a_n = e^{-n}$. Доведемо за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. За означенням границі достатньо пред'явити номер $N(\varepsilon)$. Маємо: $|a_n - b| < \varepsilon$,

$$\left|\left(e^{-n}\right) - 0\right| < \varepsilon, \quad e^{-n} < \varepsilon, \quad -n < \ln\varepsilon, \quad n > -\ln\varepsilon = \ln\varepsilon^{-1}.$$

Отже, достатньо пред'явити номер $N(\varepsilon) = \left[\ln\varepsilon^{-1}\right] + 1$. Тепер ясно: при довільному $\varepsilon > 0$ будь-який член e^{-n}, номер якого перевищує $N(\varepsilon)$, відрізняється від нуля не більше, ніж на ε. ▷

◁ *Приклад 1.11.* Розглянемо послідовність $a_n = (-1)^n$. Доведемо за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не існує. Припустимо, це не так, і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Оберемо довільне $\varepsilon < \frac{1}{2}$, тоді ε-окіл точки b можна зобразити горизонтальною смугою завширшки $2\varepsilon < 1$. Але члени послідовності дорівнюють або одиниці (при парному n), або мінус одиниці (при непарному n). Тому якщо смуга охопила додатні члени, то жоден від'ємний член не зможе потрапити всередину неї. Тому виконання нерівності $|a_n - b| < \varepsilon$ для будь-яких n неможливо ні при якому b, якщо $\varepsilon < \frac{1}{2}$. ▷

За означенням границею послідовності є стале число b. Іноді вважають, що нескінченність також може бути граничним значенням (хоча вона є змінною величиною, а не числом). Ідея залишається попередньою: *у невласному сенсі* домовляються, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, якщо всередину A-околу плюс нескінченності, тобто всередину інтервалу $(A; +\infty)$, потрапляють усі члени послідовності, принаймні починаючи з деякого номера $N(A)$ (залежного від A), і так відбувається для як завгодно великого значення A. Випадок від'ємної нескінченності розглядається аналогічно.

◁ *Приклад 1.12.* Розглянемо послідовність $a_n = n$. Очевидно, границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ у власному сенсі (тобто як стале число b) не існує. Але у невласному сенсі $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Справді, достатньо покласти $N(A) = A$. Тоді нерівність $n > N$ перетворюється на нерівність $n = a_n > A$, що і потрібно. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.13.* Розглянемо послідовність[1] $a_n = \frac{n!}{2^n}$ і доведемо, що її границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$. З огляду на попередній приклад достатньо довести, що $a_n > n$ для усіх номерів, принаймні, починаючи з деякого. Тоді при виконанні нерівності $n > A$ нерівність $a_n > A$ тим паче буде виконано. Отже, достатньо довести нерівність

$$n! > n \cdot 2^n. \qquad (*)$$

Спочатку доведемо допоміжну нерівність

$$n! > 2^{n+1}. \qquad (**)$$

Безпосередніми обчисленнями встановлюємо, що вона не виконана для номерів $n \leqslant 4$, оскільки при таких номерах вона набуває вигляду $1 > 4$, $2 > 8$, $6 > 16$, $24 > 32$. Але починаючи з номеру $n = 5$ маємо $120 > 64$, $720 > 128$ і т.д. Так відбувається тому, що факторіал є функцією, яка зростає швидше навіть за показникову.

Доведення проведемо *методом математичної індукції.* Цей метод призначений для доведення низки пронумерованих тверджень X_n і складається з двох кроків. На першому кроці безпосередньо перевіряють, що при *деякому n* твердження X_n є істинним. На другому кроці, припускаючи, що при *довільному n* твердження X_n є істинним і виходячи з цього, доводять, що твердження X_{n+1} також є істинним. Цим самим доводиться, що з істинності *довільного* поточного твердження випливає істинність твердження, наступного за ним. Але при n перевірку вже виконано на першому кроці, тобто твердження X_n є істинним. З цього і випливає, що X_{n+1} також є істинним, як наступне. Але якщо X_{n+1} (яке вже є істинним) вважати поточним, тоді також є істинним наступне за ним – твердження X_{n+2}. Далі, якщо X_{n+2} (яке вже є істинним) вважати поточним, тоді також є істинним наступне за ним – твердження X_{n+3}, і т.д. Отже, істинними виявляються усі твердження X_n, починаючи з того, яке було перевірено на першому кроці.

При доведенні нерівності $(**)$ позначимо: X_n – твердження, яке полягає в тому, що $n! > 2^{n+1}$. Відповідно, X_{n+1} – твердження, яке полягає в тому, що $(n+1)! > 2^{(n+1)+1}$.

Крок 1. При $n = 5$ маємо: $5! > 2^{5+1}$, $120 > 64$. Отже, твердження X_5 є істинним.

Крок 2. Припустимо, що твердження X_n є істинним і, виходячи з цього, доведемо, що наступне твердження X_{n+1} також є істинним. Інакше, розв'яжемо таку задачу. Дано: $n! > 2^{n+1}$. Довести: $(n+1)! > 2^{(n+1)+1}$. Маємо:

$$1 \cdot 2 \ldots n \cdot (n+1) > 2^{(n+1)+1}, \qquad n! \cdot (n+1) > 2^{n+1} \cdot 2.$$

Якщо в останній нерівності підмінити $n!$ меншою величиною, і утворена нерівність виявиться істинною, то остання нерівність тим паче є істинною. Маємо:

$$2^{n+1} \cdot (n+1) > 2^{n+1} \cdot 2, \qquad n+1 > 2, \qquad n > 1,$$

[1] Тут і далі знаком оклику позначено **факторіал** числа – добуток усіх натуральних чисел від одиниці до цього числа включно: $k! = 1 \cdot 2 \ldots (k-1) \cdot k$. Наприклад: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$. За означенням приймають $0! = 1$.

що очевидно. Другий крок завершено; нерівність (**) доведено для усіх $n \geqslant 5$.

Доведемо тепер нерівність (*). Безпосередніми обчисленнями встановлюємо, що вона не виконана для номерів $n \leqslant 5$, оскільки при таких номерах вона набуває вигляду $1 > 2$, $2 > 8$, $6 > 24$, $24 > 64$, $120 > 160$. Але починаючи з номеру $n = 6$ вона вже починає виконуватись.

Нехай X_n – твердження, яке полягає в тому, що $n! > n \cdot 2^n$. Відповідно, X_{n+1} – твердження, яке полягає в тому, що $(n+1)! > (n+1) \cdot 2^{n+1}$.

Крок 1. При $n = 6$ маємо: $6! > 6 \cdot 2^6$, $720 > 384$. Отже, твердження X_6 є істинним.

Крок 2. Припустимо, що твердження X_n є істинним і, виходячи з цього, доведемо, що наступне твердження X_{n+1} також є істинним. Інакше, розв'яжемо таку задачу. Дано: $n! > n \cdot 2^n$. Довести: $(n+1)! > (n+1) \cdot 2^{n+1}$. Маємо:

$$1 \cdot 2 \ldots n \cdot (n+1) > (n+1) \cdot 2^{n+1}, \qquad 1 \cdot 2 \ldots n > 2^{n+1}, \qquad n! > 2^{n+1},$$

що доведено вище. Отже нерівність (*) методом математичної індукції доведено для усіх $n \geqslant 6$. Додамо, пред'явити формулу $N(A)$ як розв'язок нерівності $\frac{N!}{2^N} > A$ ми не змогли, але її існування довели. ▷

1.2 Існування і єдиність границі послідовності

Розглянемо дві важливі теореми.

■ **Теорема 1.1.** Якщо границя числової послідовності існує, то вона є єдиною.

□ *Доведення.* Припустимо, це не так, і одночасно існують дві різні границі, b_1 і b_2. Тоді для довільних додатних ε_1, ε_2 існують номери $N_1 = N_1(\varepsilon_1)$, $N_2 = N_2(\varepsilon_2)$ такі, що при n, яке перевищує значення $N = \max(N_1, N_2)$, виконано систему нерівностей

$$\begin{cases} |a_n - b_1| < \varepsilon_1 \\ |a_n - b_2| < \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - \varepsilon_1 < a_n < b_1 + \varepsilon_1 \\ b_2 - \varepsilon_2 < a_n < b_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Покладемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = C \cdot \frac{|b_2 - b_1|}{2}$, де C – довільне додатне число, менше за одиницю. Тоді $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = C \cdot |b_2 - b_1| < |b_2 - b_1|$, тобто півширина ε_1-околу точки b_1 і ε_2-околу точки b_2, взяті разом, менші за відстань між точками b_1 і b_2. Тому ці околи не перетинаються: $(b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \cap (b_2 - \varepsilon_2, b_2 + \varepsilon_2) = \varnothing$. Отже, система нерівностей є несумісною, і протиріччя отримано. □

■ **Теорема 1.2.** Границя монотонної обмеженої числової послідовності існує і є скінченною.

□ *Доведення.* Обмежимось випадком монотонного зростання, оскільки випадок монотонного спадання цілком аналогічний. Нехай M – деяке число таке, що для довільних номерів

Таблиця 1.1 – Деякі члени послідовності $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	10	$\cdots$	50	$\cdots$
a_n	2	2,25	2,37	2,44	2,48	$\cdots$	2,59	$\cdots$	2,69	$\cdots$

n виконано нерівність $a_n \leqslant M$. В цьому разі число M називають *верхньою гранню* множини чисел a_n. Нехай M_0 – найменша з усіх верхніх граней. Доведемо, що M_0 і є границею послідовності $\{a_n\}$. Достатньо довести, що за довільного додатного ε усі члени послідовності a_n, принаймні починаючи з деякого номера $n = \nu$, потрапляють всередину інтервалу $M_0 - \varepsilon < a_n \leqslant M_0$. Позначимо $M' = M_0 - \varepsilon$. Отже, достатньо довести подвійну нерівність $M' < a_n \leqslant M_0$ для усіх номерів, починаючи з $n = \nu$.

Нерівність $a_n \leqslant M_0$ виконано, оскільки M_0 – верхня грань.

Нехай ν – номер, для якого виконано нерівність $a_\nu > M'$. Очевидно, номер ν існує. Справді, в іншому разі для будь-яких номерів було б виконано протилежну нерівність $a_n \leqslant M'$. Тоді M' – також верхня грань. Але тоді M_0 не є найменшою верхньою гранню, оскільки $M_0 > M'$ при $\varepsilon > 0$.

Обмежимось номерами $n > \nu$. За рахунок монотонного зростання маємо $a_n > a_\nu$. Але $a_\nu > M'$, тому нерівність $a_n > M'$ тим паче виконано, що і треба було довести. □

Умову доведеної теореми (монотонність і обмеженість) задовольняє послідовність $a_n = e^{-n}$ прикладу 1.10. Звичайно, умова монотонності і обмеженості є достатньою умовою існування границі, але не є необхідною умовою. Наприклад, послідовність $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (приклад 1.9) не є монотонною, але її границя також існує і є скінченною.

1.3 Число e

Розглянемо числову послідовність

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.1}$$

В таблиці 1.1 подано наближені значення деяких її членів. Можна бачити, що ця послідовність монотонно зростає, але швидкість зростання уповільнюється. Послідовність (1.1) задовольняє умови теореми 1.2, тому границя цієї послідовності існує і є скінченною. Її позначають літерою e (на честь Л. Ейлера):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Наближено маємо:

$$e \approx 2{,}718281828459045235360287471352 7\dots$$

Практично достатньо пам'ятати, що $e \approx 2{,}718$. Велику кількість цифр після коми ми наводимо лише для того, щоб побачити: десяткове подання числа e після коми не містить блоків цифр, які повторюються. Тому *e не є раціональним числом*; воно є **трансцендентним** числом.

Доведемо *монотонність* послідовності (1.1). З використанням формули біному Ньютона[2] маємо:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\dots n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тепер очевидно, що $a_{n+1} > a_n$. Справді, при збільшенні n на одиницю кожна «дужка» збільшиться. Крім того, з'явиться ще один додатний доданок.

Доведемо тепер *обмеженість зверху*. Замінимо кожну «дужку» одиницею, від чого остання права частина тільки збільшиться (оскільки кожна «дужка» менша за одиницю). Отримуємо нерівність:

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}. \tag{1.2}$$

Для $k > 2$ маємо очевидну оцінку:

$$k! = 1\cdot 2\cdot 3\dots(k-1)k = \underbrace{2\cdot 3\dots(k-1)k}_{(k-1)\ \text{множників}} > \underbrace{2\cdot 2\dots 2}_{(k-1)\ \text{разів}} = 2^{k-1}, \qquad \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Тоді тим паче маємо:

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

---

[2]Формула біному Ньютона має вигляд: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Тут через C_n^k (читають: C з n по k) позначено кількість сполучень з n елементів по k елементів. У *комбінаториці* виводять формулу $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Вираз в дужках є сумою геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$. Отже, при довільному збільшенні n остання «дужка» не перевищить значення

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Тому навіть при $n \to \infty$ отримаємо $a_n < 3$, що і доводить обмеженість послідовності (1.1).

Тепер, коли монотонність і обмеженість доведено, застосування теореми 1.2 є обгрунтованим.

Наведемо зручний спосіб наближеного обчислення числа e.

Вважаючи, що $k < n$, залишимо у виразі для a_n лише $(k+1)$ початкових доданків, а решту відкинемо. Рівність порушується, і ми отримуємо нерівність:

$$a_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Здійснимо у цій нерівності граничний перехід при $n \to \infty$, залишаючи k сталим. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{k-1}{n} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}, \qquad c_k \equiv 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!} \leqslant e.$$

Очевидно, ця нерівність справедлива для будь-яких k, в тому числі і для $k = n$. Тому в поєднанні з нерівністю (1.2) маємо:

$$a_n < c_n \leqslant e.$$

Знову здійснимо граничний перехід при $n \to \infty$:

$$e \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n \leqslant e.$$

Очевидно, це можливо лише в разі

$$e = \lim_{n\to\infty} c_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Оскільки факторіал є дуже швидко зростаючою величиною, то в цьому розвиненні достатньо утримати невелику кількість початкових доданків.

1.4 Теореми про границі

В переважній більшості випадків знаходити границю послідовності за означенням незручно. Перший крок до спрощення полягає у використанні наведених нижче теорем.

■ **Теорема 1.3.** Границя константи дорівнює цій константі:

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

□ *Доведення.* Достатньо довести, що при довільному $\varepsilon > 0$ виконано нерівність $|C - C| < \varepsilon$. Але це очевидно, оскільки

$$|C - C| = |0| = 0 < \varepsilon. \square$$

■ **Теорема 1.4.** Нехай кожний член c_n деякої послідовності $\{c_n\}$ вдалося подати у вигляді суми $c_n = a_n + b_n$ членів двох послідовностей, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Нехай їх границі існують кожна окремо, є скінченними і дорівнюють $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A + B,$$

або

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Коротке формулювання: границя суми дорівнює сумі відповідних границь (якщо вони існують і є скінченними).

□ *Доведення.* Достатньо довести, що при довільному $\varepsilon > 0$ виконано нерівність $|c_n - (A + B)| < \varepsilon$. За умовою

$$\begin{cases} |a_n - A| < \varepsilon_1 \\ |b_n - B| < \varepsilon_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1 \\ B - \varepsilon_2 < b_n < B + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Тут обирати ε_1, ε_2 – наше право. Покладемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Додамо дві останні нерівності:

$$(A + B) - \varepsilon < a_n + b_n < (A + B) + \varepsilon, \qquad |c_n - (A + B)| < \varepsilon,$$

що і треба було довести. □

Можна довести також наступні теореми.

■ **Теорема 1.5.** Нехай кожний член c_n деякої послідовності $\{c_n\}$ вдалося подати у вигляді добутку $c_n = a_n \cdot b_n$ членів двох послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Нехай їх границі існують кожна окремо, є скінченними і дорівнюють A, B відповідно. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A \cdot B,$$

або

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Коротке формулювання: границя добутку дорівнює добутку відповідних границь (якщо вони існують і є скінченними).

■ **Теорема 1.6.** Нехай кожний член c_n деякої послідовності $\{c_n\}$ вдалося подати у вигляді частки $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ членів двох послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Нехай їх границі існують кожна окремо, є скінченними і дорівнюють A, B відповідно, причому $B \neq 0$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{A}{B},$$

або

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Коротке формулювання: границя частки дорівнює частці відповідних границь (якщо вони існують і є скінченними, і друга є відмінною від нуля).

Покладаючи в теоремі 1.5 $b_n = C = \text{const}$ і враховуючи теорему 1.3, легко отримати наступне:

$$\lim_{n\to\infty} (Ca_n) = C \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad C = \text{const}.$$

1.5 Границя функції на нескінченності

♦ **Означення 1.9.** Число $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ називають **границею функції** $f(x)$ при прямуванні x до плюс нескінченності, якщо для будь-якого як завгодно малого, але додатного ε існує значення $x_0(\varepsilon)$ (можливо, залежне від ε) таке, що з нерівності $x > x_0$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

♦ **Означення 1.10.** Число $b = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ називають **границею функції** $f(x)$ при прямуванні x до мінус нескінченності, якщо для будь-якого як завгодно малого, але додатного ε існує значення $x_0(\varepsilon)$ (можливо, залежне від ε) таке, що з нерівності $x < x_0$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Як бачимо, ці означення відрізняються від означення границі послідовності лише двома речами. По-перше, аргумент x стає дійсною змінною, а не натуральним числом. По-друге, випадки $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ потребують дещо різних означень. Втім, їх геометричний зміст однаковий: при подальшому пересуванні точки x далеко від нуля ліворуч або праворуч значення функції $f(x)$ усе менше відрізнятиметься від граничного значення b. При цьому для скорочення іноді пишуть $b = f(\pm\infty)$.

Слід розуміти, що кожне граничне значення $f(+\infty)$, $f(-\infty)$ незалежно від іншого може існувати і бути скінченним або нескінченним, або не існувати взагалі. Наприклад:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \quad &\text{але}\quad &\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0;\\
&\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad &\text{але}\quad &\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty;\\
&\lim_{x\to-\infty} e^x \sin x = 0, \quad &\text{але}\quad &\lim_{x\to+\infty} e^x \sin x \quad \text{не існує взагалі.}
\end{aligned}$$

Як і в разі послідовностей, рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ розуміють у *невласному сенсі*: для як завгодно великого A знайдеться $x_0(A)$ таке, що з нерівності $x > x_0$ виплиєає нерівність $f(x) > A$. Зокрема, в разі $f(x) = e^x$ достатньо обрати $x_0(A) = \ln A$. Кажуть також, що функція $f(x) = e^x$ є необмеженою при $x \to +\infty$.

Величини $f(+\infty)$ і $f(-\infty)$ можуть виявитись скінченними і однаковими. Наприклад

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Тоді знак при нескінченності не пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.

1.6 Границя функції в точці

Принципово новим є означення границі функції в точці x_0. Розглянемо його. Математичний аналіз, вивчаючи функцію, цікавиться не стільки її значеннями, скільки динамікою їх зміни. Кажуть також, що інтерес становить *локальна поведінка функції в околі точки* x_0. Може статись, що сама функція взагалі не є визначеною в цій точці, тому цікавляться її поведінкою в сусідніх точках. Відокремити дану точку від сусідніх вдається за допомогою проколотого δ-околу точки x_0.

♦ **Означення 1.11.** Розв'язок нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, де $\delta > 0$, називають **проколотим** δ-околом точки x_0.

Легко встановити, що цей розв'язок має вигляд

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\,.$$

Належність деякого значення x проколотому δ-околу точки x_0 робить цей x «безпосереднім сусідом» точки x_0, але не змушує його ставати рівним значенню x_0.

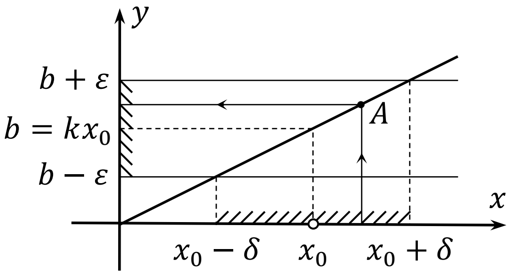


Рисунок 1.3 – До обчислення границі за означенням

♦ **Означення 1.12.** Число $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (читають «границя функції $f(x)$, якщо x прямує до x_0») називають **границею функції $f(x)$ в точці x_0**, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться δ (можливо, $\delta = \delta(\varepsilon)$) таке, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випли申ває нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Щодо запису $x \to x_0$ зробимо два зауваження. По-перше, тут x (на відміну від x_0) треба розуміти як змінну величину. Безглуздим є, наприклад, запис вигляду $12 \to 13$. По-друге, мають на увазі, що яким би малим не було число $\Delta = \mathrm{const} > 0$, точка, яка виражає значення величини x, в результаті зміни x наблизиться до точки x_0 на відстань, меншу за Δ, тобто виконається нерівність $|x - x_0| < \Delta$.

Зміст наведеного означення такий. Для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий проколотий δ-окіл точки x_0, що значення функции $f(x)$ при будь-яких x із цього околу відрізняються (за модулем) від граничного значення b не більше, ніж на ε.

◁ *Приклад 1.14.* Розглянемо функцію $f(x) = kx$ (рис. 1.3) і доведемо за означенням, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = kx_0$. Координати кінців ε-околу точки b дорівнюють $kx_0 \pm \varepsilon$. Очевидно, вони виникають при підстановці аргументу $x = x_0 \pm \delta$ до рівняння, яке задає функцію: $kx_0 \pm \varepsilon = k\,(x_0 \pm \delta)$, звідки $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k}$. Тепер можна надати наступну гарантію. Якщо абсциса довільної точки A на графіку міститься всередині проколотого δ-околу точки x_0 (штриховка на горизонтальній осі за винятком точки x_0), то відповідна ордината попадає всередину ε-околу точки b (штриховка на вертикальній осі). Інакше, залежність $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{k}$ забез-

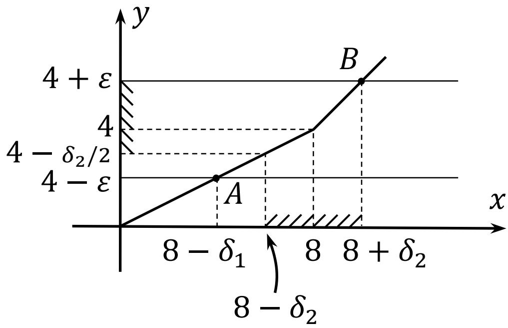


Рисунок 1.4 – Випадок несиметричного δ-околу

печує потрібну близкість значень функції до числа b. Саме це і значить, що число b є границею функції в точці x_0. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.15.* Розглянемо функцію $f(x) = \frac{3}{4}x - 2 + \frac{1}{4}|x-8|$ (рис. 1.4) і доведемо за означенням, що $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 4$. Розкриваючи модуль, неважко побудувати кусково-лінійне подання функції:

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} x-4, & x \geqslant 8; \\ \frac{1}{2}x, & x < 8. \end{array}\right.$$

З використанням цього подання для координат точок A, B маємо: $4 - \varepsilon = \frac{1}{2}(8 - \delta_1)$, $4 + \varepsilon = (8 + \delta_2) - 4$. Звідси $\delta_1 = 2\varepsilon$, $\delta_2 = \varepsilon$. Покладемо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \delta_2$. Тепер можна надати наступну гарантію: при виконанні нерівності $0 < |x - 8| < \delta_2 = \varepsilon$ відповідні значення $f(x)$ настільки близькі до граничного значення 4, що виконано нерівність $4 - \varepsilon < f(x) < 4 + \varepsilon$. (Насправді за рахунок того, що ми обрали меншу з напівширин δ_1, δ_2, виконується навіть ще більш сильна нерівність $4 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < 4 + \varepsilon$, тобто значення функції потрапляють не тільки всередину околу $(4-\varepsilon; 4+\varepsilon)$, а навіть в його конкретну «верхню» частину $\left(4 - \frac{1}{2}\varepsilon; 4 + \varepsilon\right)$, яку заштриховано на вертикальній осі). Саме це і значить, що число 4 є границею функції $f(x)$ в точці $x_0 = 8$ (або при $x \to 8$). $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.16.* Розглянемо функцію

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & x \neq 13; \\ 2, & x = 13. \end{array}\right.$$

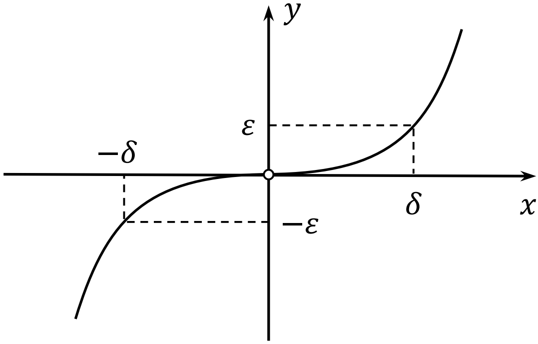


Рисунок 1.5 – Випадок, коли функцію не визначено в точці

Її графік – горизонтальна пряма на висоті $y = 1$, причому з цієї прямої точку $A(13, 1)$ вилучено і переміщено на висоту $y = 2$. Доведемо, що $b = \lim\limits_{x\to 13} f(x) = 1$. Очевидно, достатньо пред'явити довільне додатне δ, наприклад $\delta = 0{,}28$. Якщо $0 < |x - 13| < \delta$, тобто

$$x \in (13 - \delta, 13) \cup (13, 13 + \delta)\,,$$

то $x \neq 13$, отже $f(x) = 1$, і $|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$, що є правдою для довільних як завгодно малих $\varepsilon > 0$.

В цьому прикладі вперше використано, що δ-окіл повинен бути проколотим. В іншому разі вимогу близькості значення функції до її граничного значення $b = 1$ ми повинні були б розповсюдити і на значення функції $f(x_0) = f(13) = 2$, а така близькість місця не має. Проте, границя функції існує. І тепер (на відміну від попередніх прикладів) вона не збігається зі значенням функції в даній точці. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.17*. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{x^3}{|x|} = \left[\begin{array}{ll} x^2, & x > 0; \\ -x^2, & x < 0 \end{array}\right.$$

(рис. 1.5) і доведемо за означенням, що $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Очевидно, достатньо пред'явити півширину $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, і тоді з нерівності $0 < |x - 0| < \delta$ випливатиме нерівність $|f(x) - 0| < \varepsilon$, що і треба було довести. Зауважимо, остання нерівність не виконується при $x = 0$, оскільки функцію при цьому значенні аргументу не визначено. Але означення границі цього і не вимагало (точка $x_0 = 0$ не належить відповідному проколотому околу). $\triangleright$

Як бачимо з двох останніх прикладів, границя функції в точці може існувати навіть тоді, коли функція в цій точці не визначена. Крім того, границя функції і значення функції в точці (в разі існування обох) можуть і не збігатись.

За означенням границею функції в точці є стале число b. Іноді вважають, що нескінченність також може бути граничним значенням. Ідея залишається попередньою: *у невласному сенсі* домовляються, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, якщо при потраплянні значення x всередину проколотого δ-околу точки x_0 (тобто при виконанні нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$) відповідне значення функції потрапляє всередину A-околу плюс нескінченності, тобто всередину інтервалу $(A; +\infty)$, причому існує залежність $\delta(A)$, здатна забезпечити таке потрапляння для як завгодно великого значення A. Випадок від'ємної нескінченності розглядається аналогічно.

$\triangleleft$ *Приклад 1.18.* Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Для цього забезпечимо виконання нерівності $\frac{1}{x^2} > A$, $A > 0$. Розв'язок цієї нерівності є $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{A}}\right)$. Отже, достатньо покласти $\delta(A) = \frac{1}{\sqrt{A}}$. $\triangleright$

Розглянемо тепер приклади, коли з тих чи інших причин границя функції в точці не існує.

$\triangleleft$ *Приклад 1.19.* Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$. Розкриваючи модуль, отримуємо:

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} x+1, & x > 0; \\ x-1, & x < 0. \end{array}\right.$$

Графік цієї функції подано на рис. 1.6. Очевидно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не існує. Наближаючи x до нуля, але залишаючи його додатним, ми будемо рухати відповідну точку вздовж правої вітки графіка, $y = x + 1$. Коли x стане нехтовно малим, y наблизиться до значення 1. Більш точно: з нерівності $0 < x < \delta$ випливає нерівність $1 < y < 1 + \varepsilon$, якщо покласти $\delta = \varepsilon$. Це і означає, що ми можемо зробити y як завгодно близьким до одиниці, але при виконанні умови $x > 0$.

Навпаки, для від'ємних значень x ми залишаємо відповідну точку на лівій вітці, $y = x - 1$. Коли x стане нехтовно малим,

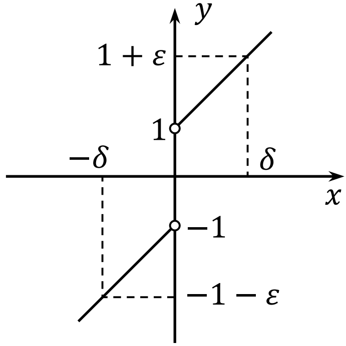


Рисунок 1.6 – До визначення скінченних однобічних границь

y наблизиться до значення -1: з нерівності $-\delta < x < 0$ випливає нерівність $-1-\varepsilon < y < -1$, якщо знову покласти $\delta = \varepsilon$. Отже, ми можемо зробити y як завгодно близьким до мінус одиниці, залишаючи x від'ємним. Але ніяк неможливо зробити y близьким і до одиниці і до мінус одиниці одночасно. Саме тому границя функції при $x \to 0$ не існує. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.20.* Розглянемо функцію $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Її графік схематично подано на рис. 1.7. Якщо x – велике (за модулем) число, то $\frac{1}{x}$ – мале число, і тоді $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \approx e^0 = 1$. Отже, далеко від нуля функція практично перестає змінюватись. Кажуть, що її графік має **горизонтальну асимптоту** $y = 1$ (на рис. 1.7 її позначено штриховою лінією). «Притискання» графіка до асимптоти відбувається як при прямуванні $x \to +\infty$, так і при прямуванні $x \to -\infty$.

Навпаки, в околі точки $x = 0$ поведінка функції є суттєво різною залежно від знаку x. Якщо $x > 0$, то при подальшому прямуванні $x \to 0$ значення функції можна зробити як завгодно малими. Справді, забезпечимо виконання нерівності $f(x) < \varepsilon$:

$$e^{-\frac{1}{x}} < \varepsilon = e^{\ln\varepsilon}, \quad -\frac{1}{x} < \ln\varepsilon, \quad \frac{1}{x} > -\ln\varepsilon, \quad 0 < x < -\frac{1}{\ln\varepsilon}.$$

Достатньо покласти $\delta(\varepsilon) = -\frac{1}{\ln\varepsilon}$. Тоді з нерівності $0 < x < \delta$ (*права половина* δ-околу) випливає нерівність $0 < f(x) < \varepsilon$.

В той же час, якщо $x < 0$, то при подальшому прямуванні $x \to 0$ значення функції можна зробити як завгодно великими.

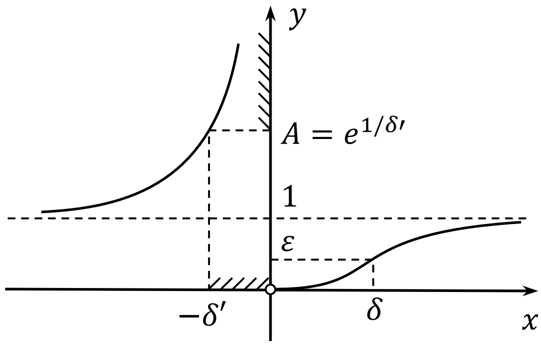


Рисунок 1.7 – До визначення однобічних границь

Справді, забезпечимо виконання нерівності $f(x) > A$:

$$e^{-\frac{1}{x}} > A = e^{\ln A}, \quad -\frac{1}{x} > \ln A, \quad -\frac{1}{\ln A} < x < 0.$$

Достатньо покласти $\delta'(A) = \frac{1}{\ln A}$. Тоді з нерівності $-\delta' < x < 0$ (*ліва половина* δ'-околу) випливає нерівність $f(x) > A$. Інакше: якщо x потрапить всередину інтервалу $x \in (-\delta'; 0)$ (штриховка на горизонтальній осі), то відповідне значення функції потрапить всередину штриховки на вертикальній осі, тобто всередину інтервалу $f(x) \in (A; +\infty)$. При цьому число A можна обрати як завгодно великим. Отже, функція є необмеженою в лівому півоколі точки $x_0 = 0$. Ясно тоді, що єдина границя функції в цій точці не існує. $\triangleright$

Розглянуті приклади спонукають прийняти наступні означення.

⧫ **Означення 1.13.** Число $R = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ називають **правобічною границею** функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться δ (можливо, $\delta = \delta(\varepsilon)$) таке, що з нерівності $x_0 < x < x_0 + \delta$ випливає нерівність $|f(x) - R| < \varepsilon$.

⧫ **Означення 1.14.** Число $L = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ називають **лівобічною границею** функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться δ (можливо, $\delta = \delta(\varepsilon)$) таке, що з нерівності $x_0 - \delta < x < x_0$ випливає нерівність $|f(x) - L| < \varepsilon$.

В цих означеннях використано позначення:

$$x \to x_0 + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to x_0; \\ x > x_0, \end{cases} \qquad x \to x_0 - 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \to x_0; \\ x < x_0. \end{cases}$$

Ці означення мають майже однаковий зміст: число R (L) є правобічною (лівобічною) границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо вдається як завгодно наблизити $f(x)$ до R (до L) при прямуванні $x \to x_0$ за умови, що x в процесі прямування весь час залишається по правий (лівий) бік від x_0.

Результати, отримані в двох останніх прикладах в термінах однобічних границь, можна подати так:

$$\lim_{x\to 0-0} \tfrac{x^2+|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0+0} \tfrac{x^2+|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2+|x|}{x} \text{ не існує;}$$
$$\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}} \text{ не існує.}$$

Тут лівобічну границю $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, як і звичайно, розуміють у невласному сенсі.

Очевидно, якщо існує границя $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ деякої функції в точці x_0, то повинні існувати і однобічні границі R і L, причому повинна виконуватись рівність $R = L = b$. В двох останніх прикладах b не існувало саме тому, що R і L, хоча і існували (в останньому прикладі лівобічна – в невласному сенсі $L = +\infty$), але не дорівнювали одна одній. Можна навести приклад, коли з однобічних границь одна (або одразу обидві) не існує ні як конкретне число, ані як нескінченність.

$\lhd$ *Приклад 1.21.* Доведемо, що правобічна границя $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin\frac{1}{x}$ не існує ні у власному, ні у невласному сенсі.

Очевидно, у невласному сенсі ця границя існувати не може, оскільки синус є обмеженим (не перевищує одиницю).

Всередині околу $0 < x < \delta$ оберемо довільне число x_1. Покладемо $x_2 = \frac{x_1}{1+2\pi x_1}$. Очевидно, $0 < x_2 < x_1 < \delta$. Нехай x зменшується від значення x_1 до значення x_2. За цей час кут $\alpha = \frac{1}{x}$ (аргумент синусу) збільшиться від значення $\alpha_1 = \frac{1}{x_1}$ до значення

$$\alpha_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1 + 2\pi x_1}{x_1} = \frac{1}{x_1} + 2\pi = \alpha_1 + 2\pi.$$

Отже, для скільки завгодно малого δ всередині правої половини δ-околу точки $x_0 = 0$ завжди можна знайти інтервал

$x \in [x_2; x_1]$, для якого встигає пройти цілий період синусу. Тому протягом цього інтервалу синус встигає прийняти усі можливі значення від мінус одиниці до одиниці. Отже, при $\varepsilon < 1$ неможливо підібрати як завгодно малий окіл шириною 2ε, всередині якого містились би усі можливі значення синусу. Інакше, не існує числа b, до якого би були скільки завгодно близькими усі значення $\sin\frac{1}{x} \in [-1; 1]$ одночасно.

Функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ є непарною, тому аналогічні міркування можна розповсюдити і на ліву половину δ-околу, тобто лівобічна границя також не існує. Тоді границя як така не існує тим паче. $\rhd$

На завершення цього пункту додамо наступне. Теореми про границі послідовностей (п. 1.4) без змін можна розповсюдити і на випадок границь функцій в точці і на нескінченності. Наприклад:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x),$$

якщо кожна з границь в правій частині існує і є скінченною;

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

якщо кожна з границь в правій частині існує, є скінченною і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, і т.д.

1.7 Неперервність функції в точці

♦ **Означення 1.15.** Функцію $f(x)$ називають **неперервною** в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформулюємо розширене означення, еквівалентне наведеному. Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо виконано наступні п'ять вимог.

1. Існує і є скінченним значення $f(x_0)$ функції в даний точці.
2. Існує і є скінченною ліва границя $L = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
3. Існує і є скінченною права границя $R = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

4. Виконано рівність $R = L$.

5. Виконано рівність $f(x_0) = R$ (або, що те саме, $f(x_0) = L$).

Повернемось до розглянутих вище прикладів.

Функція $f(x) = kx$ є неперервною в довільній точці x_0.

Функція $f(x) = \frac{3}{4}x - 2 + \frac{1}{4}|x - 8|$ є неперервною в точці $x_0 = 8$.

Функція

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & x \neq 13; \\ 2, & x = 13 \end{array}\right.$$

є розривною в точці $x_0 = 13$. Існують і значення функції, і її границя, але вони різні; не виконано п. 5. Але є можливість цю проблему усунути. Здійснимо *перевизначення* функції в точці $x_0 = 13$: достатньо пересунути точку $A(13, 2)$ на одиницю донизу, тобто домовитись, що тепер $f(13) = 1$, а не $f(13) = 2$. Інакше, достатньо покласти $f(x) \equiv 1$. Якщо функцію вдається перетворити на неперервну шляхом перевизначення її *поодинокого* значення, кажуть, що функцію перевизначено до неперервної. Тепер розрив усунуто.

Функцію $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ взагалі не визначено в точці $x_0 = 0$. Вона розривна, оскільки не виконано п. 1. Але цю функцію можна перетворити на неперервну шляхом *довизначення* її поодинокого значення. Достатньо покласти

$$f(x) = \left[\begin{array}{ll} x^2, & x \geqslant 0; \\ -x^2, & x < 0. \end{array}\right.$$

Тепер (коли ми в першому рядку написали $x \geqslant 0$ замість $x > 0$) маємо: $f(0) = 0^2 = 0$, і функція стає неперервною.

Функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в точці $x_0 = 0$ є розривною: саму функцію не визначено, а однобічні границі не є скінченними. Цей розрив усунути неможливо.

Функція $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$ в точці $x_0 = 0$ є розривною. Для неї: $L = -1$, $R = 1$, $f(0)$ не існує. В який спосіб ми би не довизначали функцію в точці $x_0 = 0$, рівність $L = R$ (п. 4) залишається невиконаною. Цей розрив усунути неможливо.

Функція $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ в точці $x_0 = 0$ є розривною. Для неї не виконано п. 2: $L = +\infty$ і не є скінченною величиною. Цей розрив усунути неможливо.

Функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точці $x_0 = 0$ є розривною. Для неї не виконано жоден з п'яти пунктів. Розрив усунути неможливо.

Оглядаючи наведені приклади, можна побудувати класифікацію точок розриву.

В кожній точці x_0 функція може бути неперервною або розривною.

Якщо в точці спостерігається розрив, то він може бути усувним або неусувним. Якщо функцію шляхом довизначення або перевизначення в точці x_0 вдається перетворити на неперервну, то розрив є **усувним**; в іншому разі він є неусувним.

Якщо розрив неусувний, то він може бути розривом **І-го роду** (типу стрибка, коли функція має скінченні однобічні границі, не рівні між собою) або **ІІ-го роду** (коли хоча б одна з однобічних границь дорівнює нескінченності або не існує взагалі). Неусувний розрив І-го роду виникає при порушенні п. 4. В цьому разі величина стрибка становить $|R - L|$. Неусувний розрив ІІ-го роду виникає, коли з двох однобічних границь R, L не є скінченною або не існує хоча б одна.

Отже, функції $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ і $f(x) = \begin{bmatrix} 1, & x \neq 13; \\ 2, & x = 13 \end{matrix}$ мають усувний розрив; функція $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$ має неусувний розрив І-го роду (типу «стрибка»), функції $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ і $f(x) = \frac{1}{x^2}$ мають неусувний розрив ІІ-го роду (з прямуванням функції на нескінченність). Функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ має неусувний розрив ІІ-го роду (однобічні границі не існують взагалі, ні скінченні, ані нескінченні).

1.8 Питання для перевірки

1. Що таке числова послідовність?
2. Які способи задати числову послідовність ви знаєте?
3. Назвіть два види монотонних числових послідовностей. Наведіть приклади.
4. Що таке немонотонна числова послідовність? Наведіть приклади.
5. Що таке числова послідовність, обмежена знизу? Наведіть приклади.

6. Що таке числова послідовність, обмежена зверху? Наведіть приклади.

7. Що таке обмежена числова послідовність? Наведіть приклади.

8. Наведіть контрприклад, який спростовує *хибне* твердження: «якщо числова послідовність обмежена, то вона є монотонною».

9. Що таке ε-окіл?

10. Що таке границя числової послідовності?

11. Нехай $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Як зміниться кількість членів a_n всередині ε-околу точки b при зменшенні ε вдвічі?

12. В означенні границі сказано, що номер N, починаючи з якого усі члени a_n потрапляють всередину ε-околу, може залежати від ε (і зазвичай що менше ε, то більші номери N потрібно обирати). Чи може потрібний номер не залежати від ε? Наведіть приклад, розглянувши границю константи.

13. Чи завжди границя послідовності є конкретним числом? Що таке границя послідовності у невласному сенсі? Наведіть приклади.

14. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі (в разі її існування).

15. Сформулюйте і доведіть теорему про існування і скінченність границі монотонної обмеженої числової послідовності.

16. Чи є монотонність і обмеженість числової послідовносі достатньою умовою існування границі? необхідною умовою існування границі?

17. Як визначають число e? Чому воно існує і є скінченним?

18. Як зручно наближено обчислити число e?

19. Нехай при наближеному обчисленні числа e у формулі $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ врахували лише доданки з номерами k від нуля до чотирьох включно. З якою відносною похибкою отримано результат? Відповідь надайте у відсотках.

20. Сформулюйте теореми про границю суми, добутку, частки.

21. Що таке границя функції при $x \to +\infty$?

22. Що таке границя функції при $x \to -\infty$?

23. Що таке проколотий δ-окіл точки x_0? Навіщо його «проколюють»?

24. Що таке границя функції при $x \to x_0$?

25. Чи може границя функції в точці дорівнювати нескінченності? Наведіть приклади.

26. Що таке лівобічна границя функції в точці? правобічна границя функції в точці?

27. Що таке функція, неперервна в точці x_0?

28. Що таке усувний розрив?

29. Назвіть і визначте два види неусувних розривів.

2 ТЕХНІКА ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

2.1 Елементарні випадки

Починаючи з цього розділу, ми будемо користуватись нескінченно малими і нескінченно великими величинами.

♦ **Означення 2.1.** Змінну величину $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, називають **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

♦ **Означення 2.2.** Змінну величину $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, називають **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} |\alpha(x)| = \infty$.

Домовимось не розрізняти нескінченно малі величини, які виникають при дослідженні функцій $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, і послідовностей $\alpha(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Таку саму домовленість приймемо і щодо нескінченно великих величин. Наприклад, величину $\alpha(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$ будемо вважати такою самою нескінченно малою, як величину $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, при $x \to \infty$. Інакше, в наведених означеннях x_0 може бути числом або нескінченністю, а x – дійсним або натуральним числом.

◁ *Приклад 2.1.* Розглянемо величину $\alpha(x) = \frac{1}{x-5}$. Очевидно, вона є нескінченно великою при $x \to 5$. В той же час вона є нескінченно малою при $x \to \infty$. ▷

■ **Теорема 2.1.** Нехай $\alpha(x)$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$. Тоді $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$.

□ *Доведення.* Достатньо довести, що для як завгодно малих додатних ε при подальшому наближенні x до x_0 виконується нерівність $|\beta(x) - 0| < \varepsilon$. Маємо: $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < \varepsilon$, $|\alpha(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. Покладемо $A = \frac{1}{\varepsilon}$, тоді $|\alpha(x)| > A$. Виконання цієї нерівності гарантується для усіх x, принаймні починаючи з деякого значення x_0, оскільки $\alpha(x)$ – нескінченно велика. □

Аналогічно легко довести і наступну теорему.

■ **Теорема 2.2.** Нехай $\alpha(x)$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$. Тоді $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \to x_0$.

Ці теореми дозволяють обмежитись розглядом або лише нескінченно великих, або лише нескінченно малих. Зазвичай працюють з нескінченно малими. Зрештою, цей вибір – питання зручності в контексті конкретної ситуації.

Розглянемо наступну теорему.

■ **Теорема 2.3.** Нехай $\alpha(x)$ і $C(x)$ – нескінченно мала і обмежена величини відповідно при $x \to x_0$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_0} [\alpha(x) \cdot C(x)] = 0$.

□ *Доведення.* Достатньо довести, що для як завгодно малих додатних ε при подальшому наближенні x до x_0 виконується нерівність $|\alpha(x) \cdot C(x) - 0| < \varepsilon$. За умовою $\alpha(x)$ – нескінченно мала, тому при подальшому прямуванні x до x_0 для довільного ε' виконується нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon'$. Також за умовою $C(x)$ – обмежена, тому існує M таке, що $|C(x)| < M$. Помножимо дві останні нерівності: $|\alpha(x)| \cdot |C(x)| < \varepsilon' M$. Отже, достатньо покласти $\varepsilon' M = \varepsilon$. Тоді за умови $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ потрібна близкість добутку $|\alpha(x) \cdot C(x)|$ до нуля гарантується. □

Зауважимо, що вважати ланцюжок

$$\lim (\alpha \cdot C) = \lim \alpha \cdot \lim C = 0 \cdot \lim C = 0$$

доведенням цієї теореми – не завжди правильно: невідомо, чи існує границя $\lim C$. Доведена теорема цього існування не потребує; достатньо лише обмеженості величини C.

◁ *Приклад 2.2.* Розглянемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2+3}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2+3} \cdot \cos \pi n\right] = 0.$$

Справді, при $n \to \infty$ величина (n^2+3) нескінченно велика, тоді $\alpha = \frac{1}{n^2+3}$ – нескінченно мала. Величина $C = \cos \pi n = (-1)^n$ є обмеженою, оскільки $|\cos \pi n| \leqslant 1$.

Зауважимо, окремо взята границя $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \pi n$ не існує ні у власному, ані у невласному сенсі. Втім, це і не потрібно; достатньо обмеженості величини $\cos \pi n$. ▷

Аналогічно неважко довести наступну теорему.

■ **Теорема 2.4.** Нехай $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \to x_0$ і $C(x)$ – деяка величина така, що існує $\lim\limits_{x\to x_0} C(x) \neq 0$. Тоді $\lim\limits_{x\to x_0} [\beta(x) \cdot C(x)] = \infty$.

◁ *Приклад 2.3.* Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot e^x\right) = \infty,$$

оскільки $\frac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$ і $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \neq 0$. $\triangleright$

Розглянемо наступну теорему.

■ **Теорема 2.5.** Нехай $f(x(t))$ – складна[1] функція. Нехай границя внутрішньої функції $x(t)$ при прямуванні $t \to t_0$ існує, є скінченною і дорівнює $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$, а зовнішня функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0. Тоді

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f\left(\lim_{t\to t_0} x(t)\right).$$

□ *Доведення.* Доведення майже очевидне: достатньо записати твердження теореми у вигляді $\lim f(x) = f(x_0)$ і побачити тут означення неперервності функції $f(x)$ в точці x_0. □

Ця теорема дозволяє переносити операцію граничного переходу всередину складної функції.

$\triangleleft$ *Приклад 2.4.* Розглянемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\cos \pi n}{n^2+3}}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\cos \pi n}{n^2+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos \pi n}{n^2+3}} = e^0 = 1.$$

Тут використано неперервність функції $f(x) = e^x$, «всередину» якої перенесено операцію граничного переходу. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.5.* Розглянемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1.$$

Тут використано неперервність функції $f(x) = \cos x$, «всередину» якої перенесено операцію граничного переходу. $\triangleright$

2.2 Невизначеності та їх типи

Як ми бачили на прикладах попереднього пункту, для обчислення границь користуватись означенням границі не обов'язково. Часто і так зрозуміло, чому дорівнює границя. Наприклад, якщо α – нескінченно мала і C – обмежена, то $\alpha C \to 0$. Якщо функція $f(x)$ є неперервною в точці $x = x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

[1]Більш детально поняття складної функції обговорюється в наступному розділі, п. 3.3.3.

До речі, саме з цього і починають обчислення границь: намагаються підставити значення $x = x_0$ до виразу під знаком границі. Якщо вираз під знаком границі є функцією, неперервною в точці $x = x_0$, то відповідь обчислюється безпосередньо.

$\triangleleft$ *Приклад 2.6.*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \triangleright$$

Далі розглядатимемо лише випадки, коли виникають проблеми обчислювального характеру в окремій точці $x = x_0$.

Розглянемо добуток нескінченно малої величини $\alpha(x)$ і нескінченної великої величини $\beta(x)$, $x \to x_0$. При обчисленні границі вигляду $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha(x) \cdot \beta(x)]$ шляхом підстановки $x = x_0$ виникає наступна проблема: відповідь стає неочевидною. З одного боку, добуток $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ повинен бути нескінченно малим за рахунок співмножника $\alpha(x)$. З іншого боку, цей добуток повинен бути нескінченно великим за рахунок співмножника $\beta(x)$. Можна сказати, у виразі $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ виникає конкуренція між співмножниками. Остаточна відповідь залежатиме від того, що відбувається швидше: прямування величини $\alpha(x)$ до нуля чи прямування величини $\beta(x)$ до нескінченності. Доки це не з'ясовано, відповідь залишається неочевидною, а ситуація – невизначеною. Кажуть, що вираз $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ *містить невизначеність.* Зауважимо, така (або інша) невизначеність виникає при конкуренції окремих членів виразу, які намагаються змінити його значення «на свою користь».

Обговорювану зараз невизначеність позначають символом $[0 \cdot \infty]$ і читають: «невизначеність типу нуль помножити на нескінченність».

Існують і інші типи невизначеності. Наприклад, нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі величини. Розглянемо дріб $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. З одного боку, цей дріб повинен бути нескінченно малою величиною за рахунок чисельника. З іншого боку, він повинен бути нескінченно великою величиною за рахунок знаменника. Отже, маємо «невизначеність типу нуль на нуль»:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Тут формальний «дріб» $\frac{0}{0}$ не є позначенням арифметичної операції ділення одного числа, яке дорівнює нулю, на друге число, яке теж дорівнює нулю. Адже насправді ми ділимо не нулі, а величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$. Нулю ж дорівнюють не вони, а лише їх границі[2]. Дріб $\frac{0}{0}$, таким чином, не позначає ніяку величину, а *лише характеризує тип невизначеності*, яка склалась. Щоб додатково це підкреслити, дріб $\frac{0}{0}$ (а також аналогічні «парадоксальні» вирази) прийнято брати у квадратні дужки.

◁ *Приклад 2.7.* Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3}$. Очевидно, вона містить невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Але після скорочення на x^2 отримуємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Вираз $\frac{1}{x}$ (не дивлячись на неможливість його обчислення при $x = 0$) ніякої невизначеності вже не містить. Величині x, яка залишилась у знаменнику після скорочення, більше нема з ким конкурувати. Отже, після скорочення ситуація стає визначеною, а відповідь – очевидною. ▷

Якщо дії, які здійснюють з виразом під знаком границі (в останньому прикладі – скорочення на x^2), ведуть до того, що невизначеність зникає, кажуть: *«ми позбавились невизначеності даного типу».* Користуються також термінами *«розкриття невизначеності даного типу», «усунення невизначеності даного типу».* Власне, можна сказати: обчислення границь – це мистецтво позбавлення невизначеностей.

Подамо символічні позначення інших типів невизначеностей: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$. Техніка обчислення границь за допомогою певних замін і інших штучних прийомів часто дозволяє перетворювати один тип невизначеності на інший. Тому доцільно перш за все більш детально дослідити найпоширеніший випадок – невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

2.3 Про порівняння порядків малості

Щойно ми розглянули нескінченно малі x^2, x^3 (при $x \to 0$). Нескінченно малими можуть виявитись і інші елементарні функції. Нагадаємо, елементарними називають наступні функції:

[2]Значення границі величини і не повинно збігатись із значенням цієї величини. Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, хоча ні при якому n рівність $\frac{1}{n} = 0$ не досягається.

- лінійна $y = kx + b$;
- квадратична $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$;
- степенева $y = x^n$;
- показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- обернені тригонометричні (аркфункції);
- комбінації *скінченної кількості* усіх, наведених вище.

Актуальним є порівняння *порядків малості* відповідних нескінченно малих величин.

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – деякі нескінченно малі при $x \to x_0$. Для порівняння порядків малості цих величин (тобто для порівняння швидкостей їх прямування до нуля) обчислюють границю

$$A = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Ця границя містить невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, тому A може дорівнювати будь-якому числу, або нескінченності, або навіть не існувати взагалі.

1°. Нехай $A = 0$. Очевидно, в цьому разі α прямує до нуля швидше, ніж β. Кажуть, що α є нескінченно малою **більш високого порядку малості** порівняно з β. Це записують так: $\alpha = o(\beta)$ (читають «альфа дорівнює о маленьке від бета»).

2°. Нехай $A = \infty$. В цьому разі, навпаки, β прямує до нуля швидше, ніж α. Тепер β є нескінченно малою **більш високого порядку малості** порівняно з α, тобто $\beta = o(\alpha)$.

3°. Нехай $A = \text{const} \neq 0$. В цьому разі кажуть, що α і β є нескінченно малими величинами **однакових порядків малості.**

4°. Може виявитись, що границя A не існує взагалі. В такому разі кажуть, що α і β **не є порівнянними.** Нехай $\alpha(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $\beta(x) = x$. Ці величини стають нескінченно малими при $x \to 0$, тобто $\lim\limits_{x \to 0} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to 0} \beta(x) = 0$. Але при цьому:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Ми вже доводили, що ця границя не існує (ні скінченна, ані нескінченна). Отже, величини $x \sin \frac{1}{x}$ і x не є порівнянними при $x \to 0$.

Нескінченно великі порівнюють в аналогічний спосіб. Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – деякі нескінченно великі при $x \to x_0$. Для порівняння їх **порядків росту** (тобто для порівняння швидкостей їх прямування до нескінченності) обчислюють границю

$$B = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Ця границя містить невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, тому B може дорівнювати будь-якому числу, або нескінченності, або навіть не існувати взагалі.

1°. Нехай $B = 0$. Очевидно, в цьому разі α прямує до нескінченності повільніше за β. Кажуть, що β є нескінченно великою **більш високого порядку росту** порівняно з α.

2°. Нехай $B = \infty$. В цьому разі, навпаки, β прямує до нескінченності повільніше за α. Тепер α є нескінченно великою більш високого порядку росту порівняно з β.

3°. Нехай $B = \text{const} \neq 0$. В цьому разі кажуть, що α і β є нескінченно великими величинами **однакових порядків росту.**

4°. Може виявитись, що границя B не існує взагалі. В такому разі кажуть, що α і β не є порівнянними.

Втім, нічого нового в порівнянні нескінченно великих не з'являється. Справді, нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – деякі нескінченно великі. Покладемо $\beta'(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$, $\alpha'(x) = \frac{1}{\beta(x)}$. Тоді за теоремою 2.1 величини $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ – нескінченно малі. Маємо:

$$B = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Отже, порівняння нескінченно великих завжди можна звести до порівняння нескінченно малих.

Ми розглянули якісне порівняння нескінченно малих. Тепер звернемося до кількісного порівняння.

Нехай потрібно кількісно визначити порядок малості деякої нескінченно малої $\beta(x)$. Це можна зробити лише у відносному сенсі, але не в абсолютному. Інакше, не має сенсу визначати порядок малості величини $\beta(x)$ як такий; має сенс визначити порядок малості величини $\beta(x)$ *по відношенню до іншої* нескінченно малої $\alpha(x)$, на яку спираються, як на «еталон». Величину $\alpha(x)$ в цьому разі називають **основною.**

Природно в якості еталону обрати найбільш просту величину. Наприклад, якщо $\beta(x)$ стає нескінченно малою величиною при $x \to x_0 = \text{const}$, то зручним еталоном може виявитись величина $\alpha(x) = (x - x_0)$. Очевидно, при такому виборі $\alpha(x)$ стає нескінченно малою одночасно з $\beta(x)$. Зокрема, при $x_0 = 0$ в якості еталону можна обрати величину $\alpha(x) = x$. Якщо ж $\beta(x)$ стає нескінченно малою при $x \to \infty$, то в якості еталону обирають величину $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ (і знову $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ стають нескінченно малими одночасно).

♦ **Означення 2.3.** Домовляються вважати, що нескінченно мала $\beta(x)$ має ***n*-й порядок малості** відносно нескінченно малої $\alpha(x)$, якщо нескінченно малі $\beta(x)$ і $[\alpha(x)]^n$ мають один порядок малості, тобто якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = C = \text{const} \neq 0.$$

З цього означення випливає, що порядок малості є додатною величиною, $n > 0$. Справді, якщо $n = 0$, то з означення порядку малості отримуємо (для скорочення ми не пишемо $x \to x_0$):

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^0} = \lim \frac{\beta}{1} = \lim \beta = C = \text{const} \neq 0,$$

тобто β не є нескінченно малою.

В разі $n < 0$ покладемо $n_1 = -n$, $n_1 > 0$. Маємо:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \lim \beta\alpha^{-n} = \lim \beta\alpha^{n_1} = C = \text{const} \neq 0.$$

Тоді β є нескінченно великою. Справді, в іншому разі вона була б обмеженою, тоді за теоремою 2.3 ми б отримали $C = 0$.

Нехай в якості основної обрано величину $\alpha(x)$. Кажуть, що сукупність усіх величин вигляду $[\alpha(x)]^n$, $n > 0$, утворює **шкалу нескінченно малих.** Нехай порядок малості деякої нескінченно малої $\beta(x)$ за цією шкалою виявився рівним n_0. Тоді значення n_0 є єдиним[3], а величина $\beta(x)$ на цій шкалі посідає єдино можливе місце.

Нехай $x \to 0$ ($x \to +\infty$). Нескінченно мала (нескінченно велика) величина $\alpha(x) = x$ в практиці математичного аналізу

[3] Легко перевірити наступне. Якщо $\beta(x)$ має порядок n_0 відносно $\alpha(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^{n_0}} = C = \text{const} \neq 0$, то при $n < n_0$ ми отримаємо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = 0$, а при $n > n_0$ – $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \infty$. Тобто, якщо n_0 є порядком малості величини β порівняно з α, то ніяке інше число порядком малості β бути вже не може.

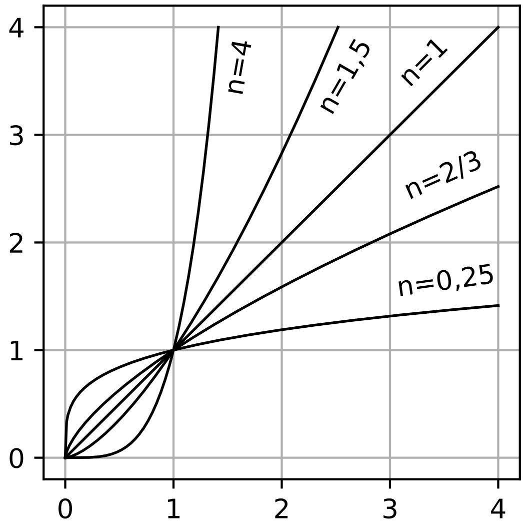


Рисунок 2.1 – Графіки степеневих функцій

є найпоширенішим[4] еталоном для порівняння порядків малості (порядків росту). Це зумовлено властивостями степеневих функцій $y = x^n$, графіки[5] яких при деяких показниках n подано на рисунку 2.1. За домовленості про еталон вигляду $\alpha(x) = x$ роль шкали нескінченно малих (а разом з цим і шкали нескінченно великих) виконує сукупність усіх функцій виду x^n при додатних значеннях n. При цьому, чим більшим є число n, тим більш динамічною є поведінка функції. Зокрема, чим більше n, тим більша швидкість зростання величини x^n при $x \to +\infty$. Показник n в цьому разі і є порядком росту. З іншого боку, чим більше n, тим більша швидкість прямування величини x^n до нуля при $x \to 0$. Показник n в цьому разі і є порядком малості. Інакше, куди б величина x^n не прямувала (до нуля чи до нескінченності), вона це робить тим швидше, чим більше n.

$\triangleleft$ *Приклад 2.8.* Нехай $\beta(x) = 2x^3 + 3x^7$. Очевидно, ця величина стає нескінченно малою при $x \to 0$. Покажемо, вона має

[4]Але не універсальним. Застосування інших еталонів розглянуто в п. 2.5.

[5]Ці графіки побудовано за допомогою бібліотеки Matplotlib. Вшановуючи пам'ять її автора, Джона Хантера (1968-2012), надаємо відповідне посилання: https://ieeexplore.ieee.org/document/4160265

третій порядок малості відносно величини $\alpha(x) = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 3x^7}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(2 + 3x^4\right) = 2 + 3 \cdot 0^4 = 2 = \mathrm{const} \neq 0. \rhd$$

Побудуємо узагальнення цього прикладу.

$\lhd$ *Приклад 2.9.* Нехай $\beta(x) = ax^p + bx^q$, де a, b – деякі числа, відмінні від нуля, а p, q – деякі *додатні* показники степеня, причому $p \neq q$ (випадок $p = q$ самостійного інтересу не становить). Очевидно, $\beta(x)$ – нескінченно мала[6] при $x \to 0$. Покажемо, що порядок малості величини $\beta(x)$ відносно величини $\alpha(x) = x$ дорівнює $n = \min(p, q)$, тобто меншому з двох чисел p, q.

Нехай $p < q$. Тоді $n = \min(p, q) = p$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^p + bx^q}{x^p} = \lim_{x\to 0} \frac{x^p\left(a + bx^{q-p}\right)}{x^p} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(a + bx^{q-p}\right) = a + b \lim_{x\to 0} x^{q-p} = a = \mathrm{const} \neq 0,$$

оскільки зараз $q - p > 0$, і тому $\lim\limits_{x\to 0} x^{q-p} = 0$. Отже, порядок малості величини $\beta(x)$ дорівнює p.

Нехай $p > q$. Тепер $n = \min(p, q) = q$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^p + bx^q}{x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{x^q\left(ax^{p-q} + b\right)}{x^q} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(ax^{p-q} + b\right) = a \lim_{x\to 0} x^{p-q} + b = b = \mathrm{const} \neq 0,$$

оскільки зараз $p - q > 0$, і тому $\lim\limits_{x\to 0} x^{p-q} = 0$. Отже, порядок малості величини $\beta(x)$ тепер дорівнює q, що і треба було довести.

Зауважимо, в обох випадках за дужки було винесено той степінь x, показник якого був *меншим* з двох чисел p, q. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 2.10.* Нехай $\beta(x) = ax^2 + bx\sqrt[3]{x}$, де a, b – деякі числа, відмінні від нуля. Очевидно, ця величина стає нескінченно

[6]Важливо, що показники степеня p, q – додатні. Нехай це не так і, наприклад, $p < 0$. Тоді $\beta(x)$ не є нескінченно малою величиною. Справді, позначимо $p_1 = -p$, тоді $p_1 > 0$. Тоді $\beta(x) = ax^p + bx^q = \frac{a}{x^{-p}} + bx^q = \frac{a}{x^{p_1}} + bx^q$. Тоді при $x \to 0$ маємо: $x^{p_1} \to 0$, звідки $\beta(x) \to \infty$ за теоремою 2.2.

Якщо $p = 0$, то β також не є нескінченно малою, оскільки прямує до a.

малою при $x \to 0$. Знайдемо порядок малості величини $\beta(x)$ відносно величини $\alpha(x) = x$. Степені аргументу x в заданому виразі $p = 2$, $q = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. З огляду на попередній приклад порядок малості дорівнює $n = \min\left(2, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Справді, виносячи цей менший степінь за дужки, отримуємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{x}\left(a\sqrt[3]{x^2} + b\right)}{x^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(a\sqrt[3]{x^2} + b\right) = a \cdot 0 + b = b = \text{const} \neq 0.$$

Як бачимо, порядок малості цілим числом може і не бути (і це не протирічить його означенню). $\rhd$

Нехай нескінченно мала $\beta(x)$ має n-й порядок малості відносно еталону $\alpha(x)$, причому $n > 1$. Доведемо, що в цьому разі $\beta = o(\alpha)$. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\beta}{\alpha^n} \cdot \alpha^{n-1}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha^n} \cdot \lim_{x\to x_0} \alpha^{n-1} = 0,$$

оскільки з двох останніх границь перша є константою за умовою, а друга дорівнює нулю при $n > 1$.

Нехай тепер нескінченно мала $\beta(x)$ має n-й порядок малості відносно еталону $\alpha(x)$, причому $0 < n < 1$. Доведемо, що в цьому разі, навпаки, $\alpha = o(\beta)$. За умовою:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha^n} = C = \text{const} \neq 0.$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha^n}{\beta} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta}{\alpha^n}} = \frac{1}{C} = \text{const}.$$

Тоді маємо:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha^n}{\beta} \cdot \alpha^{1-n}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha^n}{\beta} \cdot \lim_{x\to x_0} \alpha^{1-n} = \frac{1}{C} \cdot 0 = 0,$$

оскільки тут $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^{1-n} = 0$ при $1 - n > 0$.

$\lhd$ *Приклад 2.11.* Нехай $\beta(x) = \sqrt{x}$. Очевидно, ця величина стає нескінченно малою при $x \to 0 + 0$. Порядок малості величини $\beta(x)$ відносно величини $\alpha(x) = x$ дорівнює $n = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}} = 1 = \text{const} \neq 0.$$

Насправді це тепер означає, що $\alpha = o(\beta)$:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+0}\sqrt{x} = 0. \ \triangleright$$

Розглянемо ще два приклади.

$\triangleleft$ *Приклад 2.12*. Нехай $\beta(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Очевидно, ця величина стає нескінченно малою при $x \to 0$. Покажемо, що величина $\beta(x)$ має другий порядок малості відносно величини $\alpha(x) = x$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\left[\alpha(x)\right]^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+0^2}+\sqrt{1-0^2}} =$$

$$= \frac{2}{2} = 1 = \mathrm{const} \neq 0,$$

що і треба було довести.

При обчисленні цієї границі спочатку встановлюємо, що вона містить невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ (при спробі безпосередньо підставити $x = 0$ отримуємо: $\beta(0) = \sqrt{1+0^2} - \sqrt{1-0^2} = 0$; власне, саме через це β і є нескінченно малою). Далі застосовуємо відомий прийом «домноження на спряжене» (вперше цей прийом застосовують у середній школі при позбавленні ірраціональності у знаменнику). Застосування формули скороченого множення, відомої як «різниця квадратів», дозволяє позбавитись знаків радикалу у чисельнику, і він після зведення подібних стає рівним $2x^2$. При цьому невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ все ще наявна. Але після скорочення на x^2 вона зникає. Власне, скорочення на x^2 і є дією, яка усуває (розкриває) невизначеність. Після позбавлення невизначеності підстановка $x = 0$ аніяких труднощів не викликає. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 2.13*. Нехай $\beta(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}$. Очевидно, ця величина стає нескінченно малою при $x \to 0$. Покажемо, що тепер величина $\beta(x)$ має перший порядок малості відносно величини $\alpha(x) = x$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^1} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-\left(1-x^2\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}\right)} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} = \mathrm{const} \neq 0,$$

що і треба було довести. $\triangleright$

2.4 Еквівалентність нескінченно малих

2.4.1 Означення еквівалентності

Нехай при порівнянні двох нескінченно малих α і β з'ясувалось, що вони мають однаковий порядок малості. Можна було б очікувати, що ці величини наближено рівні ($\alpha \approx \beta$) *і залишаються такими* при подальшому прямуванні $x \to x_0$. Наближену рівність $\alpha \approx \beta$ можна розуміти так:

$$\alpha(x) = \beta(x) + \gamma(x).$$

Тут $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ є абсолютною похибкою наближеної рівності $\alpha \approx \beta$. Очевидно,

$$\lim_{x\to x_0}\gamma(x) = \lim_{x\to x_0}[\alpha(x)-\beta(x)] = \lim_{x\to x_0}\alpha(x) - \lim_{x\to x_0}\beta(x) = 0 - 0 = 0,$$

тобто при подальшому прямуванні $x \to x_0$ абсолютна похибка γ стає нескінченно малою. Але *це ще не гарантує високу точність* наближеної рівності $\alpha \approx \beta$. Справді, нехай $\alpha = 5x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Можна вважати[7], що $5x \approx x$. При цьому абсолютна похибка становить $\gamma = 4x$ і прямує до нуля (тобто зникає!)

[7]Так само можна вважати, що $5 \approx 1$ з абсолютною похибкою 4.

при $x \to 0$. Але ж при подальшому прямуванні $x \to 0$ величина α так і залишається вп'ятеро більшою за величину β, причому незалежно від x, і тому вести мову про наближену рівність безглуздо.

Наближена рівність $\alpha \approx \beta$ набувала б високої точності, якби до нуля прямувала не тільки абсолютна, а ще й **відносна** похибка наближення. Визначимо її так:

$$\delta(x) = \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - 1.$$

Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} \delta(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = A - 1.$$

Тут $A = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \text{const}$, оскільки α і β мають однаковий порядок малості. Очевидно, відносна похибка δ може стати нескінченно малою (а її границя – рівною нулю) лише в разі $A = 1$. Отже, в межах випадку 3° ($A = \text{const} \neq 0$, див. с. 40) існує лише єдина окрема можливість $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, в разі якої не тільки абсолютна похибка γ, а навіть і *відносна* похибка δ наближеної рівності $\alpha \approx \beta$ прямує до нуля. Такі нескінченно малі називають еквівалентними.

♦ **Означення 2.4.** Нескінченно малі величини $\alpha(x)$, $\beta(x)$ називають **еквівалентними**, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Співвідношення еквівалентності нескінченно малих α, β позначають так: $\alpha \sim \beta$. Очевидно, якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, тобто співвідношення еквівалентності є взаємним.

2.4.2 Теореми про еквівалентні нескінченно малі

В цьому підпункті для скорочення ми не пишемо $x \to x_0$.

■ **Теорема 2.6.** Різниця двох еквівалентних нескінченно малих є нескінченно малою більш високого порядку малості.

□ *Доведення.* Нехай $\alpha \sim \beta$, і $\gamma = \alpha - \beta$. Доведемо, що $\gamma = o(\alpha)$ і $\gamma = o(\beta)$. Маємо:

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Отже, $\gamma = o(\alpha)$. Аналогічно маємо:

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = \lim \frac{\alpha}{\beta} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Отже, $\gamma = o(\beta)$, що і треба було довести. □

■ **Теорема 2.7.** Нехай α, β – нескінченно малі, і $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C$, де $C = \mathrm{const}$. Тоді
$$\beta = C\alpha + o(\alpha).$$

□ *Доведення.* При $C = 0$ треба довести: якщо $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, то $\beta = o(\alpha)$. Але це безпосередньо випливає з означення поняття більш високого порядку малості.

Нехай тепер $C = \mathrm{const} \neq 0$. Тоді α і β – нескінченно малі одного порядку малості. Маємо:
$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = C, \qquad \frac{1}{C} \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \qquad \lim \frac{\beta/C}{\alpha} = 1, \qquad \frac{\beta}{C} \sim \alpha.$$

Тоді за теоремою 2.6 маємо: $\frac{\beta}{C} - \alpha = \delta$, причому $\delta = o(\alpha)$. Отже,
$$\beta = C\alpha + C\delta.$$

Але
$$\lim \frac{C\delta}{\alpha} = C \cdot \lim \frac{\delta}{\alpha} = C \lim \frac{o(\alpha)}{\alpha} = C \cdot 0 = 0,$$
тобто $C\delta = o(\alpha)$, що і треба було довести. □

2.4.3 Таблиця еквівалентних нескінченно малих

2.4.3.1 Перша важлива границя

Розглянемо прямокутний трикутник AOB з прямим кутом при вершині A (рис. 2.2). Нехай кут при вершині O, виражений в радіанах, дорівнює x. Проведемо висоту AD і дугу AC кола з центром в точці O і радіусом OA. Приймемо за очевидне, що
$$AD < AC < AB.$$

Тут AC є довжиною, виміряною вздовж кривої. Маємо:
$$\frac{AD}{OA} < \frac{AC}{OA} < \frac{AB}{OA}.$$

Тут $\frac{AD}{OA} = \sin x$ з прямокутного трикутника AOD; $\frac{AB}{OA} = \operatorname{tg} x$ з прямокутного трикутника AOB. Крім того, $\frac{AC}{OA} = x$ за означенням величини кута в радіанах. Маємо:
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

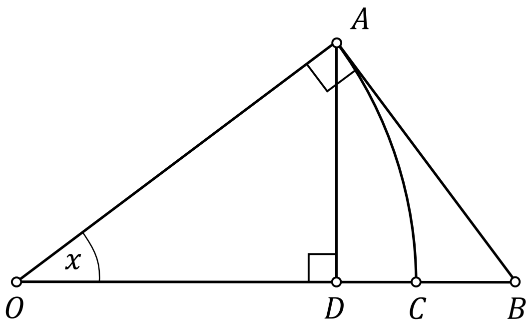


Рисунок 2.2 – До виводу першої важливої границі

Але $\sin x \sim \operatorname{tg} x$, оскільки

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Тоді за теоремою 2.7 маємо $\operatorname{tg} x = \sin x + o(\sin x)$. Тоді

$$\sin x < x < \sin x + o(\sin x), \qquad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x + o(\sin x)}{\sin x}.$$

Здійснюючи тут граничний перехід при $x \to 0$, отримуємо:

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \leqslant \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{o(\sin x)}{\sin x}\right) = 1,$$

звідки $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, тобто $\sin x \sim x$. Цей результат прийнято записувати у вигляді

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \tag{2.1}$$

і називати **першою важливою границею.** (В російськомовній літературі поширений термін «первый замечательный предел»).

Отримаємо наслідки з першої важливої границі.

1°. Доведемо, що $\operatorname{tg} x \sim x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

2°. Доведемо, що $\arcsin x \sim x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \left\| \begin{matrix} \arcsin x = y \\ x = \sin y \\ y \to 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3°. Доведемо, що $\operatorname{arctg} x \sim x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left\| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x = y \\ x = \operatorname{tg} y \\ y \to 0 \end{matrix} \right\| = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Остаточно маємо:

$$\boxed{\sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim x.}$$

Згадаємо також про величину $(1-\cos x)$, яка при $x \to 0$ теж є нескінченно малою, але більш високого порядку малості. А саме, доведемо, що

$$\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.}$$

З використанням формули $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ *зниження степеня* маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1^2 = 1,$$

що і треба було довести.

З першої важливої границі випливає наближена рівність $\sin x \approx x$. Але при її використанні аргумент x повинен бути виражений в радіанах.

$\lhd$ *Приклад 2.14.* Розглянемо наближену рівність $\sin x \approx x$ при $x = 3^\circ$. В радіанній мірі: $x = 3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}05236$; $\sin 3^\circ \approx 0{,}05234$. Відносна похибка $\delta = \frac{x-\sin x}{x}\cdot 100\% = \frac{0{,}05236-0{,}05234}{0{,}05236}\cdot 100\% \approx 0{,}04\%$. Отже, $\sin 3^\circ \approx 3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ з точністю $0{,}04\%$. $\rhd$

2.4.3.2 Друга важлива границя

Розглянемо **другу важливу границю:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

З використанням заміни змінної $x=\frac{1}{n}$, $x\to 0$ отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Прологарифмуємо це граничне співвідношення:

$$\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e.$$

Оскільки логарифм є неперервною функцією, то можна поміняти місцями операції логарифмування і граничного переходу:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right) = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Отже, доведено наступне: $\ln(1+x) \sim x$. Цю еквівалентність можна також подати у вигляді границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

Введемо заміну змінної $x=e^t-1$, $e^t=1+x$, $t=\ln(1+x)$, $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1. \tag{2.2}$$

Отже, доведено наступне: $e^t-1\sim t$ при $t\to 0$. Остаточно маємо:

$$\boxed{\ln(1+x)\sim x,} \qquad \boxed{e^x-1\sim x.}$$

2.4.3.3 Подальші наслідки

З використанням попереднього пункту доведемо ще одне співвідношення еквівалентності: $(1+x)^n-1\sim nx$ при $x\to 0$.

За відомою формулою *бінома Ньютона* маємо:

$$(1+x)^n-1=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k\cdot 1^{n-k}-1=1+C_n^1x+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k-1=$$

$$= nx + x^2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{k-2}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{nx} = \lim_{x\to 0} \frac{nx + x^2 \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k x^{k-2}}{nx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x}{n} \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^{k-2} \right) = 1,$$

що і треба було довести.

Може скластись хибне враження, що доведена еквівалентність є справедливою лише для $n \in \mathbb{N}$. Аби показати, що це не так, побудуємо альтернативне доведення. Показник степеня (замість n, як зазвичай позначають цілі) позначимо через β. Обмежимось лише вимогою $\beta \neq 0$. Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\beta - 1}{\beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\beta} - 1}{\beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\beta\ln(1+x)} - 1}{\beta x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\beta\ln(1+x)} - 1}{\beta\ln(1+x)} \cdot \frac{\beta\ln(1+x)}{\beta x} = \left\| \begin{matrix} \beta\ln(1+x) = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1,$$

що і треба було довести. Остаточно маємо:

$$\boxed{(1+x)^\beta - 1 \sim \beta x.} \tag{2.3}$$

Це співвідношення припускає доволі широкий спектр окремих випадків. Наприклад, при $\beta = 1$ отримуємо точну рівність: $(1+x)^1 - 1 = x$. При $\beta = 2$, нехтуючи величиною x^2 більш високого порядку малості, отримуємо:

$$(1+x)^2 - 1 = \left(1 + 2x + x^2\right) - 1 = 2x + x^2 \sim 2x.$$

При $\beta = 3$, нехтуючи величинами x^2, x^3 більш високих порядків малості, отримуємо:

$$(1+x)^3 - 1 = \left(1 + 3x + 3x^2 + x^3\right) - 1 = 3x + 3x^2 + x^3 \sim 3x.$$

Таблиця 2.1 – Таблиця еквівалентних нескінченно малих

№	Еквівалентність	№	Еквівалентність
1	$\sin x \sim x$	6	$e^x - 1 \sim x$
2	$\operatorname{tg} x \sim x$	7	$\ln(1+x) \sim x$
3	$\arcsin x \sim x$	8	$(1+x)^n - 1 \sim nx$, $n \in \mathbb{R}$
4	$\operatorname{arctg} x \sim x$	8а	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$
5	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	8б	$\frac{1}{1+x} - 1 \sim -x$

Якщо β перестає бути натуральним, то формулами скороченого множення довести відповідні співвідношення еквівалентності важко (а якщо β перестає бути раціональним – то і взагалі неможливо). Однак, навести такі співвідношення легко. Обмежимось випадками $\beta = \frac{1}{2}$ і $\beta = -1$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2},} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} - 1 \sim -x.}$$

Результати, отримані в трьох останніх підпунктах, заслуговують на об'єднання під єдиною назвою «Таблиця еквівалентних нескінченно малих» (таблиця 2.1). В цій таблиці вважається, що $x \to 0$.

2.4.4 Операції з нескінченно малими

2.4.4.1 Множення нескінченно малих

1°. Множення нескінченно малих завжди веде до підвищення порядку малості. Справді, нехай α і β – нескінченно малі при $x \to x_0$, тобто $\lim \alpha = \lim \beta = 0$ (в подальшому запис $x \to x_0$ опускаємо задля спрощення). Утворимо величину $\gamma = \alpha\beta$. Очевидно, що величина γ також є нескінченно малою:

$$\lim \gamma = \lim (\alpha\beta) = \lim \alpha \cdot \lim \beta = 0 \cdot 0 = 0.$$

Очевидно також, що γ – нескінченно мала більш високого порядку малості і порівняно з α, і порівняно з β. Доведемо, що $\gamma = o(\alpha)$:

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\alpha\beta}{\alpha} = \lim \beta = 0.$$

Доведемо, що $\gamma = o(\beta)$:

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\alpha\beta}{\beta} = \lim \alpha = 0.$$

2°. Співвідношення еквівалентності можна «переносити»[8] з одних нескінченно малих на інші: якщо $\alpha \sim \varepsilon$ і $\varepsilon \sim \beta$, то $\alpha \sim \beta$. Справді:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\beta} \right) = \lim \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \lim \frac{\varepsilon}{\beta} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Тому нескінченно мала ε (якщо її вдало підібрано) може *відігравати роль посередника* при порівнянні порядків нескінченно малих α і β. Наприклад, нехай $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = \ln(1+x)$, і $x \to 0$. Тоді α і β – нескінченно малі. Ми вже знаємо, що $\sin x \sim x$ і $\ln(1+x) \sim x$. Тоді нескінченно мала $\varepsilon(x) = x$ виявляється зручним еталоном-посередником при порівнянні порядків малості величин α і β:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отже, $\alpha \sim \beta$.

3°. Якщо деяка нескінченно мала входить у вираз під знаком границі *в якості множника*, то її можна замінити еквівалентною нескінченно малою.

Нехай $\alpha(x)$ є нескінченно малою, і границя $\lim\left[\alpha(x) \cdot \varphi(x)\right]$ при деякому $\varphi(x)$ існує і є скінченною. Нехай, крім того, $\beta(x)$ є нескінченно малою, еквівалентною до $\alpha(x)$, $\beta(x) \sim \alpha(x)$. Тоді границя $\lim\left[\beta(x) \cdot \varphi(x)\right]$ також існує і є скінченною, причому

$$\lim\left[\beta(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim\left[\alpha(x) \cdot \varphi(x)\right].$$

[8]Кажуть, що співвідношення еквівалентності є **транзитивним.**

Справді:

$$\lim \left[\beta(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim \left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \alpha(x) \cdot \varphi(x)\right] =$$

$$= \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim \left[\alpha(x) \cdot \varphi(x)\right] = 1 \cdot \lim \left[\alpha(x) \cdot \varphi(x)\right] = \lim \left[\alpha(x) \cdot \varphi(x)\right].$$

Аналогічно легко довести можливість такої заміни, якщо нескінченно мала входить до виразу під знаком границі як дільник (множник знаменника).

◁ *Приклад 2.15.* Обчислимо границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x)\left(e^{2x}-1\right)}{\operatorname{tg} 3x\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}$. З використанням таблиці 2.1 маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x)\left(e^{2x}-1\right)}{\operatorname{tg} 3x\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+7x)}{7x} \cdot 7x \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x} \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}} \cdot \frac{x}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot 1 \cdot 14x^2}{1 \cdot 1 \cdot x^2} = 14.$$

Очевидно, такий самий результат отримаємо при заміні нескінченно малих їх еквівалентами: $\ln(1+7x) \sim 7x$, $e^{2x} - 1 \sim 2x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{3}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+7x)\left(e^{2x}-1\right)}{\operatorname{tg} 3x\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{7x \cdot 2x}{3x \cdot \frac{x}{3}} = 14. \;\triangleright$$

2.4.4.2 Додавання нескінченно малих

Щойно було показано, що нескінченно малу-множник під знаком границі можна підмінити еквівалентом. Аналогічна підміна нескінченно малої-доданку може призвести до помилки, тобто *підміняти нескінченно малу-доданок еквівалентом під знаком границі в загальному випадку не можна.* Так відбувається через те, що додавання (віднімання) двох нескінченно малих є більш тонкою операцією: порядок суми (різниці) нескінченно малих в різних випадках визначається в різний спосіб.

1°. Нехай α, β_1, β_2 – нескінченно малі, причому $\beta_1 = o(\alpha)$ і $\beta_2 = o(\alpha)$. Нехай $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Доведемо, що також $\beta = o(\alpha)$:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta_1}{\alpha} + \frac{\beta_2}{\alpha}\right) =$$

$$= \lim \frac{\beta_1}{\alpha} + \lim \frac{\beta_2}{\alpha} = 0 + 0 = 0,$$

що і треба було довести.

Формально також можна отримати:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha).$$

Зауважимо, тут безглуздо писати $o(\alpha) + o(\alpha) = 2o(\alpha)$: символи $o(\alpha)$ в передостанній частині цього ланцюжка позначають *різні* величини β_1 і β_2. Більше того, вони можуть бути величинами різних порядків, і ми навіть не знаємо, яких саме. Єдине, що ми поки встановили: сума $(\beta_1 + \beta_2)$ має порядок, вищий за порядок величини α. Тому слід писати $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$.

Введемо заміну змінних $\beta_2' = -\beta_2$. Тоді замість суми отримаємо: $\beta = \beta_1 - \beta_2'$. Очевидно, величини β_2 і β_2' мають однаковий порядок малості. Продовжуючи міркування в аналогічний спосіб, отримаємо:

$$o(\alpha) - o(\alpha) = o(\alpha)$$

(а не нуль, який би виникав, якби символом $o(\alpha)$ ми позначали конкретну величину, а не швидкість її прямування до нуля).

$2°$. Додамо дві нескінченно малі *різних* порядків. При цьому утворюється нескінченно мала *меншого* з двох порядків. Справді, нехай $\gamma = \alpha + \beta$, де $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, причому $\beta = o(\alpha)$. Тоді γ буде мати такий самий порядок, як і α, причому $\gamma \sim \alpha$:

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 + 0 = 1.$$

$3°$. Сума нескінченно малих *однакових* порядків може мати або такий самий порядок, або більш високий. Наприклад, нехай $\alpha = 2x + x^2$, $\beta = 3x + x^3$, $x \to 0$, і $\gamma = \alpha + \beta$. Тоді $\gamma = 5x + x^2 + x^3$. Очевидно, α, β, γ мають однаковий порядок. Справді, порівняймо порядки:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2}{3x + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + x}{3 + x^2} = \frac{2}{3} = \text{const} \neq 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2}{5x + x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + x}{5 + x + x^2} = \frac{2}{5} = \text{const} \neq 0.$$

В той же час існують випадки, коли при додаванні нескінченно малих однакових порядків утворюється нескінченно мала більш високого порядку. Наприклад, нехай $\alpha = x$, $\beta = x^5 - x$,

$x \to 0$. Очевидно, порядки α і β однакові:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^5-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4-1}=-1=\mathrm{const}\neq 0.$$

Але сума $\gamma=\alpha+\beta=x^5$ має більш високий (п'ятий) порядок малості: $\gamma=o(\alpha)$ і $\gamma=o(\beta)$.

В цьому прикладі можна покласти $\beta'=-\beta$. Тоді $\beta'=x-x^5$, і $\beta'\sim\alpha$. Тоді

$$\alpha+\beta=\alpha-\beta'=x^5=o(\alpha)$$

як різниця еквівалентних нескінченно малих (теорема 2.6).

Отже, при додаванні нескінченно малих однакових порядків порядок їх суми може зберігатись або підвищуватись. Саме від цього і буде залежати, якими доданками при обчисленні границь можна нехтувати, а які потрібно враховувати.

$\triangleleft$ *Приклад 2.16*. Обчислити границю $F(p)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x+x^p}{x^3}$ при довільних додатних значеннях p.

Позначимо $\beta(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$, тоді

$$F=\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)+x^p}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

В цьому прикладі ми обмежуємось лише додатними значеннями p, оскільки в разі $p\leqslant 0$ величина x^p перестає бути нескінченно малою.

Якби величини $\operatorname{tg}x$, $\sin x$, які увійшли у вираз під знаком границі у вигляді *доданків*, можна було замінити їх еквівалентом x, ми б отримали: $\beta(x)\equiv 0$,

$$F(p)=\lim_{x\to 0}\frac{0+x^p}{x^3}=\lim_{x\to 0}x^{p-3}=\left[\begin{array}{ll}\infty, & 0<p<3;\\ 1, & p=3;\\ 0, & p>3.\end{array}\right.$$

Але ця відповідь є неправильною. Для отримання правильної відповіді потрібно знайти порядок малості величини $\beta(x)$ і порівняти його з p. Тоді і можна буде обрати одне з трьох: або ми нехтуємо величиною $\beta(x)$ порівняно з величиною x^p, або ми нехтуємо величиною x^p порівняно з величиною $\beta(x)$, або ми враховуємо їх обидві.

Покажемо що $\beta(x)$ має третій порядок малості відносно x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} =$$
$$= \frac{1}{\cos 0} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{const} \neq 0.$$

Отже, за теоремою 2.7 маємо $\beta(x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Тоді

$$F = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3) + x^p}{x^3}.$$

Розглянемо випадок $p = 3$. Тоді

$$F = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3) + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{3}{2}.$$

Тут величини $\beta(x)$ і x^p мають однаковий порядок, і тому враховані обидві.

Розглянемо випадок $p > 3$. Тоді $x^p = o(x^3)$, і

$$F = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Таку саму відповідь можна отримати, якщо врахувати лише $\beta(x)$, а x^p відкинути як величину вищого порядку малості.

Нехай $0 < p < 3$. Тепер, навпаки, $\beta(x) = o(x^p)$, тоді:

$$F = \lim_{x\to 0} \frac{\beta(x) + x^p}{x^3} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{o(x^p) + x^p}{x^p}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{3-p}}}_{\to\infty} = \infty.$$

Таку саму відповідь можна отримати, якщо відкинути $\beta(x)$ як величину вищого порядку малості порівняно з x^p. Остаточно:

$$F(p) = \left[\begin{array}{ll} \infty, & 0 < p < 3; \\ 3/2, & p = 3; \\ 1/2, & p > 3. \end{array} \right. \quad \triangleright$$

2.5 Про експоненціальне зростання

1°. Доведемо, що послідовність $x_n = b^n$ з основою $b > 1$ є нескінченно великою більш високого порядку росту порівняно з послідовністю $y_n = n$, тобто доведемо, що

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty.$$

Покладемо $\delta = b - 1$, тоді $\delta > 0$. За формулою бінома Ньютона при $n > 2$ маємо:

$$x_n = b^n = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^k = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n.$$

Оскільки тут кожний доданок є додатним, то

$$x_n > \frac{n(n-1)}{2}\delta^2.$$

Тоді:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n}{n} > \frac{n-1}{2}\delta^2.$$

Отже, величина $\frac{x_n}{y_n}$ є необмеженою. Справді, для довільного додатного A завжди можна знайти номер $n(A)$, перевищення якого призведе до виконання нерівності $\frac{x_n}{y_n} > A$. Достатньо покласти $A = \frac{n-1}{2}\delta^2$, звідки $n(A) = 1 + \frac{2A}{\delta^2}$. Оскільки $n(A)$ повинно бути натуральним числом, за допомогою знаходження цілої частини остаточно пред'являємо: $n(A) = \left[1 + \frac{2A}{\delta^2}\right] + 1$. Це і доводить, що величина $\frac{x_n}{y_n}$ є необмеженою, тобто $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$.

2°. Доведемо тепер більш сильне твердження:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \qquad (*)$$

де $a = \text{const} > 1$, $k = \text{const} > 0$. Позначаючи $b = a^{\frac{1}{k}}$, маємо: $a = b^k$, причому $b > 1$. Тоді

$$\frac{a^n}{n^k} = \frac{\left(b^k\right)^n}{n^k} = \frac{(b^n)^k}{n^k} = \left(\frac{b^n}{n}\right)^k.$$

Але величина $\frac{b^n}{n}$ прямує до нескінченності, тому величина $\left(\frac{b^n}{n}\right)^k$ при $k > 0$ також прямує до нескінченності, що і потрібно було довести.

3°. Приймемо тепер без доведення наступне. Якщо незалежній змінній n дозволити приймати не тільки натуральні значення, то співвідношення $(*)$ залишиться незмінним:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty, \qquad a > 1.$$

Отже, на плюс нескінченності показникова функція з основою $a > 1$ є нескінченно великою величиною більш високого порядку росту порівняно зі степеневою функцією з довільним показником степеня. Зокрема, функція $f(x) = e^x$ при $x \to +\infty$ має більш високий порядок росту порівняно з виразом x^k при довільному додатному показнику k. Кажуть, що **при необмеженому зростанні аргументу експонента зростає швидше за довільний многочлен.**

4°. Розглянемо тепер величину $\beta(x) = \ln x$. В прикладі 1.8 ми показали, що вона є необмеженою, тобто при $x \to +\infty$ стає нескінченно великою. Тепер ми встановимо, що порядок росту цієї величини виявляється меншим порівняно з виразом x^k при довільному додатному показнику k:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^k} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left\| \begin{matrix} x = e^t \\ \ln x = t \\ t \to +\infty \end{matrix} \right\| = \frac{1}{k} \lim_{kt\to+\infty} \frac{kt}{e^{kt}} = 0.$$

Кажуть, що **при необмеженому зростанні аргументу логарифм зростає повільніше за довільний многочлен.**

5°. Розглянемо тепер величину $\beta(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Очевидно, вона стає нескінченно малою при $x \to +\infty$. Припустимо, її порядок малості відносно $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ дорівнює n. Для визначення n обчислимо наступну границю:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0,$$

причому незалежно від n. Отже, визнати величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ непорівнянними в сенсі п. 4°, с. 40, ми не можемо. Але порівняти їх порядки кількісно ми також не можемо, оскільки згідно п. 1°, с. 40 при довільних n маємо $\beta = o(\alpha)$. Це означає, що шкала нескінченно малих, побудована зі степенів аргументу x (тобто заснована на еталоні $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty$), *не є придатною* для вимірювання швидкості прямування величин вигляду e^{-kx}, $k > 0$, до нуля при $x \to +\infty$. Тому такі величини слід порівнювати з використанням **експоненціального еталону** $\beta(x) = e^{-x}$. В цьому разі з величин β^n може бути сформована якісно інша **експоненціальна шкала нескінченно малих**. Аналогічно, для порівняння нескінченно великих величин вигляду e^{+kx}, $k > 0$, зручно обрати експоненціальний еталон $\beta(x) = e^{+x}$, $x \to +\infty$, і сформувати експоненціальну шкалу β^n нескінченно великих.

◁ *Приклад 2.17.* Величини $\alpha(x) = e^{-x}$, $\beta(x) = e^{-3x}$ є нескінченно малими при $x \to +\infty$. Доведемо, що $\beta = o(\alpha)$, причому β має третій порядок малості відносно α:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-3x}}{\left(e^{-x}\right)^3} = 1 \neq 0. \ \triangleright$$

Зауважимо тепер, еталон $\beta(x) = e^{-x}$, $x \to +\infty$, не є єдино можливою альтернативою еталону $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty$. Розглянемо, наприклад, нескінченно малу $\gamma = e^{-\frac{1}{\beta^2}}$, $\beta \to 0$. Тут ми величину β підносимо до квадрату, щоб показник степеня був від'ємною нескінченно великою. Спробуємо встановити порядок малості величини γ за експоненціальною шкалою β^n:

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\gamma}{\beta^n} = \lim_{\beta \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\beta^2}}}{\left(\beta^2\right)^{\frac{n}{2}}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\beta^2} = t \\ t \to +\infty \end{matrix} \right\| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{e^t} = 0$$

за будь-яких n. Отже, $\gamma = o\left(\beta^n\right)$ за довільних $n > 0$, тобто нескінченно мала γ настільки швидко прямує до нуля, що ескпоненціальна шкала β^n, заснована на еталоні β, виявляється непридатною.

Але «колекціонування» різних еталонів є нескінченним процесом. Наприклад, величину $\delta = e^{-\frac{1}{\gamma^2}}$, $\gamma \to 0$, неможливо виміряти аніяким степенем величини γ, величину $\varepsilon = e^{-\frac{1}{\delta^2}}$, $\delta \to 0$, неможливо виміряти аніяким степенем величини δ, і т.д. Таким чином, для кожного еталону завжди знайдеться нескінченно мала, яка настільки швидко прямує до нуля порівняно з ним, що цей еталон стає непридатним, і виникає потреба в новому, ще більш «швидкому» еталоні.

При розв'язуванні навчальних задач зазвичай достатньо обмежитись степеневою і експоненціальною шкалами.

6°. Аналогічні висновки можна зробити стосовно величини $\beta(x) = \frac{1}{\ln x}$, яка стає нескінченно малою при $x \to +\infty$. Покажемо, що β прямує до нуля *повільніше* порівняно з довільним дробом $\alpha(x) = \frac{1}{x^n}$, $n > 0$. А саме, доведемо, що $\alpha = o(\beta)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^n}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x = e^t \\ t \to +\infty \end{matrix} \right\| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = 0.$$

Отже, поряд з експоненціальним («швидким») еталоном є сенс розглядати і логарифмічний («повільний») еталон швидкості прямування до нуля. Відповідно, вирази $\left(\frac{1}{\ln x}\right)^n$, $x \to +\infty$, утворюють **логарифмічну шкалу нескінченно малих**.

За допомогою експоненціальної функції вдавалось для кожного еталону підібрати ще більш «швидкий». Аналогічно за допомогою логарифмічної функції можна для кожного еталону підібрати ще більш «повільний». Нехай $\beta \to 0$.

Приймемо цю величину в якості основної (тобто в якості еталону). Це породжує шкалу нескінченно малих β^n, $n > 0$. Утворимо величину $\gamma = \frac{1}{\ln(\beta^2)}$ (підносимо до квадрату, щоб аргумент логарифму був додатним). Доведемо, що γ прямує до нуля повільніше порівняно з довільним елементом β^n цієї шкали, тобто доведемо, що при довільному $n = \text{const} > 0$ (навіть близькому до нуля) виконується співвідношення $\beta^n = o(\gamma)$:

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta^n}{\gamma} = \lim_{\beta\to 0} \left(\beta^2\right)^{\frac{n}{2}} \ln\left(\beta^2\right) = \left\| \begin{array}{l} \beta^2 = e^{-t} \\ t \to +\infty \end{array} \right\| = \lim_{\beta\to 0} e^{-\frac{nt}{2}} \cdot (-t) = 0.$$

Це доводить, що шкала β^n є непридатною для порівняння з γ.

Тепер для кожної «повільної» величини можна створювати ще більш «повільну»: $\delta = \frac{1}{\ln(\gamma^2)}$, $\varepsilon = \frac{1}{\ln(\delta^2)}$ і т.д.

Зауважимо також наступне. Величина $\gamma = \frac{1}{\ln \beta^2}$ виявлялась нескінченно малою: $\lim\limits_{\beta^2\to 0} \ln \beta^2 = [\ln(0+0)] = -\infty$, і $\left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0$.

Утворимо тепер величину $\gamma' = \frac{1}{\ln \frac{1}{\beta^2}}$. Вона також є нескінченно малою: $\lim\limits_{\beta^2\to 0} \ln \frac{1}{\beta^2} = [\ln(+\infty)] = +\infty$, і $\left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$. Доведемо наступне: γ' є настільки «повільною», що її також неможливо виміряти шкалою β^n:

$$\gamma' = \frac{1}{\ln \frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{\ln\left(\beta^2\right)^{-1}} = \frac{1}{-\ln \beta^2} = -\gamma.$$

Тоді очевидно:

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta^n}{\gamma'} = -\lim_{\beta\to 0} \frac{\beta^n}{\gamma} = 0.$$

Отже, який би еталон ми не обрали, для нього завжди знайдеться нескінченно мала, як більш «швидка», так і більш «повільна», така, що цей еталон буде непридатним для її вимірювання, тобто для визначення її порядку малості за шкалою цього еталону. Те ж саме тепер неважко довести і для еталонів нескінченно великих.

2.6 Практичні прийоми усунення невизначеності

Розглянемо практичні приклади, які містять невизначеності різних типів.

2.6.1 Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$

Цей тип невизначеності детально обговорено в попередньому пункті. Коротко резюмуючи, повторимо: якщо нескінченно мала входить до виразу під знаком границі у вигляді співмножника, то її можна замінити еквівалентом. Тому всю техніку усунення невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ можна звести до перетворення виразу під знаком границі до вигляду, коли застосування таблиці еквівалентів стає можливим. В нагоді стають різні заміни змінних. Якщо $x \to x_0 \neq 0$, то до нескінченно малих переходять за допомогою заміни $t = x - x_0$, $t \to 0$. Якщо $x \to \infty$, то вводять заміну $t = \frac{1}{x}$, $t \to 0$.

$\lhd$ *Приклад 2.18.* Обчислимо границю $F = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)^{10}-1}{x-3}$. Покладаючи $t = x - 3$, $t \to 0$, отримуємо:

$$F = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{10} - 1}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{10t}{t} = 10.$$

Використали п. 8 таблиці еквівалентів при $n = 10$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 2.19.*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin x - \sin\alpha}{x - \alpha} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left\|\begin{matrix} t = x - \alpha \\ t \to 0 \end{matrix}\right\| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\alpha) - \sin\alpha}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cos\frac{t+2\alpha}{2}\sin\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0} \cos\frac{t+2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \cos\alpha.$$

Використали першу важливу границю і врахували, що множник $\cos\frac{t+2\alpha}{2}$ при підстановці $t = 0$ ніяких проблем обчислювального характеру не викликає, і тому внеску до невизначеності не створює. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 2.20.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} = \left\|\begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ t \to 0 \end{matrix}\right\| = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{\operatorname{tg} t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1.$$

Скористались таблицею еквівалентів, п.п. 2, 6. $\rhd$

2.6.2 Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

2.6.2.1 Загальний підхід

Нехай $f(x)$, $g(x)$ – нескінченно великі при деякому прямуванні $x \to x_0$. Покладемо $\alpha(x) = \frac{1}{g(x)}$, $\beta(x) = \frac{1}{f(x)}$. Тоді за теоремою 2.1 величини $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Отже, невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ завжди можна звести до вже розглянутої невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

◁ *Приклад 2.21.*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg}x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left\|\begin{matrix}t=\frac{\pi}{2}-x\\ t\to 0+0\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln t}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln t}{\operatorname{ctg}t}=\lim_{t\to 0+0}\frac{\operatorname{tg}t}{\frac{1}{\ln t}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0+0}\frac{\operatorname{tg}t}{t}\cdot\frac{t}{\frac{1}{\ln t}}=0,$$

оскільки $\operatorname{tg}t\sim t$ і $t=o\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ (див. табл 2.1 та п. 2.5, 4°). ▷

2.6.2.2 Границя відношення многочленів

Існує окремий важливий випадок невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, яку зручно розкрити в інший спосіб. Нехай $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени n-го і m-го степенів:

$$P_n(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n,\qquad p_0\neq 0,$$

$$Q_m(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_{m-1}x+q_m,\qquad q_0\neq 0.$$

Обчислимо границю $F=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Очевидно, вона містить невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Покажемо, що результат залежить від співвідношення між m і n.

1°. Нехай $m=n$. Маємо:

$$F=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots+\frac{p_n}{x^n}\right)}{x^n\left(q_0+\frac{q_1}{x}+\cdots+\frac{q_n}{x^n}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots+\frac{p_n}{x^n}}{q_0+\frac{q_1}{x}+\cdots+\frac{q_n}{x^n}}.$$

Після скорочення на x^n границя ніякої невизначеності вже не містить:

$$F=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}p_0+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p_1}{x}+\cdots+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{p_n}{x^n}}{\lim\limits_{x\to\infty}q_0+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{q_1}{x}+\cdots+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{q_n}{x^n}}=\frac{p_0}{q_0},$$

оскільки кожна границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{const}}{x^k}=0$, $k>0$. Отже, границя відношення двох многочленів однакових степенів дорівнює відношенню старших коефіцієнтів.

2°. Нехай $m>n$. Маємо:

$$F=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(p_0+\frac{p_1}{x}+\cdots+\frac{p_n}{x^n}\right)}{x^m\left(q_0+\frac{q_1}{x}+\cdots+\frac{q_m}{x^m}\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots + \frac{p_n}{x^n}}{q_0 + \frac{q_1}{x} + \dots + \frac{q_m}{x^m}} \right) = 0$$

за теоремою 2.3. Справді, остання границя невизначеності не містить: другий дріб прямує до $\frac{p_0}{q_0}$, тобто на нескінченності є обмеженим, а перший дріб є нескінченно малою при $m-n>0$.

3°. Нехай $m<n$. Маємо:

$$F = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n \left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots + \frac{p_n}{x^n}\right)}{x^m \left(q_0 + \frac{q_1}{x} + \dots + \frac{q_m}{x^m}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x^{n-m} \cdot \frac{p_0 + \frac{p_1}{x} + \dots + \frac{p_n}{x^n}}{q_0 + \frac{q_1}{x} + \dots + \frac{q_m}{x^m}} \right) = \infty$$

за теоремою 2.4. Справді, остання границя невизначеності не містить: другий дріб прямує до $\frac{p_0}{q_0} = \text{const} \neq 0$, а перший дріб є нескінченно великою при $n-m>0$.

Узагальнюючи три наведені можливості, в загальному вигляді маємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left[\begin{array}{ll} p_0/q_0, & m=n; \\ 0, & m>n; \\ \infty, & m<n. \end{array} \right.$$

◁ *Приклад 2.22.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x+7}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(6+\frac{7}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{7}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{6+0}{2-0} = 3.$$

Але таку відповідь одразу можна отримати, будуючи відношення $\frac{6}{2}=3$ старших коефіцієнтів многочленів однакового (першого) степеня. ▷

◁ *Приклад 2.23.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x+7}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(6+\frac{7}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{6+\frac{7}{x}}{2-\frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

Але таку відповідь одразу можна отримати, зважаючи на те, що степінь заменника (другий) більший за степінь чисельника (перший). ▷

◁ *Приклад 2.24.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^5+7}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5\left(6+\frac{7}{x^5}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(x^3 \cdot \frac{6+\frac{7}{x^5}}{2-\frac{1}{x^2}} \right) = \infty.$$

Але таку відповідь одразу можна отримати, зважаючи на те, що степінь заменника (другий) менший за степінь чисельника (п'ятий). ▷

2.6.3 Робота з ірраціональностями

2.6.3.1 Квадратні корені

Нехай деякий вираз під знаком границі містить множник вигляду $\alpha(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ – деякі функції, неперервні в точці x_0, і $f(x_0) = g(x_0) = b > 0$. Очевидно, $\alpha(x)$ стає нескінченно малою при $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} \left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} - \lim_{x\to x_0} \sqrt{g(x)} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)} - \sqrt{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \sqrt{f(x_0)} - \sqrt{g(x_0)} = \sqrt{b} - \sqrt{b} = 0.$$

Тоді множник $\alpha(x)$ може спричиняти появу невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $[0 \cdot \infty]$. Перетворимо множник $\alpha(x)$ за допомогою прийому «домноження на спряжене»:

$$\alpha(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{\left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)}{\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 - \left(\sqrt{g(x)}\right)^2}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} = (f(x) - g(x)) \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}.$$

Позначимо $\beta(x) = f(x) - g(x)$, тоді

$$\alpha(x) = \beta(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to x_0} \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right) = \sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)} = 2\sqrt{b} = \mathrm{const} \neq 0,$$

то $\beta(x)$ також є нескінченно малою:

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = \lim_{x\to x_0} \alpha(x) \left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right) = 0 \cdot 2\sqrt{b} = 0.$$

Перехід від нескінченно малої $\alpha(x)$ до нескінченно малої $\beta(x)$ не усуває невизначеності (в разі її наявності), але дозволяє працювати з невизначеністю, яка вже не містить ірраціональності. Справді, величина $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)$ прямує до $2\sqrt{b}\neq 0$ і внеску до невизначеності не створює; при обчисленні границі суму коренів можна винести за знак граничного переходу. Цю ідею ілюструють приклади 2.11, 2.12.

2.6.3.2 Корені вищих степенів

Нехай деякий вираз під знаком границі містить множник вигляду $\alpha(x)=\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ – деякі функції, неперервні в точці x_0, і $f(x_0)=g(x_0)=b\neq 0$. Вираз $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ *назвемо спряженим* до виразу $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. В цьому разі прийом «домноження на спряжене» базуватиметься на формулі скороченого множення, відомій як *різниця кубів*. Маємо:

$$\alpha(x)=\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}\right)\left(\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}\right)}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}=$$

$$=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}.$$

Позначаючи, як і раніше, $\beta(x)=f(x)-g(x)$, отримуємо:

$$\alpha(x)=\beta(x)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}.$$

Границя останнього знаменника

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{f^2(x_0)}+\sqrt[3]{f(x_0)g(x_0)}+\sqrt[3]{g^2(x_0)}\right)=3\sqrt[3]{b^2}=\text{const}\neq 0.$$

Тому $\beta(x)$ стає нескінченно малою одночасно з $\alpha(x)$, але вже не містить ірраціональності.

$\lhd$ *Приклад 2.25.* Обчислимо границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{6-5x}}{x-1}.$$

Очевидно, спряженою до чисельника є величина

$$A(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(6-5x)} + \sqrt[3]{(6-5x)^2}\right),$$

оскільки

$$\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{6-5x}\right) \cdot A(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{6-5x}\right)^3 =$$

$$= x - (6-5x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

і ірраціональності не містить. Маємо:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{6-5x}}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{6-5x}\right) A(x)}{(x-1)A(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{6(x-1)}{(x-1)A(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{6}{A(x)} =$$

$$= \frac{6}{A(1)} = \frac{6}{\left(\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1\cdot(6-5\cdot 1)} + \sqrt[3]{(6-5\cdot 1)^2}\right)} = 2.$$

Тут усунення невизначеності відбувається в момент скорочення на «дужку» $(x-1)$. $\triangleright$

Очевидно, користуючись іншими формулами скороченого множення, можна «винаходити» і інші спряжені величини. Наприклад, маючи на увазі формулу скороченого множення

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

природно величину $A = \sqrt[5]{f^4} + \sqrt[5]{f^3g} + \sqrt[5]{f^2g^2} + \sqrt[5]{fg^3} + \sqrt[5]{g^4}$ назвати **спряженою** до різниці $\left(\sqrt[5]{f} - \sqrt[5]{g}\right)$, оскільки при побудові добутку $\left(\sqrt[5]{f} - \sqrt[5]{g}\right) \cdot A = f - g$ ірраціональність зникає.

2.6.4 Невизначеності типу $[\infty - \infty]$, $[\infty \cdot 0]$

Розглянемо величину $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. (В цих границях x_0 може бути константою або нескінченністю). З одного боку, величина $\varphi(x)$ має бути нескінченно великою за рахунок доданку $f(x)$. З іншого боку, вона може і не бути такою за рахунок від'ємника $g(x)$. Конкуренція цих двох факторів і породжує невизначеність типу $[\infty - \infty]$.

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великими *різних порядків* росту, то ця невизначеність розкривається безпосередньо на користь доданку з більшим порядком росту. Нехай $f(x)$ є величиною більш високого порядку росту порівняно з $g(x)$, тобто нехай $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = +\infty$$

за теоремою 2.4. Для відповідності до позначень цієї теореми достатньо покласти $C(x) = 1 - \frac{g(x)}{f(x)}$. Маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} C(x) = 1 \neq 0$.

$\triangleleft$ *Приклад 2.26.*

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty. \triangleright$$

Нехай, навпаки, $g(x)$ є величиною більш високого порядку росту порівняно з $f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Тоді аналогічно

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = -\infty$$

за теоремою 2.4. Для відповідності до позначень цієї теореми достатньо покласти $C(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$. Маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} C(x) = -1 \neq 0$.

$\triangleleft$ *Приклад 2.27.*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x^5\right) = \lim_{x \to +\infty} x^5 \left(\frac{1}{x^3} - 1\right) = -\infty. \triangleright$$

Нехай тепер величини $f(x)$ і $g(x)$ мають *однаковий порядок* росту, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C = \mathrm{const} \neq 0$. Тоді достатньо розглянути три випадки.

1°. Нехай $C > 1$. Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} g(x) (C - 1) = +\infty.$$

$\triangleleft$ *Приклад 2.28.* Обчислимо границю

$$F = \lim_{x \to +\infty} \left(3x^2 - x\sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Порівнюючи порядки доданків, маємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=3>1.$$

Отже, порядки виявились однаковими. Тоді отримуємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x^2-x\sqrt{x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{x^2+1}\left(\frac{3x^2}{x\sqrt{x^2+1}}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x^2+1}\cdot(3-1)\right]=+\infty. \rhd$$

2°. Нехай $0<C<1$. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}f(x)\left(1-\frac{1}{C}\right)=-\infty.$$

Тут враховано, що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{1}{C},$$

а також, що $1-\frac{1}{C}<0$ при $0<C<1$.

3°. Нехай тепер $C=1$. Фактично це випадок еквівалентності нескінченно малих $\frac{1}{f(x)}$ і $\frac{1}{g(x)}$. В цьому разі обидві розглянуті границі містять невизначеність типу $[\infty\cdot 0]$ за рахунок того, що нескінченно малою стає і $\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)$, і $\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$. Цю невизначеність легко перетворити на невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Наприклад, позначимо $\alpha(x)=\frac{1}{g(x)}$, тоді $\alpha(x)$ – нескінченно мала. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-1}{\alpha(x)}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

а невизначеність такого типу вже розглянуто.

$\lhd$ *Приклад 2.29.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{6}{x}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{6}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left\|\begin{matrix}t=\frac{1}{x}\\ t\to 0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+6t}-1}{t}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot 6t}{t}=3. \rhd$$

2.6.5 Невизначеність типу $[1^\infty]$

Для розкриття невизначеності даного типу достатньо користуватись основною логарифмічною тотожністю $z=e^{\ln z}$, $z>0$, і властивостями логарифмічної функції.

Розглянемо вираз $[f(x)]^{g(x)}$. Нехай

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty,$$

де x_0 може бути константою або нескінченністю. Нехай також

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a=\mathrm{const}>0.$$

На підставі властивостей показникової функції маємо два випадки. Якщо $a>1$, то невизначеності не виникає: ясно, що

$$\lim_{x\to x_0} f^g=+\infty.$$

Якщо $0<a<1$, відповідь знову очевидна:

$$\lim_{x\to x_0} f^g=0.$$

Невизначеність даного типу виникне лише у випадку $a=1$. Маємо:

$$\lim_{x\to x_0} f^g=\lim_{x\to x_0} e^{\ln f^g}=\lim_{x\to x_0} e^{g\cdot\ln f}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(g\cdot\ln f)}.$$

Тут ми скористались неперервністю експоненти при перенесенні операції граничного переходу всередину цієї функції.

Якщо f прямує до одиниці, то $\ln f$ прямує до нуля. Тоді добуток $g \cdot \ln f$ є джерелом невизначеності типу $[\infty \cdot 0]$. Отже, застосування логарифму не усуває невизначеність, а лише перетворює її тип на більш простий (ширше можна застосовувати таблицю еквівалентів).

◁ *Приклад 2.30.*

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\sin 2x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2} = e^{1\cdot 1\cdot 2} = e^2.$$

На додаток до викладеного скористались таблицею еквівалентів: $\ln(1+t) \sim t$ при $t = \sin 2x$; $\sin 2x \sim 2x$. ▷

◁ *Приклад 2.31.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)+1}{n+2}\right)^{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1} = [1^\infty] = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)}{\frac{1}{n+2}}} = e^{1\cdot 1} = e. \ ▷$$

2.6.6 Невизначеності типів $[0^0]$, $[\infty^0]$

Розглянемо величину x^x, $x > 0$. При $x \to 0$ малими стають і основа степеня, і його показник. З одного боку, $x^0 = 1$. Але, з іншого боку, $0^x = 0$. Отже маємо конкуренцію двох факторів, тобто невизначеність типу $\left[0^0\right]$. Розкриємо її:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} =$$

$$= e^{[0\cdot\infty]} = \left\| \begin{array}{l} x = e^{-t} \\ \ln x = -t \\ t \to +\infty \end{array} \right\| = e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right)} = e^{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)} = e^0 = 1.$$

Отже, як і в попередньому пункті, застосування логарифму не усуває невизначеності, але дозволяє перетворити її тип на більш зручний.

◁ *Приклад 2.32.*

$$\lim_{x\to 0+0}(\sin x)^{\sqrt{1+x}-1} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln(\sin x)^{\sqrt{1+x}-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} e^{(\sqrt{1+x}-1)\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(\sqrt{1+x}-1)\ln(\sin x)} = e^{[0\cdot\infty]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot x\ln(\sin x)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(\sin x)\right)}.$$

Оскільки $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$, то перша границя дорівнює $\frac{1}{2}$. Для обчислення другої границі позначимо $\sin x = e^{-t}$, $t \to +\infty$. Тоді $x = \arcsin e^{-t}$,

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln(\sin x) = \lim_{t\to+\infty}\arcsin e^{-t}\cdot(-t) =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\frac{\arcsin e^{-t}}{e^{-t}}\cdot\frac{t}{e^t} = -1\cdot 0 = 0.$$

Остаточно $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x)^{\sqrt{1+x}-1} = e^0 = 1$. ▷

Втім, іноді невизначеність типу $\left[0^0\right]$ вдається усунути і безпосередньо.

◁ *Приклад 2.33.*

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{\cos x-1} = \left[0^0\right] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} =$$

$$= e^{\left[\frac{0}{0}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Застосували еквівалентність $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$. ▷

Невизначеність вигляду $\left[\infty^0\right]$ розкривається також із застосуванням логарифму. Продемонструємо це на наступному прикладі.

◁ *Приклад 2.34.*

$$\lim_{x\to 0+0}(-\ln x)^x = \left[\infty^0\right] = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln\{(-\ln x)^x\}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(-\ln x)} =$$

$$= e^{[0\cdot\infty]} = \left\|\begin{array}{l}\ln x = -z\\ x = e^{-z}\\ z\to+\infty\end{array}\right\| = e^{\lim\limits_{z\to+\infty} e^{-z}\ln z} = e^{\lim\limits_{z\to+\infty}\frac{\ln z}{e^z}} = e^0 = 1.$$

При обчисленні останньої границі враховано, що експонента зростає швидше за довільний многочлен, а логарифм – повільніше за довільний многочлен. Справді:

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\ln z}{e^z} = \lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^z}\cdot\frac{\ln z}{z} = 0\cdot 0 = 0. \ ▷$$

2.6.7 Правило Лопіталя

Для розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ зручно застосовувати правило Лопіталя. Воно засноване на використанні похідної, яку більш детально розглянемо в наступному розділі. Зараз же будемо відштовхуватись від того, що читач має певні уявлення (на рівні середньої школи) про три аспекти: означення похідної, таблиця похідних і правила диференціювання.

За означенням *похідною* функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називають границю $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, якщо вона існує і є скінченною.

Таблиця похідних містить результати застосування означення похідної до основних елементарних функцій: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$, $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, і т.д.

До *правил диференціювання* відносять наступні формули: $(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ і деякі інші.

Нехай границя $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ містить невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Доведемо, що границя відношення нескінченно малих дорівнює відношенню їх похідних в даній точці:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{2.4}$$

За теоремою 2.7 для функцій $f(x)$, $g(x)$ маємо:

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\ g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{cases}$$

З наявності невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ випливає, що $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}{g'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0) + 0}{g'(x_0) + 0} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

що і треба було довести.

$\lhd$ *Приклад 2.35.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{(\sin x)'\big|_{x=0}}{x'\big|_{x=0}} = \frac{\cos 0}{1} = 1. \rhd$$

◁ *Приклад 2.36.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{(e^x-1)'\big|_{x=0}}{x'\big|_{x=0}}=\frac{e^0}{1}=1.\ \triangleright$$

◁ *Приклад 2.37.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{(\ln(1+x))'\big|_{x=0}}{x'\big|_{x=0}}=\frac{\frac{1}{1+0}}{1}=1.\ \triangleright$$

◁ *Приклад 2.38.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{nx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{((1+x)^n-1)'\big|_{x=0}}{(nx)'\big|_{x=0}}=\frac{n(1+0)^{n-1}}{n}=1.\ \triangleright$$

Як бачимо, за допомогою (2.4) легко побудувати усю таблицю еквівалентних нескінченно малих. Але формула (2.4) має обмежену область застосування. Наприклад, ми вважали, що з наявності невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ випливає: $f(x_0)=0$. Насправді це не зовсім так; з наявності цієї невизначеності лише випливає, що $f(x)$ є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Якби ми формулювали *додаткову* вимогу неперервності функції $f(x)$ в точці $x=x_0$, то лише б тоді мали $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0$. Якщо функція $f(x)$ в точці $x=x_0$ є розривною, то ця рівність порушується. Крім того, похідна в точці перестає існувати. Тому додатково потрібно формулювати вимогу існування похідної. Нарешті, потрібно перевіряти, що $g'(x_0)\neq 0$.

Правило Лопіталя – це узагальнення формули (2.4), яке припускає послаблення викладених обмежень. Без строгого доведення приймемо його в наступному вигляді. Нехай: 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $x\in(x_0;b]$; 2) функції $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно малими при $x\to x_0$; 3) в кожній точці проміжку $x\in(x_0;b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$, $g'(x)$, причому $g'(x)\neq 0$; 4) існує (скінченна або ні) границя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тоді також

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Орієнтуючись на практичне застосування, правилу Лопіталя зручно надати *граничної форми*: якщо чотири наведені вимоги виконано, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},} \tag{2.5}$$

тобто **границя відношення нескінченно малих дорівнює границі відношення їх похідних.** Зверніть увагу: (2.5) відрізняється від (2.4) наявністю граничного переходу в правій частині. Саме через це чотири наведені вимоги достатньо перевіряти на проміжку $x\in(x_0;b]$, а не на інтервалі $x\in[x_0;b]$. Зокрема, саме в точці $x=x_0$ похідна $g'(x_0)$ може дорівнювати будь-чому або навіть не існувати взагалі, аби лише вона існувала і не дорівнювала нулю при $x>x_0$.

Форму (2.5) правила Лопіталя, на відміну від форми (2.4), можна застосувати *декілька разів поспіль*, доки невизначеність не зникне.

$\lhd$ *Приклад 2.39.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}. \rhd$$

$\lhd$ *Приклад 2.40.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=\frac{6}{\cos 0}=6. \rhd$$

В разі невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ правило Лопіталя набуває аналогічного вигляду. Нехай: 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $x\in(x_0;b]$; 2) функції $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великими при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$; 3) в кожній точці проміжку $x \in (x_0; b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$, $g'(x)$, причому $g'(x) \neq 0$; 4) існує (скінченна або ні) границя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тоді також

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Тут, зокрема, x_0 може бути константою або нескінченністю.

◁ *Приклад 2.41.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Знову підтвердили, що логарифм «повільніший» за степеневу функцію. ▷

2.7 Питання для перевірки

1. Що таке нескінченно мала величина?
2. Що таке нескінченно велика величина?
3. Нехай $\alpha(x)$ – нескінченно велика при $x \to x_0$. Доведіть, що $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно мала при $x \to x_0$.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про границю добутку нескінченно малої і обмеженої величин.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про перенесення символу граничного переходу всередину складної функції.
6. Що таке невизначеність? Вкажіть типи невизначеностей.
7. Що таке порядок малості нескінченно малої? Як порівнюють порядки малості нескінченно малих?
8. Що таке порядок росту нескінченно великої? Як порівнюють порядки росту нескінченно великих?
9. Як кількісно визначити порядок малості однієї нескінченно малої відносно іншої?

10. Що таке шкала нескінченно малих?

11. Нехай $x \to 0+0$. Як порівняти порядки малості нескінченно малих x^n, $n > 0$, і x^p, $p > 0$?

12. Нехай $x \to +\infty$. Як порівняти порядки росту нескінченно великих x^n, $n > 0$, і x^p, $p > 0$?

13. Чи може порядок малості бути нецілим числом?

14. Чи може порядок малості дорівнювати нулю?

15. Чи може порядок малості бути від'ємним числом?

16. Що таке еквівалентні нескінченно малі?

17. Який порядок малості має різниця двох еквівалентних нескінченно малих?

18. Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – нескінченно малі, і $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C$, де $C = \text{const}$. Доведіть, що $\beta(x) = C\alpha(x) + o(\alpha(x))$.

19. Сформулюйте першу важливу границю і її наслідки.

20. Сформулюйте другу важливу границю і її наслідки.

21. Для нескінченно малої $\alpha(x) = (1+x)^n - 1$, $x \to 0$, побудуйте еквівалентну нескінченно малу. Для яких значень n побудоване співвідношення еквівалентності є справедливим?

22. Який порядок малості має добуток двох нескінченно малих?

23. Який порядок малості має сума двох нескінченно малих різних порядків?

24. Який порядок малості може мати сума двох нескінченно малих однакових порядків?

25. Порівняйте швидкість зростанні нескінченно великих e^x і x^n $(n > 0)$ при $x \to +\infty$.

26. Який порядок малості має нескінченно мала e^{-x} порівняно з нескінченно малою $\frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$?

27. Який порядок росту має нескінченно велика $\ln x$ порівняно з нескінченно великою $x \to +\infty$?

28. Шкала нескінченно малих вигляду x^n, $n > 0$, $x \to 0+0$, не може бути універсальною. Чому? Чому взагалі не існує універсальна шкала нескінченно малих?

29. Чому шкала нескінченно великих вигляду $(\ln x)^n$, $n > 0$, $x \to +\infty$, не може бути універсальною? Чому взагалі не існує універсальна шкала нескінченно великих?

30. Як розкривають невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$?

31. Як знаходять границю відношення двох многочленів при прямуванні $x \to \infty$?

32. Як усувають невизначеність за наявності ірраціональності у виразі під знаком границі?

33. Як усувають невизначеність типу $[\infty - \infty]$, якщо нескінченно великі мають різні порядки росту?

34. Які три випадки можливі при позбавленні невизначеності типу $[\infty - \infty]$, якщо обидві нескінченно великі мають однаковий порядок росту?

35. Як застосовують основну логарифмічну тотожність при розкритті невизначеностей типу $[1^\infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$?

36. Сформулюйте правило Лопіталя розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. За яких умов воно може бути застосоване?

37. В чому полягає послаблення умов застосування правила Лопіталя у граничній формі (2.5)?

38. Коли правило Лопіталя у граничній формі доречно використовувати декілька разів поспіль? Наведіть приклади.

39. В чому полягає відмінність умов застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ і $\left[\frac{0}{0}\right]$?

3 ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1 Означення і зміст похідної

Розглянемо дві допоміжні задачі, які ведуть до поняття похідної від функції дійсного змінного.

1°. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $x = x(t)$. Це означає, що до формули $x(t)$ можна підставити *будь-який* момент часу t і отримати координату x матеріальної точки саме в цей момент.

Нехай потрібно визначити *швидкість* матеріальної точки в момент часу t_0. Тут і надалі домовляються про наступне. Літери без індексів позначають *змінну* як таку, а відповідні літери з індексами – деяке можливе *стале* значення цієї змінної. Наприклад, t – час взагалі, а t_0 – деякий конкретний момент.

В момент часу t_0 положення точки характеризується координатою $x_0 = x(t_0)$. Нехай проходить деякий час Δt, і настає момент $t = t_0 + \Delta t$. Матеріальна точка встигає переміститись в положення з координатою $x = x(t) = x(t_0 + \Delta t)$. Шлях, пройдений за час Δt, становить $\Delta x = x - x_0$. За означенням, **середньою швидкістю** за інтервал часу Δt називають відношення пройденого шляху до витраченого часу:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Середня швидкість $\langle v \rangle$ може виявитись різною при різних Δt. Наприклад, нехай рух відбувається з прискоренням. Тоді більшому значенню Δt відповідатиме більше значення $\langle v \rangle$, оскільки швидкість збільшується в процесі руху. Інтерес становить швидкість саме в момент t_0 (а не швидкість, яка встановиться через тривалий час Δt). Тому **миттєву швидкість** визначають як середню за інтервал Δt, але за наступної умови: час Δt повинен бути настільки малим, щоб швидкість змінюватись не встигала. Достатньо покласти $\Delta t \to 0$. Але тоді у виразі $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ виникає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$: якщо час Δt спостерігання за рухом нескінченно малий, то і шлях Δx за цей час також нескінченно малий. Тоді дріб $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ домовляються розуміти у граничному сенсі. Тому миттєву швидкість визначають як *границю середньої швидкості* при $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \langle v \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

$\lhd$ *Приклад 3.1.* Нехай матеріальна точка здійснює рівноприскорений прямолінійний рух за законом $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Координати матеріальної точки в моменти t_0 і $t = t_0 + \Delta t$ відповідно дорівнюють:

$$x_0 = x(t_0) = v_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2},$$

$$x = x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 \left(t_0 + \Delta t\right) + \frac{a \left(t_0 + \Delta t\right)^2}{2}.$$

Шлях, пройдений за час Δt, становить $\Delta x = x - x_0$,

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \left[(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2\right] = \Delta t \left[v_0 + \frac{a}{2} \cdot (2t_0 + \Delta t)\right].$$

Тоді $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$,

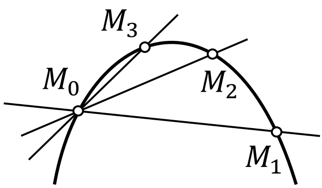
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \left[v_0 + \frac{a}{2} \cdot (2t_0 + \Delta t)\right]}{\Delta t} = \left[\frac{0}{0}\right] = v_0 + at_0.$$

Вважаючи тепер, що t_0 може бути довільними моментом, остаточно отримуємо закон: $v(t) = v_0 + at$.

До речі, цей закон приймають як означення прискорення $a = \frac{v(t) - v_0}{t}$ для випадку $a = \text{const}$. $\rhd$

2°. Знайдемо **рівняння дотичної,** проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$.

Перш за все, надамо означення дотичної до гладкої кривої. Недостатньо вважати, що дотична – це пряма, яка має з кривою лише одну спільну точку. Наприклад, пряма $y = 1$ і крива $y = x^3$ мають лише одну спільну точку $(1, 1)$. Але така пряма не є дотичною. Неправильно також вважати, що дотична – це пряма, яка має з кривою лише одну спільну точку і «лежить по один бік» від кривої. Наприклад, пряма $y = 0$ є дотичною до кривої $y = x^3$ в точці $(0, 0)$, але ця пряма «лежить по різні боки» від кубічної параболи.



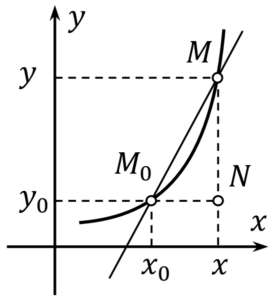


Рисунок 3.1 – До означення дотичної

Дотичну до кривої L в точці $M_0 \in L$ проводять в наступний спосіб. На кривій обирають послідовність точок $M_k \in L$, $k \in \mathbb{N}$, так, щоб відстані M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3 і т.д. зменшувались, прямуючи до нуля (рис. 3.1, ліворуч). Проводять січні M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3 і т.д. При переході від точки M_k до точки M_{k+1} відбувається поворот січної навколо точки M_0 на кут $\angle M_kM_0M_{k+1}$. Якщо при подальшому переході до наступної точки цей кут стає нескінченно малим, то поворот в граничному сенсі зникає, тобто січна наближається до граничного положення. Тому приймають наступне означення. **Дотичною називають пряму, яка займає граничне положення січної.**

Перейдемо до знаходження рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$. Значення функції в цій точці дорівнює $y_0 = f(x_0)$. Тому початкова точка має координати $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.1, праворуч). Тоді рівняння дотичної

$$y_{\text{дот}} = y_0 + k(x - x_0)$$

(легко перевірити, що ця пряма проходить через точку M_0 при довільному k). Нехай поточна точка має координати $M(x, y)$. Тоді відповідна січна має кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу)

$$k_{\text{січної}} = \frac{MN}{M_0N} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

За означенням дотичної кутовий коефіцієнт дотичної повинен

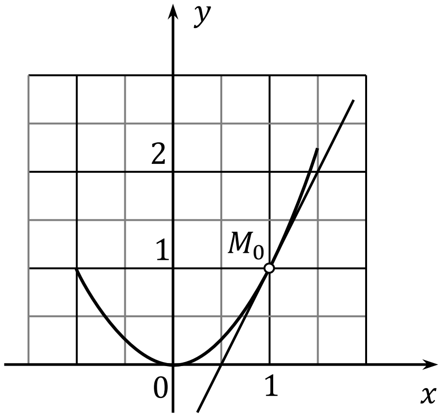


Рисунок 3.2 – Дотична до параболи

дорівнювати границі кутового коефіцієнту січної:

$$k = \lim_{x \to x_0} k_{\text{січної}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

◁ *Приклад 3.2.* Знайдемо рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^2$ в точці $x_0 = 1$. Значення функції в цій точці дорівнює $y_0 = x_0^2 = 1^2 = 1$. Тоді рівняння дотичної

$$y_{\text{дот}} = 1 + k(x - 1).$$

Кутовий коефіцієнт k дотичної знайдемо як границю кутового коефіцієнту відповідної січної:

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Тоді $y_{\text{дот}} = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$. На рис. 3.2 подано геометричну інтерпретацію отриманого результату. ▷

Ми розв'язали дві задачі: про знаходження миттєвої швидкості матеріальної точки за відомим рівнянням руху $x = x(t)$ і про знаходження рівняння дотичної до плоскої кривої за відомим рівнянням $y = f(x)$ цієї кривої. Порівнюючи наведені розв'язки, бачимо, що вони містять обчислення деякої границі, яка виникає за однаковою схемою. Ключову роль в цій схемі відіграють поняття **приросту аргументу** і **приросту функції.**

Нехай x_0 – деяке обране (і отже, *стале*) значення аргументу. Поряд з ним розглядають «сусіднє» (і, загалом кажучи, *змінне*) значення аргументу x. Різницю $\Delta x = x - x_0$ і називають **приростом аргументу.** На рис. 3.1 приростом аргументу є довжина M_0N. На символ Δx слід дивитись як на єдине ціле, а не як на добуток двох величин Δ і x, оскільки Δ є не числом, а символом, яким позначається приріст величини x. В подальшому при обчисленні границь замість прямування $x \to x_0$ ми будемо писати $\Delta x \to 0$, розглядаючи Δx як *незалежну змінну*. Принципово, що Δx не залежить від x_0: в якому місці x_0 ми досліджуємо поведінку функції $f(x)$ – це одне питання, а на яку відстань Δx ми бажаємо від цього місця відійти – інше.

Нехай значення досліджуваної функції в точках x_0 і x становлять $y_0 = f(x_0)$ і $y = f(x)$ відповідно. Значення y_0 є *сталим*. Не так цікаво, чому воно дорівнює. Цікавіше знати, як зміниться значення функції при «пересуванні» точки x_0 в положення x. Очевидно, значення функції при такому «пересуванні» збільшиться[1] на $\Delta y = y - y_0$. Цю різницю і називають **приростом функції.** На рис. 3.1 приростом функції є довжина MN.

Схема, за якою виникає границя в розглянутих задачах, полягає в наступному. Задаються певним значенням x_0 аргументу і обчислюють відповідне значення функції $y_0 = f(x_0)$. Потім аргументові надають приросту Δx, обчислюють нове значення аргументу $x = x_0 + \Delta x$, нове відповідне значення функції $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$, і далі – приріст функції $\Delta y = y - y_0$. Нарешті, утворюють відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ і обчислюють його границю при $\Delta x \to 0$. Якщо ця границя існує і є скінченною, то її називають похідною функції $f(x)$ в точці x_0.

♦ **Означення 3.1. Похідною** функції $f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля, тобто границю

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Похідну часто позначають символом «штрих».

[1] Цілком може статись, що $y < y_0$. Тоді $\Delta y = y - y_0 < 0$. В цьому разі вібдувається зменшення значення функції, яке формально можна вважати «збільшенням на деяку від'ємну величину».

Механічний зміст похідної – миттєва швидкість зростання функції. **Геометричний зміст** похідної – тангенс кута, утворюваного дотичною до графіку функції в даній точці з додатним напрямком осі аргументу.

Для однієї і тієї самої функції похідну можна обчислювати при різних x_0, і при цьому отримувати різні результати. Отже, похідна функції залежить від x_0. Інакше кажучи, *похідна функції, в свою чергу, також є деякою (іншою) функцією.* Тому кажуть, що похідна характеризує **локальну** поведінку функції в околі точки x_0. Якщо границя (3.1) існує, то вона не залежить від Δx. Вона залежить лише від x_0. Слово «локальний» розуміють як «той, що стосується даної конкретної точки x_0».

$\triangleleft$ *Приклад 3.3.* Знайдемо похідну функції $f(x) = x^3$. За означенням в точці x_0 маємо:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2\right]}{\Delta x} = 3x_0^2.$$

Скористались формулою куба суми. Вважаючи тепер, що x_0 може бути довільним, розглядатимемо його як незалежну змінну величину. Тому індекс «нульове» можна опустити. Остаточно маємо: $\left(x^3\right)' = 3x^2$. Отже, при диференціюванні[2] кубічної функції виникає інша функція – квадратична. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 3.4.* Знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$. За означенням в точці x_0 маємо:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x_0^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{3} x_0^{-\frac{2}{3}}.$$

Скористались таблицею еквівалентів, п. 8, при $n = \frac{1}{3}$. Опускаємо індекс «нульове». Остаточно: $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. $\triangleright$

[2]Диференціювання – це процедура знаходження похідної.

◁ *Приклад 3.5.* Знайдемо за означенням похідну лінійної функції $f(x) = kx + b$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[k(x_0 + \Delta x) + b] - [kx_0 + b]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Як з'ясувалось, $(kx + b)' = k = \text{const}$. ▷

3.2 Властивості диференційовних функцій

3.2.1 Про неперервність

При диференціюванні може трапитись один з трьох випадків: похідна в точці або існує і є скінченною, або існує лише у невласному сенсі (границя (3.1) дорівнює нескінченності), або не існує взагалі. Наприклад, похідна функції $y = x^3$ дорівнює $y' = 3x^2$ і є скінченною в будь-якій точці x_0. Похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x_0 = 0$ не існує як скінченна величина, але існує у невласному сенсі і дорівнює $\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{0^2}}\right] = \infty$. Цей результат має геометричний сенс: дотичною до графіка функції $y = \sqrt[3]{x}$ в точці $x_0 = 0$ є вісь Oy. Вона утворює кут $\frac{\pi}{2}$ з додатним напрямком осі Ox, і $\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\right] = \infty$. Похідна функції $y = |x|$ в точці x_0 не існує взагалі: ні як скінченна, ані як нескінченна. Справді, при $x \to 0 + 0$ маємо: $|x| = x$, і $y' = 1$. При $x \to 0 - 0$ маємо: $|x| = -x$, і $y' = -1$. Цей результат також має геометричний сенс: дотичну до графіка в точці зламу провести однозначно неможливо.

Отже, з усіх функцій природно виокремити клас функцій, які в даній точці мають скінченну похідну.

⧫ **Означення 3.2.** Функцію $f(x)$ називають **диференційовною в точці** x_0, якщо її похідна в цій точці існує і є скінченною.

⧫ **Означення 3.3.** Функцію $f(x)$ називають **диференційовною на інтервалі** $x \in (a; b)$, якщо вона є диференційовною в кожній точці x_0 цього інтервалу.

Похідна є зручним інструментом дослідження властивостей функції. Наприклад, дослідження на неперевність можна замінити (більш сильним) дослідженням на диференційовність.

■ **Теорема 3.1.** Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці.

□ *Доведення*. Нехай $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді за теоремою 2.7

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad y = y_0 + f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Здійснюючи у цьому рівнянні граничний перехід при $\Delta x \to 0$, отримуємо:

$$\lim_{x \to x_0} y = y_0,$$

що і є означенням неперервності. □

Отже, з диференційовності функції випливає її неперервність. Але не навпаки: з неперервності функції її диференційовність ще не випливає. Наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x_0 = 0$ є неперервною, але не є диференційовною. Тому і кажуть, що диференційовність функції є більш сильною вимогою порівняно з неперервністю.

3.2.2 Про монотонність

Похідну зручно застосовувати також при дослідженні функції на монотонність.

♦ **Означення 3.4.** Функцію $f(x)$ називають **монотонно зростаючою (спадною) на інтервалі** $x \in (a; b)$, якщо при двох *довільних* значеннях x_1, x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ (нерівність $f(x_2) < f(x_1)$ відповідно).

Функція могла бути визначеною на деякій множині X, яка є сукупністю декількох інтервалів, що не перетинаються. На цей випадок наведене означення можна узагальнити до наступного вигляду.

♦ **Означення 3.5.** Кажуть, що функція $f(x)$ **монотонно зростає (спадає) на множині** X, якщо для *довільної* пари значень $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ (нерівність $f(x_2) < f(x_1)$ відповідно).

■ **Теорема 3.2.** Нехай функція $f(x)$ є диференційовною на інтервалі $(a; b)$. Якщо функція зростає на цьому інтервалі, то в кожній точці $x_0 \in (a; b)$ виконано нерівність $f'(x_0) \geqslant 0$.

□ *Доведення*. Нехай $x_0 = \text{const}$ і x – дві довільні точки інтервалу, $x \neq x_0$. Якщо $x > x_0$, то за умовою зростання $f(x) > f(x_0)$. Якщо $x < x_0$, то за умовою зростання $f(x) < f(x_0)$. Отже, в будь-якому випадку різниці $(x - x_0)$ і $(f(x) - f(x_0))$ мають однаковий знак. Тоді

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Здійснюючи тут граничний перехід при $x \to x_0$, отримуємо потрібне. $\square$

Можна довести і обернену теорему.

■ **Теорема 3.3.** Нехай функція $f(x)$ є диференційовною на інтервалі $(a; b)$. Якщо в кожній точці $x_0 \in (a; b)$ виконано нерівність $f'(x_0) > 0$, то функція зростає на цьому інтервалі.

$\lhd$ *Приклад 3.6.* Розглянемо функцію $y = x^3$. Як ми встановили, її похідна дорівнює $y' = 3x^2$. Якщо $x \neq 0$, то $x^2 > 0$. Отже, функція $y = x^3$ зростає на інтервалі $x \in (-\infty; 0)$, а також на інтервалі $x \in (0; +\infty)$. В точці $x = 0$ вона теж зростає, що легко встановити за означенням монотонного зростання. За останньою теоремою це встановити не вдається, оскільки миттєва швидкість зростання дорівнює нулю, але все ж таки це зростання. Остаточно, функція зростає на множині $x \in \mathbb{R}$. $\rhd$

У випадку *монотонного спадання* доводять аналогічну теорему: якщо в довільній точці x_0 інтервалу виконано нерівність $f'(x_0) < 0$, то функція спадає на цьому інтервалі. І навпаки, якщо функція спадає на деякому інтервалі, то в довільній точці x_0 цього інтервалу виконано нерівність $f'(x_0) \leqslant 0$.

$\lhd$ *Приклад 3.7.* Розглянемо функцію $y = x^2$. Її похідна

$$y' = \left(x^2\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x.$$

Якщо $x > 0$, то $y' > 0$; маємо зростаючу вітку параболи. При $x < 0$ маємо $y' < 0$ (спадна вітка). $\rhd$

Наведеним означенням і теоремам зручно надати *граничної форми*. При цьому зникає потреба досліджувати знак похідної в кожній точці інтервалу; достатньо обмежитись аналізом знаку поодинокого значення $f'(x_0)$.

⧫ **Означення 3.6.** Функцію $f(x)$ називають **монотонно зростаючою (спадною) в точці** x_0, якщо існує таке $\delta > 0$, що ця функція зростає (спадає) на інтервалі $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Наведемо приклад, коли таке значення δ не існує. Нехай $f(x) = x^2$, і $x_0 = 0$. Маємо інтервал $x \in (-\delta; +\delta)$. На його лівій половині функція спадає, а на правій – зростає. Отже, на усьому інтервалі якийсь один тип монотонності їх не притаманний. І ніяким зменшенням δ цього змінити не можна.

Відповідні теореми переформулюємо в наступний спосіб.

■ **Теорема 3.4.** Якщо $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0. І навпаки, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0, то $f'(x_0) \geqslant 0$ ($f'(x_0) \leqslant 0$).

3.3 Техніка диференціювання

Під словами «техніка диференціювання» розуміють систему правил знаходження похідних. В цьому розділі ми обмежимось лише технікою диференціювання функцій однієї змінної. Ця техніка передбачає два основні аспекти – таблицю похідних і правила диференціювання. Під таблицею похідних розуміють перелік виразів для похідних основних елементарних функцій, а правила диференціювання дозволяють диференціювати інші елементарні функції, які є комбінаціями основних. Крім того, до техніки диференціювання слід віднести також спосіб знаходження похідної за допомогою логарифмування, спосіб знаходження похідної оберненої функції, а також способи знаходження похідної функцій, заданих параметрично і неявно.

3.3.1 Правила диференціювання

1°. Похідна константи дорівнює нулю: $C' = 0$. Справді, приріст константи $\Delta C = 0$. Отже, маємо:

$$\boxed{C' = 0.}$$

2°. Похідна суми функцій дорівнює сумі їх похідних. Справді, нехай функцію $f(x)$ подано у вигляді суми двох диференційовних функцій, $f(x) = u(x) + v(x)$. Нехай аргумент x отримує приріст Δx. Тоді функції u, v за теоремою 2.7 отримують приріст $\Delta u = u'\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta v = v'\,\Delta x + o(\Delta x)$ відповідно. При цьому вони набувають значень $u + \Delta u$, $v + \Delta v$. Тоді функція f змінюється від значення $[u + v]$ до значення $[(u + \Delta u) + (v + \Delta v)]$. Тоді приріст функції f становить

$$\Delta f = [(u + \Delta u) + (v + \Delta v)] - [u + v] =$$

$$= \Delta u + \Delta v = u'\,\Delta x + v'\,\Delta x + o(\Delta x) = \left[u' + v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]\Delta x.$$

Тоді
$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[u' + v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = u' + v'.$$

Остаточно маємо:
$$\boxed{(u+v)' = u' + v'.}$$

Зокрема, покладемо $v = C = \mathrm{const}$, тоді $v' = C' = 0$. Маємо:

$$(u + C)' = u'.$$

Отже, якщо константа входить до виразу як *доданок*, то при диференціюванні вона зникає.

3°. Похідну добутку обчислюють за формулою

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

Справді, нехай функцію $f(x)$ подано у вигляді добутку двох диференційовних функцій, $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Нехай аргумент x отримує приріст Δx. Тоді функції u, v за теоремою 2.7 отримують приріст $\Delta u = u'\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta v = v'\,\Delta x + o(\Delta x)$ і набувають значень $u + \Delta u$, $v + \Delta v$. Отже, функція f змінюється від значення $u(x) \cdot v(x)$ до значення $(u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$. Тоді приріст функції f становить

$$\Delta f = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v =$$

$$= u\,[v'\,\Delta x + o(\Delta x)] + v\,[u'\,\Delta x + o(\Delta x)] +$$

$$+ [v'\,\Delta x + o(\Delta x)] \cdot [u'\,\Delta x + o(\Delta x)] =$$

$$= u\left[v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]\Delta x + v\left[u' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]\Delta x +$$

$$+ \left[v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] \cdot \left[u' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right](\Delta x)^2.$$

Тоді

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = u'v + uv' + (u+v)\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} + \left[v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] \cdot \left[u' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]\Delta x.$$

Залишається здійснити граничний перехід при $\Delta x \to 0$ і врахувати, що $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$; отримаємо потрібне.

Зокрема, покладемо $v = C = \text{const}$, тоді $v' = C' = 0$. Маємо:

$$(uC)' = u'C.$$

Отже, якщо константа входить до виразу як *множник*, то при диференціюванні вона залишається в якості множника.

4°. Похідну дробу обчислюють за формулою

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad v \neq 0.}$$

Справді, нехай функцію $f(x)$ подано у вигляді частки двох диференційовних функцій, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Нехай аргумент x отримує приріст Δx. Тоді функції u, v за теоремою 2.7 отримують приріст $\Delta u = u'\,\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta v = v'\,\Delta x + o(\Delta x)$ і набувають значень $u + \Delta u$, $v + \Delta v$. Тоді функція f змінюється від значення $\frac{u}{v}$ до значення $\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$. Тоді приріст функції f становить

$$\Delta f = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v\,(v + \Delta v)} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v + \Delta v)} \cdot \Delta x =$$

$$= \frac{v\left(u' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) - u\left(v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)}{v^2\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)} \cdot \Delta x.$$

Тоді

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v\left(u' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) - u\left(v' + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)}{v^2\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)}.$$

Здійснимо тут граничний перехід при $\Delta x \to 0$. Оскільки функція v диференційовна, то вона тим паче є неперервною. Отже, приріст Δv прямує до нуля разом з Δx. Враховуючи, крім того, що $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$, отримуємо потрібне.

Узагальнимо отримані результати в таблиці 3.1.

До правил диференціювання відносять також спосіб знаходження похідної складної функції. Нижче ми розглянемо це питання в окремому пункті.

Таблиця 3.1 – Правила диференціювання

№	Дія	Результат
1	Диференціювання константи	$C' = 0$
2	Диференціювання суми	$(u+v)' = u' + v'$
3	Диференціювання добутку	$(uv)' = u'v + uv'$
4	Диференціювання частки	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

3.3.2 Таблиця похідних

Скористаємось тепер формулою (3.1) для знаходження похідних основних елементарних функцій.

1°. Знайдемо похідну *степеневої* функції $y = x^n$. Маємо

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^n \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{n-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \frac{\Delta x}{x} = t \\ t \to 0 \end{array} \right\| = x^{n-1} \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^n - 1}{t}}_{=n} = nx^{n-1},$$

де використано (2.3) (див. с. 53) при $\beta = n$. Остаточно маємо:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Як і (2.3), ця формула справедлива для будь-яких n. Слід запам'ятати окремі випадки, які виникають при $n = 1$, $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $n = -1$:

$$\boxed{x' = 1, \quad \left(x^2\right)' = 2x, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.}$$

Останню формулу можна отримати і так:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

2°. Знайдемо за означенням похідну *синусу.* Застосовуючи формулу
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
отримуємо:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Остаточно маємо:
$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

3°. Знайдемо за означенням похідну *косинусу.* Застосовуючи формулу
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
отримуємо:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Остаточно маємо:
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

4°. Знайдемо похідну *тангенсу*:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Остаточно маємо:
$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

5°. Знайдемо похідну *котангенсу*:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Остаточно маємо:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.}$$

6°. Знайдемо за означенням похідну *показникової* функції:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\ln a^{\Delta x}} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \ln a \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x \ln a} \cdot \ln a =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \Delta x \ln a = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right\| = a^x \ln a \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}}_{=1} = a^x \ln a.$$

Тут враховано (2.2). В окремому випадку, коли $a = e$, маємо $\ln a = \ln e = 1$. Отримуємо: $(e^x)' = e^x$. Остаточно маємо:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x.}$$

7°. Знайдемо за означенням похідну *логарифмічної* функції:

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \left\| \begin{matrix} \frac{\Delta x}{x} = t \\ t \to 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}}_{=1} = \frac{1}{x}.$$

Для логарифму з довільною основою a ($a > 0$, $a \neq 1$), застосовуючи формулу переходу до іншої основи, маємо:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Зокрема, при $a = e$ отримаємо попередній результат, оскільки $\ln e = 1$.

Залишається обчислити похідні обернених тригонометричних функцій. Ми зробимо це нижче, але для зручності користування результати наведемо вже зараз, складаючи повну таблицю 3.2.

Таблиця 3.2 – Похідні елементарних функцій

№	Функція	Похідна
1	Степенева	$(x^n)' = nx^{n-1}$
2	Синус	$(\sin x)' = \cos x$
3	Косинус	$(\cos x)' = -\sin x$
4	Тангенс	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
5	Котангенс	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
6	Показникова	$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$
7	Логарифмічна	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
8	Арксинус	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9	Арккосинус	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10	Арктангенс	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
11	Арккотангенс	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.3.3 Похідна складної функції

Розглянемо поняття **складної функції.** Тут термін «складна» має суто математичний[3] зміст «складена» (з декількох, вбудованих одна всередину іншої). Кожного разу, маючи справу зі

[3]А не цивільний зміст «важка», «громіздка» тощо.

складною функцією, потрібно розрізняти окремі її складові – внутрішню функцію і зовнішню функцію. Наприклад, функція $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ є складною. В тому числі $g(x) = 2x + \frac{\pi}{6}$ є внутрішньою функцією, а $y = \sin g$ – зовнішньою. Наприклад, функція $y = \sqrt{x^2 + 5}$ є складною. В тому числі $g(x) = x^2 + 5$ є внутрішньою функцією, а $y = \sqrt{g}$ – зовнішньою. Наприклад, функція $y = \ln \sin x$ є складною. В тому числі $g(x) = \sin x$ є внутрішньою функцією, а $y = \ln g$ – зовнішньою. Наприклад, функція $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ є складною. В тому числі $g(x) = \operatorname{arctg} x$ є внутрішньою функцією, а $y = e^g$ – зовнішньою. В цих прикладах внутрішню функцію «вбудовано всередину» зовнішньої (лінійну – всередину синусу, квадратичну – всередину кореня, синус – всередину логарифма, арктангенс – всередину експоненти). В загальному вигляді складну функцію записують так: $y = f(g(x))$.

Розрізнити внутрішню і зовнішню функцію легко. При обчисленні значення складної функції $f(g(x))$ спочатку обчислюють $g(x)$, а потім – $f(g)$. Отже, яке обчислення здійснюється раніше, те і відповідає внутрішній функції. Зауважимо, величина g вже є функцією для x, але в той же час вона виконує роль аргументу («вихідної сировини» для подальших обчислень) з точки зору функції f. Отже складна функція – це функція від функції.

Складні функції можуть бути складеними з тих, що в свою чергу також є складними. Можна розглядати функцію від функції від функціїї, функцію від функції від функціїї від функції, і т.д. Наприклад, $y = e^{\sin 2x}$ є «двічі» складною. Справді, нехай $\varphi(x) = 2x$, $g(\varphi) = \sin\varphi$, $y(g) = e^g$. Тоді ця складна функція є $y(g(\varphi(x)))$. Тому можна розрізняти рівні вкладеності. В цьому прикладі φ є «найбільш» внутрішньою за рівнем вкладеності; g є проміжною за рівнем вкладеності (вже зовнішньою для φ, але ще внутрішньою для y), а y – «найбільш» зовнішньою. Додамо, що обмежень на кількість рівнів вкладеності не існує. «Тричі» складною є функція $y = e^{\sin^2 2x}$. Справді, позначаючи $\varphi(x) = 2x$, $\psi(\varphi) = \sin\varphi$, $g(\psi) = \psi^2$, $y(g) = e^g$, маємо: $y = y(g(\psi(\varphi(x))))$.

Похідну складної функції обчислюють за формулою:

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'_g \cdot g'_x.} \tag{3.2}$$

Тут нижнім індексом вказано ту змінну, за якою відбувається диференціювання. Справді, нехай $g = g(x)$ і $f = f(g)$ – диференційовні функції. Нехай аргумент x отримує приріст Δx. Тоді функція g отримує приріст Δg. При цьому якщо g диференційовна, то вона тим паче є неперервною. Отже, якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta g \to 0$.

Функція g, в свою чергу, виконує роль аргументу для функції f. Тому функція f отримує приріст Δf. Тоді маємо:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'_g \cdot g'_x.$$

Якщо складна функція має декілька рівнів вкладеності, то формулу (3.2) застосовують потрібну кількість разів поспіль:

$$[f(g(\varphi(x)))]' = f'_g \cdot g'_x = f'_g \cdot g'_\varphi \cdot \varphi'_x,$$

$$[f(g(\varphi(\psi(x))))]' = f'_g \cdot g'_x = f'_g \cdot g'_\varphi \cdot \varphi'_x = f'_g \cdot g'_\varphi \cdot \varphi'_\psi \cdot \psi'_x,$$

і т.д. При цьому порядок дій виявляється протилежним порядку дій при обчисленні значення функцій. А саме, коли ми обчислювали *значення функції*, дії починались з внутрішньої функції, і завершувались зовнішньою. Тепер, коли йдеться про обчислення *похідної*, диференціюють спочатку зовнішні функції, а потім – все більш внутрішні. Інакше кажучи, **напрямок дій при диференціюванні складної функції – ззовні всередину.**

Обчислимо похідні наведених вище прикладів.

Нехай $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ і потрібно знайти $y'(x)$. Позначимо $g(x) = 2x + \frac{\pi}{6}$, тоді $g'_x = \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)' = 2$. Маємо:

$$y'_x = (\sin g(x))'_x = (\sin g)'_g \cdot g'_x = \cos g \cdot 2 = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Зазвичай літеру g лише мають на увазі, але не пишуть її. Практично доцільно зробити такі записи:

$$\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Доцільність полягає в тому, що тепер символ «штрих» позначає похідну лише за змінною x. Отже, ми позбавляємось необхідності вказувати індексом ту змінну, за якою диференціюємо. Наступні приклади продиференціюємо аналогічно:

$$\left(\sqrt{x^2+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} \cdot \left(x^2+5\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}},$$

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

$$\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x}\cdot(\operatorname{arctg} x)' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2},$$

$$\left(e^{\sin 2x}\right)' = e^{\sin 2x}\cdot(\sin 2x)' = e^{\sin 2x}\cos 2x\cdot(2x)' = 2e^{\sin 2x}\cos 2x,$$

$$\left(e^{\sin^2 2x}\right)' = e^{\sin^2 2x}\cdot\left(\sin^2 2x\right)' = e^{\sin^2 2x}\cdot 2\sin 2x\cdot(\sin 2x)' =$$

$$= 2e^{\sin^2 2x}\sin 2x\cos 2x\cdot(2x)' = 4e^{\sin^2 2x}\sin 2x\cos 2x.$$

Зауважимо також, що досвідчений «розв'язувальник» символ «штрих» запише лише один раз – в умові задачі. Зиск від цього полягає в скороченні записів і стає тим більш суттєвим, чим більший рівень вкладеності внутрішніх функцій. З урахуванням цього зауваження маємо:

$$\left(\sqrt{x^2+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}\cdot 2x,$$

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

$$\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(e^{\sin 2x}\right)' = e^{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2,$$

$$\left(e^{\sin^2 2x}\right)' = e^{\sin^2 2x}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2.$$

Нарешті, розглянемо окремий випадок складної функції, де зовнішня функція є степеневою. Маємо:

$$([f(x)]^n)' = n\left([f(x)]^{n-1}\right)\cdot f'(x).$$

З точки зору практики зручно запам'ятати цю формулу в двох окремих випадках. По-перше, покладаючи $n = \frac{1}{2}$, отримуємо:

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}.$$

Кажуть: «похідна від кореня – це одиниця ділити на два *таких* кореня (і множити на похідну того, що було під знаком кореня)». По-друге, покладаючи $n = -1$, отримуємо:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Доречі, цей результат можна отримати і інакше:

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{1' \cdot f - 1 \cdot f'}{f^2} = \frac{0 - f'}{f^2} = -\frac{f'}{f^2}.$$

3.3.4 Про обернені функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Тут x – значення аргументу, y – відповідне значення функції. Формула $y = f(x)$ вирішує *пряму* задачу: за відомим x знайти y, яке йому відповідає. Поставимо *обернену* задачу: за відомим y відновити те значення x, якому відповідає задане y. Очевидно, достатньо розв'язати рівняння $y = f(x)$ відносно x, тобто знайти вираз для x. Цей розв'язок залежатиме від y, тобто матиме вигляд $x = g(y)$. Для зберігання звичних позначень (x – аргумент, y – функція) здійснюють взаємозаміну $x \leftrightarrow y$. Функцію, яка при цьому виникає, називають **оберненою до початкової.** Її позначають[4] $g = f^{-1}$.

$\lhd$ *Приклад 3.8.* До функції $y = x^3$ знайдемо обернену. Маємо: $x = \sqrt[3]{y}$. Цей розв'язок також є функцією, але від аргументу y. Після взаємозаміни $x \leftrightarrow y$ отримуємо: $y = \sqrt[3]{x}$. Отже, оберненою до функції $f(x) = x^3$ є функція $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. $\rhd$

Оскільки при побудові оберненої функції x і y міняються ролями, то міняються ролями і інтервали їх зміни. Нехай областю визначення функції $f(x)$ є інтервал $x \in (a; b)$. Після взаємозаміни для оберненої функції $g = f^{-1}$ отримаємо $y \in (a; b)$. Отже, інтервал, який був *областю визначення* «прямої» функції, стає *множиною значень* оберненої функції. Аналогічно, множина значень «прямої» функції стає областю визначення оберненої функції.

$\lhd$ *Приклад 3.9.* Нехай $y = e^x$. Звідси $x = \ln y$. Після взаємозаміни $x \leftrightarrow y$ отримуємо: $y = \ln x$. Отже, до функції $f(x) = e^x$ оберненою є функція $g(x) = f^{-1}(x) = \ln x$.

Для функції $y = e^x$ область визначення $x \in \mathbb{R}$, а множина значень $y > 0$. Відповідно, для оберненої функції $y = \ln x$

[4]Це позначення виникає як аналогія до позначення взаємно обернених чисел. Наприклад, для числа 5 оберненим є число $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. Тут символ «-1» є показником степеня. В разі функцій він є *не показником степеня*, а лише символом оберненої функції. Наприклад, функція, обернена до $\sin x$ – це $\arcsin x$. На сучасних калькуляторах (в тому числі вбудованих в операційну систему Windows) відповідна клавіша позначена як $\sin^{-1}$. Це треба розуміти як $\sin^{-1} x = \arcsin x$, а не як $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$.

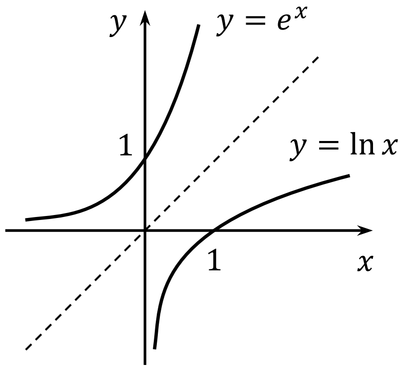


Рисунок 3.3 – Симетрія графіків прямої і оберненої функції

область визначення $x > 0$, а множина значень $y \in \mathbb{R}$. $\triangleright$

Графічно взаємозаміну $x \leftrightarrow y$ легко здійснити за допомогою осьової симетрії відносно прямої $y = x$ (саме при такій симетрії вісь Ox переходить у вісь Oy, а вісь Oy – у вісь Ox). Отже, графіки двох взаємно обернених функцій симетричні один одному відносно бісектриси першої і третьої координатних чвертей (рис. 3.3).

Відношення оберненості є взаємним: якщо $g(x)$ є оберненою до $f(x)$, то $f(x)$ є оберненою до $g(x)$, тобто не можна розрізнити, яка з них є «первинною». Інакше, якщо $g = f^{-1}$, то $f = g^{-1}$.

Нехай одна з двох взаємно обернених функцій «переводить» x в y. Тоді інша здійснює обернене перетворення:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x, \qquad f^{-1}\left(f(x)\right) = x. \tag{3.3}$$

Наголосимо, множини значень x, на яких виконуються ці рівності, можуть бути різними (див. нижче).

Вище ми мовчазно припускали, що розв'язок $x = g(y)$ рівняння $y = f(x)$ є єдиним. Припустимо тепер, що при деякому y_0 рівняння $y_0 = f(x)$ має два різних розв'язки x_1 і x_2, які можна знайти за двома різними формулами $x = g_1(y_0)$ і $x = g_2(y_0)$. Тоді в точці y_0 функція $x = g(y)$ втрачає однозначність і стає двозначною («розщеплюється» на дві вітки – g_1 і g_2). Отже, побудова оберненої функції як однозначної стає неможливою. В цьому разі обернену як однозначну можна побудувати для нової функції $f^*(x)$, «обрізаючи» область визначення початкової:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a;b); \\ \text{не є визначеною}, & x \notin (a;b). \end{cases}$$

Тут числа a, b слід підібрати так, щоб інтервалу $(a;b)$ належав тільки один з коренів x_1, x_2. Якщо на цьому інтервалі залишається тільки корінь x_1, то оберненою до f^* буде функція $(f^*)^{-1} = g_1$, а якщо тільки корінь x_2 – то оберненою до f^* буде функція $(f^*)^{-1} = g_2$.

Очевидно, графік функції f^* є частиною графіка функції f. Ця частина відповідає інтервалу $x \in (a;b)$, а інші частини графіка функції f видаляються. Тому з геометричної точки зору графік оберненої функції буде симетричним (відносно прямої $y = x$) не до всього графіка $f(x)$, а лише до його частини $f^*(x)$.

$\triangleleft$ *Приклад 3.10.* Нехай $y = x^2$. При $y > 0$ рівняння $y = f(x)$ має одразу два розв'язки: $x_1 = \sqrt{y}$ і $x_2 = -\sqrt{y}$. Після взаємозаміни отримуємо дві вітки: $g_1(x) = \sqrt{x}$, $g_2(x) = -\sqrt{x}$. Отже, для функції $f(x) = x^2$ обернена не існує як однозначна. Тоді обернену функцію має сенс будувати для іншої функції, яка збігатиметься з даною лише на деякому інтервалі.

Розглянемо нову функцію

$$f^*(x) = \begin{cases} \text{не є визначеною}, & x < 0; \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Графік функції f^* виникає шляхом видалення «лівої половини» параболи $y = x^2$ (рис. 3.4, ліворуч). Тепер потрібно розв'язувати не рівняння $y = f(x)$, а рівняння $y = f^*(x)$. Очевидно, при $y \geqslant 0$ його розв'язок є єдиним: $x = +\sqrt{y}$, оскільки від'ємні розв'язки $x < 0$ є неприпустимими (при $x < 0$ функція f^* не є визначеною). Отже, після взаємозаміни отримуємо одну вітку: $y = g_1(x) = \sqrt{x}$, і обернена функція $(f^*)^{-1} = g_1$; вона є однозначною. Для побудови графіку оберненої функції достатньо відносно прямої $y = x$ віддзеркалити праву «половину» параболи $y = x^2$.

Функція f^* мала область визначення $x \in [0; +\infty)$ і множину значень $y \geqslant 0$. Обернена до неї функція g_1 має область визначення $x \geqslant 0$ і множину значень $y \in [0; +\infty)$.

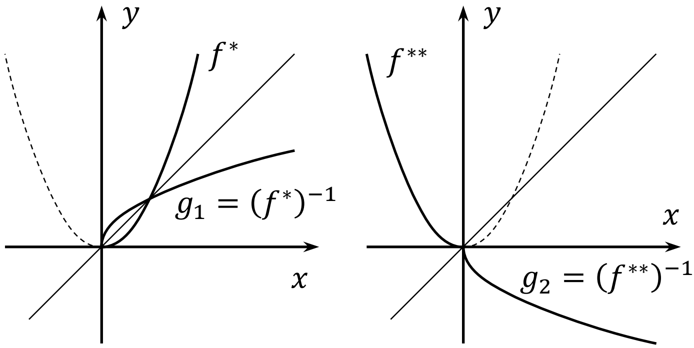


Рисунок 3.4 – До вибору однієї вітки оберненої функції

Розглянемо іншу функцію

$$f^{**}(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0; \\ \text{не є визначеною}, & x > 0. \end{cases}$$

Графік функції f^{**} виникає шляхом видалення «правої половини» параболи $y = x^2$ (рис. 3.4, праворуч). Тепер при $y \geqslant 0$ розв'язок рівняння $y = f^{**}(x)$ знову є єдиним: $x = -\sqrt{y}$, оскільки для додатних x функція f^{**} не визначена. Отже, після взаємозаміни отримуємо одну вітку: $y = g_2(x) = -\sqrt{x}$, і обернена функція $(f^{**})^{-1} = g_2$; вона є однозначною. Для побудови графіку оберненої функції достатньо відносно прямої $y = x$ віддзеркалити ліву «половину» параболи $y = x^2$.

Функція f^{**} мала область визначення $x \in (-\infty; 0]$ і множину значень $y \geqslant 0$. Обернена до неї функція g_2 має область визначення $x \geqslant 0$ і множину значень $y \in (-\infty; 0]$. $\triangleright$

З розглянутого прикладу випливає актуальність формулювання умов, за яких обернена функція є однозначною. Такі умови надає наступна теорема.

■ **Теорема 3.5.** Нехай область визначення і множина значень функції $f(x)$ – множини X, Y. Якщо функція $f(x)$ є монотонною на множині X, то обернена функція $g = f^{-1}$ існує і є однозначною, причому областю визначення і множиною значень оберненої функції $g(x)$ є множини $x \in Y$, $y \in X$.

□ *Доведення.* Фактично теорема стверджує, що відповідність між елементами множин X і Y є *взаємно* однозначною.

1°. Доведемо, що Y – область визначення оберненої функції $g = f^{-1}$. Достатньо довести, що $g(y_0)$ існує при $y_0 \in Y$ і $g(y_0)$ не існує при $y_0 \notin Y$. Очевидно, при $y_0 \in Y$ значення $g(y_0)$ існує і дорівнює $g(y_0) = x_0$. Але при $y_0 \notin Y$ таке значення x_0 пред'явити неможливо. Якби це було можливо, ми б отримали $f(x_0) = y_0 \in Y$. Отримали протиріччя.

2°. Доведемо однозначність оберненої функції $g = f^{-1}$. Нехай $y_0 \in Y$ і $g(y_0) = x_0$. Нехай одночасно з цим виконано рівність $g(y_0) = x_1$, причому $x_1 \neq x_0$. Тоді $f(x_1) = y_0$. Але це неможливо, оскільки при монотонному зростанні функції f виконується або нерівність $f(x_1) > y_0$ при $x_1 > x_0$, або нерівність $f(x_1) < y_0$ при $x_1 < x_0$. Відповідно, при монотонному спаданні функції f виконується або нерівність $f(x_1) < y_0$ при $x_1 > x_0$, або нерівність $f(x_1) > y_0$ при $x_1 < x_0$. Отримали протиріччя.

3°. Доведемо, що X – множина значень оберненої функції $g = f^{-1}$. Достатньо довести, що при будь-якому $x_0 \in X$ існує $y_0 \in Y$ такий, що $g(y_0) = x_0$, і при будь-якому $x_0 \notin X$ виконання рівності $g(y_0) = x_0$ неможливе.

При $x_0 \in X$ достатньо покласти $y_0 = f(x_0)$. Тоді $g(y_0) = x_0$.

Припустимо тепер, що $x_0 \notin X$, але знайшлось y_0 таке, що рівняння $g(y_0) = x_0$ виконано. Але тоді $y_0 = f(x_0)$, отже $x_0 \in X$. Отримали протиріччя. $\square$

Зауважимо, в разі функцій, заданих *кусково*, множини X, Y можуть бути сукупностями інтервалів. Для коректного застосування доведеної теореми потрібно розрізняти поняття монотонності на інтервалі і монотонності на множині.

$\triangleleft$ *Приклад 3.11.* Розглянемо функцію, задану кусково:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leqslant 0; \\ \sqrt{x-1} - 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Тут область визначення $X = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. Ця функція монотонно зростає на інтервалі $x \in (-\infty; 0]$ і монотонно зростає на інтервалі $[1; +\infty)$. Але вона не є монотонно зростаючою на множині X, оскільки не для будь-якої пари чисел $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Наприклад, нехай $x_1 = 0$, тоді $f(x_1) = f(0) = 2$. Нехай також $x_2 = 1$, тоді $f(x_2) = f(1) = -1$. Отже, $x_2 > x_1$, але нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ не виконано. Тому на цю функцію доведена теорема не розповсюджується. Зокрема, обернена функція не є однозначною.

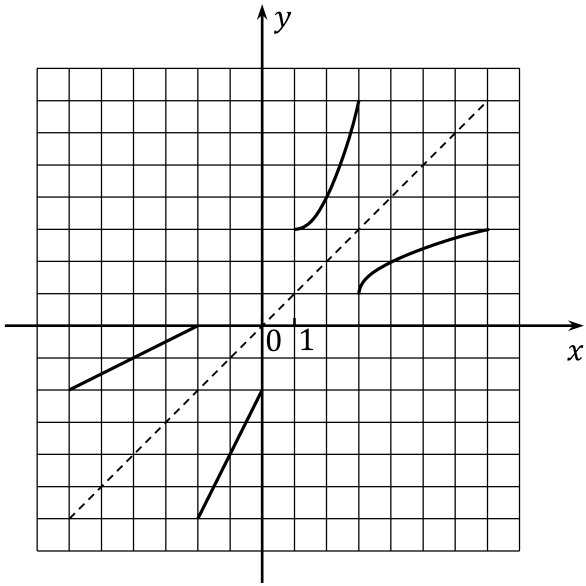


Рисунок 3.5 – Функція, обернена до монотонної

Справді, позначимо $x_{01} = -1$, $x_{02} = 5$, $y_0 = 1$. Маємо:

$$f(x_{01}) = f(x_{02}) = y_0.$$

Тому для оберненої функції $g = f^{-1}$ одночасно виконуються дві рівності: $g(y_0) = x_{01}$ і $g(y_0) = x_{02}$, причому $x_{02} \neq x_{01}$. $\triangleright$

Натомість, легко навести приклади функцій, які задані кусково і є монотонними на області визначення X; на такі функції доведена теорема розповсюджується.

$\triangleleft$ *Приклад 3.12.* Розглянемо функцію, задану кусково:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \leqslant 0; \\ \sqrt{x-3} + 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Очевидно, її область визначення $X = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$, а множина значень $Y = (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ (рис. 3.5).

Для побудови оберненої функції розв'яжемо відповідні рівняння. По-перше, маємо: $y = 2x - 2$, звідки $x = \frac{1}{2}y + 1$. Нас влаштують будь-які розв'язки x, якщо $x \leqslant 0$. Тоді $y \leqslant -2$. Після взаємозаміни отримуємо: $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ при $x \leqslant -2$, причому $y \leqslant 0$.

По-друге, маємо: $y = \sqrt{x-3} + 1$, або $\sqrt{x-3} = y - 1$. Якщо $y \geqslant 1$, то $x - 3 = (y-1)^2$, або $x = (y-1)^2 + 3$. Після взаємозаміни отримуємо: $y = (x-1)^2 + 3$ при $x \geqslant 1$, і при цьому $y \geqslant 3$.

Об'єднуючи ці розв'язки, для оберненої функції $g = f^{-1}$ отримуємо:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \leqslant -2; \\ (x-1)^2 + 3, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що областю визначення функції g є множина $x \in Y$, а множиною значень – множина $y \in X$. $\triangleright$

З теореми 3.5 випливає такий наслідок. Пряма і обернена функції мають однаковий характер монотонності: якщо функція зростає (спадає), то і обернена до неї зростає (спадає).

Зауважимо, монотонність є достатньою умовою однозначності оберненої функції, але не є необхідною умовою. Наприклад, функція

$$y = \begin{cases} x & x \leqslant 0; \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

кожне своє значення приймає лише один раз, і тому обернена[5] до неї є однозначною, хоча сама функція не є монотонною.

Рівняння $y = f(x)$ при деяких y може мати більш ніж два корені, і навіть безліч коренів. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. В точці, наприклад, $y = \frac{1}{2}$ рівняння $y = f(x)$ має безліч розв'язків $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому функція, обернена до синусу, має нескінченно багато віток. Виникнення багатозначності функції, оберненої до синусу, показано на рис. 3.6. Функція $y = \sin x$ ставить у відповідність аргументу $x = \frac{\pi}{6}$ значення $y = \frac{1}{2}$, а аргументу $x = \frac{5\pi}{6}$ – те ж саме значення $y = \frac{1}{2}$. Отже, функція, обернена до синусу, (з урахуванням взаємозаміни) аргументу $x = \frac{1}{2}$ ставить у відповідність одразу безліч значень, серед яких знайдуться і кут $y = \frac{\pi}{6}$, і кут $y = \frac{5\pi}{6}$ (і безліч інших).

Обмежимось інтервалом $X = [-\pi/2; \pi/2]$. На ньому умови теореми 3.5 виконано. Тому математики домовились[6] обернену

[5] До речі, оберненою до цієї функції є вона сама, оскільки її графік симетричний відносно осі $y = x$.

[6] Це питання саме домовленості. Можна було домовитись про інтервал $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, протягом якого синус теж залишається монотонним (монотонно спадає).

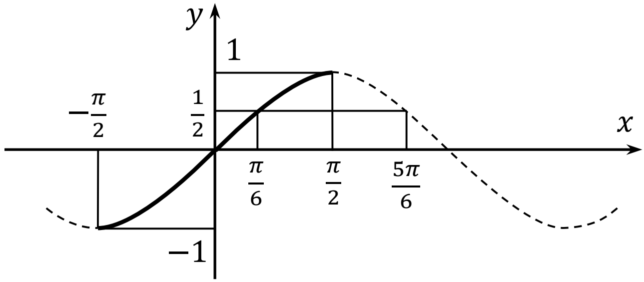


Рисунок 3.6 – Багатозначність функції, оберненої до синусу

функцію будувати не для синусу, а для функції, яка збігається з ним лише на інтервалі X:

$$f^*(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi/2; \pi/2]\,; \\ \text{не є визначеною}, & x \notin [-\pi/2; \pi/2]\,. \end{cases}$$

Областю визначення функції f^* є інтервал X, а множиною значень – інтервал $Y = [-1; 1]$. Приймемо наступне означення: $y = \arcsin x$ – це кут 1) з інтервалу $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для якого 2) $\sin y = x$. Наприклад, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В той же час, $\arcsin \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, не дивлячись на те, що також $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Враховуючи симетрію графіків прямої і оберненої функцій відносно прямої $y = x$, графік арксинусу легко побудувати як на рис. 3.7. Область визначення арксинусу – $x \in [-1; 1]$, а множина значень – $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Співвідношення (3.3) в разі пари «синус-арксинус» взаємно обернених функцій набувають вигляду

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \arcsin(\sin x) = x.$$

Розглянемо перше співвідношення. Якщо $x \notin [-1; 1]$, то $\arcsin x$ не існує, і перше співвідношення не виконано. Якщо $x \in [-1; 1]$, то $\arcsin x$ існує і є кутом, таким, що $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Синус цього кута як раз і дорівнює x за означенням арксинусу. Отже, перше співвідношення виконано на інтервалі $x \in [-1; 1]$.

Розглянемо друге співвідношення. Його ліва частина існує при будь-яких x, оскільки $|\sin x| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Але не при будь-яких x вона дорівнює x. Справді, ліва частина як арксинус є

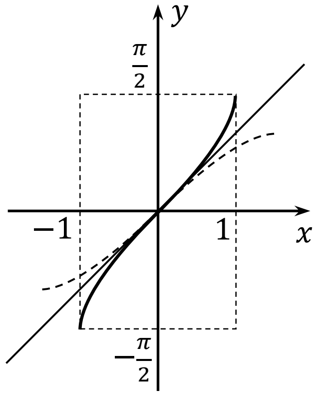


Рисунок 3.7 – Графік функції $y = \arcsin x$

кутом з інтервалу $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(\sin x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тому для виконання другого співвідношення і права частина повинна належати цьому інтервалу. Отже, друге співвідношення виконується для $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Ясно, що на інтервалі $x \in [-1; 1]$ (коротшому з двох) обидва співвідношення виконано одночасно.

Аналогічні міркування призводять і до визначення арктангенсу: $y = \operatorname{arctg} x$ – це кут 1) з інтервалу $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для якого 2) $\operatorname{tg} y = x$. Наприклад, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ і $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В той же час, $\operatorname{arctg} 1 \neq \frac{5\pi}{4}$, не дивлячись на те, що також $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = 1$, оскільки $\frac{5\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Відповідний графік зображено на рис. 3.8.

Зауважимо наступне. При побудові оберненої функції ми здійснювали взаємозаміну $x \leftrightarrow y$. Це було зручно: однією і тією самою літерою x позначався аргумент і «прямої» функції (до взаємозаміни), і оберненої (після взаємозаміни). Позначення y для значень обидвох функцій також зберігалось. Незручність полягала лише в необхідності віддзеркалювати графік «прямої» функції для отримання графіка оберненої функції.

Але взаємозаміна – це лише питання позначень. Її можна не здійснювати. Тоді x буде аргументом «прямої» функції $y(x)$ і одночасно значенням оберненої функції $x(y)$. Відповідно, y буде значенням «прямої» функції $y(x)$ і одночасно аргументом

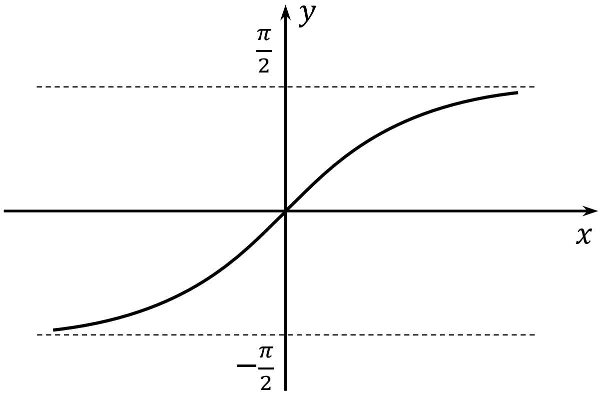


Рисунок 3.8 – Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$

оберненої функції $x(y)$. Отже, з точки зору оберненої функції координатні осі міняються ролями: вісь аргументу стає спрямованою догори, а вісь значень функції – направо. Але тоді зникає необхідність віддзеркалювати графік. Отже, одна і та ж сама крива одночасно буде і графіком «прямої» функції (якщо вісь, спрямовану направо, вважати віссю аргументу), і графіком оберненої функції (якщо вісь, спрямовану догори, вважати віссю аргументу). Саме такої точки зору (графік не віддзеркалювати, взаємозаміну не здійснювати, і лише осі поміняти ролями) ми тепер будемо дотримуватись.

Сформулюємо і доведемо теорему про похідну оберненої функції.

■ **Теорема 3.6.** Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому $f'(x_0) \neq 0$. Тоді в околі точки $y_0 = f(x_0)$ функція $x = g(y)$, обернена до $y = f(x)$, є диференційовною, причому її похідна в точці y_0 дорівнює

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□ *Доведення.* Оскільки функція $f(x)$ є диференційовною в точці x_0, то її приріст $\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)$. Обернена функція є $g(y)$, і її приріст становить $\Delta x = \frac{\Delta y - o(\Delta x)}{f'(x_0)}$. Тоді похідна

$$g'(y_0) = [g(y)]'_y \Big|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}\Big|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y - o(\Delta x)}{f'(x_0)\,\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta y \to 0} \left(1 - \frac{o(\Delta x)}{\Delta y}\right) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

що і треба було довести. Тут враховано, що

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{0}{f'(x_0) + 0} = 0.\Box$$

Отриманому результату можна надати вигляду

$$x'_y \cdot y'_x = 1,$$

де $x(y)$ і $y(x)$ – дві взаємно обернені функції. Цей результат також можна подати як формальну тотожність

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

(більш детально про похідну як відношення диференціалів йдеться в п. 3.4).

Теорема 3.6 має дуже простий геометричний зміст. Нехай дотична, проведена до графіка[7] в точці $M_0(x_0; y_0)$, утворює кути α, β з осями Ox, Oy. Очевидно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Для «прямої» функції $y(x)$ аргументом є x, тому похідна дорівнює $y'_x = \operatorname{tg}\alpha$. Для оберненої функції $x(y)$ аргументом є y, тому похідна дорівнює $x'_y = \operatorname{tg}\beta$. При цьому

$$x'_y = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{y'_x},$$

що і було доведено в теоремі.

[7]Оскільки ми взаємозаміну тепер не вводимо, то одна й та сама крива є одночасно і графіком «прямої» функції, і графіком оберненої функції.

Практично похідну оберненої функції обчислюють, виходячи зі співвідношення

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}.$$

Тут знаменником правої частини є похідна від функції $x(y)$, оберненої до заданої. Залишається вирішити одну проблему: функція $x(y)$ виражена через y, тому і похідна x'_y буде вираженою через y; цей y потрібно виразити через x.

◁ *Приклад 3.13.* Знайдемо похідну функції $y(x) = \ln x$. Оберненою є функція $x(y) = e^y$. Маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y}$,

$$(\ln x)'_x = \frac{1}{(e^y)'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}. \triangleright$$

◁ *Приклад 3.14.* Знайдемо похідну функції $y(x) = \arcsin x$. Оберненою є функція $x(y) = \sin y$. Маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y}$,

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = +\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед знаком радикалу обрали знак «плюс», оскільки y як арксинус є кутом першої або четвертої чверті, а косинуси таких кутів додатні. Додатність знайденої похідної відповідає зростанню арксинуса. ▷

◁ *Приклад 3.15.* Знайдемо похідну функції $y(x) = \operatorname{arctg} x$. Оберненою є функція $x(y) = \operatorname{tg} y$. Маємо $y'_x = \frac{1}{x'_y}$,

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Скористались тотожністю $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y$. ▷

Отже, таблиця похідних поповнюється такими формулами:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Крім того, неважко тепер отримати ще дві формули. Оскільки $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$, то

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогічно, оскільки $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3.3.5 Логарифмічне диференціювання

Функція вигляду $y(x) = f(x)^{g(x)}$ не є ні степеневою, ані показниковою. Для диференціювання таких функцій застосовують т.зв. **логарифмічне диференціювання**. Цим терміном називають комплекс логарифмування і наступного за ним диференціювання: $y' = y \cdot (\ln y)'$.

Маємо:

$$\ln y(x) = \ln\left[f(x)^{g(x)}\right] = g(x)\ln f(x).$$

Ліва частина виявляється складною функцією: зовнішня – логарифм, внутрішня – $f(x)$. Тоді при диференціюванні тотожності $\ln y = g \ln f$ (факт залежності від x більше не підкреслюємо) отримуємо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g' \ln f + g\,(\ln f)' = g' \ln f + g \cdot \frac{1}{f} \cdot f'.$$

Звідси отримуємо:

$$y' = y\left(g' \ln f + \frac{gf'}{f}\right) = f^g\left(g' \ln f + \frac{gf'}{f}\right) = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.$$

Формально перший доданок виглядає так, ніби $f = \mathrm{const}$ і виконує роль основи a показникової функції, а g – внутрішня функція; другий доданок виглядає так, ніби $g = \mathrm{const}$ і виконує роль показника n степеневої функції, а f – внутрішня функція. Втім, достатньо запам'ятати послідовність дій: 1) логарифмування; 2) диференціювання. Гарантується, що в результаті цих дій виникне рівняння, яке завжди буде лінійним відносно y'.

$\triangleleft$ *Приклад 3.16*. Знайдемо похідну функції $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$. Маємо:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln(\sin x),$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\sqrt{x}\right)' \ln(\sin x) + \sqrt{x}\,[\ln(\sin x)]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(\sin x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\operatorname{ctg} x.$$

Тоді

$$y' = y\left\{\frac{\ln\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\operatorname{ctg} x\right\} = (\sin x)^{\sqrt{x}}\left\{\frac{\ln\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\operatorname{ctg} x\right\}. \triangleright$$

Зауважимо, логарифмічне диференціювання може виявитись зручним і в інших випадках.

$\triangleleft$ *Приклад 3.17*. Знайдемо похідну функції

$$y = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x^3-x^2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{5x+x^3}{x+\sin x}}.$$

Логарифмуючи, отримуємо:

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(2x+3) - \frac{1}{3}\ln\left(x^3-x^2\right) + \frac{1}{5}\ln\left(5x+x^3\right) - \frac{1}{5}\ln(x+\sin x).$$

Диференціюючи, отримуємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+3)'}{3(2x+3)} - \frac{\left(x^3-x^2\right)'}{3(x^3-x^2)} + \frac{\left(5x+x^3\right)'}{5(5x+x^3)} - \frac{(x+\sin x)'}{5(x+\sin x)} =$$

$$= \frac{2}{3(2x+3)} - \frac{3x^2-2x}{3(x^3-x^2)} + \frac{5+3x^2}{5(5x+x^3)} - \frac{1+\cos x}{5(x+\sin x)}.$$

Остаточна відповідь виникне, якщо останній вираз помножити на $y(x)$. $\triangleright$

3.4 Диференціал функції однієї змінної

3.4.1 Означення диференціалу

Розглянемо локальну поведінку функції $f(x)$ в околі точки x_0. Позначимо $y_0 = f(x_0)$. Нехай аргумент змінився від значення x_0 на величину Δx, і набув значення $x = x_0 + \Delta x$. Тоді функція прийняла значення $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$, а її приріст склав

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0.$$

Нехай функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0. Тоді її приріст Δy стає нескінченно малим, якщо $\Delta x \to 0$.

Постає важливе питання: чи можливо *з приросту* Δy *виокремити частину, лінійну за* Δx? Власне, це завжди можна зробити; достатньо покласти:

$$\Delta y = C\,\Delta x + (\Delta y - C\,\Delta x)\,, \qquad C = \text{const}.$$

Тут $C\,\Delta x$ – частина приросту Δy, яка є лінійною за Δx. Друга складова $(\Delta y - C\,\Delta x)$ – це «решта» виразу для Δy. В загальному випадку «дужка» $(\Delta y - C\,\Delta x)$ залежить від Δx нелінійно; ця нелінійність зараз «прихована» у виразі для Δy.

Тому, більш точно, питання тепер в наступному: чи можливо підібрати таке C, щоб при прямуванні $\Delta x \to 0$ другий доданок $(\Delta y - C\,\Delta x)$ мав більш високий порядок малості порівняно з першим доданком $C\,\Delta x$? Інакше, чи існує C, за якого приріст функції може бути поданий у вигляді

$$\Delta y = C\,\Delta x + o(\Delta x). \tag{3.4}$$

Це питання можна переформулювати і так: чи існує для Δy еквівалентна нескінченно мала у вигляді $C\,\Delta x$? Справді, при існуванні C, $C \neq 0$, за якого (3.4) виконано, ми б отримали:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{C\,\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C\,\Delta x + o(\Delta x)}{C\,\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(1 + \frac{1}{C}\cdot\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = 1,$$

звідки $\Delta y \sim C\,\Delta x$.

На сформульоване питання легко отримати відповідь «так», якщо замість вимоги неперервності до функції $f(x)$ пред'явити (більш сильну) вимогу диференційовності в точці x_0. Тоді, як ми зараз доведемо, при C, дібраному належним чином, частина $C\,\Delta x$ виявиться **головною** в тому сенсі, що решта $(\Delta y - C\,\Delta x)$ стане величиною вищого порядку малості порівняно з Δx. А саме, доведемо: 1) якщо $C = f'(x_0)$, то приріст Δy функції може бути поданий у вигляді (3.4); 2) якщо приріст Δy функції може бути поданий у вигляді (3.4), то $C = f'(x_0)$.

1) За означенням похідної маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Але за умовою $C = f'(x_0)$, отже

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = C.$$

Тоді за теоремою 2.7 отримуємо вигляд (3.4), що і треба було довести.

2) Вважаємо тепер, навпаки, що (3.4) дано. Тоді маємо:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\,\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = C,$$

що і треба було довести.

Отже, якщо похідна функції в точці x_0 існує, дорівнює $f'(x_0)$ і є скінченною, то приріст функції може бути поданий у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

В цьому виразі частину $f'(x_0) \cdot \Delta x$, яка 1) є лінійною за Δx; 2) є головною (тобто решта – мала вищого порядку малості), і називають диференціалом функції в точці.

♦ **Означення 3.7. Диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0** називають головну частину її приросту, лінійну за приростом аргументу. Диференціал функції в точці позначають символом $df(x_0)$, або скорочено символом df.

За доведеним вище диференціал функції в точці може бути обчислений за формулою:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{3.5}$$

Звичайно, тут d не є символом певної величини (df не є добутком величин d і f). Вираз df слід сприймати як єдину цілісну конструкцію.

◁ *Приклад 3.18.* Знайдемо диференціал функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 3$. Маємо:

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 = 3^2 = 9,$$

$$x = x_0 + \Delta x = 3 + \Delta x,$$

$$y = f(x) = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6\,\Delta x + (\Delta x)^2\,,$$

$$\Delta y = y - y_0 = 9 + 6\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 9 = 6\,\Delta x + (\Delta x)^2\,.$$

Частина $df(3) = 6\,\Delta x$ цього приросту і є диференціалом. Справді, по-перше, вираз $6\,\Delta x$ є лінійним за Δx. По-друге, різниця $\Delta y - 6\,\Delta x = (\Delta x)^2$ (тобто решта приросту функції) є нескінченно малою більш високого (другого) порядку малості, а частина $6\,\Delta x$ є головною.

Такий самий результат можна отримати значно простіше. Маємо: $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 3 = 6$. Тоді за формулою (3.5) одержуємо: $df(3) = 6\,\Delta x$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 3.19.* Для функції $f(x) = \sqrt[3]{x + 6x\sqrt[3]{x^2}}$ спробуємо знайти диференціал в точці $x_0 = 0$. Маємо:

$$y_0 = f(x_0) = \sqrt[3]{x_0 + 6x_0\sqrt[3]{x_0^2}} = 0,$$

$$x = x_0 + \Delta x = \Delta x,$$

$$y = f(x) = \sqrt[3]{\Delta x + 6\Delta x\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\Delta x\left(1 + 6\sqrt[3]{(\Delta x)^2}\right)} = (\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + 6\,(\Delta x)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= (\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 6\,(\Delta x)^{\frac{2}{3}} + o\left(6\,(\Delta x)^{\frac{2}{3}}\right)\right) =$$

$$= (\Delta x)^{\frac{1}{3}} + 2\Delta x + o\,(\Delta x)\,.$$

Скористались пунктом 8 з таблиці еквівалентів при $n = \frac{1}{3}$. Тоді

$$\Delta y = y - y_0 = y - 0 = y = (\Delta x)^{\frac{1}{3}} + 2\Delta x + o\,(\Delta x)\,.$$

Як бачимо, головною в цьому виразі є частина з найменшим показником степеня, тобто $(\Delta x)^{\frac{1}{3}}$. Але вона не є лінійною за Δx. Бачимо також, що лінійною в цьому виразі є частина $2\Delta x$, але вона є не головною величиною, а величиною вищого порядку малості порівняно з головною частиною $(\Delta x)^{\frac{1}{3}}$. Частини цього виразу, яка була б і головною, і лінійною одночасно, тут немає. Отже, для розглядуваної функції знайти диференціал в даній точці неможливо; він не існує. Втім, існування диференціалу розглядуваної функції в інших точках x_0 не виключається.

Спробуємо обчислити похідну:

$$f'(x) = \left[\left(x + 6x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(x + 6x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left(1 + 10x^{\frac{2}{3}}\right).$$

Легко бачити, що $f'(0) = \infty$ за рахунок знаменника. Саме тому формула (3.5) є незастосовною, а диференціал розглядуваної функції в точці $x_0 = 0$ не існує. $\rhd$

Вище (див. означення 3.2, с. 87) ми називали функцію диференційовною в точці, якщо похідна $f'(x_0)$ існувала і була скінченною. Тепер ми можемо надати альтернативне означення: **функція диференційовна в точці, якщо існує її диференціал в цій точці.** Справді, існування диференціалу передбачає можливість подання приросту Δy функції у вигляді (3.4). Вище ж ми довели: така можливість рівносильна існуванню скінченної похідної функції в точці. Отже диференційовними в точці в сенсі означення 3.2 є 1) усі ті і 2) лише ті функції, для яких існує диференціал в цій точці. Інакше, нове означення диференційовності функції в точці є рівносильним до старого.

Проте, рівносильність цих означень зберігається лише для функцій однієї змінної. В разі функцій декількох змінних можливість подання приросту функції сумою лінійної головної частини і малих вищих порядків з одного лише існування похідних ще не випливає. В цьому разі диференційовність в сенсі існування диференціалу є вже не рівносильною, а більш сильною вимогою порівняно з існуванням похідних.

3.4.2 Геометричний зміст диференціалу

Розглянемо функцію, диференційовну в точці $x = x_0$. Проведемо дотичну до графіку цієї функції у точці M_0 (рис. 3.9). Як випливає з геометричного змісту похідної, рівняння дотичної має вигляд

$$y_{\text{дот}} = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.6}$$

Нехай аргументові надано приріст Δx, і він набув значення $x = x_0 + \Delta x$. При цьому приріст функції становить

$$\Delta y = MN = y - y_0.$$

Разом з цим ордината точки на дотичній також набуває приросту, який дорівнює

$$\Delta y_{\text{дот}} = KN = y_{\text{дот}} - y_0.$$

Як бачимо, приріст $\Delta y_{\text{дот}}$ складає частину приросту Δy. Ця частина і є диференціалом. Справді, з прямокутного трикутника $\triangle M_0NK$ маємо: $KN = M_0N \operatorname{tg} \angle KM_0N = \operatorname{tg} \angle KM_0N \, \Delta x$. Але за геометричним сенсом похідної $\operatorname{tg} \angle KM_0N = f'(x_0)$. Отже, $KN = f'(x_0)\,\Delta x$, що збігається з формулою (3.5). Отриманому результату можна також надати вигляду $dy = \Delta y_{\text{дот}}$. Звідси і

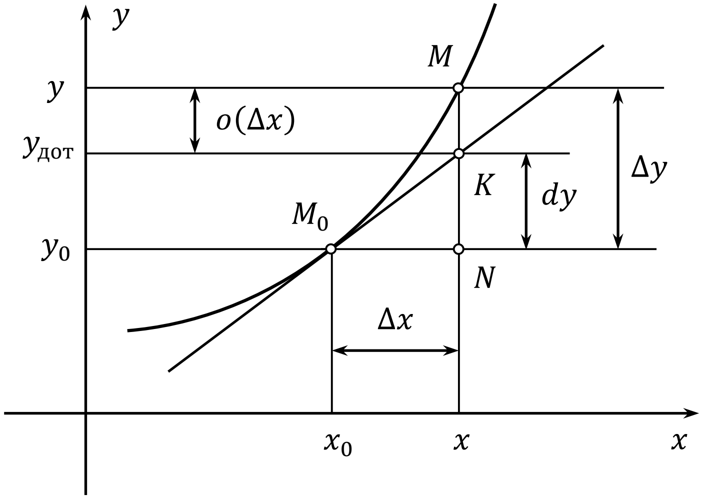


Рисунок 3.9 – Геометричний зміст диференціалу функції

випливає геометричний зміст диференціалу: **диференціал дорівнює приросту ординати точки K на дотичній прямій.**

Домовимось про наступне. Розглядаючи функцію $y(x) = x$, для її диференціалу в довільній точці за формулою (3.5) маємо:

$$dx = dy = y'_x \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Отже, для *незалежної* змінної x рівність $dx = \Delta x$ виконується абсолютно точно. Тому рівнянню (3.5) на практиці надають вигляд $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, або для довільної точки x_0, не конкретизуючи її, – вигляд

$$\boxed{df = f'\,dx.} \tag{3.7}$$

На відміну від точної рівності $dx = \Delta x$, для *залежної* змінної y виконується лише наближена рівність $\Delta y \approx dy$. До речі, цій рівності можна надати більш сильного вигляду: $\Delta y \sim dy$; цю еквівалентність нами вище вже доведено за допомогою подання (3.4). Нагадаємо, ця еквівалентність означає, що похибка, з якою величини dy і Δy наближено дорівнюють одна одній, стає не просто нескінченно малою, а ще прямує до нуля швидше порівняно з Δx. Цю похибку можна бачити на рис. 3.9 як довжину

$$MK = MN - KN = \Delta y - dy = o(\Delta x).$$

Виразимо похідну з рівняння дотичної:

$$f'(x_0) = \frac{y_{\text{дот}} - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y_{\text{дот}}}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Отже, похідну функції в точці можна знайти як відношення[8] диференціалу функції до диференціалу аргументу. Тому вираз

$$\boxed{\frac{dy(x)}{dx} = f'(x)}$$

для похідної можна вважати результатом арифметичної операції ділення величини dy на величину dx. Принципово, що це рівняння, на відміну від означення (3.1), *не містить операції граничного переходу.* Це, всупереч поширеній думці, не означає, що dx і dy – обов'язково нескінченно малі. Вони можуть такими і не бути, якщо ми додатково не подбаємо про прямування $\Delta x \to 0$. Справді, рівняння (3.5) з урахуванням рівності $dy = \Delta y_{\text{дот}}$ є рівнянням дотичної, а її нахил не залежить від Δx.

Починаючи з цього моменту, слово «диференціювання» може використовуватись в двох розуміннях: як знаходження диференціалу і як знаходження похідної. Отже, тепер літеру d можна розглядати як символ операції знаходження диференціалу. Наприклад:

$$d\left(x^2\right) = 2x\,dx, \qquad d(\sin x) = \cos x\,dx,$$

і т.д. Нагадаємо, вище ми домовлялись розглядати вираз df як єдину цілісну конструкцію. Попри це, тепер символ диференціювання d можна «відірвати», і для позначення похідної, крім символу «штрих», використовувати формальний дріб $\frac{d}{dx}$:

$$\left(x^2\right)' = \frac{d\left(x^2\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x,$$

[8]Власне, Г.В. Лейбніц так і діяв: теорія границь К. Вейєрштрассом на той час створена ще не була. Історично першою була теорія похідних, а її наслідком – теорія границь. Методично ж роблять навпаки: при традиційному викладанні сучасного курсу математичного аналізу вченню про похідну передує вчення про границі.

$$(\sin x)' = \frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$$

і т.д. Формально все виглядає так, ніби для знаходження похідної функції f достатньо дріб $\frac{d}{dx}$ «помножити» на цю функцію.

3.4.3 Диференціали вищих порядків

Поряд з похідними і диференціалами, розглядають також **похідні і диференціали вищих порядків**. Якщо функцію продиференціювати n разів поспіль, то виникне **похідна n-го порядку.**

$\lhd$ *Приклад 3.20.* Нехай $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 13$. Очевидно, маємо:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 13\right)' = x^2 - 10x + 8,$$

$$y'' = (y')' = \left(x^2 - 10x + 8\right)' = 2x - 10,$$

$$y''' = (y'')' = (2x - 10)' = 2,$$

$$y^{IV} = (y''')' = (2)' = 0,$$

$$y^{(n)} \equiv 0, \qquad n \geqslant 4. \rhd$$

Зауважимо, більше трьох символів «штрих» не пишуть. Натомість порядок похідної позначають або римськими цифрами, або арабськими, але тоді – в дужках, щоб відрізняти від показника степеня.

Аналогічно визначають і диференціали вищих порядків:

$$d^2y = d(dy), \qquad d^3y = d\left(d^2y\right), \qquad d^4y = d\left(d^3y\right),$$

і т.д. Маємо:

$$d^2y = d(dy) = d(y'\,dx) = (y'\,dx)'\,dx = y''\,(dx)^2,$$

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(y''\,(dx)^2\right) = \left(y''\,(dx)^2\right)'\,dx = y'''\,(dx)^3,$$

і т.д. Тут x і dx є незалежними змінними. Тому, знаходячи похідні за змінною x, величину dx вважаємо сталим співмножником (при знаходженні похідної його можна винести за дужки). Далі вводять символ dx^n. Його розуміють як n-й степінь диференціалу $dx^n = (dx)^n$, а не як диференціал $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$ для n-го степеня. Тому можна написати

$$d^ny = y^{(n)}\,dx^n.$$

Відповідно, і вищі похідні можна розглядати як відношення вищих диференціалів
$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$
або як множення формального дробу $\frac{d^n}{dx^n}$ на функцію:
$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n(y)}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\, y.$$
Кажуть також, що $\frac{d^n}{dx^n}$ – *оператор* n*-ї* похідної.

Звернемось знову до формули (3.7). Її словесне формулювання: **«диференціал функції дорівнює похідній, помноженій на диференціал того аргументу, за яким відбувалось диференціювання».** Виявляється, що це формулювання залишається незмінним (кажуть також – *інваріантним*), якщо ввести заміну змінних. Нехай $f(\varphi(x))$ – складна функція. Очевидно, її диференціал
$$df = f'_x\, dx = \left(f'_\varphi \cdot \varphi'_x\right)\, dx = f'_\varphi \cdot (\varphi'_x\, dx)\,.$$
Тут $f'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x$ є похідною складної функції, а $d\varphi = \varphi'_x\, dx$ є диференціалом внутрішньої функції. Отже,
$$df = f'_\varphi\, d\varphi.$$
Як бачимо, при переході від незалежної змінної x до залежної змінної $\varphi(x)$ словесне формулювання формули (3.7) залишається незмінним. Щоправда, ми тепер похідну обчислюємо за змінною φ (а не x), але ж і множимо на диференціал $d\varphi$ (а не dx). Цей факт має важливе застосування в подальшому, коли вводять заміну змінної при обчисленні інтегралів.

Можна показати, що властивість інваріантності на вищі диференціали вже не розповсюджується.

3.4.4 Застосування диференціалу

Одним із застосувань диференціалу є наближені обчислення. Вони базуються на використанні еквівалентності $\Delta y \sim dy$ і полягають в наступному. Нехай потрібно обчислити значення функції $y = f(x)$ при деякому значенні x. Нехай підібрано деяке значення x_0, для якого обчислення $y_0 = f(x_0)$ і $f'(x_0)$ є зручним. Тоді
$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = y_0 + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Очевидно, чим ближче обрано x_0 до потрібного x, тим з більшою точністю цю наближену рівність буде виконано, оскільки похибка цього наближення є малою вищого порядку малості.

$\triangleleft$ *Приклад 3.21.* За допомогою диференціалу наближено обчислити $\sqrt[3]{8{,}48}$.

Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Нас цікавить її значення в точці $x = 8{,}48$. Але зручним для обчислення і функції, і її похідної є сусіднє значення $x_0 = 8$:

$$y_0 = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

$$y'(x_0) = y'(x)\big|_{x=x_0} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)'\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\bigg|_{x=x_0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}.$$

Тоді диференціал в точці

$$dy = y'(x_0)\,\Delta x = \frac{1}{12}\cdot\Delta x = \frac{x - x_0}{12} = \frac{x-8}{12}.$$

Зокрема, при $x = 8{,}48$ маємо:

$$dy = \frac{8{,}48 - 8}{12} = \frac{0{,}48}{12} = 0{,}04.$$

Тоді

$$\sqrt[3]{8{,}48} = y(x) = y_0 + \Delta y \approx y_0 + dy = 2 + 0{,}04 = 2{,}04.$$

Розрахунок на калькуляторі веде до значення $\sqrt[3]{8{,}48} \approx 2{,}0392$. Відносна похибка складає

$$\frac{2{,}04 - 2{,}0392}{2{,}0392}\cdot 100\% \approx 0{,}04\%. \triangleright$$

3.5 Подальші прийоми техніки диференціювання

3.5.1 Диференціювання функції, заданої параметрично

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases} \tag{3.8}$$

З першого рівняння (принаймні – в принципі) можна виразити t в залежності від x (тобто розв'язати це рівняння відносно t, вважаючи, що x є деяким параметром), і підставити знайдене t в друге рівняння. При цьому з другого рівняння параметр t буде виключеним, і залишиться тільки залежність $y(x)$. Тому можна казати, що вихідна система задає y як функцію x, а параметр t відіграє роль посередника, який пов'язує аргумент x і функцію y.

◁ *Приклад 3.22.* Вивчаючи рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0, складають проекції рівняння руху на горизонталь вздовж руху і вертикаль у вигляді:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)\, t; \\ y = (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси[9] $t(x) = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$, тоді

$$y(t(x)) = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Отже, $y(x)$ є квадратичною функцією; її графік – парабола. ▷

Іноді перше рівняння може мати більш ніж один корінь. Наприклад, їх два: $t_1 = t_1(x)$ і $t_2 = t_2(x)$. Тоді система (3.8) задаватиме дві функції, або ж дві вітки однієї *двозначної* функції. Очевидно, перед подальшим аналізом потрібно домовитись про вибір однієї з усіх можливих віток.

Зауважимо, знаходити корені $t = t(x)$ не обов'язково. Достатньо в *будь-який спосіб* виключити[10] t з системи (3.8). Розглянемо приклад такого виключення.

◁ *Приклад 3.23.* Нехай додаються два гармонічних коливання однакових амплітуд R і однакових частот ω. Нехай ці коливання відбуваються в перпендикулярних напрямках Ox, Oy і мають різницю фаз $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t; \\ y = R\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = R\sin\omega t. \end{cases}$$

[9] Вважаємо, що $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, тобто кидають не вертикально. Тоді $\cos\alpha \neq 0$.

[10] Спочатку в системі міститься три змінні: t, x, y. Виключити з системи змінну t значить зменшити кількість змінних на одну (з трьох до двох – x і y). «Розплатою» за це є відповідне зменшення кількості рівнянь на одне (з двох рівнянь до одного).

В цьому разі виключити t (тобто позбавитись цього параметра) можна навіть не розв'язуючи перше рівняння. Достатньо обидва рівняння піднести до квадрату і додати їх. Отримаємо рівняння кола: $x^2+y^2=R^2$. Очевидно, задана система визначає одразу дві вітки: $f_1(x)=+\sqrt{R^2-x^2}$ і $f_2(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$. $\triangleright$

Більш цікавим є випадок, коли вдовж осі Ox відбувається одночасно гармонічний коливальний і рівномірний поступальний рух зі швидкістю v:

$$\begin{cases} x = vt + R\cos\omega t; \\ y = R\sin\omega t. \end{cases}$$

Саме ця система описує рух точки на ободі колеса, яке котиться без проковзування, якщо покласти $v=\omega R$. Цього разу траєкторія стає більш складною (її називають *циклоїдою*). Виразити t тепер з першого рівняння не можна, бо воно стає *трансцендентним*. Втім, залишається можливість виразити t з другого рівняння і підставити до першого. Щоправда, ми тоді отримаємо функцію $x=x(y)$, *обернену* до шуканої функції $y=y(x)$.

Власне, проблема полягає в тому, що обидва рівняння системи (3.8) можуть виявитись трансцендентними одночасно. Тоді виключити t в аналітичний спосіб стає принципово неможливо. Однак, функцію $y=y(x)$ ми будемо продовжувати вважати (параметрично) визначеною, попри те, що в нашому розпорядженні аналітичний вираз $y=y(x)$ вже не з'являється.

Поставимо за мету отримати формули для похідних y'_x, y''_{xx} і т.д., користуючись лише рівняннями системи (3.8) і *не використовуючи вираз* $y=y(x)$.

Зауважимо, тепер ми не можемо позначати похідну просто через y'. Похідні від y, взяті за аргументом t і за аргументом x, *є різними*. Їх потрібно позначати $y'_t=\frac{dy}{dt}$ і $y'_x=\frac{dy}{dx}$ відповідно (те саме стосується і похідних вищих порядків). Для спрощення позначень домовились нижні індекси відкидати. Натомість, залишають символ «штрих», маючи на увазі похідну за аргументом x, і користуються символом «точка», диференціюючи за аргументом t:

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y''_{xx}=y'',$$

і т.д. В той же час

$$\frac{dy}{dt} = y'_t = \dot{y}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = y''_{tt} = \ddot{y},$$

і т.д. (читають «ігрек з точкою», «ігрек з двома точками» тощо). З використанням цих позначень отримуємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Отже, першу похідну функції однієї змінної, заданої параметрично, знаходять за формулою

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.}$$

Для обчислення за цією формулою достатньо мати в розпорядженні *лише* рівняння системи (3.8). Щоправда, відповідь, отримувана при цьому, буде вираженою через параметр t (а не через аргумент x).

Маємо далі:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(y'\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} = \frac{\frac{\frac{d}{dt}(\dot{y})\dot{x} - \dot{y}\frac{d}{dt}(\dot{x})}{(\dot{x})^2}}{\dot{x}} = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.$$

Отже, другу похідну функції однієї змінної, заданої параметрично, знаходять за формулою

$$\boxed{y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}.}$$

Для обчислення за цією формулою достатньо мати в розпорядженні *лише* рівняння системи (3.8). Щоправда, відповідь, отримувана при цьому, буде вираженою через параметр t (а не через аргумент x).

Діючи і далі в подібний спосіб, можна отримати формули для похідних більш високих порядків.

◁ *Приклад 3.24.* Функцію $y(x)$ задано параметрично системою рівнянь

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t; \\ y = t^5. \end{cases}$$

Знайдемо першу і другу похідні в точці $x_0 = 4$. Очевидно, єдиним коренем рівняння $4 = t^3 + 3t$ є число $t_0 = 1$. Похідні будуть виражені через параметр t, тому залучати до розрахунків потрібно число t_0, а не число x_0.

Диференціюючи задані рівняння за змінною t, отримуємо:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3t^2 + 3; \\ \dot{y} = 5t^4, \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 6t; \\ \ddot{y} = 20t^3. \end{cases}$$

Тоді

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5t^4}{3t^2 + 3},$$

$$y'(x_0) = \frac{5t_0^4}{3t_0^2 + 3} = \frac{5 \cdot 1^4}{3 \cdot 1^2 + 3} = \frac{5}{6}.$$

Маємо також:

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{20t^3\left(3t^2 + 3\right) - 5t^4 \cdot 6t}{(3t^2 + 3)^3} = \frac{30t^5 + 60t^3}{(3t^2 + 3)^3},$$

$$y''(x_0) = \frac{30t_0^5 + 60t_0^3}{(3t_0^2 + 3)^3} = \frac{30 \cdot 1^5 + 60 \cdot 1^3}{(3 \cdot 1^2 + 3)^3} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}. \ \triangleright$$

3.5.2 Диференціювання функції, заданої неявно

Вважають, що функцію $y(x)$ задано **неявно**, якщо задано рівняння $F(x, y) = 0$. З цього рівняння (принаймні, в принципі) можна знайти y, і він буде виражений через x. Це і означає, що наше рівняння задає функцію $y(x)$. Натомість, в ряді випадків рівняння $F(x, y) = 0$ не вдається розв'язати аналітично, тобто формула $y(x)$ в нашому розпорядженні знову не з'являється. Не дивлячись на це, потрібно отримати формулу для $y'(x)$. Більш точно кажучи, вона матиме вигляд $y'(x, y)$, тобто для отримання числового значення y' величину y з рівняння потрібно буде знаходити при заданому x. Але це вже не обов'язково робити аналітично. Часто вдається знайти y підбором або наближено (застосовуючи числові методи). Натомість, задача пошуку похідної буде розв'язаною аналітично.

Для знаходження y' достатньо скласти рівняння $F'_x = 0$. До нього змінні x, y можуть входити в довільний спосіб, але відносно похідної y' таке рівняння завжди буде лінійним (похідна в ньому з'явиться лише при диференціюванні складної функції в якості множника). Отже, таке рівняння завжди можна розв'язати відносно першої похідної: $y' = y'(x, y)$. Похідні вищих порядків звідси вже можна знайти безпосереднім диференціюванням.

◁ *Приклад 3.25.* Знайдемо похідну функції, заданої неявно рівнянням $\sin\frac{y}{x} + e^{xy} = 0$. Диференціюючи, отримуємо:

$$\left(\sin\frac{y}{x} + e^{xy}\right)' = 0,$$

$$\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)' + e^{xy}\cdot(xy)' = 0,$$

$$\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x - yx'}{x^2} + e^{xy}\cdot(x'y + xy') = 0,$$

$$\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x - y}{x^2} + e^{xy}\cdot(y + xy') = 0,$$

$$\cos\frac{y}{x}\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) + ye^{xy} + xy'e^{xy} = 0,$$

$$\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y'}{x} + xy'e^{xy} = \cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x^2} - ye^{xy},$$

$$y'\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + xe^{xy}\right) = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} - ye^{xy},$$

$$y' = \frac{\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} - ye^{xy}}{\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + xe^{xy}}.$$

Це і є відповідь. Вона потребує підстановки значень x і y. Значення x обирається за потребою, а значення y слід знаходити з рівняння $\sin\frac{y}{x} + e^{xy} = 0$ при відомому x. Це залишається проблемою, али ми принаймні отримали аналітичний вираз для похідної, тобто задачу диференціювання розв'язано. ▷

◁ *Приклад 3.26.* В точці $x_0 = 1$ знайти першу і другу похідні функції, заданої неявно рівнянням $\ln(xy) + xy = 1$.

При $x_0 = 1$ маємо рівняння $\ln y + y = 1$. Очевидно, його розв'язок $y_0 = 1$ є єдиним. Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$\ln x + \ln y + xy = 1.$$

Диференціюючи його, отримуємо:

$$\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} + y + xy' = 0.$$

Звідси

$$y' = -\frac{\frac{1}{x} + y}{\frac{1}{y} + x} = -\frac{y + xy^2}{x + x^2 y} = -\frac{y(1+xy)}{x(1+xy)} = -\frac{y}{x}.$$

Якщо потрібно позначити, від яких змінних залежить отриманий результат, то слід писати $y'(x, y) = -\frac{y}{x}$, або $y'(x, y(x)) = -\frac{y}{x}$. Якщо мова йде лише про обчислення похідної в точці, то достатньо написати скорочено: $y'(x) = -\frac{y}{x}$. Тоді

$$y'(x_0) = -\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Друга похідна також залежатиме лише від x і y:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{y}{x}\right)' = -\frac{y'x - yx'}{x^2} = -\frac{-\frac{y}{x} \cdot x - y}{x^2} = \frac{2y}{x^2},$$

$$y''(x_0) = \frac{2y_0}{x_0^2} = \frac{2 \cdot 1}{1^2} = 2. \ \triangleright$$

3.6 Повне дослідження функції та побудова її графіку

Нехай задано функцію $y = f(x)$, і потрібно дослідити її властивості і побудувати її графік. В цьому разі можна рекомендувати наступну схему з 12 пунктів. Далі, поєднуючи відповіді на питання цих пунктів, будують графік функції. На перші п'ять питань цієї схеми можна надати відповідь, обмежуючись засобами елементарної математики (розв'язування рівнянь, нерівностей тощо). Решта питань потребує застосування вищої математики (граничний перехід, диференціювання).

3.6.1 Область визначення функції

Областю визначення функції називають множину усіх значень x, для яких відповідне значення функції є визначеним.

Область визначення функції позначають $D(f) = \ldots$, або у вигляді сукупності інтервалів. Наприклад, якщо $f(x) = \sqrt{x-3}$, то $D(f) = [3; +\infty)$, або $x \in [3; +\infty)$.

Для знаходження області визначення потрібно об'єднати усі значення аргументу x, для яких відповідне значення функції існує.

3.6.2 Множина значень функції

Множиною значень функції називають множину усіх значень y, кожне з яких відповідає хоча б якому-небудь значенню аргументу $x \in D(f)$.

Множину значень функції позначають $E(f) = \ldots$, або у вигляді сукупності інтервалів. Наприклад, якщо $f(x) = e^x$, то $E(f) = (0; +\infty)$, або $y \in (0; +\infty)$.

Для знаходження множини значень потрібно об'єднати усі значення функції y, кожне з яких можливо отримати при використанні бодай-якого $x \in D(f)$. Практично приймають таке рішення: чергове значення y належить множині значень, якщо рівняння $y = f(x)$ має хоча б один розв'язок x. Знаходити цей розв'язок не обов'язково. Достатньо лише дати гарантії, що він існує.

$\triangleleft$ *Приклад 3.27*. Знайдемо множину значень функції

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Маємо: $1 + x^2 = \frac{1}{y}$, $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. Очевидно, знайти звідси x можна за умови $\frac{1}{y} - 1 \geqslant 0$, $\frac{y-1}{y} \leqslant 0$. Розв'язок цієї нерівності легко знайти методом інтервалів. Він має вигляд $E(f) = (0; 1]$. $\triangleright$

3.6.3 Нулі функції

Знаходять **нулі функції.** Так називають значення аргументу, яким відповідає значення функції $y = 0$. Іншими словами, число x_0 є нулем функції, якщо воно є розв'язком рівняння $f(x) = 0$.

Геометрично нулі виглядають як точки перетину графіка з віссю Ox. Таких точок може бути декілька, або навіть нескінченно багато. Наприклад, нулі функції $y = \sin x$ – це значення $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наступне питання в окремий пункт схеми ми не виносимо, як очевидне: знайти точку перетину графіка функції з віссю Oy. Якщо $x = 0$ належить області визначення, то ця точка має координати $(0; f(0))$; вона є єдиною. Якщо ж нуль не входить до області визначення, то графік взагалі не перетинає вісь Oy.

3.6.4 Парність функцій

Функцію досліджують на **парність**. Якщо область визначення $D(f)$ симетрична відносно точки $x = 0$ і для будь-яких x з області визначення виконано рівність $f(-x) = f(x)$, то функцію називають **парною**. Наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = e^x + e^{-x}$ і т.ін. Графіки парних функцій мають осьову симетрію відносно осі Oy.

Якщо $D(f)$ симетрична відносно точки $x = 0$ і для будь-яких x з області визначення виконано рівність $f(-x) = -f(x)$, то функцію називають **непарною**. Наприклад, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = e^x - e^{-x}$ і т.ін. Графіки непарних функцій мають центральну симетрію відносно початку координат.

Функція може виявитись ні парною, ані непарною, і її графік взагалі не є симетричним[11] ні відносно осі Oy, ні відносно початку координат. Наприклад, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ і т.ін. Іноді такі функції називають функціями загального виду.

3.6.5 Періодичність

Функцію досліджують на **періодичність**. Функцію $f(x)$ називають **періодичною** з періодом T, якщо існує найменше додатне T таке, що для *довільних* x з області визначення виконується рівність $f(x + T) = f(x)$.

З цього означення, до речі, випливає твердження: якщо $f(x)$ є періодичною функцією, то її область визначення $D(f)$ є не-

[11] При цьому інші можливі симетрії не виключаються. Наприклад, графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ є центрально симетричним відносно точки з координатами $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Але ця функція не є ні парною, ані непарною.

обмеженою. Справді, якщо існує $f(x)$, тоді існує $f(x+T)$, тоді існує $f(x+2T)$ і т.д.

Очевидно, якщо T – період, то величина nT, $n \in \mathbb{N}$ – також період. Тому періодом у власному сенсі називають найменший з усіх можливих періодів.

Найчастіше періодичність виникає в разі тригонометричних функцій. Так, $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають період $T = 2\pi$, а $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ мають період $T = \pi$.

Як відомо, графік $f(\omega x)$ виникає з графіка $f(x)$ при стисканні вздовж горизонталі. Відповідно, період зменшується в ω разів. Наприклад, період функції $y = \sin 5x$ дорівнює $\frac{2\pi}{5}$, а період функції $y = \operatorname{tg} 7x$ дорівнює $\frac{\pi}{7}$.

Зауважимо, сума двох періодичних функцій з різними періодами також може виявитись періодичною.

$\lhd$ *Приклад 3.28.* Знайдемо період функції $y = \sin 4x + \sin 6x$. Періоди першого і другого доданків $T_1 = \frac{2\pi}{4}$, $T_2 = \frac{2\pi}{6}$. Сума може виявитись періодичною, якщо існуватиме T, яке може бути вичерпане мірками T_1 і T_2 ціле число разів. Інакше, сума періодична, якщо існують цілі m, n такі, що $T = mT_1$, $T = nT_2$. Маємо:

$$m \cdot \frac{2\pi}{4} = n \cdot \frac{2\pi}{6}, \qquad 3m = 2n.$$

Нас цікавить пара найменших додатних цілих розв'язків. Очевидно, це $m = 2$, $n = 3$. Відповідно,

$$T = 2 \cdot \frac{2\pi}{4} = 3 \cdot \frac{2\pi}{6} = \pi. \rhd$$

Сума двох доданків може виявитись неперіодичною функцією, навіть якщо кожний з доданків має свій період.

$\lhd$ *Приклад 3.29.* Розглянемо функцію $y = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$. Періоди першого і другого доданків $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$. Спроба вичерпання спільного періоду цими мірками веде до рівняння

$$m \cdot 2\pi = n \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2} = \frac{n}{m}.$$

Це рівняння не має розв'язку у цілих числах, оскільки $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом. Отже сума не є періодичною, попри періодичність окремих доданків. $\rhd$

Періодична функція – не обов'язково тригонометрична. Наприклад, періодичною є функція $y = \{x\}$ (дробова частина числа). Її період становить $T = 1$.

Цими п'ятьма пунктами вичерпуються можливості елементарної математики. Далі застосовують міркування вищої математики.

3.6.6 Неперервність

Функцію досліджують на **неперервність.** Деталі цього дослідження викладено в п. 1.7.

3.6.7 Диференційовність

Функцію досліджують на **диференційовність** (див. п. 3.2). Нагадаємо, що з диференційовності в точці вже випливає і неперервність в цій точці (теорема 3.1). Тому практично можна одразу знаходити похідну. В разі диференційовності потреба в п. 6° зникає. Якщо ж в деякій точці x_0 похідна не існує, то повертаються до п. 6°.

3.6.8 Інтервали монотонності

Шукають **інтервали монотонності** функції, тобто інтервали монотонного зростання і монотонного спадання. Це роблять на підставі теореми 3.4. А саме, інтервали монотонного зростання – це розв'язки нерівності $f'(x) > 0$, а інтервали монотонного спадання – це розв'язки нерівності $f'(x) < 0$. При застосуванні методу інтервалів зручно ці обидві нерівності розв'язувати одночасно.

$\triangleleft$ *Приклад 3.30*. Знайдемо інтервали монотонності функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Маємо:

$$f'(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Розв'яжемо нерівності $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$. Відповідне креслення для застосування методу інтервалів подано на рис. 3.10.

Розв'язком нерівності $f'(x) < 0$ є інтервал $x \in (-1; 1)$. Це і є інтервал спадання. Розв'язки $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ нерівності $f'(x) > 0$ є інтервалами зростання. Зауважимо, функція зростає на кожному з цих інтервалів, взятому *окремо*. На множині X, яка виникає при об'єднанні цих інтервалів, функція не є зростаючою. Справді, нехай $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$. Очевидно, $x_1, x_2 \in X$,

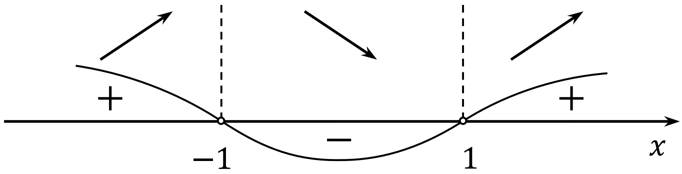


Рисунок 3.10 – До визначення інтервалів монотонності

і $x_2 > x_1$. При цьому

$$y_1 = f(x_1) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$y_2 = f(x_2) = -f(x_1) = -\frac{3}{8} < y_1.$$

Отже, нерівність $y_2 > y_1$ не виконано (див. означення 3.5 монотонності на множині). ▷

Зауважимо, якщо $f'(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ зростає в точці x_0. Але обернене твердження неправильне: якщо функція $f(x)$ зростає в точці x_0, то похідна може додатною і не виявитись: вона може дорівнювати нулю (наприклад, $y = x^3$ в точці $x_0 = 0$) або не існувати взагалі. Наприклад, функція

$$y = \left[\begin{array}{ll} x, & x < 0; \\ 2x, & x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

в точці $x_0 = 0$ зростає (вона взагалі всюди зростає), але похідна $f'(0)$ не існує (не можна провести дотичну до графіку в точці зламу).

3.6.9 Локальні екстремуми

Функцію досліджують на **екстремуми**. Цей термін використовують для об'єднання понять максимуму і мінімуму (максимум є одним різновидом екстремуму, а мінімум – іншим).

Розглянемо функцію $y = (x-1)^2 + 2$. Її графік – звичайна парабола вітками догори з вершиною в точці з координатами $(1; 2)$. Очевидно, $(x-1)^2 = y - 2 \geqslant 0$ як повний квадрат, і $y \geqslant 2$.

Отже, значення $y = 2$ є мінімальним (усі інші є більшими), і воно досягається при $x = 1$. Кажуть, що $x = 1$ – точка мінімуму, а $y = 2$ – значення мінімуму, або просто мінімум. Пишуть: $\min y = y(1) = 2$. В разі максимумів аналогічно розрізняють максимум і точку максмимуму.

Узагальнимо ці міркування наступним означенням.

♦ **Означення 3.8.** Число x_0 називають **точкою мінімуму (максимуму)** функції $y = f(x)$, якщо існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $f(x_0) < f(x)$ (нерівність $f(x_0) > f(x)$ відповідно). Число $f(x_0)$ в цьому разі називають **мінімумом (максимумом)** відповідно. Пишуть: $\min y = f(x_0) = y_0$ ($\max y = f(x_0) = y_0$ відповідно).

Цим означенням визначаються т.зв. **локальні** екстремуми.

Нехай в деякій точці x_0 функція $f(x)$ має додатну похідну, $f'(x_0) > 0$. Тоді функція зростає в цій точці. Очевидно, точка x_0 не може бути точкою екстремуму. Справді, якщо $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$ за рахунок зростання, і x_0 не є точкою максимуму. Якщо ж $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$ (також за рахунок зростання), і x_0 не є точкою мінімуму. Аналогічно, при $f'(x_0) < 0$ точка x_0 також не є точкою екстремуму.

Отже, в точці екстремуму з чотирьох можливостей (в точці x_0 похідна $f'(x_0)$ може або бути додатною, або бути від'ємною, або дорівнювати нулю, або не існувати взагалі) перші дві відхиляються. Якщо обмежитись лише диференційовними функціями, то залишиться лише третя можливість, і ми прийдемо до леми П. Ферма́ про екстремуми.

■**Лема П. Ферма (необхідна умова екстремуму).** Якщо функція $f(x)$ має локальний екстремум в точці x_0 і є диференційовною в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.■

Геометричний зміст цього твердження простий: дотична до графіка функції в точці екстремуму є горизонтальною. Відповідно, механічний зміст: миттєва швидкість зміни функції в точці екстремуму стає рівною нулю. І. Ньютон формулює[12] *принцип зупинки*: «Коли величина є найбільшою або найменшою з усіх можливих, то вона в цю мить не тече ні вперед, ані назад».

Наголосимо, лема Ферма є необхідною, але *не є достатньою* умовою екстремуму. Іншими словами, якщо диференційовна функція $f(x)$ має екстремум в точці x_0, то похідна в цій точці дорівнює нулю, $f'(x_0) = 0$. Але якщо похідна в деякій

[12] Цей принцип формулював ще М.Орезмський за три сторіччя до Ньютона.

точці дорівнює нулю, то з цього ще не випливає наявність екстремуму в цій точці. Наприклад, розглянемо функцію $y = \frac{1}{3}x^3$. Її похідна $y' = x^2$. Якщо $x = 0$, то $y' = 0$. Але $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція в цій точці зростає. Швидкість зростання $y' = x^2$. Зокрема, при $x = 0$ маємо $y' = 0$, тобто зростання відбувається з нульовою швидкістю. Ніякого протиріччя в цьому твердженні не міститься: при $x \to 0$ величина $\frac{1}{3}x^3$ стає нескінченно малою третього порядку малості порівняно з x, тому в першому (лінійному) наближенні зростання немає; воно з'являється в третьому (кубічному) наближенні.

Отже, для знаходження екстремумів потрібно знайти усі точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

♦ **Означення 3.9.** Точки x, в яких похідна $y'(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають **точками, підозрілими на екстремум.**

Можливе також використання однієї з назв: **«критична точка», «точка, критична за першою похідною», «стаціонарна точка», «точка, стаціонарна за першою похідною».**

Якщо похідна в підозрілій точці дорівнює нулю, то для підтвердження або спростування підозри застосовують наступні **достатні ознаки екстремуму.**

Достатня ознака мінімуму. *Якщо в точці x_0 похідна дорівнює нулю, $y'(x_0) = 0$, і при переході зліва направо через точку x_0 ця похідна змінює свій знак з мінусу на плюс (і, відповідно, сама функція при цьому змінює спадання на зростання), то x_0 – точка мінімуму.*

Достатня ознака максимуму. *Якщо в точці x_0 похідна дорівнює нулю, $y'(x_0) = 0$, і при переході зліва направо через точку x_0 ця похідна змінює свій знак з плюсу на мінус (і, відповідно, сама функція при цьому змінює зростання на спадання), то x_0 – точка максимуму.*

$\triangleleft$ *Приклад 3.31.* Знову розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Її похідна дорівнює: $f'(x) = x^2 - 1$. З рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо точки, підозрілі на екстремум: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. При переході зліва направо через точку x_1 похідна змінює свій знак з плюсу на мінус (див. рис. 3.10). Відповідно, сама функція при цьому змінює зростання на спадання. Отже, за достатньою ознакою максимуму точка x_1 є точкою максимуму. Значення максимуму становить

$$\max y = y(x_1) = y(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1) = \frac{2}{3}.$$

При переході зліва направо через точку x_2 похідна змінює свій знак з мінусу на плюс. Відповідно, сама функція при цьому змінює спадання на зростання. Отже, за достатньою ознакою мінімуму точка x_2 є точкою мінімуму. Значення мінімуму становить

$$\min y = y(x_2) = y(1) = \frac{1^3}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Щоб побачити знайдені екстремуми, побудуйте графік. Для цього відвідайте веб-сторінку `wolframalpha.com`. В рядок в центрі екрану введіть текст «`plot x^3/3-x`» і натисніть клавішу «`Enter`». $\rhd$

Якщо при переході зліва направо через критичну точку зміна знаку похідної не відбувається, то підозра спростовується: екстремуму немає.

$\lhd$ *Приклад 3.32*. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{5}x^5$. Її похідна дорівнює: $f'(x) = x^4$. З рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо критичну точку: $x_0 = 0$. При переході зліва направо через точку x_0 зміна знаку похідної не відбувається: і при $x < 0$, і при $x > 0$ маємо: $f'(x) > 0$. Отже, функція зростала при $x < 0$, і продовжує зростати при $x > 0$. За означенням 3.6 легко встановити, що і в точці x_0 ця функція також зростає. Тому підозра спростовується: функція екстремуму не має. $\rhd$

Застосування достатніх ознак екстремуму потребує встановлення знаків похідної в двох додаткових точках-«сусідах» – в точці $x < x_0$ («сусід по лівий бік») і в точці $x > x_0$ («сусід по правий бік»). Однак, існує спосіб «не звертатись до сусідів». Він може бути застосований до *двічі* диференційовних функцій, для яких $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) \neq 0$. Доведемо, що локальна поведінка двічі диференційовної функції описується виразом

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + g(x),$$

де величина $g(x)$ при прямуванні $x \to x_0$ стає нескінченно малою вище ніж другого порядку порівняно з $(x - x_0)$:

$$g(x) = o\left((x - x_0)^2\right).$$

Враховуючи, що $f'(x_0)=\mathrm{const}$, $f''(x_0)=\mathrm{const}$, з використанням правила Лопіталя маємо:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^2}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\Big(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2\Big)'}{((x-x_0)^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(x-x_0)}{2(x-x_0)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)\cdot(x-x_0))'}{2(x-x_0)'}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{2}=0.$$

Тоді, нехтуючи малою $g(x)$ вищого порядку малості, і враховуючи, що в підозрілій точці виконується рівність $f'(x_0)=0$, отримуємо:

$$f(x)\sim f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2.$$

Тут права частина – квадратична функція. Її графіком є парабола. При $f''(x_0)>0$ маємо параболу вітками догори, тобто x_0 – точка мінімуму. При $f''(x_0)<0$ маємо параболу вітками донизу, тобто x_0 – точка максимуму.

При $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)=0$ ситуація потребує додаткового дослідження.

Остаточно, для двічі диференційовної функції $f(x)$ маємо:

$$\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \min f=f(x_0),$$

$$\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \max f=f(x_0).$$

$\lhd$ *Приклад 3.33.* Знову розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$. Її похідна дорівнює: $f'(x)=x^2-1$. З рівняння $f'(x)=0$ знаходимо точки, підозрілі на екстремум: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Друга похідна дорівнює: $f''(x) = 2x$. Маємо: $f''(x_1) = f''(-1) = -2 < 0$. Отже, x_1 – точка максимуму. Маємо далі: $f''(x_2) = f''(1) = 2 > 0$. Отже, x_2 – точка мінімуму. Значення цих екстремумів обчислено вище. $\triangleright$

Існують випадки, коли в критичній точці $f'(x_0) = 0$, але $f''(x_0)$ не існує. Розглянутий спосіб стає незастосовним, і потрібно звертатись до достатніх ознак екстремуму.

$\triangleleft$ *Приклад 3.34.* Розглянемо функції

$$f(x) = \sqrt{|x^3|}, \qquad g(x) = x\,|x|\,.$$

При $x \geqslant 0$ вони є звичайними степеневими функціями з показниками $n = \frac{3}{2}$ і $n = 2$. Але за рахунок модуля функція $f(x)$ виявляється парною, а функція $g(x)$ – непарною. Графік $f(x)$ якісно схожий на квадратичну параболу, а графік $g(x)$ – на кубічну параболу. Тому точка $x_0 = 0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$, але вона не є точкою екстремуму функції $g(x)$.

Похідні цих функцій

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}, & x \geqslant 0; \\ -\frac{3}{2}\sqrt{-x}, & x < 0, \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0; \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, точка $x_0 = 0$ є підозрілою на екстремум для обох функцій: $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$. Але для функції $f(x)$ ця підозра підтверджується (при переході через нуль похідна $f'(x)$ змінює знак з мінусу на плюс; маємо мінімум), а для функції $g(x)$ – спростовується (похідна $g'(x)$залишається додатною для всіх x, крім нуля; екстремуму немає).

Другі похідні цих функцій:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{x}}, & x > 0; \\ \frac{3}{4\sqrt{-x}}, & x < 0, \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0; \\ -2, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ жодна з цих похідних не є визначеною: $f''(0)$ існує лише у невласному сенсі ($f''(0) = +\infty$); $g''(0)$ існує лише у граничному сенсі ($g''(0+0) = 2$, $g''(0-0) = -2$). Тому спрощений спосіб «не звертатись до сусідів» в цьому прикладі незастосовний. Натомість, функції на екстремум досліджено за допомогою достатніх ознак екстремуму. $\triangleright$

Можливі випадки, коли в підозрілій точці не існує не тільки друга, а навіть і перша похідна. В цьому разі є незастосовним не тільки спрощений спосіб «не звертатись до сусідів», а навіть достатні умови екстремуму. Тому виходять з означення точки екстремуму.

◁ *Приклад 3.35.* Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^{-2}, & x \neq 0; \\ -50, & x = 0. \end{cases}$$

Її похідна $f'(x) = \frac{1}{x^3}$. Очевидно, $x_0 = 0$ – єдина критична точка (в ній похідна не існує). Здавалося б, при переході через x_0 зліва направо знак похідної міняється з мінусу на плюс, і виникає мінімум. Насправді ж функція $f(x)$ в точці x_0 має неусувний розрив другого роду, і отже, тим паче є недиференційовною. Тому достатня ознака мінімуму є незастосовною.

Доведемо за означенням, що ця функція, навпаки, має максимум в точці x_0. Справді, покладемо $\delta = 0{,}1$ і перевіримо, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $f(x_0) > f(x)$. Враховуючи парність функції, достатньо переконатись, що з нерівності $0 < x < 0{,}1$ випливає нерівність $-50 > -0{,}5x^{-2}$. При $x > 0$ нерівність $x < 0{,}1$ можна піднести до квадрату. Отримаємо:

$$x^2 < 0{,}01, \qquad x^{-2} = \frac{1}{x^2} > 100, \qquad -0{,}5x^{-2} < -50,$$

що і треба було довести. Остаточно, $\max f = f(0) = -50$. ▷

◁ *Приклад 3.36.* Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0; \\ x - 1, & x > 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Незалежно від a вона в точці $x_0 = 0$ має неусувний розрив першого роду (типу стрибка). Справді, її однобічні границі дорівнюють

$$L = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (x + 1) = 1,$$

$$R = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x - 1) = -1,$$

і $R \neq L$. Тим паче розглядувана функція не є диференційовною в цій точці. Тому x_0 – критична точка.

Нехай $a \geqslant 1$. Тоді x_0 – точка максимуму, і $\max f = a$. Для доведення цього звернемось до означення 3.8 точки максимуму.

Покладемо $\delta = 1$. Розв'язок нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ складається з двох інтервалів: $x \in (-1; 0)$ і $x \in (0; 1)$. На першому інтервалі $x < 0$, і $f(x) = x + 1 < 1$. Отже, $f(x) < a$. На другому інтервалі $x < 1$, і $f(x) = x - 1 < 0 < 1$. Отже, знову $f(x) < a$. Тому x_0 – точка максимуму за означенням.

Нехай $a \leqslant -1$. Тоді x_0 – точка мінімуму, і $\min f = a$. Знову покладемо $\delta = 1$. Розв'язок нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ складається з двох інтервалів: $x \in (-1; 0)$ і $x \in (0; 1)$. На першому інтервалі $x > -1$, і $f(x) = x + 1 > 0 > -1$. Отже, $f(x) > a$. На другому інтервалі $x > 0$, і $f(x) = x - 1 > -1$. Отже, знову $f(x) > a$. Тому x_0 – точка мінімуму за означенням.

Нехай $-1 < a < 1$. В цьому разі x_0 не є точкою екстремуму. Наприклад, доведемо, що x_0 не є точкою мінімуму. Достатньо довести, що при довільному $\delta > 0$ знайдеться хоча б одне значення x, $0 < x < \delta$, при якому виконано нерівність $f(x) < a$, і тоді a – не мінімальне значення. Розглянемо два варіанти.

Припустимо, $\delta > a + 1$. Тоді достатньо покласти $x_1 = \frac{a+1}{2}$. Очевидно, $0 < x_1 < a + 1 < \delta$. Тоді

$$f(x_1) = x_1 - 1 = \frac{a+1}{2} - 1 = \frac{a-1}{2} < a.$$

Припустимо тепер, $0 < \delta \leqslant a + 1$. Тоді достатньо покласти $x_2 = \frac{\delta}{2}$. Очевидно, $0 < x_2 < \delta \leqslant a + 1$. Тоді

$$f(x_2) = x_2 - 1 = \frac{\delta}{2} - 1 < \delta - 1 \leqslant a.$$

Отже, при довільних додатних δ всередині δ-околу точки x_0 знайдеться значення x (залежно від δ це буде x_1 або x_2), при якому $f(x) < a$. Тому a – не мінімальне значення.

Величина a також не є максимумом. Це випливає з аналогічного розглядання вітки функції $f(x)$ при $x < 0$. $\rhd$

Наголосимо ще раз, достатні ознаки екстремуму не є необхідними. Іншими словами, з наявності екстремуму в точці x_0 не випливає рівність похідної нулю: похідна в підозрілій точці може не існувати. В цьому разі замість достатніх ознак екстремуму користуються означенням екстремуму.

3.6.10 Інтервали опуклості

Шукають **інтервали опуклості** функції.

Нехай на деякому інтервалі $x \in (a; b)$ перша похідна функції всюди додатна, $f'(x) > 0$. Тоді функція зростає на цьому інтервалі. Порівняємо зростання трьох функцій: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$. Очевидно, усі три функції монотонно зростають, оскільки швидкості їх зростання є додатними:

$$f_1'(x) = 1 = \text{const} > 0, \quad f_2'(x) = 2x > 0, \quad f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$

Але характер зростання цих функцій є різним. Функція $f_1(x)$ зростає зі сталою швидкістю; функція $f_2(x)$ зростає прискорено (що більше x, то більшим стає тангенс кута нахилу дотичної $\operatorname{tg}\alpha = f_2'(x) = 2x$); функція $f_3(x)$ зростає уповільнено (зростання продовжується, але швидкість $f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ цього зростання стає дедалі меншою). Відповідно, графіки цих функцій мають наступну геометричну особливість: графік функції $f_1(x)$ є прямою (не вигинається), графік функції $f_2(x)$ є *опуклим донизу*, графік функції $f_3(x)$ є *опуклим догори*. Заздалегідь передбачити, яка з цих трьох можливостей станеться (відсутність вигинання, опуклість донизу, опуклість догори), за допомогою першої похідної не вдається. Але це питання легко вирішити, застосовуючи другу похідну.

Розглянемо функцію $f(x)$, двічі диференційовну на інтервалі $x \in (a; b)$. Нехай всюди на цьому інтервалі виконано нерівність $f''(x) > 0$. Нехай $\varphi(x) = f'(x)$. Тоді

$$\varphi'(x) = (f'(x))' = f''(x) > 0.$$

Оскільки $\varphi'(x) > 0$, то функція $\varphi(x) = f'(x)$ є зростаючою за теоремою 3.3. Отже, чим більший x обрати, тим більшим буде значення $f'(x)$, тобто тим більшим стане кут α, утворюваний дотичною до графіка з *додатним* напрямком осі Ox.

Нехай функція $f(x)$ зростає ($f'(x) > 0$). При додатній другій похідній збільшення кута α від значення α_1 до значення α_2 показано на рис. 3.11 ліворуч. Як бачимо, в цьому разі функція $f(x)$ зростає прискорено.

Нехай функція $f(x)$ спадає ($f'(x) < 0$). При додатній другій похідній збільшення кута α від значення α_1 до значення α_2 показано на рис. 3.11 праворуч. Розглянемо, наприклад, ситуацію, коли кут α збільшується від значення $\alpha_1 = 120^\circ$ при $x = x_1$ до значення $\alpha_2 = 135^\circ$ при $x = x_2$. При цьому перша похідна,

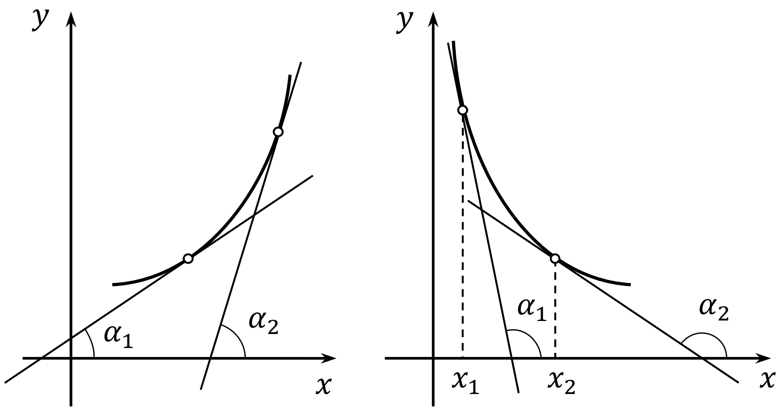


Рисунок 3.11 – До визначення опуклості донизу

залишаючись від'ємною, збільшується від значення $f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}120° = -\sqrt{3}$ до значення $f'(x_2) = \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}135° = -1$. Справді, маємо $f'(x_2) > f'(x_1)$, $-1 > -\sqrt{3}$. Якщо мати на увазі не першу похідну, а її абсолютне значення (модуль), то це значення зменшується: $|f'(x_2)| < |f'(x_1)|$, $+1 < +\sqrt{3}$. Іншими словами, з точки зору динаміки поведінки функції можна сказати, що швикість зміни функції за модулем зменшується. Отже, в цьому разі функція $f(x)$ спадає уповільнено.

Як бачимо, при додатній другій похідній функція може і зростати (прискоренно), і спадати (уповільнено). Але в будь-якому разі її графік буде опуклим донизу.

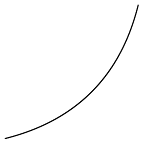
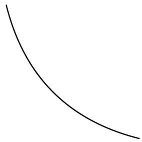
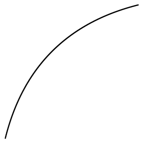
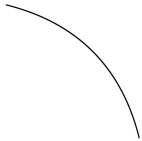
Аналогічно легко показати наступне. При від'ємній другій похідній функція може і зростати (уповільнено), і спадати (прискоренно). Але в будь-якому разі її графік буде опуклим догори.

Отже, при більш тонкому аналізі монотонності вся справа зводиться до встановлення *сполучень* знаків першої і другої похідних. Відповідні можливості перелічено в табл. 3.3.

Підкреслимо, що в загальному випадку знаки першої і другої похідних в точці не залежать один від одного. Це ілюструє наступний приклад.

$\lhd$ *Приклад 3.37*. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Її графік на періоді показано на рис. 3.12 зверху. Похідна дорівнює

Таблиця 3.3 – Напрям опуклості графіка

	Зростає, $f'(x) > 0$	Спадає, $f'(x) < 0$
Опуклий донизу, $f''(x) > 0$		
Опуклий догори, $f''(x) < 0$		

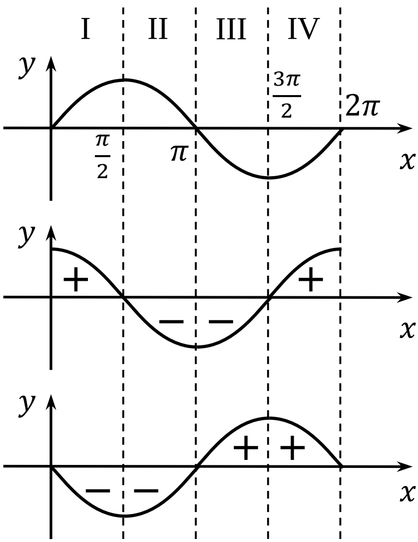


Рисунок 3.12 – До визначення опуклості синусу

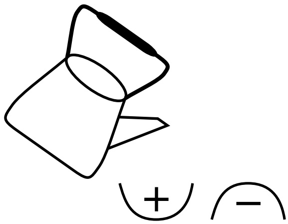


Рисунок 3.13 – Як запам'ятати знаки другої похідної

$f'(x) = \cos x$; її графік розташовано на рис. 3.12 всередині. Друга похідна дорівнює $f'(x) = -\sin x$; її графік розташовано на рис. 3.12 знизу.

В першій чверті $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, перша похідна додатна, тому функція зростає. Друга похідна від'ємна, тому зростання є опуклим догори.

В другій чверті $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, перша похідна стає від'ємною, тому функція починає спадати. Друга похідна ще залишається від'ємною, тому спадання ще залишається опуклим догори.

В третій чверті $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, перша похідна ще залишається від'ємною, тому функція продовжує спадати. Але друга похідна вже стає додатною. Тому спадання продовжується, але стає опуклим донизу.

В четвертій чверті $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, перша похідна вже стає додатною, тому функція починає зростати. Але друга похідна ще залишається додатною; зростання є опуклим донизу.

Отже, синусоїда на періоді припускає сполучення довільного знаку (плюс або мінус) першої похідної з довільним знаком другої похідної. $\triangleright$

Остаточний висновок цього пункту такий. Для знаходження інтервалів опуклості донизу потрібно розв'язати нерівність $f''(x) > 0$, а для знаходження інтервалів опуклості догори – нерівність $f''(x) < 0$.

Наведемо наступну мнемонічну[13] схему. Вона відповідає на питання: чи вдасться нам випити чаю? В разі чашки зліва (рис. 3.13) питання про чаювання вирішується позитивно (при

[13]Мнемозіна – богиня пам'яті в давньогрецькій міфології. Сьогодні слово «мнемонічний» означає «той, що робить запам'ятовування зручним».

додатній другій похідній маємо опуклість донизу). В разі чашки справа питання по чаюванні вирішується негативно (при від'ємній другій похідній маємо опуклість догори).

3.6.11 Точки перегину

Функцію досліджують на **точки перегину.**

Зазвичай нерівності $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$ з попереднього пункту методом інтервалів розв'язують одночасно. Нехай виявилось, що в точці x_0 друга похідна $f''(x_0)$ дорівнює нулю або не існує. Тоді число x_0 не є розв'язком жодної з цих нерівностей. Очевидно, функція може мати **перегин** (зміну напрямку опуклості) тільки в таких точках x_0, оскільки в усіх інших точках x друга похідна $f''(x)$ існує і відмінна від нуля, тому має місце конкретний напрям опуклості.

⧫ **Означення 3.10.** Точку x_0, в якій друга похідна $f''(x_0)$ дорівнює нулю або не існує, називають **підозрілою на перегин.**

Застосовують також терміни **«точка, критична за другою похідною», «точка, стаціонарна за другою похідною».**

Дослідження на перегин нагадує дослідження на екстремум, тільки є ще більш простим: нам не потрібно виявляти знак другої похідної, а достатньо лише переконатись, що він змінюється (і тим самим змінюється напрям опуклості).

Достатня ознака перегину. *Якщо в точці x_0 друга похідна дорівнює нулю, $y''(x_0) = 0$, і при переході через точку x_0 ця похідна змінює свій знак на протилежний, то x_0 є точкою перегину.*

◁ *Приклад 3.38.* Розглянемо функцію $y = \sin x$. Друга похідна дорівнює $y'' = -\sin x$. Вона існує при будь-яких $x \in \mathbb{R}$. Тому перегин може виникати лише в точках, для яких виконано рівняння $y'' = 0$. Розв'язки $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, цього рівняння і є точками, підозрілими на перегин. Доведемо, що ця підозра кожного разу підтверджується.

Позначимо $x_1 = k\pi - \delta$, $x_2 = k\pi + \delta$. Тут δ – довільне число з інтервалу $0 < \delta < \pi$. Оскільки $\delta > 0$, то точка x_1 є «сусідом зліва» для «підозрюваної» точки $x = k\pi$, точка x_2 – «сусідом справа». Оскільки відстань між найближчими підозрюваними точками $(k-1)\pi$, $k\pi$, $(k+1)\pi$ і т.д. дорівнює π, а $\delta < \pi$, то інтервали $x \in (x_1; k\pi)$, $x \in (k\pi; x_2)$ інших підозрюваних точок не містять. Тому зміна знаку y'' при переході через точку $k\pi$ –

це те саме, що протилежність знаків значень $y''(x_1)$ і $y''(x_2)$. Отже, достатньо довести, що $y''(x_2) \cdot y''(x_1) < 0$, вважаючи, що δ – довільний гострий кут. З використанням тотожності

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

маємо:

$$y''(x_2) \cdot y''(x_1) = -\sin x_2 \cdot (-\sin x_1) = \sin x_2 \cdot \sin x_1 =$$

$$= \sin(k\pi + \delta) \cdot \sin(k\pi - \delta) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 2\delta - \cos 2k\pi\right] = \frac{1}{2}\left[\cos 2\delta - 1\right] < 0.$$

Отже, при переході через кожну точку $x = k\pi$ відбувається зміна знаку другої похідної, тому кожна точка $x = k\pi$ є точкою перегину за достатньою ознакою перегину. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 3.39.* Розглянемо функцію $y = x^4 - 4x^3$. Маємо: $y = x^3(x - 4)$. З рівняння $y = 0$ отримуємо нулі функції – точки $x = 0$ і $x = 4$ (точки перетину з віссю Ox). Маємо далі:

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

З нерівності $y' > 0$ отримуємо інтервал зростання: $x > 3$. З нерівності $y' < 0$ отримуємо інтервали спадання. Формально їх два: $x < 0$ і $0 < x < 3$. Але фактично – один, $x < 3$, оскільки в точці $x = 0$ функція продовжує спадати.

Стаціонарні точки виникають з рівняння $y' = 0$. Це точки $x = 0$ і $x = 3$. Підозра відносно точки $x = 0$ спростовується (функція продовжує спадати). А в точці $x = 3$ досягається мінімум, оскільки при переході через неї спадання змінюється на зростання, а сама функцій в цій точці є неперервною. Маємо:

$$\min y = y(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27.$$

Маємо далі:

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Розв'язуючи нерівність $y' < 0$, знаходимо інтервал опуклості догори: $0 < x < 2$. Ззовні цього інтервалу маємо опуклість донизу. Точки, підозрілі на перегин, виникають з рівняння $y'' = 0$.

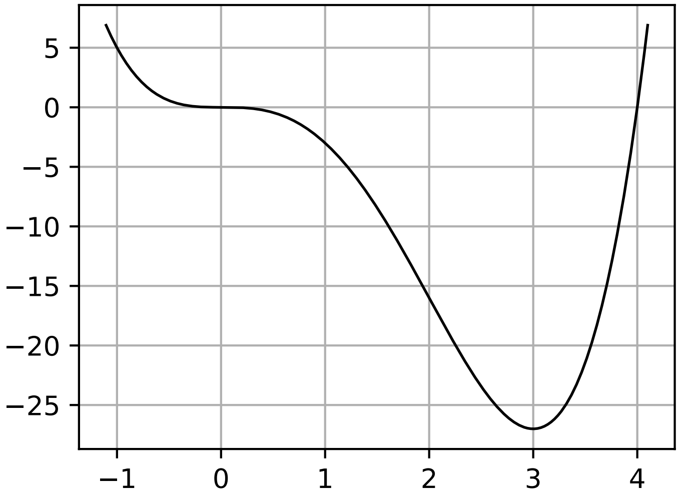


Рисунок 3.14 – Графік функції $y = x^4 - 4x^3$

Це точки $x = 0$ і $x = 2$. В обох випадках підозра підтверджується (друга похідна змінює знак при переході через ці точки). Отже, точки $x = 0$ і $x = 2$ – точки перегину.

Графік досліджуваної функції з урахуванням сказаного подано на рис. 3.14. $\triangleright$

В розглянутому прикладі в обох точках, підозрілих на перегин, підозра виправдвлась. Наведемо тепер протилежний приклад.

$\triangleleft$ *Приклад 3.40.* Розглянемо функцію $y = x^4$. Друга похідна дорівнює $y'' = 12x^2$. Вона існує при будь-яких $x \in \mathbb{R}$. Тому перегин може виникати лише в точці, для якої виконано рівняння $y'' = 0$. Тоді єдина точка, підозріла на перегин – це $x = 0$. Але при переході через неї друга похідна не змінює знаку: вона додатна як при $x < 0$, так і при $x > 0$. Отже, підозру спростовано: перегину немає, оскільки функція весь час залишається опуклою донизу. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 3.41.* Розглянемо функцію $y = 3x^5 - 5x^4$. Маємо:

$$y' = 15x^4 - 20x^3, \qquad y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1).$$

Рівняння $y'' = 0$ має корені $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Це і є точки, підозрілі на перегин. Але підозра відносно точки x_1 спростовується (друга похідна при переході через точку x_1 не змінює знаку і залишається від'ємною; це встановлюється методом інтервалів). Підозра відносно точки x_2, навпаки, підтверджується (друга похідна при переході через точку x_2 змінює знак з мінуса на плюс). Отже, функція має єдиний перегин – в точці x_2. $\triangleright$

Як бачимо, при $f''(x_0) = 0$ перегин в точці x_0 може бути як наявним, так і відсутнім.

В разі, колі $f''(x_0)$ не існує, перегин в точці x_0 також може бути як наявним, так і відсутнім. Але тепер застосування достатньої ознаки перегину є неприпустимим.

$\triangleleft$ *Приклад 3.42.* Розглянемо функцію $y = \frac{1}{x}$. Її перша і друга похідні дорівнюють $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$. Єдина точка, підозріла на перегин – це $x = 0$. Формально друга похідна при переході через цю точку змінює знак на протилежний. Але перегину немає; є неусувний розрив другого роду. Вітки гіперболи $y = \frac{1}{x}$ відокремлені одна від одної, тому вести мову про перегин сенсу немає. Застосування достатньої ознаки перегину виявилось неприпустимим. $\triangleright$

Розглянемо більш тонкі приклади, коли в точці, підозрілій на перегин, функція є неперервною, або має усувний розрив.

$\triangleleft$ *Приклад 3.43.* Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Вона неперервна в точці $x = 0$. З графіка функції зрозуміло, що в точці $x = 0$ наявний перегин, хоча похідні $y'(0)$, $y''(0)$ не існують (виникає потреба ділення на нуль). $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 3.44.* Розглянемо функції

$$f(x) = xe^{-1/x^2}, \qquad g(x) = x^2e^{-1/x^2}.$$

Вони розривні в точці $x = 0$, але цей розрив є усувним. Довизначимо ці функції до неперервних:

$$F(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x^2e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$ маємо:

$$F'(x) = e^{-1/x^2} + xe^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)e^{-1/x^2} > 0.$$

За означенням похідної легко переконатись, що $F'(0)=0$:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}e^{-1/x^2}=0.$$

Отже, $F'(x)\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$, причому рівність досягається лише в точці $x=0$. Тому $F(x)$ диференційовна на всій області визначення і зростає на ній. При $x\neq 0$ маємо далі:

$$F''(x)=-\frac{4}{x^3}e^{-1/x^2}+\left(1+\frac{2}{x^2}\right)e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}=$$

$$=\left(\frac{4}{x^5}-\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2}=\frac{2\left(2-x^2\right)}{x^5}\cdot e^{-1/x^2}.$$

За означенням похідної легко переконатись, що $F''(0)=0$:

$$F''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)-F'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)e^{-1/x^2}=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{x^2}=t\\ t\to+\infty\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}+2t\sqrt{t}}{e^t}=0.$$

Отже, функція $F(x)$ є принаймні двічі диференційовною. Тому до неї можна застосувати достатню ознаку перегину. Отримуємо три перегини: в точках $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$. Природно домовитись, що функція $f(x)$ також має перегин в точці $x=0$, оскільки графік функції $f(x)$ відрізняється від графіка функції $F(x)$ лише відсутністю точки $O(0;0)$.

Аналогічно досліджуючи функцію $G(x)$, можна переконатись, що при $x>0$ вона також прискорено зростає, тобто має опуклість донизу. Але функція $G(x)$, на відміну від функції $F(x)$, є парною. Тому в лівій половині δ-околу точки $x=0$ за міркуваннями симетрії функція $G(x)$ спадає, також маючи опуклість донизу. Отже, перегин функції $G(x)$ в точці $x=0$ відсутній; натомість наявний гладкий мінімум. Графіки функцій $f(x)$, $g(x)$ подано на рис. 3.15 ліворуч і праворуч відповідно. $\triangleright$

Наведемо ще більш тонкий приклад, коли функція в підозрілій точці є не тільки неперервною, а навіть диференційовною.

$\triangleleft$ *Приклад 3.45.* Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leqslant 0;\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$$

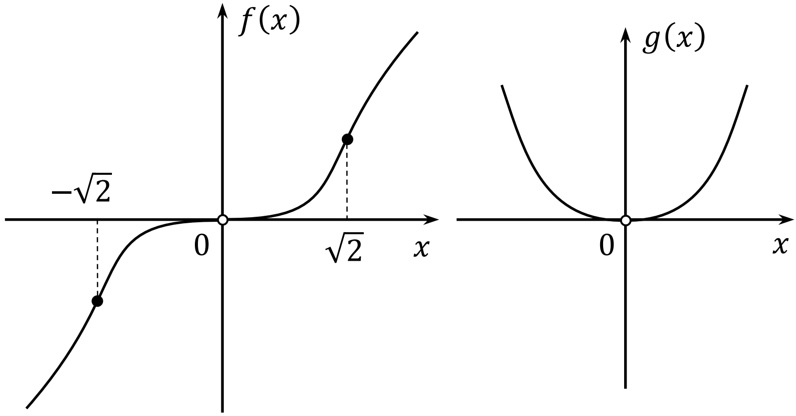


Рисунок 3.15 – Графіки функцій $f(x) = xe^{-1/x^2}$, $g(x) = x^2e^{-1/x^2}$

Очевидно,

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ \cos x, & x > 0, \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ -\sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Як бачимо, $f'(0) = 1$, але $f''(0)$ вже не існує, оскільки друга похідна в точці $x = 0$ має неусувний розрив першого роду типу стрибка. Справді, маємо:

$$L = \lim_{x \to 0-0} f''(x) = \lim_{x \to 0-0} e^x = 1,$$

$$R = \lim_{x \to 0+0} f''(x) = \lim_{x \to 0+0} (-\sin x) = 0,$$

і $R \neq L$. Однак, при переході через точку $x = 0$ маємо зміну зростання, опуклого донизу, на зростання, опукле догори. Тому $x = 0$ – точка перегину. Графік функцій $f(x)$ подано на рис. 3.16. Похила пряма на цьому графіку є дотичною, спільною до обох віток.

Поряд з цим розглянемо також функцію

$$g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leqslant 0; \\ \sin 4x, & x > 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$g'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ 4\cos 4x, & x > 0, \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0; \\ -16\sin 4x, & x > 0. \end{cases}$$

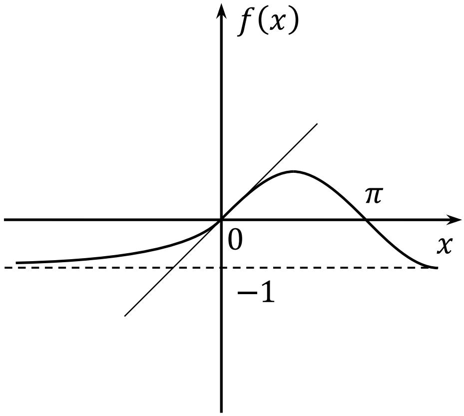


Рисунок 3.16 – Графік функції $f(x)$ (до прикладу 3.45)

Тепер стрибок настає вже в першій похідній:

$$L = \lim_{x \to 0-0} g'(x) = \lim_{x \to 0-0} e^x = 1,$$

$$R = \lim_{x \to 0+0} g'(x) = \lim_{x \to 0+0} 4 \cos 4x = 4,$$

і $R \neq L$. Отже, функція $g(x)$ вже не є диференційовною в точці $x = 0$. Формально при переході через цю точку знову маємо зміну зростання, опуклого донизу, на зростання, опукле догори (рис. 3.17). Але тепер точку $x = 0$ більш точно було би назвати назвати не точкою перегину, а точкою **зламу**, оскільки тепер дотичні до віток графіку мають різні кутові коефіцієнти (при переході від лівої вітки графіка до правої перша похідна має неусувний стрибок, кут нахилу дотичної стрибкоподібно змінюється, і графік стає ніби «переламаним»). Називати таку точку точкою перегину чи ні – питання домовленості. Саме з цієї причини ми строге означення перегину і не наводили. З фізичної точки зору уявлення про перегин виникає при розгляданні можливих власних форм гнучкої лінійки, яка зазнає поздовжнього стискання. Серед таких форм немає профіля, який містив би точку зламу (стрибка першої похідної), інакше лінійка зламалася б. Тому з фізичної точки зору тут перегину немає. $\triangleright$

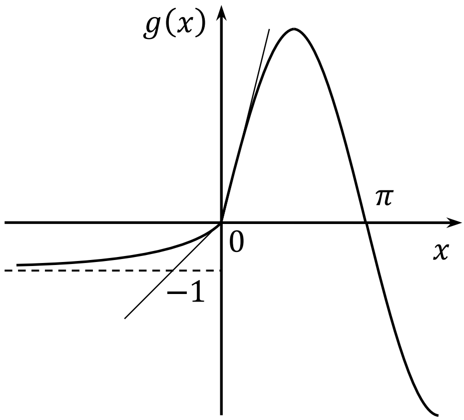


Рисунок 3.17 – Графік функції $g(x)$ (до прикладу 3.45)

3.6.12 Асимптоти

Функцію досліджують на **наявність асимптот.**

Асимптотою називають пряму, до якої графік функції наближається необмежено близько і збігається з нею у граничному сенсі. Всупереч розповсюдженій думці, графік може перетинати свою асимптоту, і навіть робити це необмежену кількість разів. Наприклад, вісь Ox є асимптотою графіка функції $y = e^{-x} \sin x$ (ця функція описує найпростіший вид згасаючих вільних коливань).

Розрізняють три види асимптот: горизонтальна, вертикальна, похила.

3.6.12.1 Горизонтальні асимптоти

Горизонтальна асимптота має рівняння $y = y_0$, де

$$y_0 = \lim_{x \to \infty} y(x),$$

якщо ця границя існує і є скінченною.

Зауважимо, у графіка може бути одразу дві горизонтальні асимптоти, $y = y_{01}$ і $y = y_{02}$, де

$$y_{01} = \lim_{x \to -\infty} y(x), \qquad y_{02} = \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

Наприклад, горизонтальними асимптотами для графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ є прямі $y = \frac{\pi}{2}$ і $y = -\frac{\pi}{2}$, які виникають при прямуваннях $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ відповідно. У деяких графіків наявна лише одна горизонтальна асимптота. Наприклад, єдиною горизонтальною асимптотою графіка функції $y = e^x$ є пряма $y = 0$ при $x \to -\infty$. Нарешті, графік може бути взагалі без асимптот, наприклад, $y = \sin x$, $y = x^2$ тощо.

3.6.12.2 Вертикальні асимптоти

Вертикальна асимптота має рівняння $x = x_0$, де x_0 є таким, що

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} y(x) = \infty.$$

Найчастіше ветрикальні асимптоти виникають при спробі ділити на нуль, або при логарифмуванні нуля. Наприклад, графік функції $y = \ln(x-3)$ має вертикальну асимптоту $x = 3$. Графік функції $y = \frac{1}{x^2-1}$ має дві вертикальні асимптоти, $x = 1$ і $x = -1$. І це не виключає існування горизонтальної асимптоти $y = 0$. У деяких графіків може бути безліч вертикальних асимптот. Наприклад, графік функції $y = \operatorname{tg} x$ має вертикальні асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\triangleleft$ *Приклад 3.46.* Розглянемо функцію $y = \frac{6x-8}{3x-12}$. Маємо:

$$y_0 = \lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{6x-8}{3x-12} = \lim_{x \to \infty} \frac{6 - \frac{8}{x}}{3 - \frac{12}{x}} = \frac{6-0}{3-0} = 2.$$

Отже, горизонтальна асимптота має рівняння $y = 2$. Очевидно також, вертикальна асимптота має рівняння $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{6x-8}{3x-12} = \infty. \triangleright$$

Розглянемо *дробово-лінійну* функцію більш загально. Так називають функцію вигляду[14]

$$y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad c \neq 0.$$

[14]В разі $c = 0$ ми повинні вважати, що $d \neq 0$. Інакше, якщо $c = 0$ і $d = 0$, то цей вираз є невизначеним. Але при $c = 0$ і $d \neq 0$ ця функція є звичайною лінійною функцією з кутовим коефіцієнтом $\frac{a}{d}$ і вільним членом $\frac{b}{d}$.

Маємо:
$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{a}{c}\cdot\frac{d}{c} + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} =$$
$$= \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$
Позначаючи
$$A = \frac{a}{c}, \qquad B = \frac{bc-ad}{c^2}, \qquad x_0 = -\frac{d}{c},$$
отримуємо:
$$y = A + \frac{B}{x - x_0}.$$

Нехай $B = 0$. Це можливо або коли $b = d = 0$, або коли коефіцієнти a, b, c, d пропорціональні, тобто виконано рівність $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Отримуємо т.зв. вироджений випадок:
$$y = \begin{cases} A, & x \neq x_0; \\ \text{не визначено}, & x = x_0. \end{cases}$$
В цьому разі графіком є горизонтальна пряма $y = A$ з виколотою точкою $M_0(x_0; A)$. Наприклад:
$$y = \frac{4x-12}{2x-6} = \frac{4(x-3)}{2(x-3)} = \begin{cases} 2, & x \neq 3; \\ \text{не визначено}, & x = 3. \end{cases}$$
Графік – пряма $y = 2$ з виколотою точкою $M_0(3; 2)$.

У невироджених випадках $B \neq 0$ графік – завжди гіпербола. Справді, побудуємо графік лінійними перетвореннями. Спочатку будуємо гіперболу $y = \frac{1}{x}$; асимптоти збігаються з осями Ox і Oy. Потім переміщуємо отриману гіперболу (разом з її асимптотами) взовж горизонталі на відстань $|x_0|$ праворуч при $x_0 > 0$ або ліворуч при $x_0 < 0$; асимптоти – прямі $x = x_0$ і $y = 0$. Потім здійснюємо розтяг вздовж вертикалі в $|B|$ разів (при $|B| < 1$ – стискання в $\frac{1}{|B|} > 1$ разів). Якщо при цьому $B < 0$, додатково здійснюємо дзеркальне відображення відносно осі Ox; асимптоти залишаються незмінними. Нарешті, переміщуємо графік вздовж вертикалі на відстань $|A|$ догори при $A > 0$ або донизу при $A < 0$; асимптоти – прямі $x = x_0$ і $y = A$. Оскільки ці перетворення лінійні, то гіпербола, змінюючи форму, розміри і розташування на площині, залишається гіперболою.

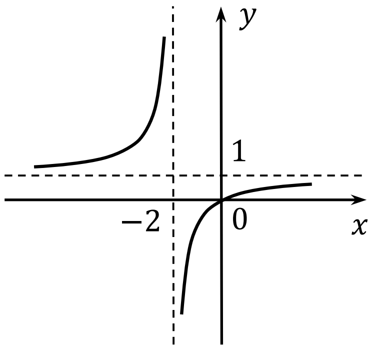


Рисунок 3.18 – Асимптоти гіперболи

Для здійснення цих дій вираз $y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ потрібно перетворювати, виділяючи з нього цілу частину. Але значно простіше одразу зображати дві асимптоти: вертикальну $x = x_0$, тобто $x = -\frac{d}{c}$, і горизонтальну $y = y_0$, тобто $y = A = \frac{a}{c}$. Їх рівняння виникають усно: перше – якщо прирівняти знаменник нулю, друге – якщо здійснити граничний перехід

$$y_0 = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}.$$

Тепер залишається, не знаходячи числа B, з'ясувати його знак. Точніше, навіть називати цей знак не потрібно; достатньо з чотирьох чвертей, утворених при перетині знайдених асимптот, обрати одну (зазвичай підставляють $x = 0$ і знаходять відповідний y) і доповнити її діагонально протилежною. Тоді і стане зрозуміло, чи відбувається віддзеркалення графіка відносно осі Ox.

$\triangleleft$ *Приклад 3.47*. Побудуємо гіперболу $y = \frac{x}{x+2}$. Горизонтальна асимптота має рівняння $y = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+2} = 1$. Рівняння вертикальної асимптоти виникає, якщо знаменник прирівняти до нуля; воно має вигляд $x = -2$. Знайдені асимптоти зображено штриховими лініями на рис. 3.18. Легко бачити, що $y(0) = 0$, тобто гіпербола проходить через початок координат. Тому з чотирьох чвертей, утворених перетином асимптот, обираємо праву нижню і, відповідно, ліву верхню. Як з'ясувалось, побудована гіпербола виявилась віддзеркаленою відносно осі Ox

порівняно з гіперболою $y = \frac{1}{x}$. ▷

3.6.12.3 Похилі асимптоти

Знайдемо тепер **похилу** асимптоту до графіка функції $f(x)$ у вигляді $y = kx+b$. Нехай відхилення точки на графіку від точки на асимптоті при тому самому значенні аргументу x становить $\delta(x)$. Очевидно, $\delta(x) = f(x) - (kx + b)$. Величини k, b будуть знайдені правильно, якщо відхилення $\delta(x)$ стане нескінченно малою при $x \to \infty$. У деяких графіків може бути дві похилі асимптоти: при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$. Тому далі запис $x \to \infty$ розуміємо як такий, що об'єднує ці два випадки.

Знайдемо k. Маємо:

$$kx = f(x) - b - \delta(x), \qquad k = \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\delta(x)}{x}.$$

Здійснюючи тут граничний перехід при $x \to \infty$, отримуємо:

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.}$$

Якщо ця границя не існує або існує у невласному сенсі (дорівнює нескінченності), то похилої асимптоти немає. Якщо ця границя існує і є скінченною, то з використанням знайденого кутового коефіцієнту k шукаємо вільний член b. Маємо:

$$b = f(x) - kx - \delta(x).$$

Здійснюючи тут граничний перехід при $x \to \infty$, отримуємо:

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx\right].}$$

Якщо і ця границя існує і є скінченною, то похилу асимптоту знайдено.

◁ *Приклад 3.48.* Знайдемо похилу асимптоту графіка функції $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-3x}$. Маємо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 3x} = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^3}{x^2 - 3x} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{x^2 - 3x} = 6.$$

Отже, похила асимптота $y = 2x + 6$. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 3.49.* Спробуємо знайти похилу асимптоту графіка функції $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$. Маємо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{x(cx+d)} = 0; \qquad b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{ax+b}{cx+d} - 0 \cdot x\right] = \frac{a}{c}.$$

Отже, асимптота $y = 0 \cdot x + \frac{a}{c}$. Вона виявилась горизонтальною, а не похилою, причому тією самою, яку ми отримали для дробово-лінійної функції вище. $\triangleright$

Зауважимо, існування і скінченність границі для кутового коефіцієнту k ще не є запорукою існування похилої асимптоти.

$\triangleleft$ *Приклад 3.50.* Розглянемо функцію $f(x) = x + \ln x$. Припустимо, похила асимптота існує у вигляді $y = kx + b$. Тоді

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1.$$

Відхилення ординати

$$\delta(x) = f(x) - (kx + b) = (x + \ln x) - (1 \cdot x + b) = \ln x - b.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, то це відхилення не може стати нескінченно малим ні при якому сталому b. Тому похилої асимптоти цей графік не має, навіть попри те, що k існує і є скінченним. Формально отримуємо:

$$b = \lim_{x\to+\infty} [(x + \ln x) - x] = +\infty.$$

Так само, якщо виявилось, що $k = 0$, то це ще не гарантія наявності горизонтальної асимптоти. Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. Формально, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, але горизонтальної асимптоти цей графік не має через необмежене зростання логарифму при $x \to +\infty$. $\triangleright$

Нарешті, зауважимо наступне. Графік може або не мати похилих асимптот взагалі, або мати лише одну похилу асимптоту (при $x \to -\infty$ або при $x \to +\infty$), або мати дві похилі асимптоти (при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$), але не більше. При цьому одночасне існування похилої і горизонтальної асимптот при одному і тому самому прямуванні $x \to \pm\infty$ виключається. Наприклад, при $x \to +\infty$ є або похила асимптота, або горизонтальна, або немає взагалі ніякої.

◁ *Приклад 3.51*. Розглянемо функцію $y = x + \operatorname{arctg} x$. Кутовий коефіцієнт похилої асимптоти

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1.$$

Вільний член рівняння похилої асимптоти

$$b_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} (x + \operatorname{arctg} x - 1 \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Отже, графік має дві похилі асимптоти: $y = x + \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ і $y = x - \frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$. ▷

3.7 Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Одна з практично важливих задач полягає в знаходженні найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на деякому відрізку $x \in [a; b]$. Зауважимо, що максимальне і найбільше значення функції – це не одне й те саме. Можна наводити приклади, коли максимальне значення існує, а найбільше – не існує, або навпаки, або існують обидва, але не дорівнюють одне одному. Те саме стосується і пари значень «мінімальне-найменше».

Термін «найбільше (найменше) значення функції» використовують у звичайному розумінні: значення y_0 є найбільшим (найменшим), якщо виконується нерівність $y_0 \geqslant y$ (нерівність $y_0 \leqslant y$ відповідно). Найбільше (найменше) значення іноди називають **глобальним** максимумом (мінімумом). Але щоб не вносити плутанини, домовимось слова «екстремум», «максимум», «мінімум» використовувати лише в локальному значенні, тобто в сенсі означення 3.8, а глобальні максимуми і мінімуми називати **найбільшим і найменшим значеннями функції.**

На відміну від випадку локального екстремуму, точка, в якій досягається найбільше значення, може не бути стаціонарною за першою похідною.

◁ *Приклад 3.52.* Розглянемо функцію

$$y = -\left(\sqrt{x}\right)^2 e^x = \begin{cases} -xe^x, & x \geqslant 0; \\ \text{не є визначеною}, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно значення $y(0) = 0$ є найбільшим, оскільки усі інші значення є від'ємними. Похідна дорівнює[15]

$$y' = -e^x - xe^x = -e^x(1 + x).$$

Очевидно, цей вираз при $x \geqslant 0$ завжди приймає від'ємні значення. Тому жодна точка не може бути критичною. Це стосується і точки $x = 0$, в якій досягається найбільше значення; вона також не є критичною. $\triangleright$

При знаходженні найбільшого і найменшого значення функції потрібно вказувати відрізок пошуку, оскільки для однієї і тієї самої функції відповідь може виявитись різною на різних відрізках.

$\triangleleft$ *Приклад 3.53.* Розглянемо функцію $y = \frac{12}{x}$. Нехай $x \in [1; 3]$. Тоді найбільше значення досягається в точці $x = 1$ і дорівнює $y = 12$. Нехай тепер для тієї самої функції обрано інший відрізок $x \in [2; 3]$. Тоді найбільше значення досягається в точці $x = 2$ і дорівнює $y = 6$. За нової умови точка $x = 1$ тепер є недосяжною (не належить новому відрізку). $\triangleright$

Отже, тепер наша задача формулюється так: **«знайти найбільше і найменше значення заданої функції на заданому відрізку».** Не вказувати відрізок пошуку припустимо хіба що у випадку, коли шукають найбільше та найменше значення функції на всій множині дійсних чисел. Наприклад, задачу «знайти найбільше значення функції $y = \frac{1}{1+x^2}$» (без вказівки про належність аргументу деякому відрізку) слід розуміти як задачу «знайти найбільше значення функції $y = \frac{1}{1+x^2}$ при $x \in \mathbb{R}$». Її очевидна відповідь така: найбільше значення функції дорівнює одиниці і досягається при $x = 0$ (до речі, це найбільше значення в даному разі збігається з максимумом).

Обмежимось деяким конкретним відрізком $x \in [a; b]$. На цьому відрізку екстремумів може бути декілька, але найбільше (найменше) значення, якщо воно існує, може бути лише єдиним. Щоправда, досягатись воно може декілька разів.

$\triangleleft$ *Приклад 3.54.* На рис. 3.19 подано графік функції

$$y = \frac{3 - 2\cos 4x}{1 + x^2}.$$

[15] В цьому випадку при $x_0 = 0$ похідну треба розуміти як відповідну *правобічну* границю $y'(0) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

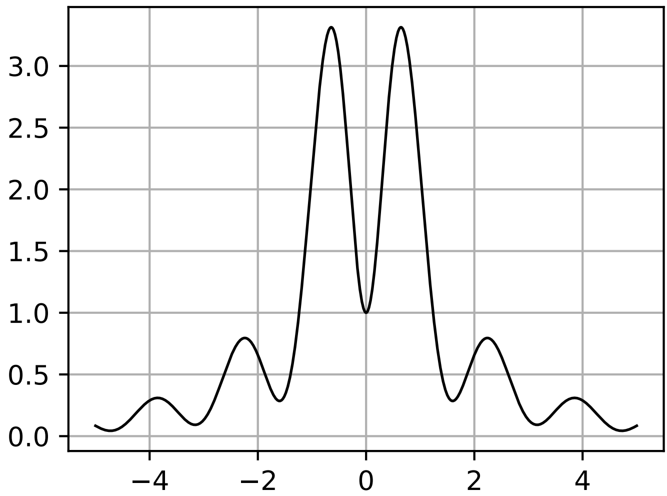


Рисунок 3.19 – Графік функції $y = \frac{3-2\cos 4x}{1+x^2}$

На відрізку $x \in [-5; 5]$ досягається шість локальних максимумів, але тільки два з них збігаються з найбільшим значенням функції на даному відрізку. Розв'язати рівняння $y' = 0$ аналітично не вдається. Але чисельними методами можна встановити, що найменший додатний корінь цього рівняння наближено дорівнює $0{,}64$. Відповідні точки графіка наближено мають координати $(\pm 0{,}64; 3{,}31)$. Ці точки розташовані симетрично відносно осі Oy, що узгоджується з парністю розглядуваної функції. ▷

Сформулюємо без доведення теорему Вейєрштрасса: якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $x \in [a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку найменшого і найбільшого значення. Тоді розв'язок нашої задачі існує.

З наведеного вище стає зрозумілим, що **найбільше значення на відрізку функція досягає або в одному з максимумів (найбільшому з усіх, що належать цьому відрізку), або на кінцях відрізку. Аналогічно, найменше значення на відрізку функція досягає або в одному з мінімумів (найменшому з усіх, що належать цьому відрізку), або на кінцях відрізку.**

Задача пошуку найбільшого (найменшого) значення функції на відрізку є навіть простішою за пошук екстремуму. Достатньо лише обчислити значення функції в усіх підозрілих точках і серед обчислених значень обрати найбільше і найменше. Визначатись з кожною точкою (в ній підозра спростовується чи досягається ектремум, і, якщо так, то який саме) більше не потрібно. Отже, маємо наступний алгоритм пошуку найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $x \in [a; b]$.

- З усіх точок x, критичних за першою похідною, утворити «список підозрюваних».
- Видалити з цього списку точки, які не належать заданому інтервалу.
- Долучити до цього списку кінці відрізку $x = a$ і $x = b$.
- В кожній точці з отриманого списку обчислити значення функції.
- Серед обчислених значень функції обрати найбільше і найменше.

Зауважимо, цілком може статись, що критична точка збігається з одним з кінців відрізку. Безумовно, до «списку підозрюваних» її потрібно включити, причому одразу з двох причин – і як критичну, і як кінець відрізку. Звичайно, обчислювати і порівнювати значення функції в цій точці достатньо лише один раз.

$\triangleleft$ *Приклад 3.55.* Знайдемо найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на відрізку $x \in [0; 2]$. Маємо:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1).$$

Критичні точки – корені рівняння $y' = 0$, тобто точки $x = 0$, $x = \pm 1$. Точку $x = -1$ відкидаємо як таку, що не належить потрібному відрізку. Отже, «список підозрюваних»: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Точку x_3 ми сюди включили як правий кінець відрізку. Лівий кінець відрізку сюди вже потрапив як критична точка. Відповідні значення функції:

$$y_1 = y(x_1) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1,$$

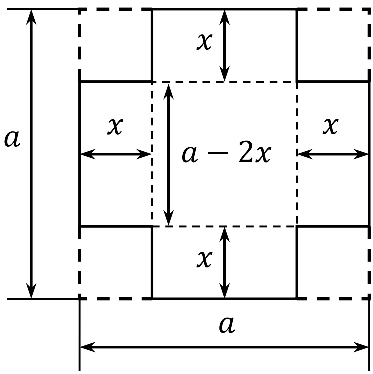


Рисунок 3.20 – До максимізації об'єму

$$y_2 = y(x_2) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0,$$

$$y_3 = y(x_3) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 9.$$

З отриманих результатів найбільший – це y_3, а найменший – це y_2. Остаточно: найменше значення дорівнює нулю і досягається в точці $x = 1$, найбільше значення дорівнює 9 і досягається в точці $x = 2$.

Додатковим дослідженням можна встановити, що в точці $x_1 = 0$ функція досягає максимуму, але він не є найбільшим значенням. Важливо також, що встановлення максимуму для розв'язування нашої задачі не є необхідним. ▷

Часто інтерес становить навіть не найбільше (найменше) значення функції, а те значення аргументу, при якому досягається це найбільше (найменше) значення.

◁ *Приклад 3.56.* З квадратного шматка листового матеріалу розміром $a \times a$ потрібно виготовити ящик найбільшого об'єму без кришки. Квадрати якого розміру слід відрізати по кутах у розгортці (рис. 3.20)?

Нехай розмір квадратів, які відрізають, становить $x \times x$. Очевидно, $0 \leqslant 2x \leqslant a$. Площа основи утворюваного прямокутного паралелепіпеду становить $S(x) = (a - 2x)^2$, а висота дорівнює x. Тому об'єм паралелепіпеду

$$V(x) = S(x) \cdot x = x(a - 2x)^2 =$$

$$= x(a^2 - 4ax + 4x^2) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Отже, потрібно знайти найбільше значення функції $V(x)$ на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$. Маємо: $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$,

$$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24} = \frac{2a \pm a}{6}.$$

Отже, «список підозрюваних»: $x_1 = 0$ (як лівий кінець відрізку), $x_2 = \frac{a}{6}$ (як критична точка), $x_3 = \frac{a}{2}$ (і як правий кінець відрізку, і як критична точка). Відповідні значення функції:

$$V_1 = V(x_1) = 0 \cdot (a - 2 \cdot 0)^2 = 0,$$

$$V_2 = V(x_2) = \frac{a}{6} \cdot \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{2a^3}{27} > 0,$$

$$V_3 = V(x_3) = \frac{a}{2} \cdot \left(a - 2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = 0.$$

Найбільшим з отриманих результатів є об'єм V_2, отже, шуканий розмір – це $x_2 = \frac{a}{6}$. До речі, V_2 можна було не обчислювати. Достатньо було переконатись, що воно додатне, а тому – найбільше. ▷

3.8 Формула Тейлора

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, диференційовна в точці x_0 щонайменше n разів поспіль (кажуть також – n-кратно диференційовна). Опишемо більш детально локальну поведінку цієї функції в околі точки x_0.

З диференційовності функції в точці x_0 випливає неперервність функції в цій точці. Це означає, що приріст функції

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$$

стає нескінченно малим одночасно з приростом $\Delta x = x - x_0$ аргументу. При знаходженні диференціалу ми виокремлювали з приросту Δy головну частину, подаючи цей приріст у вигляді

$$\Delta y = C\,\Delta x + o(\Delta x).$$

З'ясувалось, що достатньо було покласти $C = f'(x_0)$, і ми отримували:

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),$$

або

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g_1(x),$$

де $g_1(x) = o(\Delta x)$.

Далі, при аналізі критичної точки способом «не звертатись до сусідів», ми конкретизували доданок вищого порядку малості і встановили, що з приросту функції можна виокремити і лінійний, і квадратичний члени, подаючи приріст функції у вигляді

$$\Delta y = C_1\,\Delta x + C_2\,(\Delta x)^2 + o\left((\Delta x)^2\right).$$

Достатньо було покласти $C_1 = f'(x_0)$, $C_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$, і ми отримували:

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)\,(\Delta x)^2 + o\left((\Delta x)^2\right),$$

або

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + g_2(x),$$

де $g_2(x) = o\left((\Delta x)^2\right)$.

Постає питання: чи можна з метою все більш детального опису локальної поведінки функції в околі точки x_0 продовжити процес виокремлення з приросту функції нескінченно малих все вищих порядків? Позитивну відповідь на це питання надає **формула Тейлора:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + g_n(x),\ \ g_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right). \quad (3.9)$$

Тут верхній індекс (k) позначає номер похідної; його беруть в дужки, щоб відрізняти від показника степеня. Зокрема, позначають: $f^{(2)}(x_0) = f''(x_0)$, $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ (в останньому випадку диференціювання здійснюють нуль разів). Знаком оклику позначено факторіал (див. виноску на с. 15). Нагадаємо, $0! = 1$. З урахуванням цього формула Тейлора набуває наступного розгорнутого вигляду:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + g_n(x),$$

причому $g_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$.

Насправді зі значення будь-якої функції можна виокремити[16] будь-яку суму. Кінець кінцем, рівняння $f(x) = \Sigma + g_n(x)$ можна розглядати як означення решти $g_n(x)$, яка залишається після виокремлення суми Σ:

$$f(x) = \Sigma + \underbrace{(f(x) - \Sigma)}_{\equiv g_n(x)}.$$

Питання тепер в наступному: потрібно виокремити суму Σ неабияк, а «найбільш повно», тобто так, щоб решта $g_n(x)$ стала якомога меншою. Формула Тейлора здатна впоратись саме з цим завданням: вона виокремлює як раз таку суму, що решта $g_n(x)$ виявляється величиною вищого порядку малості порівняно навіть з останнім доданком виокремлюваної суми. Доведемо, що $g_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$, тобто що

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Виділяючи з суми останній член, маємо:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Тут $P_{n-1}(x)$ є многочленом степеня, не вищого[17] за $(n-1)$-й. Отже, якщо цей многочлен продиференціювати n разів поспіль, отримаємо тотожний нуль. Тоді, застосовуючи правило Лопіталя n разів поспіль, маємо:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$$

[16]Так само з числа 5 можна виокремити суму $(3+4)$, відштовхуючись від подання п'ятірки у вигляді $5 = (3+4) + (-2)$, тобто отримуючи «решту» (-2).

[17]Коефіцієнти $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ при відповідних степенях «дужки» є сталими числами, тому $P_{n-1}(x)$ і справді є многочленом. Цілком може статись, що деякі з чисел $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = \overline{0; n-1}$, (або навіть усі) дорівнюють нулю. Тому степінь многочлена $P_{n-1}(x)$ може бути рівним $(n-1)$ або меншим, але не більшим.

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left(P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x) - P_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-x_0)^n\right]} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - 0 - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(x-x_0)^0}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot(x-x_0)^0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

що і потрібно було довести.

«Решту» $g_n(x)$, порядок малості якої ми зараз оцінили, називають **залишковим членом.** Вираз $g_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ називають **залишковим членом у формі Пеано.** В теорії степеневих рядів наводять більш детальні вирази для залишкового члену (наприклад, вираз для залишкового члену у формі Лагранжа).

З урахуванням виразу (3.5) для диференціалу формулу Тейлора можна подати у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = f(x_0) + df(x_0) + o(dx).$$

Взагалі, формулу Тейлора можна подати з використанням вищих диференціалів:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3f(x_0) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(x_0) + o(dx^n) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^kf(x_0) + o(dx^n).$$

Наведемо тепер приклади застосування формули Тейлора до деяких елементарних функцій.

$\lhd$ *Приклад 3.57.* Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Застосуємо формулу Тейлора при $x_0 = 0$. Маємо:

$$f(x_0) = \frac{1}{1-0} = 1;$$

$$f'(x) = \left((1-x)^{-1}\right)' = -1\cdot(1-x)^{-2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1;$$

$$f''(x) = \left((1-x)^{-2}\right)' = -2 \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3},$$

$$f''(x_0) = f''(0) = \frac{1 \cdot 2}{(1-0)^3} = 1 \cdot 2;$$

$$f'''(x) = \left(2(1-x)^{-3}\right)' = 2 \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4},$$

$$f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-0)^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

і т.д. Очевидно тоді, що $f^{(k)}(0) = k!$. Тоді формула Тейлора після скорочення на $k!$ набуває вигляду

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right).$$

До речі, якби ми продовжили це розвинення до нескінченності, то отримали би відому суму нескінченної геометричної прогресії з першим членом 1 і знаменником x. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 3.58.* Розглянемо функцію $f(x) = e^x$. Застосуємо формулу Тейлора при $x_0 = 0$. Оскільки

$$f^{(n)}(x_0) = \left(e^x\right)^{(n)}\Big|_{x=x_0} = e^x\Big|_{x=x_0} = e^0 = 1,$$

то отримуємо:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).} \quad \triangleright$$

$\triangleleft$ *Приклад 3.59.* Розглянемо функцію $f(x) = \sin x$. Застосуємо формулу Тейлора при $x_0 = 0$. Маємо:

$$f(x_0) = \sin 0 = 0,$$

$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(x_0) = \cos 0 = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(x_0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(x_0) = -\cos 0 = -1.$$

Наступна похідна дорівнює $f^{(4)}(x) = \sin x$ і збігається з початковою функцією. Тому значення усіх інших вищих похідних будуть повторюватись блоками по чотири позиції. Наприклад, одиниці дорівнюватимуть похідні: перша, п'ята, дев'ята і т.д. через кожні чотири. Отже, з формули Тейлора потрібно видалити усі доданки, які містять парні степені, а у доданків, що залишились, поміняти знак через один. Отримаємо:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).}$$

Зауважимо, у цьому розкладанні усі парні степені відсутні (включаючи нульовий степінь, тобто константу), що відповідає непарності функції синус.

Розмірковуючи аналогічно, легко отримати вираз

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).}$$

Зауважимо, у цьому розкладанні усі непарні степені відсутні, що відповідає парності функції косинус.

На рис. 3.21 суцільною лінією показано графік косинусу, а штриховою – графік функції $y = 1 - \frac{x^2}{2}$. Як бачимо, парабола більш «щільно» дотикається до косинусоїди порівняно з дотичною прямою $y = 1$. Власне, цей рисунок є ілюстрацією до еквівалентності $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

Отримане розвинення косинусу дозволяє будувати і більш тонкі співвідношення еквівалентності, наприклад:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \cos x \sim \frac{x^6}{6!}. \ \triangleright$$

$\triangleleft$ *Приклад 3.60.* Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1 + x)$. Застосуємо формулу Тейлора при $x_0 = 0$. Маємо:

$$f(x_0) = \ln(1 + 0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f''(x_0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1,$$

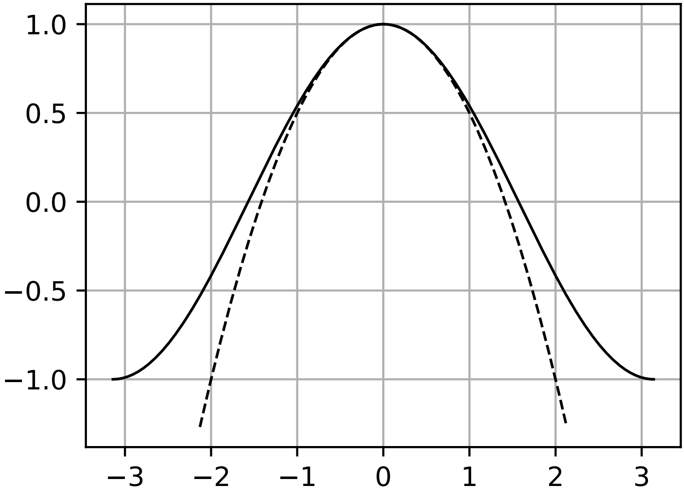


Рисунок 3.21 – Косинус і його часткові суми

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(x_0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2,$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \qquad f^{(IV)}(x_0) = -\frac{2\cdot 3}{(1+0)^4} = -2\cdot 3,$$

$$f^{(V)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \qquad f^{(V)}(x_0) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+0)^5} = 2\cdot 3\cdot 4,$$

і т.д. Очевидно, ці результати легко узагальнити виразом:

$$f^{(k)}(x_0) = (-1)^{k+1}(k-1)!, \qquad k \geqslant 1.$$

Оскільки $\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$, то отримуємо:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n).} \quad \triangleright$$

В аналогічний спосіб неважко отримати розкладання і інших елементарних функцій.

Формула Тейлора має і інші застосування.

$\triangleleft$ *Приклад 3.61.* Многочлен $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ розкладемо за степенями двочлену $(x-1)$. Покладаючи $x_0 = 1$, маємо:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 1;$$

$$f'(x) = 6x - 4, \qquad f'(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2;$$

$$f''(x) = 6, \quad f''(1) = 6; \qquad f^{(n)}(x) \equiv 0, \quad n \geqslant 3.$$

Маємо:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + 0 =$$

$$= 1 + 2(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2.$$

Ми перетворили вираз для f в такий спосіб, що x входить до цього виразу виключно у вигляді «дужки» $(x-1)$. Тому тепер зручно ввести заміну $x - 1 = t$; отримуємо: $f = 1 + 2t + 3t^2$. $\triangleright$

Підкреслимо, $(n+1)$-а і усі наступні похідні довільного многочлену n-го степеня тотожно дорівнюють нулю. Тому застосування формули Тейлора до многочленів завжди призводить до суми, кількість доданків якої не перевищує $(n+1)$.

Уявімо тепер протилежну ситуацію, коли в сумі (3.9) нулю дорівнюють m *початкових доданків поспіль*, починаючи з $f(x_0)$. Тоді при $m < n$ формулу Тейлора можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right),$$

оскільки $f^{(k)}(x_0) = 0$, $0 \leqslant k < m$, але $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ (значення ще вищих похідних нас не цікавлять, аби лише ці значення існували). В цьому разі спрощено маємо:

$$f(x) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o\left((x-x_0)^m\right).$$

В такій ситуації кажуть, що число x_0 є **нулем функції m-ї кратності.** Врахування кратності нуля дозволяє більш детально охарактеризувати локальну поведінку функції в околі точки x_0. Наприклад, нехай виявилось, що $m = 3$, тобто

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0,$$

але $f'''(x_0) \neq 0$. Тоді $f(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o\big((x - x_0)^3\big)$. Нехтуючи малими вищих порядків, можна сказати, що функція $f(x)$ в околі точки x_0 своєю поведінкою нагадує кубічну параболу. А саме, дотична до графіка в точці x_0 горизонтальна, і ця точка є точкою перегину.

$\triangleleft$ *Приклад 3.62.* Розглянемо функцію

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 6x + 1.$$

Охарактеризуємо її локальну поведінку в околі точки $x_0 = 1$. Маємо:

$$f(1) = 3 - 10 + 12 - 6 + 1 = 0.$$

Отже, число $x_0 = 1$ є нулем функції. Маємо далі:

$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 + 24x - 6, \qquad f'(1) = 12 - 30 + 24 - 6 = 0;$$

$$f''(x) = 36x^2 - 60x + 24, \qquad f''(1) = 36 - 60 + 24 = 0;$$

$$f'''(x) = 72x - 60, \qquad f'''(1) = 72 - 60 = 12 \neq 0.$$

Отже, число $x_0 = 1$ є нулем функції третьої кратності. Маємо далі:

$$f^{(4)}(x) = 72, \quad f^{(4)}(1) = 72; \qquad f^{(m)}(x) \equiv 0, \quad m \geqslant 5.$$

Тоді права частина формули Тейлора для функції $f(x)$ містить лише доданки з номерами $k = 3$ і $k = 4$:

$$f(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 =$$

$$= \frac{12}{3!}(x - 1)^3 + \frac{72}{4!}(x - 1)^4 = 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^4.$$

Формально точка x_0 є підозрілою на екстремум, але за рахунок непарності показника степеня головного члену $2(x - 1)^3$ ця підозра спростовується. Натомість, маємо перегин. $\triangleright$

Ці міркування дозволяють узагальнити спосіб «не звертатись до сусідів» перевірки підозрілої точки x_0. Нехай x_0 є нулем функції $f(x)$ кратності m (тобто в цій точці нулю дорівнюють функція і $(m-1)$ її молодших похідних, а $f^{(m)}(x_0) \neq 0$). Тоді локальна поведінка функції в околі точки x_0 при відкиданні малих вищих порядків описується головним членом формули Тейлора у вигляді

$$f(x) \approx \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m.$$

Очевидно тоді, якщо m – непарне, то екстремуму немає, а якщо парне – екстремум наявний. В тому числі якщо при парному m похідна $f^{(m)}(x_0) > 0$, то маємо мінімум, а якщо при парному m похідна $f^{(m)}(x_0) < 0$, то маємо максимум (згідно з поведінкою відповідних парабол $y = C(x-x_0)^m$).

Нарешті, обговоримо ще одне питання, пов'язане з застосуванням формули Тейлора. Розглянемо границю

$$A = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Нехай число x_0 є кратним нулем і для функції $f(x)$, і для функції $g(x)$. Тоді ця границя містить невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Нехай кратність нуля дорівнює m_1 для функції $f(x)$ і m_2 для функції $g(x)$. Тоді числа m_1, m_2 фактично є порядками малості нескінченно малих величин $f(x)$ і $g(x)$:

$$f(x) = \frac{f^{(m_1)}(x)}{m_1!}(x-x_0)^{m_1} + o\left((x-x_0)^{m_1}\right),$$

$$g(x) = \frac{g^{(m_2)}(x)}{m_2!}(x-x_0)^{m_2} + o\left((x-x_0)^{m_2}\right).$$

Якщо $m_1 > m_2$, то $f = o(g)$, і тоді $A = 0$. Якщо $m_1 < m_2$, то $g = o(f)$, і тоді $A = \infty$. Якщо $m_2 = m_1$, то

$$A = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f^{(m_1)}(x)}{m_1!}(x-x_0)^{m_1} + o\left((x-x_0)^{m_1}\right)}{\frac{g^{(m_1)}(x)}{m_1!}(x-x_0)^{m_1} + o\left((x-x_0)^{m_1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m_1)}(x) + m_1! \cdot \frac{o((x-x_0)^{m_1})}{(x-x_0)^{m_1}}}{g^{(m_1)}(x) + m_1! \cdot \frac{o((x-x_0)^{m_1})}{(x-x_0)^{m_1}}} = \frac{f^{(m_1)}(x_0)}{g^{(m_1)}(x_0)}.$$

Але такий самий результат ми і отримали би при застосуванні правила Лопіталя m_1 разів поспіль. Отже, кратність нуля функції визначає, скільки разів потрібно її диференціювати при застосуванні правила Лопіталя для позбавлення невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$.

При $m_2 \neq m_1$ потрібно диференціювати $\min\{m_1, m_2\}$ разів, оскільки раніше відмінною від нуля стане похідна тієї функції, кратність нуля якої менша; невизначеність при цьому зникне.

3.9 Питання для перевірки

1. Які дві задачі призводять до поняття похідної від функції одного дійсного змінного?
2. Що таке миттєва швидкість?
3. Що називають дотичною до плоскої кривої?
4. Що таке приріст аргументу? приріст функції?
5. Сформулюйте означення похідної.
6. В чому полягає механічний зміст похідної?
7. В чому полягає геометричний зміст похідної?
8. Обчисліть за означенням похідну функції $y = x^4$.
9. Яку функцію називають диференційовною в точці? на інтервалі?
10. Яка вимога є більш сильною: неперервність чи диференційовність? Чому?
11. Наведіть приклад функції, яка є неперервною в деякій точці, але не є диференційовною в цій точці.
12. Сформулюйте означення функції, монотонної на множині; монотонної в точці.
13. Що можна сказати про локальну поведінку функції $f(x)$ в точці x_0, якщо $f'(x_0) > 0$? $f'(x_0) < 0$?

14. Які два основні аспекти техніки диференціювання вам відомі?
15. Сформулюйте правила диференціювання.
16. Сформулюйте таблицю похідних.
17. Що таке складна функція? Як розрізнити зовнішню і внутрішню функції?
18. Як диференціюють складну функцію? Наведіть приклади.
19. Що таке обернена функція? Як її знайти?
20. Як розташовані графіки прямої і оберненої функцій?
21. За якої умови функція, обернена до заданої, є однозначною? Чи є ця умова достатньою? необхідною?
22. Що таке арксинус?
23. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції.
24. Виведіть похідну арксинусу.
25. Виведіть похідну арктангенсу.
26. Що таке логарифмічне диференціювання? Коли його застосовують?
27. Що таке диференціал функції в точці?
28. В чому полягає геометричний сенс диференціалу функції одного дійсного змінного?
29. Як записати рівняння дотичної до графіку заданої функції в заданій точці?
30. Що таке диференціали вищих порядків?
31. Що таке інваріантність першого диференціалу?
32. Як застосувати перший диференціал до наближеного обчислення значення функції в точці?
33. Що таке параметричне задання функції?

34. Як знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично?

35. Що таке функція, задана неявно?

36. Як продиференціювати функцію, задану неявно?

37. Назвіть 12 пунктів схеми дослідження функції.

38. Що таке область визначення функції? Як її знайти?

39. Що таке множина значень функції? Як її знайти?

40. Що таке нулі функції? Як їх знайти? Як вони виглядають на графіку функції?

41. Що таке парна функція? Як виглядає її графік?

42. Що таке непарна функція? Як виглядає її графік?

43. Яку функцію називають періодичною?

44. Що таке інтервали монотонності? Як їх знайти?

45. Що таке точка екстремуму?

46. Що таке екстремум?

47. В чому полягає необхідна умова екстремуму диференційовної функції на інтервалі?

48. Що таке точки, підозрілі на екстремум? Як їх знайти?

49. Сформулюйте достатню ознаку максимуму. Чи є вона необхідною?

50. Сформулюйте достатню ознаку мінімуму. Чи є вона необхідною?

51. Як дослідити функцію на екстремум за допомогою другої похідної?

52. Як дослідити на екстремум функцію, яка не є диференційовною в підозрілій точці?

53. Чи може точка розриву бути точкою екстремуму?

54. Як знайти інтервали опуклості графіка функції?

55. Що таке точка, підозріла на перегин? Як підтвердити або спростувати цю підозру?

56. Що таке асимптота? Які асимптоти ви знаєте?

57. Як знайти горизонтальну асимптоту?

58. Як знайти вертикальну асимптоту?

59. Як знайти похилу асимптоту?

60. Як швидко знайти асимптоти дробово-лінійної функції?

61. Скільки асимптот може бути у графіка функції?

62. Чому при знаходженні найбільшого значення функції потрібно вказувати інтервал пошуку?

63. В чому полягає алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку?

64. Напишіть формулу Тейлора. До яких функцій її можна застосувати?

65. Що таке залишковий член у формі Пеано?

66. Який результат застосування формули Тейлора до експоненти? синусу? косинусу?

67. Що таке кратність нуля функції?

68. Як дослідити функцію на екстремум, якщо підозріла точка є нулем функції високої кратності?

4 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

4.1 Основні означення

Досі ми вважали, що аргумент x функції є єдиним: $y = f(x)$. Розглянемо тепер випадки, коли значення функції залежить від декількох аргументів. Ці аргументи, в свою чергу, є незалежними один від одного. Якщо незалежних аргументів лише два, то припустимим є запис $z = f(x, y)$. Кажуть, що така формула подає *функцію двох змінних у явному вигляді*.

⧫ **Означення 4.1.** Якщо кожній впорядкованій парі чисел (x, y) поставлено у відповідність не більш ніж одне числове значення z, то кажуть, що задано **числову функцію двох змінних** $z = f(x, y)$. Числа x, y називають **незалежними аргументами,** число z – відповідним **значенням функції.**

◁ *Приклад 4.1.* Тиск ідеального газу залежить від об'єму V цього газу та його абсолютної температури T за законом $p(V, T) = \frac{\nu RT}{V}$, де ν – кількість речовини, R – універсальна газова стала. Це відоме рівняння Менделєєва-Клапейрона. Тут V і T – дві незалежні змінні (стиснути газ можна до довільного об'єму, і незалежно від цього нагріти до довільної температури). В цьому разі тиск p є функцією двох незалежних змінних V і T. Цю функцію подано у явному вигляді. ▷

Наведене означення безпосередньо узагальнюється на випадок більшої кількості незалежних аргументів. Наприклад, функція трьох змінних впорядкованій трійці (x, y, z) ставить у відповідність число $u = f(x, y, z)$.

◁ *Приклад 4.2.* Потенціал φ електричного поля, створюваного нерухомим точковим електричним зарядом Q, розташованим у вакуумі, обчислюють за формулою $\varphi = \frac{kQ}{r}$, де позначено $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \text{const}$. Тут r – відстань від заряду до точки у просторі, в якій обчислюється потенціал. Якщо обрати декартову систему координат з початком в місці розташування заряду, то отримаємо: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Отже, $\varphi(x, y, z) = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ – функція трьох незалежних змінних. Цю функцію подано у явному вигляді. ▷

Як випливає з означення 4.1, кожній впорядкованій парі (x, y) функція $z = f(x, y)$ або ставить у відповідність деяке єдине число z, або не ставить ніякого. Тому природно з усіх впорядкованих пар (x, y) відібрати лише ті, для яких відповідне значення z є визначеним.

⧫ **Означення 4.2.** Множину усіх тих і лише тих впорядкованих пар, для кожної з яких відповідне значення функції $f(x, y)$ є визначеним, називають **областю визначення функції двох змінних.**

Область визначення функції двох змінних позначають літерою D. Кожну впорядковану пару (x, y), яка входить до області D, зручно зобразити точкою $M(x, y)$ на координатній площині Oxy. Тому для функції двох змінних виявляється зручним геометрично зображати область визначення як деяку область на площині Oxy.

◁ *Приклад 4.3.* Знайдемо область визначення функції

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \ln(x + y).$$

Очевидно, цю функцію визначено при одночасному виконанні двох нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є наступна множина впорядкованих пар (x, y), тобто точок $M(x, y)$. Перша нерівність вимагає, щоб точка $M(x, y) \in D$ була внутрішньою для круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$. З огляду на другу нерівність точка $M(x, y) \in D$ повинна належати півплощині $y > -x$. Зауважимо, остання нерівність є строгою. Тому точки на прямій $y = -x$ не належать області D (інакше доведеться знаходити логарифм нуля, що є неприпустимим). З цієї причини пряму $y = -x$ (на відміну від кола) зображено штриховою лінією. Остаточний розв'язок – це перетин круга і півплощини (рис. 4.1, ліворуч). ▷

Означення області визначення безпосередньо узагальнюється на випадок багатовимірних просторів. Наприклад, в разі функції трьох змінних область визначення – тривимірна.

◁ *Приклад 4.4.* Модуль вектора $\overrightarrow{E}$ напруженості електричного поля, створюваного нерухомим точковим електричним зарядом Q, розташованим у вакуумі, обчислюють за формулою $E = \frac{kQ}{r^2}$, де позначено $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \text{const}$. Тут r – відстань від заряду до точки у просторі, в якій обчислюється напруженість поля. Якщо обрати декартову систему координат з початком

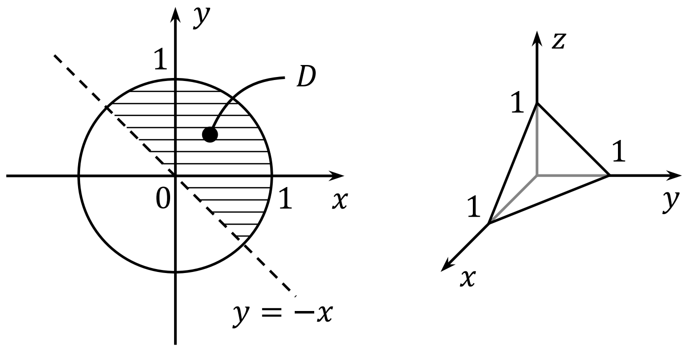


Рисунок 4.1 – Приклади області визначення

в місці розташування заряду, то отримаємо: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Отже, $E(x, y, z) = \frac{kQ}{x^2+y^2+z^2}$. Очевидно, область визначення – весь тривимірний простір за виключенням початку координат, оскільки обчислити E неможливо лише в разі одночасного виконання трьох рівностей: $x = y = z = 0$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 4.5.* Знайдемо область визначення функції

$$u(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{1 - x - y - z}.$$

Очевидно, цю функцію визначено при одночасному виконанні чотирьох нерівностей:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0, \\ 1 - x - y - z \geqslant 0. \end{cases}$$

Тому точка $M(x, y, z)$ повинна одночасно знаходитись і в «передньому» півпросторі ($x \geqslant 0$), і в «лівому» півпросторі ($y \geqslant 0$), і в «верхньому» півпросторі ($z \geqslant 0$). Крім того, остання нерівність $z \leqslant 1 - x - y$ означає, що точка $M(x, y, z)$ повинна бути розташованою або на площині $x + y + z = 1$, або під нею. Виконання цих чотирьох вимог призводить до того, що точка $M(x, y, z)$ повинна знаходитись всередині або на поверхні тетраедра (рис. 4.1, праворуч). Цей тетраедр і є областю визначення. $\rhd$

Як бачимо з наведених прикладів, зручно оперувати не впорядкованими парами (трійками) чисел, а положенням поточної точки $M(x, y)$ на площині (точки $M(x, y, z)$ у просторі). Тому для скорочення домовляються замість $f(x, y)$, $\varphi(x, y, z)$ писати $f(M)$, $\varphi(M)$ тощо. Адже зазвичай з контексту задачі зрозуміло, мається на увазі точка на площині чи точка у просторі. Іншими словами, функцію багатьох змінних можна називати **функцією точки,** розуміючи точку як впорядковану сукупність незалежних аргументів, взятих у потрібній кількості. Продовжуючи цю аналогію, можна і для функції чотирьох змінних записати вираз $f(M)$, де $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – точка в чотиривимірному просторі, або впорядкована четвірка чисел. Щоправда, геометричної інтерпретації такий вираз вже не має.

4.2 Графічне зображення функцій багатьох змінних

4.2.1 Графічне зображення функцій двох змінних

При переході від одновимірного випадку до багатовимірного область D визначення функції зазнала суттєвих змін: з інтервалу (або сукупності інтервалів) на осі Ox вона перетворилась на плоску, об'ємну або навіть взагалі багатовимірну область D. Так само принципові зміни відбуваються і з графіком функції. Раніше графіком функції $y = f(x)$ ми називали множину точок $N(x, y)$, координати яких задовольняли рівняння $y = f(x)$, тобто множину точок $N(x, f(x))$, де x належить області визначення. В разі неперервності функції ця множина точок виявлялась плоскою кривою в координатній площині Oxy.

Тепер за аналогією природно графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називати множину точок $N(x, y, z)$, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, тобто множину точок $N(x, y, f(x, y))$, де $M(x, y) \in D$. Отже, графіком функції двох змінних є множина точок в тривимірному просторі. Зазвичай така множина утворює деяку **викривлену поверхню** в координатному просторі $Oxyz$. Геометрію цієї поверхні іноді легко уявити з використанням *методу перерізів*. У виразі $z = f(x, y)$ покладемо $y = y_1 = \text{const}$. Отримаємо функцію однієї змінної: $z(x) = f(x, y_1) = f_1(x)$. Її графік можна побудувати у площині

Oxz (тобто у площині $y = 0$). Цей графік потрібно переносити паралельно самому собі вздовж осі Oy, доки він не опиниться у площині $y = y_1$. Можна сказати, перенесений графік і є перерізом шуканої поверхні площиною $y = y_1$. Покладемо тепер $y = y_2 = \text{const}$. Отримаємо *іншу функцію* однієї змінної: $z(x) = f(x, y_2) = f_2(x)$. Здійснимо паралельний перенос її графіка з площині Oxz (тобто з площини $y = 0$) в площину $y = y_2$. Перенесений графік буде перерізом шуканої поверхні площиною $y = y_2$. Повторюючи цю процедуру для усіх можливих значень y, отримаємо безліч графіків, розташованих у «сусідніх» площинах $y = \text{const}$. Якщо при переході від одного перерізу до іншого ординату y змінювати на малу величину, то «сусідні» перерізи незначно відрізнятимуться за формою, розмірами і розташуванням у просторі. Тому усі такі перерізи і утворять шукану поверхню.

$\lhd$ *Приклад 4.6.* Розглянемо функцію двох змінних

$$z(x, y) = xe^{-2x}\left(10 + \frac{y^2}{4}\right).$$

Позначимо $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 10$. Отримуємо три функції:

$$z = f_1(x) = 10xe^{-2x} \qquad (\text{при } y = y_1),$$

$$z = f_2(x) = \frac{65}{4}xe^{-2x} \qquad (\text{при } y = y_2),$$

$$z = f_3(x) = 35xe^{-2x} \qquad (\text{при } y = y_3).$$

Їх графіки подано на рис. 4.2. Залишається посунути графік f_2 в напрямку «від себе» на 5 одиниць, а графік f_3 – на 10 одиниць. Процес цього пересування в «об'ємному» вигляді подано на рис. 4.3 ліворуч.

Зауважимо, так само можна було будувати і перерізи шуканої поверхні площинами $x = \text{const}$. Ми б отримували квадратичні функції $z = g_i(y) = C_i\left(10 + \frac{y^2}{4}\right)$ і пересували би їх графіки (параболи) вздовж осі Ox. Тому поверхня на рис. 4.3, праворуч виглядає як вкрита «клітинками» (ці клітинки виникають при перетині графіків $f_k(x)$ і $g_i(y)$, пересунутих на відповідні відстані у відповідних напрямках).

Нарешті, можна будувати перерізи шуканої поверхні горизонтальними площинами $z = z_0 = \text{const}$. В цьому разі маємо

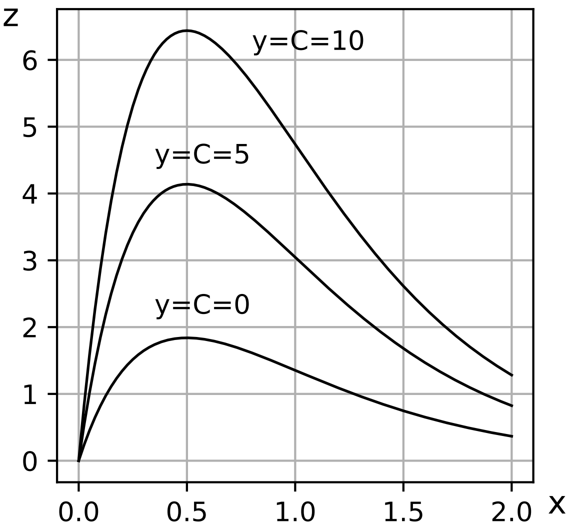


Рисунок 4.2 – Сімейство $z = xe^{-2x}\left(10 + \frac{C^2}{4}\right)$

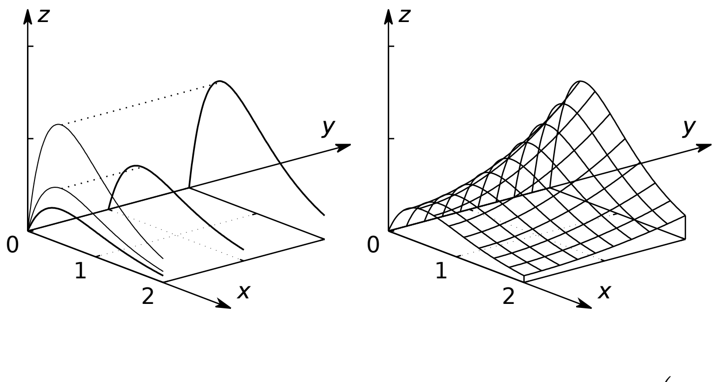


Рисунок 4.3 – Графічне зображення функції $z = xe^{-2x}\left(10 + \frac{y^2}{4}\right)$

$f(x, y) - z_0 = 0$. Введемо до розгляду функцію

$$F(x, y) = f(x, y) - z_0.$$

Тоді маємо рівняння $F(x, y) = 0$. Ясно, що це рівняння задає функцію $y = y(x)$ (щоправда, таке задання є *неявним*; функція $y(x)$ при цьому може виявитись і неоднозначною). Графіком рівняння $F(x, y) = 0$ є деяка плоска крива, яку тепер потрібно розташувати в площині $z = z_0$. На рис. 4.4 показано три та-

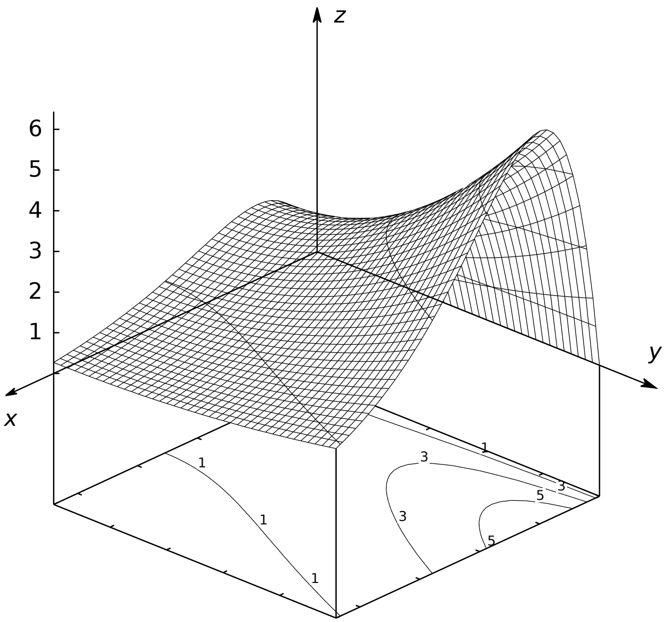


Рисунок 4.4 – Лінії рівня

кі криві, отримані при $z = 1$, $z = 3$, $z = 5$. Зображено також проекції цих кривих на площину Oxy; їх позначено відповідними значеннями z. Плоскі криві, які виникають в перерізах поверхні $z = f(x, y)$ площинами $z = \text{const}$ (а також проекції цих кривих на площину Oxy) називають **ізолініями,** або **лініями рівня.** Лінії рівня широко застосовують при створенні топографічних карт, коли на них потрібно нанести відомості про рельєф місцевості. $\triangleright$

«Графік» функції двох змінних не завжди є поверхнею.

$\triangleleft$ *Приклад 4.7.* Розглянемо функцію

$$z(x,y)=\sqrt{\cos^2\frac{\pi x}{a}+\cos^2\frac{\pi y}{b}-2}.$$

Область визначення знайдемо з нерівності

$$\cos^2\frac{\pi x}{a}+\cos^2\frac{\pi y}{b}-2\geqslant 0.$$

Очевидно, слід вимагати одночасного виконання двох рівнянь:

$$\begin{cases}\cos^2\frac{\pi x}{a}=1;\\ \cos^2\frac{\pi y}{b}=1.\end{cases}$$

Справді, більшими за одиницю квадрати косинусів бути не можуть, а якщо хоча б один з них буде меншим за одиницю, то вираз під коренем стане від'ємним. З цієї системи маємо

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{a}=0;\\ \sin\frac{\pi y}{b}=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{\pi x}{a}=\pi m;\\ \frac{\pi y}{b}=\pi n,\end{cases}\qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Звідси маємо $x_m=ma$, $y_n=nb$. Отже, область D визначення функції є множиною окремих точок $M(ma,nb)$, розташованих у вузлах прямокутної сітки з розміром ґратки $a\times b$. В кожній такій точці функція приймає значення

$$z\left(x_m,y_n\right)=\sqrt{1+1-2}=0.$$

Таким чином, «графіком» є множина точок $N(ma,nb,0)$ при $m,n\in\mathbb{Z}$, тобто множина точок $M(ma,nb)$, розташованих у площині $z=0$ (у площині Oxy). $\triangleright$

4.2.2 Графічне зображення функцій більш ніж двох змінних

В разі функції $z=f(x,y)$ двох змінних ми зображали графік у тривимірному просторі. Розглянемо тепер можливість графічного зображення функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$ з областю визначення D. Оберемо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$, тобто оберемо значення трьох аргументів $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Відповідне значення функції становить $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Отже, тепер точку $N_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$ потрібно зображати в чотиривимірному просторі. Звичайно, це зробити неможливо. Тому потрібно зменшити кількість змінних.

Покладемо, наприклад, $z = z_0 = \text{const}$. Утворюється *нова функція* двох змінних: $u(x, y) = f(x, y, z_0) = f_0(x, y)$. Її графік – поверхня в просторі $Oxyu$. Перебираючи (і тимчасово фіксуючи) різні значення $z = z_k$, отримаємо серію функцій $u = f_k(x, y)$. Отже, графічно функцію трьох змінних можна зобразити серією поверхонь. (До речі, саме цей прийом зменшення кількості змінних ми вже використовували, коли замість графіка функції двох змінних зображали на рис. 4.2 серію графіків функцій однієї змінної.)

Звичайно, можна тимчасово фіксувати і більшу кількість незалежних змінних. Наприклад, в разі функції $u = f(x, y, z, t)$ покладемо $z = z_i = \text{const}$, $t = t_k = \text{const}$. Утворюється *нова функція* двох змінних: $u(x, y) = f(x, y, z_i, t_k) = f_{ik}(x, y)$. Її графік є поверхнею в просторі $Oxyu$. Усі такі поверхні можна об'єднати в прямокутну таблицю, розмістивши чергову поверхню f_{ik} на перетині i-го рядка і k-го стовпця.

Сучасні програмні середовища надають інші засоби графічного зображення функцій багатьох змінних. Домовляються про певну кольорову шкалу. Наприклад, нехай вона складається з кольорів веселки, і червоний колір відповідає найбільшому значенню деякої функції, а синій – найменшому. Далі область визначення D розфарбовують у відповідні кольори. Кількість змінних зменшується на одиницю (вісь значень функції відсутня; замість неї використовується колір). Наприклад, температурне поле $T = f(x, y)$ в плоскій пластині можна зобразити, пофарбувавши ділянки з високою температурою в червоне, а з низькою – в синє. Результат вдається відобразити на двовимірному рисунку. Втім, такий спосіб має лише якісний характер, що зумовлено суб'єктивністю сприйняття кольорів.

4.3 Границя і неперервність

Перед тим, як формулювати означення границі функції багатьох змінних в точці, потрібно узагальнити поняття околу точки. Як і раніше, δ-околом точки M_0 будемо називати множину усіх сусідніх точок M, віддалених від точки M_0 на відстань, яка не перевищує δ. Іншими словами, δ-околу точки M_0 належать усі ті і лише ті точки M, для яких виконано нерівність $\rho < \delta$, де через ρ позначено відстань $\rho = |M_0M|$. Раніше ця відстань дорівнювала $\rho = |x - x_0|$ (і, відповідно, δ-окіл був розв'язком нерівності $|x - x_0| < \delta$). В двовимірному випадку точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ лежать у площині Oxy, тому відстань між ними дорівнює

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Отже, δ-околом точки $M_0(x_0, y_0)$ слугує внутрішність кола радіуса δ з центром в точці M_0. В тривимірному випадку точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ лежать у просторі $Oxyz$, тому відстань між ними дорівнює

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Отже, δ-околом точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ слугує внутрішність сфери радіуса δ з центром в точці M_0. Ці міркування узагальнюються наступним означенням.

♦ **Означення 4.3.** У випадку n змінних $x_1, x_2, \cdots, x_n$ для точки $M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$ множина точок $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ утворює **δ-окіл** при виконанні нерівності

$$\sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \cdots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta.$$

Очевидно, ця нерівність в n-вимірному просторі задає внутрішність *n-вимірної кулі* радіуса δ з центром в точці M_0.

Близькість точки M до точки M_0 (малість відстані ρ) можна було забезпечити і в інший спосіб. Наприклад, у двовимірному випадку задамося двома додатними величинами δ_x, δ_y. Нехай одночасно виконано дві нерівності

$$|x - x_0| < \delta_x, \qquad |y - y_0| < \delta_y.$$

Очевидно, точка $M(x, y)$ при цьому потрапляє всередину прямокутника розмірами $2\delta_x \times 2\delta_y$ з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$. Тоді для забезпечення близькості точки M до точки M_0 достатньо зробити величини δ_x, δ_y малими.

Зауважимо тепер, форма δ-околу не має значення. Справді, нехай точка M потрапляє всередину прямокутника $2\delta_x \times 2\delta_y$ з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$. Очевидно, радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює $R = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$. Отже, достатньо покласти $\delta = R$, і точка тим паче потрапить всередину δ-околу у формі кола. Так само, нехай точка M потрапляє всередину кола радіусом δ. Сторона описаного квадрата дорівнює

$a = \delta\sqrt{2}$. Отже, достатньо покласти $\delta_x = \delta_y = \frac{a}{2}$, і точка тим паче потрапить всередину околу у формі квадрата. Геометрично: для будь-якого прямокутника можна знайти концентричне з ним коло, яке повністю лежить всередині прямокутника. І навпаки, для будь-якого кола можна знайти концентричний з ним прямокутник, який повністю лежить всередині кола.

Аналогічною є ситуація і у тривимірному випадку. Задамося трьома додатними величинами δ_x, δ_y, δ_z. Нехай одночасно виконано три нерівності

$$|x - x_0| < \delta_x, \qquad |y - y_0| < \delta_y, \qquad |z - z_0| < \delta_z.$$

Очевидно, точка $M(x, y, z)$ при цьому потрапляє всередину прямокутного паралелепіпеда розмірами $2\delta_x \times 2\delta_y \times 2\delta_z$ з центром в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тоді для забезпечення близькості точки M до точки M_0 достатньо зробити величини δ_x, δ_y, δ_z малими. Ясно, що і в цьому разі для будь-якого паралелепіпеда можна обрати описану сферу; її радіус дорівнює $R = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}$. Очевидно, якщо точка M є внутрішньою для паралелепіпеда, то вона тим паче буде внутрішньою для описаної сфери радіуса $\delta = R$. І навпаки, навколо довільної сфери можна описати куб. Тоді точка M, потрапляючи всередину сфери, тим паче буде внутрішньою для описаного куба. Отже, форма околу точки M_0 знову не має значення. Аналогічні міркування можуть бути розповсюдженими на випадок довільної розмірності.

Тепер можна надати означення границі функції в точці.

♦ **Означення 4.4.** Число $b = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ називають **границею функції** $f(M) \equiv f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ багатьох змінних **в точці** $M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться δ (можливо, $\delta = \delta(\varepsilon)$) таке, що з нерівності $0 < |M_0M| < \delta$ буде випливати нерівність $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Як і раніше, точку M_0 з δ-околу ми виключаємо. Прямування $M \to M_0$ розуміємо в тому сенсі, що дійсна величина $\rho = |M_0M|$ стає нескінченно малою (тобто $\lim\limits_{M \to M_0} \rho = 0$). Суть наведеного означення: значення b – граничне, якщо існує δ-окіл, для *кожної* точки M якого гарантується ε-близькість значення $f(M)$ до числа b.

◁ *Приклад 4.8.* Доведемо за означенням, що

$$\lim_{M(x,y) \to M_0(0,0)} (y - x) = 0.$$

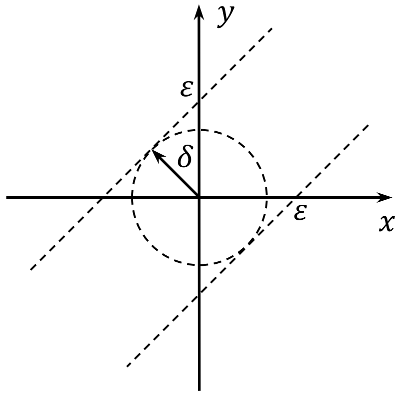


Рисунок 4.5 – До прикладу 3.8

Досліджувана функція $f(x, y) = y - x$, границя $b = 0$. Достатньо пред'явити δ-окіл точки $M_0(0, 0)$, для кожної точки $M(x, y)$ якого при довільних додатних ε виконано нерівність

$$|f(M) - b| < \varepsilon, \qquad |(y - x) - 0| < \varepsilon.$$

Маємо:

$$-\varepsilon < y - x < \varepsilon, \qquad x - \varepsilon < y < x + \varepsilon.$$

Очевидно, цю подвійну нерівність виконано для будь-якої точки $M(x, y)$, яку розташовано всередині смуги, обмеженої прямими $y = x + \varepsilon$, $y = x - \varepsilon$ (рис. 4.5). Тим паче потрібну нерівність буде виконано для довільної точки, розташованої всередині кола радіусом $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ з центром в початку координат. Отже, вимогу означення 4.4 виконано. ▷

Як і в разі однієї змінної, границі рідко обчислюють за означенням. Частіше застосовують теореми, аналогічні доведеним в п. 1.4. Принципово новим є зведення границь до повторних. Наприклад, в разі двох змінних **подвійну** границю можна звести до **повторної** так:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right), \tag{4.1}$$

або так:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right). \tag{4.2}$$

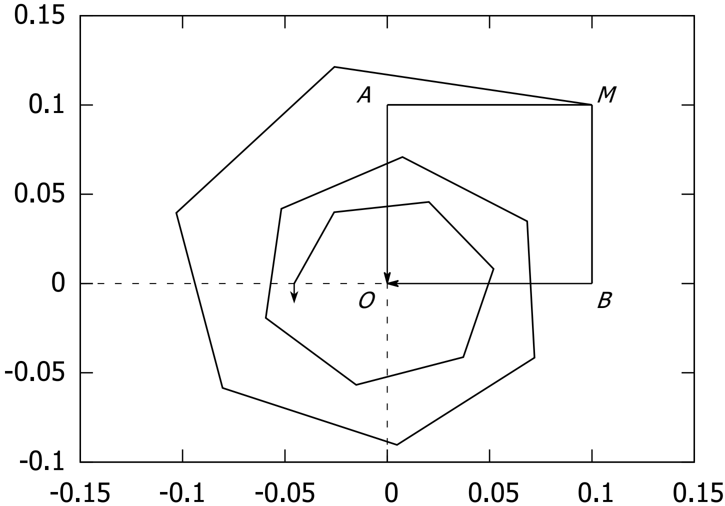


Рисунок 4.6 – Способи прямування $M \to O(0,0)$

Тут при обчисленні внутрішньої границі позбавляються однієї незалежної змінної, а при обчисленні зовнішньої – другої. У відповіді залишається конкретне число. Звичайно, наведені формули справедливі, якщо подвійна границя існує.

При прямуванні $M \to M_0$ у випадку функції однієї змінної для точки M існувала єдина можливість – рухатись вздовж прямої Ox. У багатовимірному випадку це не так. Наприклад, при застосуванні формули (4.1) у внутрішній границі y вважають сталим (і в загальному випадку відмінним від y_0), а x вважають змінним (і таким, що прямує до x_0). Отже, спочатку рух точки M відбувається вздовж відрізку MA (рис. 4.6; зображено окремий випадок, коли точка $M_0(x_0, y_0)$ збігається з початком координат O). Потім у зовнішній границі x вважають сталим (і вже рівним x_0), а y вважають змінним (і таким, що прямує до y_0). Отже, наприкінці рух точки M відбувається вздовж відрізку AO. Таким чином, формула (4.1) нав'язує точці M певний шлях прямування – ламану MAO.

Навпаки, при застосуванні формули (4.2) спочатку у внутрішній границі покладають $x = \text{const} \neq x_0$, і точка M рухається вздовж відрізку MB. Потім, обчислюючи зовнішню границю, здійснюють прямування $x \to x_0$ при $y = y_0$; відбувається рух вздовж відрізку BO. Отже, формула (4.2) змушує точку M прямувати іншим шляхом – ламаною MBO.

В загальному випадку обрати шлях прямування $M \to M_0$ означає обрати певну функцію $y(x)$, графік якої сполучає точки M і M_0 на площині Oxy. При цьому функція $f(x, y)$ перетворюється на функцію однієї змінної: тепер $f(x, y(x))$ залежить лише від x. Тоді границя функції двох змінних в точці зводиться до звичайної границі функції однієї змінної в точці:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y(x)).$$

Шлях прямування можна фіксувати, обираючи (не обов'язково однозначну!) функцію, задану параметрично. Наприклад:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\cos t}{t}; \\ y = y_0 + \frac{\sin t}{t}. \end{cases}$$

Маємо:

$$\rho = |M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} = \frac{1}{|t|}.$$

Тоді

$$\lim_{t \to +\infty} \rho(t) = 0.$$

Отже, рух вздовж такої кривої – теж прямування $M \to M_0$. Доречі, спіралеподібна ламана на рис. 4.6 побудована з використанням саме цієї параметризації. Ми обмежились дискретними значеннями t в інтервалі $t \in \left[\frac{9\pi}{4}, 7\pi\right]$ з кроком $\Delta t = \frac{19\pi}{60}$.

Параметричне задання шляху прямування стає в нагоді і у тривимірному випадку. Наприклад, задамо параметрично *просторову* криву:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases}$$

Функцію $f(x, y, z)$ також можна перетворити на функцію однієї змінної t у вигляді $f(x(t), y(t), z(t))$. Тоді

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y, z) = \lim_{t \to t_0} f(x(t), y(t), z(t)).$$

Тут t_0 відповідає точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, тобто $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

Отже, шляхів прямування $M \to M_0$ – безліч. Але з означення 4.4 випливає, що ε-близкість значення $f(M)$ функції до граничного значення b має бути забезпеченою для *кожної* точки M з δ-околу точки M_0. Це означає, що, зводячи границю функції багатьох змінних до границі функції однієї змінної за рахунок вибору конкретного шляху прямування, ми повинні отримувати однакові значення границі для *будь-яких* шляхів. Якщо при русі вздовж хоча б одного шляху границя функції однієї змінної одного змінного не існує, то границя функції багатьох змінних не існує. Якщо при русі вздовж хоча б двох різних шляхів границі функцій однієї змінної існують, але є різними, то границя функції багатьох змінних не існує.

$\lhd$ *Приклад 4.9.* Розглянемо функцію $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}$. Доведемо, що її границя в точці $M_0(0, 0)$ не існує. Оберемо шлях прямування вздовж прямої $y = kx$. Маємо:

$$\lim_{M \to M_0} \operatorname{arctg} \frac{1}{xy} = \lim_{x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{kx^2} =$$

$$= \begin{cases} [\operatorname{arctg}(+\infty)], & k > 0; \\ [\operatorname{arctg}(-\infty)], & k < 0 \end{cases} = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & k > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & k < 0. \end{cases}$$

Отже, єдиного значення границі не існує. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 4.10.* Розглянемо функцію $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$. Її повторні границі в точці $M_0(0, 0)$ існують. Наприклад, права частина (4.1) дорівнює

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + y^2}{x + y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{0^2 + y^2}{0 + y} = \lim_{y \to 0} y = 0.$$

Але з існування повторних границь існування подвійної границі ще не випливає. Справді, повторна границя обчислюється з використанням одного конкретного шляху (наприклад, MAO, рис. 4.6), а подвійна – з використанням *довільного* шляху.

Доведемо, що подвійна границя розглядуваної функції в точці $M_0(0, 0)$ не існує. Для цього достатньо пред'явити різні шляхи, при прямуванні вздовж яких виникають різні граничні значення.

Нехай прямування відбувається вздовж параболи:

$$y(x) = \frac{2x^2}{C} - x = x \left(\frac{2x}{C} - 1 \right).$$

Маємо:

$$f(x, y(x)) = \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{x^2 + x^2\left(\frac{2x}{C}-1\right)^2}{x + \frac{2x^2}{C} - x} =$$

$$= \frac{C}{2}\left[1 + \left(\frac{2x}{C}-1\right)^2\right] = \frac{C}{2}\left(2 - \frac{4x}{C} + \frac{4x^2}{C^2}\right).$$

Очевидно, ця величина прямує до C при $x \to 0$. Отже, залежно від обраного шляху (принаймні, серед запропонованих) відповідна границя функції одного змінного може виявитись рівною взагалі будь-якому[1] числу C.

Можна також пред'явити шлях прямування, який призводить до значення $\lim f = \infty$. Покладемо

$$y(x) = -x + o\left(x^2\right),$$

наприклад, $y(x) = -x + x^3$. Тоді чисельник у виразі для f буде нескінченно малою другого порядку малості, а знаменник – ще більш високого, і ми отримаємо $f(x, y(x)) \to \infty$.

Отже, подвійна границя не існує, навіть не дивлячись на те, що існують повторні границі. Відповідно, використання формул (4.1), (4.2) в даному разі є неприпустимим. $\triangleright$

Припустимо тепер, що границя функції $f(M)$ в точці

$$M_0\left(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}\right)$$

існує і дорівнює b. Про значення $f(M_0)$ при цьому нічого не відомо. Справді, за означенням 4.4 точка M_0 не належить до свого власного проколотого δ-околу. Тому значення $f(M_0)$ може бути перевизначеним в будь-який спосіб або навіть може не існувати взагалі, і це не вплине на існування границі.

Нехай значення $f(M_0)$ все-ж такі існує, є скінченним і дорівнює

$$f(M_0) = f\left(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}\right).$$

Тоді точка $N\left(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{01}, f(M_0)\right)$ в $(n+1)$-вимірному просторі належить до «графіка» функції $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Щоб «графік» не містив розриву (щоб точка N не була відокремленою

[1] В тому числі, можна отримати нуль. Достатньо шляхом прямування обрати пряму $y = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+0^2}{x+0} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

від решти «графіка»), достатньо зробити значення $f(M_0)$ рівним граничному значенню b. Ці міркування узагальнюють відоме (п. 1.7) означення неперервності.

♦ **Означення 4.5.** Функцію $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ називають **неперервною в точці** $M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Іншими словами, функція $f(M)$ неперервна в точці M_0, якщо існує $f(M_0) = b$, і значення $f(M)$ для *усіх* точок M з δ-околу $|M - M_0| < \delta$ відрізняються від b не більше ніж на ε. Наприклад, функція $f(x, y) = y - x$ є неперервною в точці $M_0(0, 0)$, оскільки її значення $f(0, 0) = 0 - 0 = 0$ збігається з граничним значенням $b = 0$. Навпаки, функції $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}$, $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ розривні в цій точці: вони в ній навіть не визначені.

4.4 Частинні похідні

Розглянемо функцію $f(x, y)$, визначену в деякій області D у формі трикутника ABC (рис. 4.7). Інтерес становить дослідження її локальної поведінки в околі точки $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Покладемо $x = x_0$, $y = y_0$. Відповідне значення функції становить $z_0 = f(x_0, y_0)$. Точка $N_0(x_0, y_0, z_0)$ є поточною точкою «графіка». Значення функції $z_0 = f(x_0, y_0) \equiv f(M_0)$ зображене як апліката (висота) z_0 точки N_0. При русі точки M з початкового положення M_0 вздовж довільного шляху в площині Oxy (тобто при зміні x і y) відбувається відповідний рух точки N з початкового положення N_0 вздовж поверхні $z = f(x, y)$. Дослідити локальну поведінку функції означає проаналізувати зміну висоти точки N в процесі такого руху. Ця задача ускладнена за рахунок довільності шляху руху точки M.

Як ми вже вказували, обрати конкретний шлях руху точки M означає обрати деяку функцію $y(x)$, чиїм графіком в площині Oxy і є цей шлях. При такому виборі функція двох змінних перетворюється на функцію однієї змінної. Наголосимо, одна й та сама функція двох змінних може перетворюватись на *різні* функції одного змінного. Наприклад, нехай функція двох змінних є лінійною: $f(x, y) = 4x + y$. Покладаючи $y = \sin x - 4x$, ми можемо зробити її тригонометричною ($f = \sin x$); покладаючи $y = x^2$ – квадратичною ($f = 4x + x^2$), і т.д.

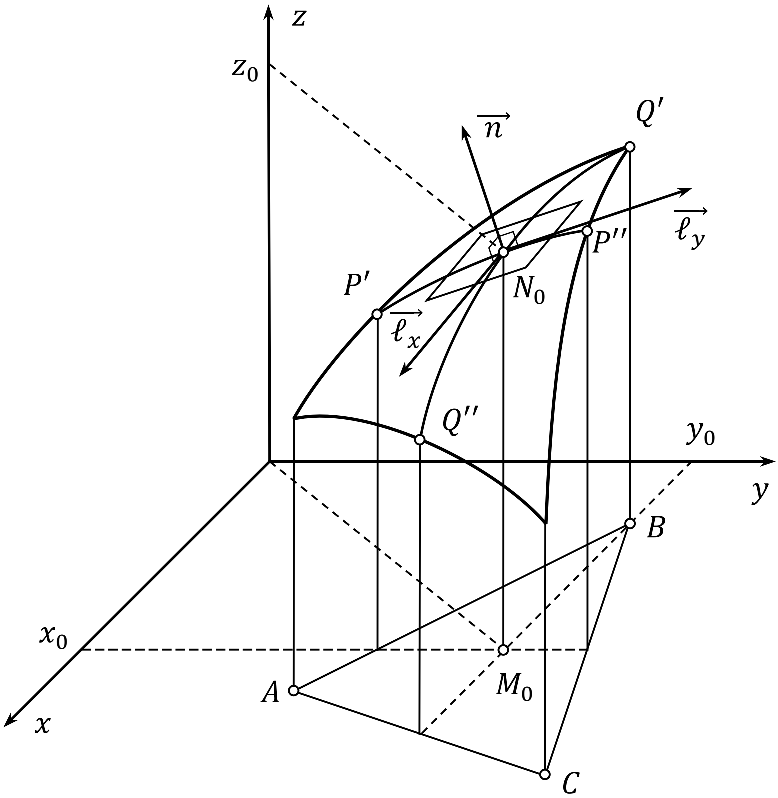


Рисунок 4.7 – «Графік» функції двох змінних

Природно обирати найпростіші шляхи. Одним з них є шлях вздовж додатного напрямку осі Ox. При цьому аргумент y залишається сталим, $y = y_0 = \text{const}$. Утворюється нова функція $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Її графік можна побачити як переріз поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ – це (плоска!) крива $Q'N_0Q''$ на рис. 4.7. Для поверхні, зображеної на цьому рисунку, висота точки N (а отже, і значення z) зменшується при русі в напрямку від Q' до Q''. Миттєву швидкість цього зменшення, як відомо, можна характеризувати похідною $\varphi'_x = \frac{d\varphi}{dx}$. Саме цю похідну і називають **частинною похідною** функції $f(x, y)$ **за змінною** x.

Використовують одне з наступних позначень:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x.$$

Символ ∂ частинної похідної, на відміну від літери d, не належить аніякій абетці; він є *літероподібним* символом математики.

Іншим елементарним шляхом є шлях вздовж додатного напрямку осі Oy. Аргумент x залишається сталим, $x = x_0 = \text{const}$. Утворюється нова функція $\psi(y) = f(x_0, y)$. Її графіком є переріз поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$ – це плоска крива $P'N_0P''$ на рис. 4.7. Для поверхні, зображеної на цьому рисунку, висота точки N (а отже, і значення z) збільшується при русі в напрямку від P' до P'' з миттєвою швидкістю $\psi'_y = \frac{d\psi}{dy}$. Саме цю похідну і називають **частинною похідною** функції $f(x, y)$ **за змінною** y. Використовують одне з наступних позначень:

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y.$$

Зауважимо, одна й та сама функція в одній і тій самій точці M_0 може і зростати, і спадати одночасно; це залежить від напрямку зміщення від точки M_0. З цієї причини монотонність функції багатьох змінних не досліджують.

Отже, локальна поведінка функції двох змінних в околі деякої точки характеризується двома частинними похідними. Похідну за змінною x обчислюють за умови $y = \text{const}$, а похідну за змінною y обчислюють за умови $x = \text{const}$. При цьому виникають різні результати.

$\triangleleft$ *Приклад 4.11.* Нехай $f(x, y) = x^2 \sin y$. Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y. \ \triangleright$$

Наголосимо, літероподібний символ ∂ аніяку величину не позначає. Тому вираз $\frac{\partial f}{\partial x}$ слід розуміти, як результат застосування операції $\frac{\partial}{\partial x}$ знаходження частинної похідної за змінною x до функції $f(x, y)$, а не як відношення величин ∂f і ∂x. Тому важливо відрізняти вираз df і символ ∂f.

$\triangleleft$ *Приклад 4.12.* Нехай три величини x, y, z є такими, що $xyz = 1$. Маємо:

$$z(x, y) = \frac{1}{xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 y},$$

$$x(y,z) = \frac{1}{yz}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{1}{y^2 z},$$

$$y(z,x) = \frac{1}{zx}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{z^2 x}.$$

Перемножаючи ці три частинні похідні, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{x^3 y^3 z^3} = -\frac{1}{(xyz)^3} = -1.$$

В той же час, добуток відношень

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} = +1.$$

Це і підкреслює відмінність ∂x і dx, ∂y і dy, ∂z і dz. $\triangleright$

В разі функцій більш ніж двох змінних ілюстрацію, аналогічну до рис. 4.7, створити вже неможливо. Але означення частинної похідної легко узагальнюється. Достатньо усі незалежні змінні, крім даної, зафіксувати, і залишиться функція однієї змінної. Її можна диференціювати в звичайний спосіб.

⧫ **Означення 4.6. Частинною похідною** від функції багатьох змінних в даній точці за даною змінною називають похідну за цією змінною в даній точці, обчислену в припущенні, що решта аргументів залишають свої значення сталими.

Наприклад, для функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за цим означенням маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

Звичайно, це три різні відповіді.

$\triangleleft$ *Приклад 4.13.* Нехай $f(x,y,z) = x^2 \sin y + \ln z$. Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z}.$$

Тут в перших двох випадках $\ln z = \text{const}$, і похідна цього доданку дорівнює нулю. В третьому випадку $x^2 \sin y = \text{const}$, і похідна цього доданку також дорівнює нулю. $\triangleright$

4.5 Нормаль і дотична площина

Матеріал цього пункту стосується лише функцій двох змінних $z = f(x,y)$. Поставимо за мету побудувати рівняння площини, яка дотикається до поверхні $z = f(x,y)$ в точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$, а також рівняння нормальної прямої в цій точці.

Очевидно, шукані рівняння мають вигляд

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

де p, q, r – координати вектора, перпендикулярного до поверхні $z = f(x,y)$ в точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Через точку N_0 проведемо перерізи поверхні $z = f(x,y)$ площинами $y = y_0$, $x = x_0$. Утворені в перерізі криві $Q'N_0Q''$, $P'N_0P''$ (див. рис. 4.7) є графіками функцій $\varphi(x) = f(x, y_0)$, $\psi(y) = f(x_0, y)$. З геометричного змісту похідної випливає, що прямі в площинах $y = y_0$, $x = x_0$, дотичні до цих графіків в точці N_0, утворюють з осями Ox, Oy кути α, β, такі, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \varphi'(x_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = f'_x(M_0).$$

$$\operatorname{tg} \beta = \psi'(y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = f'_y(M_0).$$

Тут нижній індекс M_0 позначає, що частинні похідні f'_x, f'_y обчислено в точці M_0 (частинні похідні f'_x, f'_y є функціями двох змінних, а вирази $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ – конкретні числа).

З осями Ox, Oy, Oz напрямний вектор $\overrightarrow{L_x}$ першої прямої утворює кути α, $\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Нехай $\left|\overrightarrow{L_x}\right| = 1$. Тоді координати вектора $\overrightarrow{L_x}$ є його напрямними косинусами:

$$\overrightarrow{L_x} = \left\{\cos\alpha; \cos\frac{\pi}{2}; \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\} = \{\cos\alpha; 0; \sin\alpha\}.$$

Зручно обрати інший вектор $\overrightarrow{\ell_x}$, колінеарний до $\overrightarrow{L_x}$:

$$\overrightarrow{\ell_x} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\overrightarrow{L_x} = \{1; 0; \operatorname{tg}\alpha\} = \{1; 0; f'_x(M_0)\}.$$

Аналогічно, напрямний вектор $\overrightarrow{L_y}$ другої прямої з осями Ox, Oy, Oz утворює кути $\frac{\pi}{2}$, β, $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Нехай $\left|\overrightarrow{L_y}\right| = 1$. Тоді координати вектора $\overrightarrow{L_y}$ є його напрямними косинусами:

$$\overrightarrow{L_y} = \left\{\cos\frac{\pi}{2}; \cos\beta; \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right\} = \{0; \cos\beta; \sin\beta\}.$$

Зручно обрати інший вектор $\overrightarrow{\ell_y}$, колінеарний до $\overrightarrow{L_y}$:

$$\overrightarrow{\ell_y} = \frac{1}{\cos\beta}\cdot\overrightarrow{L_y} = \{0; 1; \operatorname{tg}\beta\} = \left\{0; 1; f'_y(M_0)\right\}.$$

Тоді шукана нормаль $= \overrightarrow{n}\,\{p; q; r\}$ (оскільки вона перпендикулярна кожній з цих прямих) може бути отримана як векторний добуток:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\ell_y}\times\overrightarrow{\ell_x} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & f'_y(M_0) \\ 1 & 0 & f'_x(M_0) \end{vmatrix} = \left\{f'_x(M_0); f'_y(M_0); -1\right\}.$$

Остаточно, шукані рівняння мають вигляд

$$f'_x(M_0)(x-x_0) + f'_y(M_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}. \tag{4.4}$$

$\triangleleft$ *Приклад 4.14.* Побудуємо дотичну площину і нормаль до поверхні $z = x^2 - 2xy + 1$ в точці $N_0(3; 1; z_0)$, яка відповідає точці $M_0(3; 1)$. Маємо:

$$z_0 = f(M_0) = x_0^2 - 2x_0y_0 + 1 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot 1 + 1 = 4.$$

Отже, дотикання відбувається в точці $N_0(3;1;4)$. Похідні дорівнюють:

$$f'_x(M) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2xy + 1\right) = 2x - 2y, \quad f'_x(M_0) = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = 4;$$

$$f'_y(M) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2xy + 1\right) = -2x, \quad f'_x(M_0) = -2\cdot 3 = -6.$$

Шукані рівняння мають вигляд

$$4(x-3) - 6(y-1) - (z-4) = 0,$$

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-4}{-1}. \ \triangleright$$

4.6 Диференціал

4.6.1 Означення диференціалу

Узагальнимо тепер поняття диференціалу функції на випадок багатьох змінних. Спочатку розглянемо випадок двох змінних.

В разі функції однієї змінної диференціалом функції в точці ми називали частину, виокремлену з приросту функції в такий спосіб, щоб «решта», яка залишається після виокремлення, виявлялась малою вищого порядку:

$$\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df + o(\Delta x).$$

Спосіб обчислення диференціалу подавався формулою (3.5).

Розглянемо тепер випадок двох змінних. Нехай точка M переміщується з положення $M_0(x_0, y_0)$ в положення $M(x, y)$. Функція $z = f(M) = f(x, y)$ набуває приросту

$$\Delta f \equiv f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Позначимо $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Отримуємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Тепер маємо три важливих питання: 1) чи існують числа A, B такі, що виокремлення головної частини приросту Δf, лінійної за Δx і Δy, можна було би здійснити у вигляді

$$\Delta f = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y);$$

2) як знайти A, B (в разі їх існування); 3) за яких умов це можна зробити. Відповіді на ці питання надає наступна теорема.

■ **Теорема 4.1.** Нехай частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ деякої функції $f(x, y)$ 1) існують в точці $M_0(x_0, y_0)$; 2) існують в будь-якій точці M деякого δ-околу точки M_0; 3) є неперервними в точці M_0. Тоді приріст функції f в точці M_0 може бути поданий у вигляді

$$\Delta f = f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y).$$

□ *Доведення.* Задамося проміжною точкою $M'(x_0, y_0 + \Delta y)$ і подамо приріст функції у вигляді

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = [f(M) - f(M')] + [f(M') - f(M_0)] =$$

$$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] +$$
$$+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]\,.$$

Тут різниця $f(M) - f(M')$ є частинним приростом функції, який виникає лише за рахунок зміни x при $y = y_0 + \Delta y = \text{const}$. Отже, цю різницю можна розглядати як функцію однієї змінної $x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Застосуємо (3.4). В цій формулі треба покласти $C = f'_x(M')$, оскільки зараз саме точка M' і відіграє роль «початкової». Похідна при цьому є частинною похідною за змінною x. Тоді

$$f(M) - f(M') = f'_x(M')\,\Delta x + o(\Delta x).$$

На відміну від цього, різниця $f(M') - f(M_0)$ є частинним приростом функції, який виникає лише за рахунок зміни y. Знову застосуємо (3.4). Але тепер треба покласти $C = f'_y(M_0)$. Отримаємо:

$$f(M') - f(M_0) = f'_y(M_0)\,\Delta y + o(\Delta y).$$

Додаючи ці різниці, одержуємо:

$$f(M) - f(M_0) = f'_x(M')\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y).$$

Для завершення доведення залишається підмінити величину $f'_x(M')$ величиною $f'_x(M_0)$. Це законно, оскільки за умовою теореми функція $f'_x(M)$ є неперервною в точці M_0. Це означає, що $f'_x(M') = f'_x(M_0) + \alpha$, причому якщо $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, то $\alpha \to 0$. Отже, підміна призводить до появи додаткового доданку $\alpha\,\Delta x$:

$$f'_x(M')\,\Delta x = f'_x(M_0)\,\Delta x + \underbrace{(f'_x(M') - f'_x(M_0))}_{=\alpha}\,\Delta x.$$

Очевидно, $\alpha\,\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з $\rho \to 0$, тому

$$o(\Delta x) + o(\Delta y) + \alpha\,\Delta x = o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

(див. п. 2.4.4.2). $\square$

Зауваження 1. Якщо частинні похідні функції $f(x, y)$ в точці M_0 є неперервними, то і сама функція f в цій точці є неперервною. Справді, якщо $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то і $\Delta f \to 0$.

Зауваження 2. Твердження теореми неважко узагальнити на випадок більшої кількості аргументів. В цьому разі його зручно подавати у більш компактному вигляді

$$\Delta f = f'_{x_1}(M_0)\,\Delta x_1 + f'_{x_2}(M_0)\,\Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(M_0)\,\Delta x_n + o(\rho), \quad (4.5)$$

де $\rho = |M_0 M|$. Цей вигляд тим більш зручний, чим більша кількість незалежних аргументів.

Доведемо можливість такого подання у випадку функції двох змінних. Враховуючи, що $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, маємо:

$$\Delta f = f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y) =$$

$$= f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y +$$

$$+ \left[\frac{o(\Delta x)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \frac{o(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right]\rho =$$

$$= f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y +$$

$$+ \left[\frac{\frac{o(\Delta x)}{|\Delta x|}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} + \frac{\frac{o(\Delta y)}{|\Delta y|}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 1}}\right]\rho.$$

Нехай тепер $\rho \to 0$. Оскільки $|\Delta x| \leqslant \rho$, $|\Delta y| \leqslant \rho$, то тим паче $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Тоді в останньому рівнянні уся «квадратна дужка» прямує до нуля одночасно з ρ, що і треба було довести.

Зауваження 3. В теоремі ми довели: якщо існують неперервні частинні похідні функції $f(M)$, то її приріст можливо подати у вигляді (4.5). Справедливе і обернене твердження: якщо приріст функції $f(M)$ можливо подати у вигляді

$$\Delta f = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y),$$

то існують частинні похідні. Наприклад, якщо $y = \text{const}$, то $\Delta y = 0$, і тоді:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\Bigg|_{\Delta y=0} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to A \qquad \text{при} \qquad \Delta x \to 0,$$

тобто A і є значенням частинної похідної за x в даній точці. Щоправда, існування частинних похідних в даній точці ще не гарантує їх неперервність у цій точці.

Тепер можна вважати обґрунтованою коректність наступного означення.

⧫ **Означення 4.7.** Якщо приріст функції $f(M)$ можна подати у вигляді (4.5), то функцію називають **диференційовною в точці** M_0. Головну лінійну частину цього приросту, тобто вираз

$$df(M_0) = f'_{x_1}(M_0)\,\Delta x_1 + f'_{x_2}(M_0)\,\Delta x_2 + \cdots + f'_{x_n}(M_0)\,\Delta x_n,$$

називають **диференціалом функції в точці.**

Зокрема, диференціал функції двох змінних можна знайти за формулою:

$$df(M_0) = f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y.$$

Припустимий також скорочений запис

$$\boxed{df = f'_x\,dx + f'_y\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.}$$

На багатовимірні випадки цей результат узагальнюється безпосередньо. Наприклад:

$$du(x, y, z) = u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz.$$

4.6.2 Геометричний зміст диференціалу

Матеріал цього підпункту стосується лише функцій двох змінних $z = f(x, y)$. Рівняння (4.3) площини, дотичної до поверхні $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, подамо у вигляді:

$$z^* - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0).$$

Тут z^* – апліката точки N^*, яка належить дотичній площині. (В загальному випадку точка N^* поверхні $z = f(x, y)$ *не належить* за рахунок її викривлення). Враховуючи очевидні рівності $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, помічаємо, що права частина цього рівняння збігається з виразом для диференціалу $dz(M_0)$. Отже, $dz(M_0) = z^* - z_0$. В цьому і полягає геометричний зміст диференціалу: **диференціал функції двох змінних в точці дорівнює приросту аплікати точки на дотичній площині**. Доцільно порівняти це твердження з результатом п 3.4.2: диференціал функції однієї змінної дорівнює приросту ординати точки на дотичній прямій.

4.6.3 Зауваження про диференційовність

Для функцій однієї змінної було доведено: диференціал функції в точці існує тоді і тільки тоді, коли існує скінченна похідна в цій точці. Тому поняття диференційовності (як можливості виокремлення головної лінійної частини приросту функції) і існування скінченної похідної *в точці* ми не розрізняли.

В разі функцій багатьох змінних ситуація принципово змінюється. Для подання приросту функції у вигляді (4.5) одного лише існування частинних похідних *в точці* недостатньо; додатково потрібна ще неперервнівсть цих похідних. Отже, диференційовність функції в сенсі виконання рівняння (4.5) тепер є більш потужною вимогою, порівняно з існуванням частинних похідних. Щоб довести нерівносильність 1) існування похідних в точці і 2) існування диференціалу в точці, достатньо пред'явити хоча б одну функцію, для якої частинні похідні в точці існують, а диференціал не існує. Розглянемо наступний приклад.

$\triangleleft$ *Приклад 4.15*. Нехай $z = -\sqrt{|xy|}$. Знак «мінус» ми поставили тільки для зручності огляду відповідної поверхні (рис. 4.8).

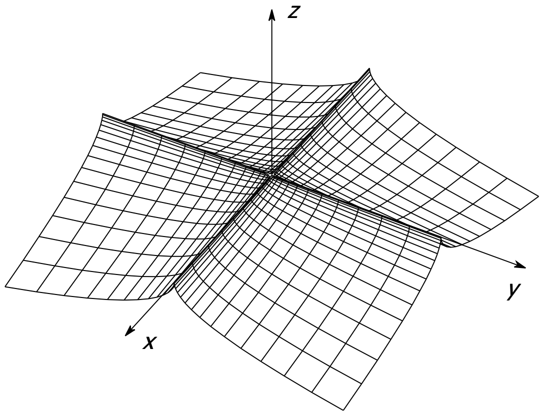


Рисунок 4.8 – Поверхня $z(x,y) = -\sqrt{|xy|}$

За означенням частинної похідної в точці $M_0(0,0)$ маємо:

$$z'_x(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(0+\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sqrt{|(0+\Delta x)\cdot 0|} - \left(-\sqrt{|0\cdot 0|}\right)}{\Delta x} = 0.$$

Аналогічно $z'_y(M_0) = 0$. Отже, (4.5) набуває вигляду

$$\Delta z = o(\rho).$$

Але це твердження зараз є хибним. Справді, розглянемо прямування $\rho \to 0$ вздовж променя $y = x$, $x \geqslant 0$. Маємо:

$$\Delta z = z(x,y) - z(0,0) = -\sqrt{|x|^2} - \left(-\sqrt{|0|^2}\right) = -x.$$

Маємо також

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{2}.$$

Тоді
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$
Отже, величина Δz не є нескінченно малою вищого порядку порівняно з ρ. Іншими словами, подання приросту у вигляді (4.5) місця не має. Тому розглядувана функція не є диференційовною в точці M_0, хоча її похідні в цій точці існують і є скінченними.

Зауважимо, порушення теореми 4.1 при цьому не відбувається, оскільки її умови не виконано. А саме, частинні похідні є розривними в точці M_0. Справді, розглянемо похідну z'_x в точці $M_1(x_1, y_1)$, де $x_1>0$, $y_1>0$. Маємо:
$$z'_x(M_1)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{|xy|}\right)\Big|_{M_1}=-\sqrt{y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_{M_1}=$$
$$=-\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{M_1}=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}.$$
Тоді
$$|z'_x(M_1)-z'_x(M_0)|=\left|-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}-0\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}.$$
Розрив має місце, оскільки при як завгодно малих δ цю різницю не вдається зробити малою для *довільної* внутрішньої точки M_1 з δ-околу точки M_0. Справді, при $y_1=\mathrm{const}>0$ маємо:
$$|z'_x(M_1)-z'_x(M_0)|\to\infty,$$
якщо $x_1\to 0+0$. $\triangleright$

4.7 Похідна за напрямком. Градієнт

Спочатку розглянемо випадок функції $z=f(x,y)$ двох змінних.

При обчисленні частинних похідних f'_x, f'_y з усіх можливих шляхів прямування точки $M(x,y)$ до положення $M_0(x_0,y_0)$ ми досі обирали лише два: вздовж осі Ox і вздовж осі Oy. Але інших шляхів – безліч.

Нехай прямування $M\to M_0$ відбувається вздовж прямої з довільним напрямним вектором $\overrightarrow{\ell}=\{p;q\}\neq\overrightarrow{0}$. Зараз для нас важливий лише напрямок, який визначається вектором $\overrightarrow{\ell}$. Тому зручно перейти до орта

$$\overrightarrow{\ell_0} = \frac{\overrightarrow{\ell}}{\left|\overrightarrow{\ell}\right|},$$

який має той самий напрямок, але є одиничним за довжиною. Очевидно,

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = \sqrt{\overrightarrow{\ell} \cdot \overrightarrow{\ell}} = \sqrt{p^2 + q^2} \neq 0.$$

Тоді вектор $\overrightarrow{\ell_0}$ має координати

$$\overrightarrow{\ell_0} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \{p; q\} = \left\{ \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right\}.$$

Нехай вектор $\overrightarrow{\ell_0}$ утворює кути α, β з осями Ox, Oy відповідно. Очевидно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Як відомо[2] з курсу аналітичної геометрії, мають місце рівності

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Тоді вектор $\overrightarrow{\ell_0}$ має координати $\overrightarrow{\ell_0} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$.

Прямування $M \to M_0$ вздовж прямої з напрямним вектором $\overrightarrow{\ell_0}$ означає колінеарність векторів $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\overrightarrow{\ell_0}$. Тоді існує t таке, що $\overrightarrow{M_0 M} = t\overrightarrow{\ell_0}$. В координатній формі маємо:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\cos\alpha; \\ y - y_0 = t\cos\beta. \end{cases} \tag{4.6}$$

Власне, це – параметричне рівняння прямої $M_0 M$. Обмежимось напівпрямою (променем) $M_0 M$, тобто обмежимось значеннями[3] $t > 0$.

[2]Втім, це і так очевидно. Косинус кута α можна знайти з прямокутного трикутника, утвореного вектором $\overrightarrow{\ell_0}$ і його проекціями на осі Ox, Oy. Достатньо прилеглий катет, тобто абсцису $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$, розділити на гіпотенузу $\left|\overrightarrow{\ell_0}\right| = 1$. В разі кута β прилеглим катетом є ордината $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

[3]В разі $t < 0$ вектори $\overrightarrow{M_0 M}$ і $\overrightarrow{\ell_0}$, залишаючись колінеарними, стають протилежними. Але ми бажаємо мати справу з напрямком вектора $\overrightarrow{\ell_0}$, а не з протилежним до нього напрямком, тому і обираємо $t > 0$, а не $t < 0$.

Похідну функції $f(x, y)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{\ell}$, як і зазвичай, визначимо як границю відношення приросту функції до шляху, протягом якого цей приріст накопичується. Застосування запису $f(M)$ замість $f(x, y)$ дозволяє узагальнювати наступне означення на довільні багатовимірні випадки.

♦ **Означення 4.8. Похідною** функції $f(M)$ багатьох змінних **в напрямку вектора** $\overrightarrow{\ell}$ називають границю

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta f}{|M_0M|} = \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|M_0M|},$$

де $|M_0M|$ є прямолінійним шляхом від точки M_0 до точки M, виміряним вздовж напрямку вектора $\overrightarrow{\ell}$.

Це означення, як і раніше, має локальний характер, тобто наведена границя є похідною за даним напрямком, обчисленою в даній конкретній точці M_0.

Користуватись цим означенням для практичних розрахунків незручно, тому отримаємо формулу, яка дозволяє зводити таке обчислення до елементарних операцій.

Для двовимірного випадку з використанням (4.5) маємо:

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + o\left(|M_0M|\right).$$

З використанням почленного ділення одержуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}} = \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{f'_x(M_0)\,\Delta x + f'_y(M_0)\,\Delta y + o(|M_0M|)}{|M_0M|} =$$

$$= f'_x(M_0) \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta x}{|M_0M|} + f'_y(M_0) \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta y}{|M_0M|}.$$

Тут третій доданок відкинуто, оскільки його границя дорівнює нулю за означенням вищого порядку малості. З системи (4.6) маємо

$$\Delta x = x - x_0 = t\cos\alpha, \qquad \Delta y = y - y_0 = t\cos\beta,$$

$$|M_0M| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{t^2\left[\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]} = |t| = t.$$

Тоді

$$\frac{\Delta x}{|M_0M|} = \frac{t\cos\alpha}{t} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{|M_0M|} = \frac{t\cos\beta}{t} = \cos\beta.$$

Отримані значення для даної прямої (4.6) є константами, тому їх границі дорівнюють їм самим. Остаточно одержуємо:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta. \tag{4.7}$$

$\lhd$ *Приклад 4.16.* Обчислити похідну функції $z = 17xy^2$ в точці $M_0(1;1)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{\ell} = \{15;8\}$.

Маємо:

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = \sqrt{15^2+8^2} = 17.$$

Тоді орт цього вектора

$$\overrightarrow{\ell_0} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{\ell}\right|}\cdot\overrightarrow{\ell} = \left\{\frac{15}{17};\frac{8}{17}\right\}.$$

Тоді напрямні косинуси: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{8}{17}$.

Частинні похідні

$$z'_x = 17y^2, \qquad z'_x(M_0) = 17\cdot 1^2 = 17;$$

$$z'_y = 34xy, \qquad z'_y(M_0) = 34\cdot 1\cdot 1 = 34.$$

Тоді за формулою (4.7) одержуємо:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0} = 17\cdot\frac{15}{17} + 34\cdot\frac{8}{17} = 15+16 = 31. \rhd$$

Означення похідної за напрямком можна узагальнити. Зараз це означення містить поєднання двох вимог: 1) шлях M_0M – прямолінійний; 2) шлях M_0M – паралельний до вектора $\overrightarrow{\ell}$. Очевидно, існує лише один спосіб одночасно виконати ці вимоги: точка M повинна рухатись вздовж прямої (4.6). Насправді це не обов'язково. Нас влаштує довільний гладкий криволінійний шлях, аби лише дотична до нього в точці M_0 була паралельною до вектора $\overrightarrow{\ell}$. В цьому разі за означенням дотичної вектор $\overrightarrow{M_0M}$ стає паралельним до вектора $\overrightarrow{\ell}$ лише у граничному сенсі при $t \to 0$. Для такого шляху замість (4.6) скористаємось параметризацією:

$$\begin{cases} x - x_0 = t\cos\alpha + \gamma_1(t); \\ y - y_0 = t\cos\beta + \gamma_2(t), \end{cases}$$

де $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ – довільні функції, такі що $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$, і $\gamma_1(t) = o(t)$, $\gamma_2(t) = o(t)$ при $t \to 0$. Переконаємось, що дотична до кривої, параметрично заданої в такий спосіб, має потрібний напрямок:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{M_0} = \left.\frac{y'_t}{x'_t}\right|_{t=0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+0}{\cos\alpha+0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

що відповідає орієнтації вектора $\overrightarrow{\ell}$. Враховано, що за означенням похідної:

$$\left.\frac{d\gamma_{1,2}}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_{1,2}(t) - \gamma_{1,2}(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_{1,2}(t)}{t} = 0,$$

оскільки $\gamma_{1,2}$ – малі вищих порядків.

Маємо:

$$\begin{gathered} |M_0M|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \\ = t^2\cos^2\alpha + 2t\gamma_1\cos\alpha + \gamma_1^2 + t^2\cos^2\beta + 2t\gamma_2\cos\beta + \gamma_2^2 = \\ = t^2\left(1 + 2\frac{\gamma_1}{t}\cos\alpha + \left(\frac{\gamma_1}{t}\right)^2 + 2\frac{\gamma_2}{t}\cos\beta + \left(\frac{\gamma_2}{t}\right)^2\right). \end{gathered}$$

Позначимо

$$\gamma(t) = 2\frac{\gamma_1}{t}\cos\alpha + \left(\frac{\gamma_1}{t}\right)^2 + 2\frac{\gamma_2}{t}\cos\beta + \left(\frac{\gamma_2}{t}\right)^2.$$

Очевидно, γ – нескінченно мала, оскільки $\gamma_{1,2}$ – нескінченно малі вищих порядків порівняно з t. Тоді

$$|M_0M| = \sqrt{t^2\,(1+\gamma)} = |t|\,\sqrt{(1+\gamma)} = t\left(1 + \frac{\gamma}{2} + o(\gamma)\right).$$

Маємо далі:

$$\frac{\Delta x}{|M_0M|} = \frac{t\cos\alpha + \gamma_1(t)}{t\left(1+\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)\right)} = \frac{\cos\alpha + \frac{\gamma_1(t)}{t}}{1+\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)},$$

$$\frac{\Delta y}{|M_0M|} = \frac{t\cos\beta + \gamma_2(t)}{t\left(1+\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)\right)} = \frac{\cos\beta + \frac{\gamma_2(t)}{t}}{1+\frac{\gamma}{2}+o(\gamma)}.$$

Отже, тепер ці відношення не є сталими. Але їх границі при $t \to 0$, як і раніше, дорівнюють $\cos\alpha$, $\cos\beta$ відповідно. Тому в разі прямування $M \to M_0$ вздовж кривої результат (4.7) виявляється таким самим, як і при прямуванні вздовж прямої (4.6).

Подальші міркування дозволяють подати результат (4.7) у більш компактному вигляді.

Розглянемо *векторно-диференціальний оператор* першого порядку:

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{j}\,\frac{\partial}{\partial y} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

Літероподібний символ ∇ (читають «*на́бла*»; вважають, що ця назва походить від назви однойменного стародавнього близькосхідного музичного інструменту на кшталт арфи, схожого на цей символ) запропонував у 1853 році Гамільтон[4].

Формально $\overrightarrow{\nabla}$ є вектором, координати якого в декартовому базисі $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ дорівнюють $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. Але це не величини, а

[4]Сер Уїльям Роуен Гамільтон (англ. William Rowan Hamilton; 1805–1865) — ірландський математик, механік-теоретик, фізик-теоретик. Автор *варіаційного принципу найменшої дії*. Цей принцип використовують в багатьох розділах фізики.

лише символи, які позначають дію знаходження відповідних частинних похідних. Власне, слово «оператор» і означає «дія, яку застосовують до певного об'єкту». Іншими словами, $\vec{\nabla}$ є лише описом дій. В той же час, $\vec{\nabla} f$ вже є конкретним вектором (результатом застосування цих дій до конкретної функції f). Так само символ $\frac{\partial}{\partial x}$ не дорівнює нічому і лише позначає операцію знаходження частинної похідної, а вираз $\frac{\partial f}{\partial x}$ вже є конкретною функцією, яка виникає в результаті цієї операції.

◁ *Приклад 4.17.* Нехай $f(x, y) = x - y$. Маємо:

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(x - y) + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}(x - y) = \vec{i} - \vec{j} = \{1; -1\}\,. \triangleright$$

Вектор $\vec{\nabla} f$ в загальному випадку є різним в різних точках.

◁ *Приклад 4.18.* Нехай $f(x, y) = x^2 y^3$. Маємо:

$$\vec{\nabla} f = \left\{2xy^3; 3x^2y^2\right\}.$$

Оберемо, наприклад, точки $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$. Маємо:

$$\vec{\nabla} f\Big|_{M_1} = \left\{2 \cdot 0 \cdot 0^3; 3 \cdot 0^2 \cdot 0^2\right\} = \{0; 0\}\,,$$

$$\vec{\nabla} f\Big|_{M_2} = \left\{2 \cdot 1 \cdot 1^3; 3 \cdot 1^2 \cdot 1^2\right\} = \{2; 3\}\,. \triangleright$$

⧫ **Означення 4.9.** Вектор $\vec{\nabla} f$, утворюваний в результаті дії оператора $\vec{\nabla}$ на *скалярну* функцію f, називають **градієнтом:**

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right\}.$$

Іноді, щоб додатково підкреслити векторний характер градієнта, застосовують стрілку: $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$.

Неправильно казати, що градієнт і набла – це одне й те саме. Градієнт – це завжди вектор. Набла є ж операцією, яку можна застосовувати до різних об'єктів. Досі ми оператором набла діяли на скалярну функцію f. Можна діяти і на векторну функцію $\vec{A}$, обчислюючи скалярний добуток $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Утворюється скаляр. Можна діяти і на векторну функцію $\vec{A}$, обчислюючи векторний добуток $\vec{\nabla} \times \vec{A}$. Утворюється вектор. Можна будувати і більш складні конструкції – векторно-диференціальні оператори вищих порядків. Наприклад: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot f$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$, і т.д. Більш детально ці аспекти вивчає теорія поля.

Враховуючи тепер, що вектори $\operatorname{grad} f$ і $\overrightarrow{\ell_0}$ мають координати $\operatorname{grad} f = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ і $\overrightarrow{\ell_0} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$, формулі (4.7) легко надати вигляд скалярного добутку

$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0} = (\operatorname{grad} f)|_{M_0} \cdot \overrightarrow{\ell_0}.} \tag{4.8}$$

◁ *Приклад 4.19.* Обчислити похідну функції $z = 17xy^2$ в точці $M_0(1;1)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{\ell} = \{15; 8\}$.

Як і в попередньому прикладі, маємо:

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = 17, \qquad \overrightarrow{\ell_0} = \left\{\frac{15}{17}; \frac{8}{17}\right\},$$

а також

$$z'_x(M_0) = 17, \qquad z'_y(M_0) = 34.$$

Тоді градієнт функції в даній точці за означенням 4.9:

$$(\operatorname{grad} z)|_{M_0} = \left\{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\right\} = \{17; 34\}.$$

Тоді скалярний добуток (4.8):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0} = 17 \cdot \frac{15}{17} + 34 \cdot \frac{8}{17} = 31,$$

що збігається з результатом, отриманим вище. ▷

Як бачимо, застосування вектору $\operatorname{grad} f$ формалізує обчислення похідної за напрямком, роблячи його зручним.

Встановимо зміст вектора $\operatorname{grad} f$. За означенням скалярного добутку формулі (4.8) надамо вигляду

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0} = \left|(\operatorname{grad} f)|_{M_0}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\ell_0}\right| \cdot \cos\varphi = \left|(\operatorname{grad} f)|_{M_0}\right| \cdot \cos\varphi,$$

оскільки $\left|\overrightarrow{\ell_0}\right| = 1$. Тут φ є кутом між векторами $\operatorname{grad} f$ і $\overrightarrow{\ell}$ (або, що те саме, між векторами $\operatorname{grad} f$ і $\overrightarrow{\ell_0}$). Максимальне значення цієї похідної досягається при $\varphi = 0$ (при цьому $\cos\varphi = 1$, що і є максимальним значенням косинусу). Рівність $\varphi = 0$ означає, що вектори $\operatorname{grad} f$ і $\overrightarrow{\ell}$ мають однаковий напрямок. Отже,

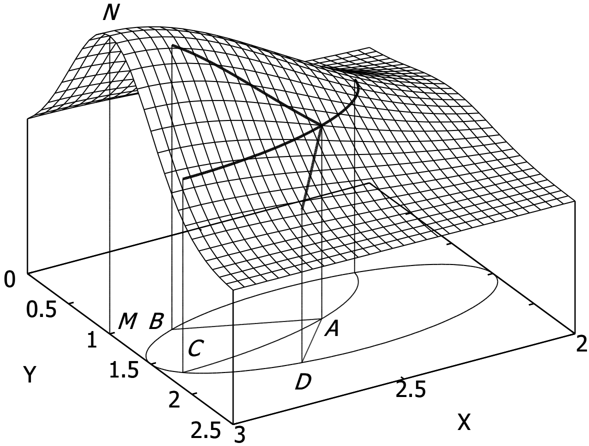


Рисунок 4.9 – Поверхня $z(x,y) = 4 + 5e^{-2\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]}$

напрямок вектору $\operatorname{grad} f$ – це такий напрямок, в якому потрібно рухати точку M, щоб похідна функції $f(M)$ за цим напрямком стала максимальною. Кажуть також, що *градієнт спрямований в сторону найшвидшого зростання функції*. Але ця (на жаль, поширена) фраза вводить в оману. Наприклад, можна подумати, що в разі рис. 4.7 «сторона найшвидшого зростання» – це напрямок дотичної до кривої N_0Q'. Насправді ж градієнт в цьому разі спрямований *горизонтально* – вздовж напрямку M_0B.

Нехай $\overrightarrow{\ell} \parallel \operatorname{grad} f$. Тоді $\varphi = 0$. В цьому разі $\cos\varphi = 1$, отже,

$$\left|(\operatorname{grad} f)|_{M_0}\right| = \left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\ell}}\right|_{M_0;\, \overrightarrow{\ell} \parallel \operatorname{grad} f}.$$

Модуль градієнта в даній точці дорівнює максимальній швидкості зростання функції в даній точці.

$\triangleleft$ *Приклад 4.20.* Розглянемо функцію

$$z(x,y) = 4 + 5e^{-2\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]}.$$

Її графік подано на рис. 4.9. Оскільки $(x-3)^2 + (y-1)^2 \geqslant 0$,

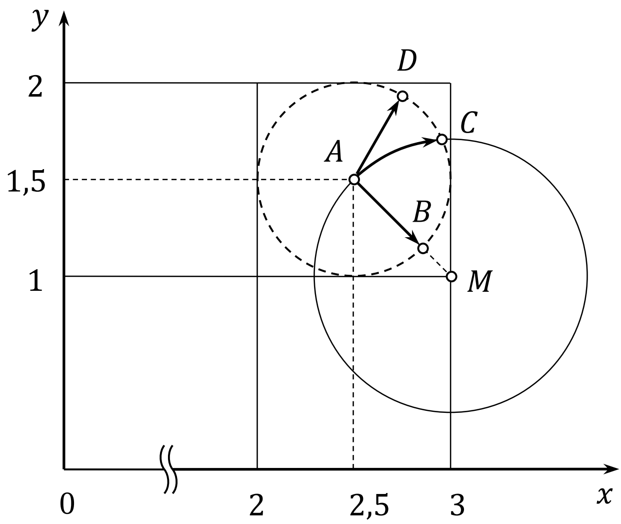


Рисунок 4.10 – Напрямки в околі точки A (до прикладу 4.20)

причому рівність $(x-3)^2+(y-1)^2=0$ досягається лише в точці $M(3;1)$, то ця точка є точкою максимуму. Відповідна точка графіка – $N(3;1;9)$.

Проаналізуємо локальну поведінку цієї функції в околі точки $A(2{,}5;1{,}5)$. Задамося δ-околом цієї точки при $\delta=0{,}5$. Вигляд «зверху» подано на рис. 4.10.

Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-20(x-3)e^{-2\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]},\qquad z'_x(A)=\frac{10}{e};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-20(y-1)e^{-2\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]},\qquad z'_y(A)=-\frac{10}{e}.$$

Тоді

$$(\operatorname{grad} z)\big|_A=\frac{10}{e}\left\{1;-1\right\}.$$

Як бачимо, цей вектор колінеарний вектору $\overrightarrow{AM}=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$, а також вектору $\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{\delta}{\sqrt{2}};-\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right\}$. Справді, для найбільш швидкого збільшення висоти точки графіка, обмежуючись δ-околом, потрібно здійснити переміщення в напрямку вектора $\overrightarrow{AB}$.

Побудуємо лінію рівня, яка проходить через в точку A. Маємо:

$$z(A) = 4 + 5e^{-2\left[(x_A-3)^2+(y_A-1)^2\right]} =$$

$$= 4 + 5e^{-2\left[(2{,}5-3)^2+(1{,}5-1)^2\right]} = 4 + 5e^{-2\cdot\frac{1}{2}}.$$

Тоді рівняння лінії рівня, яка проходить через в точку A, має вигляд $z = z(A) = \mathrm{const}$, тобто

$$4 + 5e^{-2\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]} = 4 + 5e^{-2\cdot\frac{1}{2}},$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Отже, лінія рівня – це коло радіусом $|MA| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ з центром в точці $M(3;1)$. Здійснимо тепер переміщення аргументу всередині δ-околу з початкового положення A вздовж лінії рівня, тобто вздовж (криволінійного!) шляху AC. Очевидно, значення функції при цьому залишається сталим і рівним $z(A)$. Відповідні точки поверхні розташовані в горизонтальній площині $z = z(A) = \mathrm{const}$.

Всередині δ-околу можна також обрати і інши способи зміни аргументу. Наприклад, здійснимо переміщення $\overrightarrow{AD}$. Як бачимо з рис. 4.9, при такому переміщенні відбувається зменшення висоти відповідних точок на поверхні. $\triangleright$

Цей приклад ілюструє наступне. В разі функцій багатьох змінних всередині δ-околу даної точки можна обрати безліч шляхів прямування (в тому числі криволінійних). Серед них знайдеться[5] шлях, рухаючись вздовж якого, ми отримаємо зростання з максимальною швидкістю. Якщо мати на увазі прямолінійний шлях, то він єдиний і спрямований вздовж градієнту. Це може бути також довільний криволінійний шлях, дотична до якого спрямована вздовж градієнту. В будь-якому разі напрямок градієнту – єдиний, здатний забезпечити максимальну швидкість зростання функції. Будь-який інший шлях призведе або до більш повільного зростання, або до сталості значення функції (напрямок дотичної до лінії рівня), або навіть до спадання значення функції.

[5]Ми маємо на увазі диференційовну функцію, градієнт якої в даній точці не є нульовим вектором (нульовий вектор $\mathrm{grad}\, f = \overrightarrow{0}$ не визначає напрямку).

Зараз доцільно навести паралелі з електростатикою. Як відомо з курсу загальної фізики, електричне поле всередині плоского конденсатора є однорідним, тобто модуль вектора $\overrightarrow{E}$ напруженості цього поля в проміжку між пластинами є сталим. Він пов'язаний з різницею потенціалів формулою

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta x} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x},$$

де Δx – відстань між точками, в яких досягаються потенціали φ_1 і φ_2. Цю відстань вимірюють *в напрямку силових ліній поля*. Зокрема, якщо перша і друга точки розташовані на пластинах конденсатора, то Δx є відстанню d між пластинами. Тоді $E = \frac{U}{d}$, де $U = -\Delta\varphi$ – електрична напруга (різниця потенціалів).

Очевидно, дріб $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ є середньою швидкістю, з якою змінюється потенціал при русі вздовж силової лінії поля. Знак «мінус» вказує на те, що при русі вздовж напрямку вектора $\overrightarrow{E}$ відбувається *зменшення* потенціалу з максимальною (за модулем) швидкістю. Отже, однорідне поле $\overrightarrow{E}$ спрямовано вздовж такого напрямку, щоб потенціал зменшувався з максимальною швидкістю, і $\left|\overrightarrow{E}\right|$ дорівнює модулю цієї швидкості.

Це твердження справедливе і для неоднорідних полів, але в локальному сенсі: з простору виокремлюють елемент об'єму настільки малий, щоб всередині його поле не встигало змінюватись, тобто покладають $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Відповідні середні швидкості зміни поля перетворюються на миттєві ($\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ і т.д.). Отже, виникає відоме з електростатики узагальнення:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \overrightarrow{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \overrightarrow{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Розв'яжемо ще одну задачу: побудувати вектор, дотичний до лінії рівня в даній точці. Припустимо спочатку, що лінія рівня – пряма. Це можливо, коли z є функцією лінійної форми аргументів x і y, тобто $z = f(t)$, де $t = ax + by + c$, або

$$z = f(ax + by + c).$$

Покладаючи $t = ax + by + c = \text{const}$ (загальне рівняння прямої), ми як раз і будемо отримувати $z = \text{const}$.

Очевидно, дотична до прямої – це і є ця пряма. Тому її напрямний вектор $\overrightarrow{\ell}$ є шуканим. За означенням лінії рівня при русі вздовж неї значення функції залишається сталим. Тому похідна вздовж напрямку цієї прямої повинна дорівнювати нулю. Отже, на шуканий вектор $\overrightarrow{\ell}$, використовуючи (4.8), достатньо накласти умову

$$(\operatorname{grad} f)\big|_{M_0} \cdot \overrightarrow{\ell} = 0.$$

Це означає, що градієнт перпендикулярний до лінії рівня.

Нехай тепер лінія рівня – довільна крива, гладка в даній точці. Нехай дотичну в цій точці вже побудовано, і її напрямний вектор дорівнює $\overrightarrow{\ell}$. Вище ми встановили, що похідні за напрямком при русі вздовж кривої і вздовж прямої, дотичної до неї, дорівнюють одна одній. Тому отриманий висновок залишається незмінним: **градієнт в даній точці спрямований перпендикулярно до лінії[6] рівня.**

$\triangleleft$ *Приклад 4.21.* Побудувати вектор, дотичний до лінії рівня поверхні $z = x^2e^{3y}$ в точці $M_0(2; 0)$. Маємо:

$$z'_x = 2xe^{3y}, \qquad z'_x(M_0) = 2 \cdot 2e^{3\cdot 0} = 4;$$

$$z'_y = 3x^2e^{3y}, \qquad z'_y(M_0) = 3 \cdot 2^2e^{3\cdot 0} = 12.$$

Тоді $\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \left\{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\right\} = \{4; 12\}$. Нехай шуканий вектор має координати $\overrightarrow{\ell} = \{p; q\}$. Для скалярного добутку вектора градієнта і шуканого напрямного вектора маємо:

$$4 \cdot p + 12 \cdot q = 0, \qquad p = -3q.$$

Отже, шуканий вектор має координати

$$\overrightarrow{\ell} = \{-3q; q\} = q\,\{-3; 1\}, \qquad q \in \mathbb{R}, \qquad q \neq 0.$$

Звичайно, значення q знайти неможливо, оскільки вимога висувалась лише до напрямку вектора $\overrightarrow{\ell}$, а не до його довжини. Отже, шуканий вектор знайдено з точністю до деякого множника q. Зауважимо, невизначеним залишається навіть знак цього множника. Змінюючи цей знак, ми отримаємо вектор протилежного напрямку. Але він також буде напрямним вектором дотичної. Отже, остаточна відповідь має вигляд $\overrightarrow{\ell} = \lambda\,\{-3; 1\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. $\triangleright$

4.8 Подальший розвиток техніки диференціювання

4.8.1 Вступне зауваження

Поняття диференціалу функції багатьох змінних дозволяє побудувати подальший розвиток техніки диференціювання.

[6] Перпендикуляром до кривої називають перпендикуляр до дотичної до кривої в даній точці.

Розглянемо деяку область D в n-вимірному просторі. Нехай $M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}) \in D$ – деяка внутрішня точка цієї області. Через $F_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $k = \overline{1, m}$, $m < n$, позначимо функції n незалежних змінних $x_1, x_2, \cdots, x_n$, диференційовні в точці M_0. Частину цих змінних можна зробити залежними. Щоб зробити залежними m аргументів (і незалежними – решту $(n-m)$ аргументів; яких саме – зараз неважливо), потрібно ввести m обмежень. Їх називають *рівняннями зв'язку*. Приймемо їх у вигляді наступної системи рівнянь:

$$F_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \qquad k = \overline{1, m}.$$

Справді, з системи, яка містить m рівнянь, можна знайти m змінних, виразивши їх через решту $(n-m)$ змінних. Ці m змінних і будуть залежними від решти змінних.

Система рівнянь зв'язку може виявитись нелінійною. Тоді її аналітичне розв'язування стає дуже складним (якщо взагалі можливим). Натомість неважко отримати т.зв. *лінеаризовану систему*. Якщо $F_k = 0$, то тим паче $dF_k(M_0) = 0$. Знаходячи диференціали функцій F_k в точці M_0, отримуємо:

$$dF_k(M_0) = \left.\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right|_{M0} dx_1 + \left.\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right|_{M0} dx_2 + \cdots + \left.\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right|_{M0} dx_n = 0.$$

Тут $\left.\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right|_{M0}$ – сталі числа, тому ця система є лінійною відносно $dx_i = x_i - x_{0i}$. Розв'язки $x_i = x_{0i} + dx_i$ є точними для лінеаризованої системи, але наближеними для точної системи рівнянь зв'язку. Втім, нас цікавлять значення dx_i з точністю до малих вищих порядків. Тому важливо підкреслити, що отримуваний розв'язок має локальний характер: частинні похідні функцій F_k ми знаходили в точці, тому і диференціали dx_i будуть знайдені в точці.

Застосуємо цю ідею до ситуацій, розглянутих нижче.

4.8.2 Неявна функція одного аргументу

Розглянемо функцію двох незалежних змінних $F(x, y)$. Рівняння зв'язку $F(x, y) = 0$ робить одну зі змінних x, y залежною. Тож вважатимемо рівняння $F(x, y) = 0$ неявним поданням функції однієї незалежної змінної $y(x)$.

Поставимо за мету знаходження похідної[7] $\frac{dy}{dx}$ в точці x_0. Уявімо, що ми розв'язали рівняння $F(x, y) = 0$ і виразили y через x (тобто перейшли від неявного завдання функції до явного). Тоді диференціювання відбувається у звичайний спосіб. Але проблема в тому, що рівняння $F(x, y) = 0$ може виявитись нерозв'язуваним аналітично. Тому потрібно вивести формулу $y' = y'(x)$, *не користуючись* формулою $y = y(x)$.

Маємо:

$$dF(M_0) = 0, \qquad F'_x(M_0)\,dx + F'_y(M_0)\,dy = 0,$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}.} \tag{4.9}$$

Якщо функція задана явно, то для обчислення похідної $y'(x)$ в точці достатньо знати одне число x_0. В разі неявного задання ми отримали формулу, в яку потрібно підставляти *точку* M_0, тобто два числа – x_0 і y_0. Число y_0 потрібно знаходити з рівняння зв'язку $F(x, y) = 0$ при $x = x_0$. Отже, рівняння $F(x, y) = 0$ розв'язувати все ж потрібно. Але тепер це не обов'язково робити аналітично (тобто потреба в явній аналітичній формулі $y(x)$ не виникає). Зрештою, часто вдається «вгадати» потрібне значення y_0. Звернемось ще раз до прикладу, наведеного в п. 3.5.2.

$\triangleleft$ *Приклад 4.22.* Нехай $F(x, y) = \ln x + \ln y + xy - 1$. Рівняння $F(x, y) = 0$ неявно задає функцію $y(x)$. Знайдемо її похідну в точці $x_0 = 1$.

Перед цим знайдемо відповідне значення y_0. При $x_0 = 1$ рівняння набуває вигляду

$$\ln 1 + \ln y + 1 \cdot y - 1 = 0, \qquad \ln y = 1 - y.$$

Його розв'язок легко «вгадати» – це $y_0 = 1$. Очевидно, цей розв'язок є єдиним, оскільки ліва частина останнього рівняння є неперервною монотонно зростаючою функцією, а права – неперервною монотонно спадною. Маємо:

$$F'_x = \frac{1}{x} + y, \qquad F'_x(M_0) = \frac{1}{1} + 1 = 2;$$

[7] Нагадаємо, це питання вже було розглянуто в п. 3.5.2. Але зараз ми застосовуємо апарат частинних похідних; такий підхід є придатним для більш широкого кола питань.

$$F'_y = \frac{1}{y} + x, \qquad F'_y(M_0) = \frac{1}{1} + 1 = 2.$$

Тоді за формулою (4.9) маємо:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = -\frac{2}{2} = -1,$$

що збігається з відповіддю, отриманою в п. 3.5.2. $\triangleright$

4.8.3 Неявна функція двох аргументів

Розглянемо функцію трьох незалежних змінних $F(x, y, z)$. Рівняння зв'язку $F(x, y, z) = 0$ робить одну зі змінних x, y, z залежною. Тож вважатимемо рівняння $F(x, y, z) = 0$ неявним поданням функції двох незалежних змінних $z(x, y)$.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці M_0. Як і раніше, потрібно вивести формули для цих похідних, користуючись лише виглядом функції F, але не користуючись явним поданням $z = z(x, y)$. Оскільки $F(x, y, z) = 0$, то тим паче $dF(M_0) = 0$, тобто[8]

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0.$$

Оскільки $z = z(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = 0.$$

Згрупуємо доданки при диференціалах dx, dy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0.$$

Величини dx і dy (на відміну від попереднього підпункту) тепер є незалежними. Тому початкову точку M_0 можна переміщувати в довільних напрямках. Наприклад, покладемо $dx > 0$ і $dy = 0$ (рух вздовж осі Ox). Маємо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx = 0,$$

---

[8]Повторимо, отримувані результати мають локальний характер, тобто стосуються конкретної точки. Але, починаючи з цього підпункту, ми для спрощення вигляду формул більше цього не підкреслюємо.

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.} \tag{4.10}$$

Навпаки, покладемо тепер $dx = 0$ і $dy > 0$ (рух вздовж осі Oy). Отримуємо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0,$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.} \tag{4.11}$$

Якщо функція $z = z(x, y)$ задана явно, то для обчислення частинних похідних z'_x, z'_y в точці достатньо знати два числа – x_0 і y_0. В разі неявного задання ми отримали формули, в які потрібно підставляти три числа – x_0, y_0 і z_0. Число z_0 потрібно знаходити з рівняння $F(x, y, z) = 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$. Отже, рівняння $F(x, y, z) = 0$ розв'язувати все ж потрібно. Але тепер це не обов'язково робити аналітично (тобто потреба в явній аналітичній формулі $z(x, y)$ не виникає). Зрештою, часто вдається «вгадати» потрібне значення z_0.

$\lhd$ *Приклад 4.23.* Функцію $z = z(x, y)$ двох змінних неявно задано рівнянням $\sin x + \frac{\ln z}{y^2} = 0$. Знайти частинні похідні цієї функції в точці $M_0(0; 1)$. Утворимо функцію

$$F(x, y, z) = \sin x + \frac{\ln z}{y^2}.$$

Тоді функція z неявно задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. При $x = 0$, $y = 1$ отримуємо $\ln z = 0$, звідки $z_0 = 1$. Отже, в праві частини формул (4.10), (4.11) потрібно підставляти точку $N_0(0; 1; 1)$.

Зауважимо, точка N_0 належить графіку функції $z = z(x, y)$, тобто відповідній поверхні. В той же час вона належить області визначення функції $F(x, y, z)$ і її частинних похідних по x, по y і по z.

Маємо далі:

$$F'_x = \cos x, \qquad F'_x(N_0) = \cos 0 = 1;$$

$$F'_y = -\frac{2\ln z}{y^3}, \qquad F'_y(N_0) = -\frac{2\ln 1}{1^3} = 0;$$

$$F'_z = \frac{1}{zy^2}, \qquad F'_z(N_0) = \frac{1}{1 \cdot 1^2} = 1.$$

Тоді за формулами (4.10), (4.11) маємо:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -\frac{1}{1} = -1, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Цей приклад дозволяє перейти до явного вигляду. Зробимо це для перевірки. Маємо:

$$\frac{\ln z}{y^2} = -\sin x, \qquad \ln z = -y^2 \sin x, \qquad z = e^{-y^2 \sin x}.$$

Тоді

$$z'_x = -y^2 \cos x e^{-y^2 \sin x}, \qquad z'_x(M_0) = -1^2 \cdot \cos 0 \cdot e^0 = -1;$$

$$z'_y = -2y \sin x e^{-y^2 \sin x}, \qquad z'_y(M_0) = -2 \cdot 1 \cdot \sin 0 \cdot e^0 = 0,$$

що збігається з отриманим вище. Наголосимо, в загальному випадку застосування формул (4.10), (4.11) можливо навіть у разі, коли знайти явний вигляд $z = z(x, y)$ аналітично не вдається. $\triangleright$

4.8.4 Складна функція одного аргументу

4.8.4.1 Загальний випадок

Нехай $z = z(x, y)$, причому $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Фактично

$$z = z\left(x(t), y(t)\right) = z(t)$$

– функція одного аргументу t. Однак, між аргументом t и значенням функції z наявні «посередники» – проміжні змінні x і y. Ці функції є внутрішніми для z, але зовнішніми для t. Тому функція z є складною. Знайдемо її похідну $z'_t = \frac{dz}{dt}$. Маємо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Оскільки $x = x(t)$, то $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, звідки $dx = x'(t)\, dt$. Аналогічно, $dy = y'(t)\, dt$. Тоді

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t)\, dt + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t)\, dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t)\right) dt.$$

Звідси маємо:

$$\boxed{z'_t = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(t).} \tag{4.12}$$

◁ *Приклад 4.24.* Складну функцію $z = z(t)$ однієї змінної задано рівнянням $z = \frac{\ln y}{\sin x}$, де $x(t) = 2t$, $y(t) = t^2 + 1$. Знайдемо похідну цієї функції.

З одного боку, можна звести всю справу до диференціювання явного вигляду функції, який виникає при підстановці виразів для $x(t)$ та $y(t)$:

$$z(t) = \frac{\ln\left(t^2+1\right)}{\sin 2t},$$

$$z'(t) = \frac{\frac{2t}{t^2+1} \cdot \sin 2t - \ln\left(t^2+1\right) \cdot 2\cos 2t}{\sin^2 2t}.$$

З іншого боку, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln y \cdot (\sin x)^{-1}\right)'_x = -\ln y \cdot (\sin x)^{-2} \cdot \cos x = -\frac{\ln y \cdot \cos x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln y \cdot \frac{1}{\sin x}\right)'_y = \frac{1}{y \sin x}.$$

Крім того, $x'(t) = (2t)' = 2$, $y'(t) = \left(t^2+1\right)' = 2t$. Тоді, використовуючи (4.12), отримуємо:

$$z'_t = -\frac{\ln y \cdot \cos x}{\sin^2 x} \cdot 2 + \frac{1}{y \sin x} \cdot 2t =$$

$$= \frac{\frac{1}{y} \cdot 2t}{\sin x} - \frac{\ln y \cdot 2\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{2t}{y} \cdot \sin x - \ln y \cdot 2\cos x}{\sin^2 x}.$$

Якщо сюди підставити вирази для $x(t)$, $y(t)$, то виникає той самий результат. ▷

4.8.4.2 Один окремий випадок

Нехай $z = z(x, y)$, причому x – незалежна змінна, а $y = y(x)$. Фактично

$$z = z\left(x, y(x)\right) = z(x)$$

– функція одного аргументу x. Цей випадок є окремим і випливає з попереднього, якщо покласти $t = x$. Маємо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x'(x) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'(x).$$

Очевидно, $x'(x) = \frac{dx}{dx} = 1$. Остаточно маємо:

$$\boxed{z'_x = \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.} \tag{4.13}$$

До речі, ця формула є вдалим прикладом, який дозволяє розрізнити повну похідну $\frac{dz}{dx}$ і частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$. Як бачимо, вони відрізняються доданком $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

$\triangleleft$ *Приклад 4.25.* Складну функцію $z = z(x)$ однієї змінної задано рівнянням $z = x^2 y^3$, де $y(x) = \sin x$. Знайдемо похідну цієї функції.

З одного боку, можна звести всю справу до диференціювання явного вигляду функції, який виникає при підстановці виразу $y(x)$. Очевидно, $z(x) = x^2 \sin^3 x$, і тоді

$$\frac{dz}{dx} = \left(x^2 \sin^3 x\right)' = 2x \cdot \sin^3 x + x^2 \cdot 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

З іншого боку, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Крім того, $y'(x) = (\sin x)' = \cos x$. Тоді, використовуючи (4.13), отримуємо:

$$\frac{dz}{dx} = 2xy^3 + 3x^2 y^2 \cdot \cos x.$$

Якщо сюди підставити вираз для $y(x)$, то виникає той самий результат. Цей приклад, до речі, демонструє відмінність похідних $\frac{dz}{dx}$ і $\frac{\partial z}{\partial x}$. Як бачимо, вони відрізняються доданком $3x^2 y^2 \cdot \cos x$. $\triangleright$

4.8.5 Складна функція двох аргументів

Нехай $z = z(u, v)$, причому $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Фактично

$$z = z\left(u(x, y), v(x, y)\right) = z(x, y)$$

– функція двох аргументів x, y. Однак, між аргументами x, y і значенням функції z наявні «посередники» – проміжні змінні u і v. Ці функції є внутрішніми для z, але зовнішніми для x і y. Тому функція z є складною. Знайдемо її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$. Оскільки $z = z(u, v)$, то маємо: $dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv$. Виражаючи в аналогічний спосіб диференціали du і dv, отримуємо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)}_{=du} + \frac{\partial z}{\partial v}\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)}_{=dv} =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Порівняємо отриманий результат з виразом $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Оскільки dx і dy незалежні, то відповідні множники при них дорівнюють один одному. Отже:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.} \tag{4.14}$$

$\lhd$ *Приклад 4.26.* Складну функцію $z = z(x, y)$ двох змінних задано рівнянням $z = \frac{u}{v}$, де $u(x, y) = x^2 \sin y$, $v(x, y) = y^2 \ln x$. Знайдемо частинні похідні цієї функції.

З одного боку, можна звести всю справу до диференціювання явного вигляду функції, який виникає при підстановці виразів для $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$z(t) = \frac{x^2 \sin y}{y^2 \ln x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x \sin y \cdot y^2 \ln x - x^2 \sin y \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x}}{y^4 \ln^2 x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 \cos y \cdot y^2 \ln x - x^2 \sin y \cdot 2y \ln x}{y^4 \ln^2 x}.$$

З іншого боку, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}.$$

Крім того, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y^2 \cdot \frac{1}{x}$. Тоді, використовуючи першу з формул (4.14), отримуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot 2x\sin y - \frac{u}{v^2} \cdot y^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Якщо сюди підставити вирази для $u(x,y)$, $v(x,y)$, то виникає результат, вже отриманий вище.

Аналогічно, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\ln x$. Тоді, використовуючи другу з формул (4.14), отримуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot x^2\cos y - \frac{u}{v^2} \cdot 2y\ln x.$$

Якщо сюди підставити вирази для $u(x,y)$, $v(x,y)$, то також виникає результат, вже отриманий вище. $\triangleright$

4.9 Похідні вищих порядків

При диференціюванні деякої функції виникає інша функція. Її диференціювання призводить до другої похідної, а подальші диференціювання – до похідних вищих порядків. Але в разі функції однієї змінної кожне наступне диференціювання відбувалось по тому ж самому аргументу x. Тепер це не так: вищі похідні можна знаходити за довільними аргументами і в довільному порядку. Наприклад, для функції $z = f(x,y)$ двох змінних можна знайти чотири другі похідні:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Тут дві останні похідні називають *мішаними* («змішались» обидва аргументи x, y, за якими диференціювали).

$\triangleleft$ *Приклад 4.27.* Нехай $z(x,y) = x^3y^5$. Маємо:

$$z'_x = 3x^2y^5, \qquad z''_{xx} = 6xy^5;$$

$$z'_y = 5x^3y^4, \qquad z''_{yy} = 20x^3y^3;$$

$$z''_{xy} = \left(3x^2y^5\right)'_y = 15x^2y^4, \qquad z''_{yx} = \left(5x^3y^4\right)'_x = 15x^2y^4. \triangleright$$

На цьому прикладі бачимо, що другі мішані частинні похідні виявились однаковими незалежно від порядку диференціювання. Це не випадковий збіг. Він настає завжди при виконані умов наступної теореми.

■ **Теорема 4.2.** Нехай 1) функція $f(x, y)$ визначена в деякій області; 2) в цій області існують мішані частинні похідні другого порядку $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$; 3) ці похідні є неперервними в деякій точці $M_0(x_0, y_0)$ області. Тоді $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Скорочено можна сформулювати так: якщо мішана частинна похідна другого порядку неперервна, то вона не залежить від порядку, в якому відбувалось диференціювання.

4.10 Диференціали вищих порядків

Для функцій $y(x)$ одного змінного ми вводили поняття диференціалів вищих порядків у рекурентний[9] спосіб:

$$d^1 y \equiv dy = y'\, dx; \qquad\qquad d^n y = d\left(d^{n-1} y\right), \quad n > 1.$$

Тут літера d є позначенням диференціального оператору, дія якого на функцію однієї змінної зводиться до наступного: 1) знайти похідну; 2) помножити її на диференціал того аргументу, за яким знаходили похідну. При цьому вирази x і dx вважаються незалежними (див. п. 3.4.3); це зауваження важливо для знаходження вищих диференціалів.

При переході до функцій $z = z(x, y)$ двох змінних рекурентне означення зберігається. А саме, перший диференціал знаходять окремо:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$

а кожний наступний диференціал визначається як диференціал попереднього. При цьому літера d знову позначає оператор. Але тепер його дія на функцію *двох змінних* є дещо іншою: 1) знайти частинну похідну за x і помножити її на dx; 2) знайти частинну похідну за y і помножити її на dy; 3) додати два

[9]В нашому разі це слово означає, що перший диференціал визначено в явний спосіб, а кожний наступний диференціал виражено через попередній: другий диференціал є диференціалом першого, третій диференціал є диференціалом другого, і т.д.

отримані добутки. При цьому вирази x і dx, а також y і dy вважаються незалежними. Зокрема, знаходячи частинну похідну по x, величину dx (поряд з величинами y і dy) також вважають константою. Іншими словами, диференціювання по x діє на x, але не діє на dx. Отже, тепер оператор диференціювання можна подати у вигляді

$$d = dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тому диференціювання можна представити як операцію формального «множення» символа d на функцію z:

$$dz = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) z = dx \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Справді, знайдемо, наприклад, другий диференціал. За описом дії диференціалу d маємо:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \right) dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\, dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy \right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Тут враховано, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$. Але такий самий результат можна отримати, якщо домовитись розуміти степінь оператора d у формальному сенсі:

$$d^n = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^n.$$

Зокрема,

$$d^2 = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Тепер достатньо символ z «приставити» з правого боку:

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,dy^2\right) z.$$

Формально відкриваючи дужки (ніби відбувається звичайне множення), отримаємо той самий результат. Неважко перевірити, що аналогічні спостереження справедливі і для диференціалів вищих порядків. Отже, диференціал n-го порядку функції двох змінних можна знайти за формулою

$$\boxed{d^nz = \left(dx\cdot\frac{\partial}{\partial x} + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.}$$

Наприклад, аналогічно до формул

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

скороченого множення маємо:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3,$$

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\,dx^4 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}\,dx^3\,dy +$$

$$+6\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}\,dx^2\,dy^2 + 4\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}\,dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\,dy^4,$$

і т.д. При переході до випадку функції $u = u(x, y, z)$ трьох змінних достатньо оператору d надати вигляду

$$d = dx\cdot\frac{\partial}{\partial x} + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y} + dz\cdot\frac{\partial}{\partial z}.$$

Аналогічно отримаємо:

$$d^nu = \left(dx\cdot\frac{\partial}{\partial x} + dy\cdot\frac{\partial}{\partial y} + dz\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u.$$

4.11 Багатовимірна формула Тейлора

Нагадаємо, в разі функції однієї змінної формула Тейлора дозволяла з приросту функції виокремити головну частину (див. п. 3.8). В разі двох змінних ситуація аналогічна. Розглянемо локальну поведінку функції[10] $f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Нехай деяка точка $M(x, y)$ належить цьому околу, і $x = x_0 + dx$, $y = y_0 + dy$. Якщо обмежуватись лінійною головною частиною, з використанням першого диференціалу згідно (4.5) маємо:

$$\Delta f \equiv f(M) - f(M_0) = df(M_0) + o(\rho),$$

$$\rho = |M_0 M| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Бажано продовжити цей процес, виокремлюючи з приросту функції малі все вищих порядків. Виявляється, це можна зробити в такий самий спосіб, як і в разі функції однієї змінної:

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + o(\rho^2),$$

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(M_0) + o(\rho^3),$$

і т.д. Узагальнюючи, маємо формулу Тейлора для функції багатьох змінних із залишковим членом у формі Пеано:

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) + o(\rho^n).$$

Вона справедлива для довільної кількості змінних, але ми при доведенні обмежимось випадком двох змінних. Знайдемо приріст функції f при русі точки M з положення M_0 вздовж вектору $\overrightarrow{d\ell} = \{dx, dy\}$. Нехай він утворює кути α, β з додатними напрямками осей Ox, Oy. Тоді рух точки M відбувається вздовж променя, рівняння якого у параметричній формі

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t\cos\alpha; \\ y(t) = y_0 + t\cos\beta, \end{cases} \qquad t \geqslant 0,$$

$\cos\alpha = \text{const}$, $\cos\beta = \text{const}$, причому значення $t_0 = 0$ відповідає положенню точки M_0. Маємо:

$$f = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) = \varphi(t).$$

[10]Мається на увазі функція, диференційовна потрібну кількість разів.

Обмежуючись променем M_0M, ми перетворили функцію f на функцію $\varphi(t)$ однієї змінної t. Але в цьому разі формулу Тейлора вже доведено (див. п. 3.8):

$$f(x(t), y(t)) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k \varphi(0) + o(dt^n).$$

Тут $dt = t - t_0 = t$. Скористаємось формулою для похідної складної функції:

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = f'_x(M_0) \cdot x'_t + f'_y(M_0) \cdot y'_t = f'_x(M_0) \cos\alpha + f'_y(M_0) \cos\beta,$$

$$d\varphi(0) = f'_x(M_0) \cos\alpha \, dt + f'_y(M_0) \cos\beta \, dt =$$

$$= f'_x(M_0) \, dx + f'_y(M_0) \, dy = df(M_0).$$

Безпосереднім диференціюванням аналогічно доводиться, що $d^k\varphi(0) = d^k f(M_0)$, $k \geqslant 2$. Отже

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(M_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k \varphi(0).$$

Оскільки нескінченно малі величини $dx = x - x_0 = t\cos\alpha$, $dy = y - y_0 = t\cos\beta$, $dt = t$ мають однаковий порядок, то нескінченно малі ρ і dt також мають однаковий порядок. Отже, формулу Тейлора доведено для напрямку M_0M. Оскільки цей напрямок довільний, то формулу Тейлора доведено остаточно.

Зауважимо, попри зовнішню схожість з формулою Тейлора для функції однієї змінної, розгорнутий вигляд формули Тейлора вже для двох змінних є доволі складним. Використовуючи формули для вищих диференціалів, отримуємо:

$$f(M) = f(M_0) + \left[f'_x(M_0) \, dx + f'_y(M_0) \, dy\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[f''_{xx}(M_0) \, dx^2 + 2 f''_{xy}(M_0) \, dx \, dy + f''_{yy}(M_0) \, dy^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[f'''_{xxx}(M_0) \, dx^3 + 3 f'''_{xxy}(M_0) \, dx^2 \, dy + \right.$$

$$\left. + 3 f'''_{xyy}(M_0) \, dx \, dy^2 + f'''_{yyy}(M_0) \, dy^3\right] + \cdots .$$

4.12 Екстремуми

Означення екстремумів (тобто мінімумів і максимумів) функції багатьох змінних введемо аналогічно до означень пп. 3.6.9. В подальшому усюди припускаємо, що функція багатьох змінних $f(M)$ не є сталою, тобто $f(M) \neq \text{const}$.

♦ **Означення 4.10.** Точку M_0 називають **точкою строгого локального мінімуму** (точкою строгого мінімуму) функції $f(M)$, якщо існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |M_0M| < \delta$ випливає нерівність $f(M) > f(M_0)$. Число $f(M_0)$ при цьому називають **строгим (локальним) мінімумом.**

♦ **Означення 4.11.** Точку M_0 називають **точкою строгого локального максимуму** (точкою строгого максимуму) функції $f(M)$, якщо існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |M_0M| < \delta$ випливає нерівність $f(M) < f(M_0)$. Число $f(M_0)$ при цьому називають **строгим (локальним) максимумом.**

Ці означення мають простий зміст. Точка M_0 – точка строгого мінімуму (максимуму), якщо значення функції в *довільній* сусідній точці M з проколотого[11] δ-околу точки M_0 є більшим (меншим) порівняно з $f(M_0)$.

◁ *Приклад 4.28.* Розглянемо функцію $z(x, y) = \sin x \sin y$. Відповідну поверхню зображено на рис. 4.11. Очевидно,

$$|z| = |\sin x| \cdot |\sin y| \, .$$

Оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ і $|\sin y| \leqslant 1$, то $|z| \leqslant 1$, тобто $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Тоді найбільше значення функції дорівнює одиниці і досягається при[12] $\sin x = 1$ і $\sin y = 1$. З цих рівнянь одержуємо систему:

$$\begin{cases} x_i = \frac{\pi}{2} + 2\pi i, & i \in \mathbb{Z}, \\ y_j = \frac{\pi}{2} + 2\pi j, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

де значення i, j є незалежними. Позначимо $M_{ij}\,(x_i; y_j)$. Наприклад, точка $M_{00}\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виникає, якщо покласти $i = 0$, $j = 0$. Очевидно, $z(M_{00}) \equiv z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = 1$ – найбільше значення. Доведемо, що воно також є максимальним значенням, тобто доведемо, що M_{00} – точка строгого максимуму в сенсі означення 4.11.

[11] Окіл обирають саме проколотий. В іншому разі можливий збіг точки M з точкою M_0. Тоді потрібно порівнювати значення $f(M_0)$ з самим собою, що не має сенсу.

[12] А також при $\sin x = -1$ і $\sin y = -1$; цей випадок досліджується аналогічно.

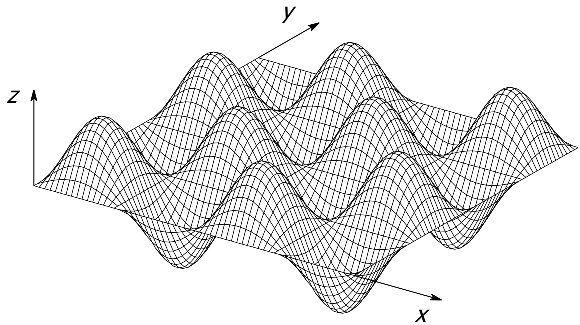


Рисунок 4.11 – Поверхня $z(x, y) = \sin x \sin y$

Оберемо, наприклад, $\delta = \frac{\pi}{4}$. Для функції $f(x) = \sin x$ точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимума. Легко встановити, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < 1$ (оскільки точку x_0 з її δ-околу виколото). Аналогічно з нерівності $0 < |y - y_0| < \delta$ випливає нерівність $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin y < 1$. Перемножуючи ці нерівності (ми можемо це робити, оскільки усі частини нерівностей додатні), отримуємо:

$$\frac{1}{2} < \sin x \sin y = z(M) < 1 = z(M_{00}), \qquad z(M) < z(M_{00}).$$

Отже, існування δ-околу доведено.

Зрозуміло, що розглядувана поверхня має нескінченно багато строгих екстремумів, періодично розташованих в площині Oxy. $\rhd$

Суттєво, що нерівності в означеннях 4.10, 4.11 є строгими. Нерівність, наприклад, $z(M) \leqslant z(M_0)$ не призводить до максимуму у традиційному уявленні (до поодинокого «піку»). В цьому випадку виникає т.зв. **нестрогий екстремум.** Розглянемо відповідний приклад.

$\lhd$ *Приклад 4.29.* Розглянемо функцію $z(x, y) = \sin(x + y)$. Відповідну поверхню зображено на рис. 4.12. Очевидно, найбіль-

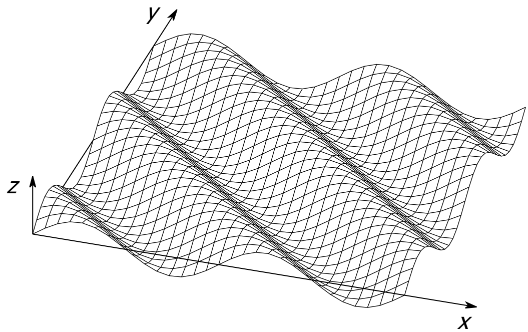


Рисунок 4.12 – Поверхня $z(x, y) = \sin(x + y)$

ше значення цієї функції дорівнює одиниці і досягається за умови $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Рівняння $x + y = \text{const}$ задає сімейство прямих на площини, паралельних бісектрисі другої і четвертої чвертей. Кожна така пряма, до речі, є лінією рівня розглядуваної функції.

Оберемо з цього сімейства пряму при $k = 0$, тобто пряму $x + y = \frac{\pi}{2}$. Очевидно, точка $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ належить цій прямій, і $z(M_0) = 1$. Однією з «безпосередніх сусідок» точки M_0 є точка $M_1\left(\frac{\pi}{4} + \delta; \frac{\pi}{4} - \delta\right)$. Очевидно, вона також належить цій прямій, тому також маємо $z(M_1) = 1$. Отже, нерівність $z(M_1) \leqslant z(M_0)$ виконано (принаймні, в сенсі рівності). Але поодинокий «пік» на поверхні не з'являється (на відміну від попереднього прикладу), оскільки тепер обидві точки, M_0 і M_1, розташовано на однаковій висоті. При цьому точка M_0 не є точкою строгого максимуму в сенсі означення 4.11, оскільки строгу нерівність $z(M_1) < z(M_0)$ не виконано. І її виконання неможливо досягти ані при якому, скільки завгодно малому значенні δ. Натомість виконана нестрога нерівність $z(M_1) \leqslant z(M_0)$. Це означає, що точка M_0, як і всі точки прямих $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, є точками нестрогого максимуму.

Поверхня рис. 4.12 може бути інтерпретована як «миттєва світлина» поверхневої хвилі, яка розповсюджується в напрямку, перпендикулярному до прямих $x+y=\mathrm{const}$. Ці прямі і є *хвильовим фронтом*: усі точки кожної такої прямої коливаються в однаковій фазі. ▷

Перейдемо до побудови загальної схеми дослідження функції $z=z(x,y)$ двох змінних на екстремум. Це дослідження, як і в разі однієї змінної, складається з двох етапів: 1) знайти усі точки M_i, підозрілі на екстремум; 2) стосовно кожної такої точки, взятої окремо, підтвердити або спростувати цю підозру.

Перший етап. Очевидно, якщо $\operatorname{grad} z(M_0) \neq \overrightarrow{0}$, то точка M_0 не є точкою екстремуму. Справді, це не точка максимуму, оскільки при навіть нескінченно малому русі вздовж градієнту ми потрапляємо в сусідню точку, в якій значення функції є більшим (при русі вздовж цього напрямку функція зростає, причому найбільш швидко). Так само, це і не точка мінімуму (достатньо переміститись в протилежному напрямку). Отже, екстремум може бути наявний лише в точках, в яких градієнт дорівнює нульовому вектору. Маємо:

$$\operatorname{grad} z = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow dz \equiv 0.$$

Отримали **необхідну умову екстремуму:**

$$\boxed{dz \equiv 0.}$$

Символ тотожної рівності означає, що ця рівність повинна виконуватись при *довільних незалежних* dx і dy (щоб «обслужити» довільну точку δ-околу). Геометрично це співвідношення означає, що площина, дотична до поверхні $z(x,y)$ в підозрілій точці, є горизонтальною (паралельною площині Oxy). Аналогічно, в разі диференційовної функції однієї змінної екстремум міг з'являтись[13] лише там, де дотична пряма до графіка функції була горизонтальною (паралельною осі Ox).

Отримана умова є необхідною, але не є достатньою. Це означає наступне: якщо $dz \neq 0$, то екстремум відсутній (бо для його наявності рівність $dz=0$ є *необхідною*). Відповідно, якщо екстремум наявний, то $dz=0$. *Але твердження «якщо* $dz=0$,

[13] А міг і не з'являтись. Наприклад, функція $y=x^3$ в точці $x=0$ екстремуму не має, хоча $y'=3x^2=3\cdot 0^2=0$, і дотична горизонтальна.

то екстремум наявний» є хибним (навіть якщо $dz = 0$, цього ще *не достатньо* для появи екстремуму)[14].

$\lhd$ *Приклад 4.30.* Нехай $z = xy$. Необхідна умова екстремуму набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0. \end{cases}$$

Отже, підозріла точка $M_0(0,0)$ є єдиною. Значення функції в цій точці дорівнює $z(M_0) = 0$. Нехай $\delta_1 > 0$. Розглянемо дві точки з першої і другої чверті: $M_1(\delta_1, \delta_1)$ і $M_2(-\delta_1, \delta_1)$. При належному виборі δ_1 ці точки потраплять всередину як завгодно малого δ-околу точки M_0 (наприклад, достатньо покласти $\delta_1 = \delta/2$). Значення функції в цих точках $z(M_1) = \delta_1^2 > 0$, $z(M_2) = -\delta_1^2 < 0$. Отже, для точки M_1 виконано нерівність $z(M_1) > z(M_0)$, а для точки M_2 – нерівність $z(M_2) < z(M_0)$. Але жодна з цих нерівностей не може бути одночасно виконаною для *усіх* точок M всередині δ-околу, як того вимагає означення строгого екстремуму (навіть якщо цей окіл робити як завгодно малим). Тому екстремуму немає; підозру спростовано. Отже, в розглянутому прикладі необхідна умова екстремуму виконується, але цього виявляється недостатньо для його появи.

Точка $M_0(0,0)$ є *сідловою точкою* поверхні $z = xy$. В цій точці і справді немає екстремуму, оскільки при русі точки M з положення M_0 функція z може і зростати, і спадати. Це залежить від напрямку руху, точніше – від співвідношення знаків координат x, y. $\rhd$

Другий етап. Нехай точка M_0 є підозрілою на мінімум. Тоді за означенням строгого мінімуму значення функції $z(M)$ в будь-якій сусідній[15] точці M повинно бути більшим порівняно зі значенням $z(M_0)$. Отже, для підтвердження підозри про мінімум достатньо гарантувати виконання нерівності

$$\Delta z \equiv z(M) - z(M_0) > 0$$

[14] Насправді рівність $dz = 0$ є необхідною умовою екстремуму лише для диференційовних функцій. Підозрілими ж є не тільки точки M_0, в яких виконано рівність $dz(M_0) = 0$, а ще й точки, в яких диференціал $dz(M_0)$ не існує. Наприклад, нехай поверхня, яка відповідає функції $z(x, y)$, має вигляд піраміди вершиною догори. Очевидно, наявний максимум. Але рівність $dz = 0$ в точці максимуму не виконується, оскільки dz взагалі не існує (у вершині неможливо провести дотичну площину). В таких випадках для підтвердження наявності екстремуму звертаються до означень 4.10, 4.11.

[15] Такій, що належить δ-околу точки M_0.

для усіх точок M з δ-околу точки M_0.

Аналогічно, якщо точка M_0 є підозрілою на максимум, то за означенням строгого максимуму значення функції $z(M)$ в будь-якій сусідній точці M повинно бути меншим порівняно зі значенням $z(M_0)$. Отже, в цьому випадку для підтвердження підозри про максимум достатньо гарантувати виконання нерівності

$$\Delta z \equiv z(M) - z(M_0) < 0$$

для усіх точок M з δ-околу точки M_0.

Дослідимо знак приросту Δz. За формулою Тейлора маємо:

$$\Delta z \equiv z(M) - z(M_0) = dz(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 z(M_0) + o(\rho^2).$$

Оскільки ми досліджуємо лише підозрілі точки, то $dz(M_0) = 0$. Оскільки нас цікавить знак приросту Δz в малому δ-околі точки M_0, то малими вищого порядку можна знехтувати. Отже, за цих умов знак Δz такий самий, як і знак другого диференціалу в підозрілій точці. Цей диференціал має вигляд:

$$d^2 z(M_0) = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} dx^2 + 2 \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} dx\, dy + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} dy^2.$$

Позначимо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \qquad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, \qquad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Тоді

$$d^2 z(M_0) = A dx^2 + 2B dx\, dy + C dy^2.$$

Тут A, B, C – сталі числа, відомі заздалегідь, а dx, dy – дві незалежні змінні, які характеризують положення «сусідньої» точки $M(x_0 + dx; y_0 + dy)$. Зокрема, при $dx = 0$, $dy = 0$ маємо підозрілу точку $M(x_0; y_0)$. При цьому $d^2 z(M_0) = 0$. Інтерес становить знак другого диференціалу при $\overrightarrow{M_0 M} = \{dx; dy\} \neq \overrightarrow{0}$. При цьому можливі чотири випадки; для кожного з них приймається однозначне рішення.

1°. Кажуть, що другий диференціал є **додатно визначеним**, якщо при довільному напрямку вектора $\overrightarrow{M_0 M}$ виконується нерівність $d^2 z(M_0) > 0$, а рівність $d^2 z(M_0) = 0$ досягається лише в єдиній точці при $dx = 0$, $dy = 0$. В цьому разі *наявний строгий мінімум.*

2°. Кажуть, що другий диференціал є **від'ємно визначеним**, якщо при довільному напрямку вектора $\overrightarrow{M_0M}$ виконується нерівність $d^2z(M_0) < 0$, а рівність $d^2z(M_0) = 0$ досягається лише в єдиній точці при $dx = 0$, $dy = 0$. В цьому разі *наявний строгий максимум.*

3°. Якщо при деяких напрямках вектора $\overrightarrow{M_0M}$ виконується нерівність $d^2z(M_0) < 0$, а при деяких інших напрямках – нерівність $d^2z(M_0) > 0$, то другий диференціал **не є знаковизначеним**. В цьому разі *екстремум відсутній.* Саме ця ситауція мала місце у випадку сідлової точки функції $z = xy$. Там ми отримували різні знаки приросту Δz при русі вздовж напрямків векторів $\overrightarrow{M_0M_1} = \{\delta_1; \delta_1\}$ і $\overrightarrow{M_0M_2} = \{-\delta_1; \delta_1\}$.

4°. Крім того, існують випадки, коли відповідні нерівності виконуються нестрого. Другий диференціал називають **додатно (від'ємно) напіввизначеним**, якщо для усіх «сусідніх» точок M замість нерівності

$$d^2z(M_0) > 0 \qquad (d^2z(M_0) < 0)$$

виконано нерівність

$$d^2z(M_0) \geqslant 0 \qquad (d^2z(M_0) \leqslant 0).$$

В цьому разі кажуть, що *наявний нестрогий мінімум (нестрогий максимум).*

Наприклад, другий диференціал

$$d^2z(M_0) = dx^2 + 2dx\,dy + dy^2 = (dx + dy)^2$$

є додатно напіввизначеним: $d^2z(M_0) \geqslant 0$, причому $d^2z(M_0) > 0$ для усіх напрямків вектора $\overrightarrow{M_0M}$, за виключенням напрямку, коли $dy = -dx$, тобто

$$\overrightarrow{M_0M} = \{dx; -dx\} = dx\,\{1; -1\}\,.$$

Справді, при русі точки M з положення M_0 вздовж цього напрямку отримаємо $dy = -dx$, і $d^2z(M_0) = 0$. Для додатно визначених других диференціалів рівність $d^2z(M_0) = 0$ досягалась лише в єдиній точці M_0, а тепер таких точок – безліч; вони належать прямій $dy = -dx$, тобто прямій $y - y_0 = -(x - x_0)$. В такій ситуації *строгого екстремуму немає* за означенням: для усіх цих точок не виконано ні нерівність $d^2z(M_0) > 0$, ані нерівність $d^2z(M_0) < 0$. Саме така ситуація виникала при розгляданні функції $z = \sin(x+y)$, коли точки M_0 і M лежали на одному хвильовому фронті. Справді, в цьому прикладі легко отримати

$$z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yy} = -\sin(x+y),$$

$$d^2z\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\left(dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2\right) = -(dx+dy)^2.$$

При русі вздовж прямої $dy = -dx$ (тобто прямої $x + y = \mathrm{const}$) маємо, $d^2z(M_0) \equiv 0$, і строгого екстремуму немає. Натомість, маємо прямі нестрогих мінімумів та прямі нестрогих максимумів.

Дослідження знаку другого диференціалу провадять методом Лагранжа (виділенням повних квадратів). Обчислимо величину

$$\boxed{\Delta = AC - B^2}$$

і доведемо наступне.

1) Якщо $\boldsymbol{\Delta > 0}$, то наявний строгий екстремум. В тому числі при $\boldsymbol{A > 0}$ виникає строгий мінімум, а при $\boldsymbol{A < 0}$ виникає строгий максимум; 2) якщо $\boldsymbol{\Delta < 0}$, то екстремум відсутній; 3) якщо $\boldsymbol{\Delta = 0}$, то випадок є сумнівним і підлягає додатковому дослідженню з використанням означень екстремумів.

Одразу зауважимо наступне. Якщо $\Delta > 0$, то $AC > B^2$. Але $B^2 \geqslant 0$, тому $AC > 0$. Отже, в першій частині твердження (при $\Delta > 0$) розглядання випадку $A = 0$ є зайвим. Крім того, оскільки $AC > 0$, то числа A і C обидва не дорівнюють нулю і мають однаковий знак. Тому при $\Delta > 0$ розрізнити максимум і мінімум можна як за знаком числа A, так і за знаком числа C.

1°. Спочатку будемо вважати, що $A \neq 0$. Маємо (для скорочення позначимо $dx = u$, $dy = v$):

$$d^2z(M_0) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A\left(u^2 + \frac{2B}{A}uv + \frac{C}{A}v^2\right) =$$

$$= A\left(u^2 + 2\cdot u\cdot\frac{Bv}{A} + \frac{B^2v^2}{A^2} + \frac{C}{A}v^2 - \frac{B^2}{A^2}v^2\right) =$$

$$= A\left[\left(u + \frac{Bv}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}v^2\right] = \frac{(Au+Bv)^2 + \Delta\cdot v^2}{A}.$$

1) При $\Delta > 0$ чисельник може дорівнювати нулю лише в єдиній точці: якщо $u = 0$ і $v = 0$. Справді, якщо $v \neq 0$, то чисельник додатний принаймні за рахунок доданку $\Delta \cdot v^2$. Якщо $v = 0$, то $u \neq 0$. Тоді чисельник дорівнює A^2u^2, і він знову додатний, оскільки зараз $A \neq 0$. Отже, чисельник є додатно визначеним. Тоді при $A > 0$ і весь дріб є додатно визначеним. Це веде до мінімуму. При $A < 0$ весь дріб є від'ємно визначеним. Це веде до максимуму.

2) При $\Delta < 0$ чисельник не є знаковизначеним. Справді, при русі, наприклад, вздовж напрямку $v = 0$ (тобто $\overrightarrow{M_0M} = \{u; 0\}$, $u \neq 0$) чисельник дорівнює A^2u^2, і тому є додатним. А при при русі, наприклад, вздовж напрямку $u = -\frac{Bv}{A}$ (тобто $\overrightarrow{M_0M} = \left\{-\frac{Bv}{A}; v\right\}$, $v \neq 0$) чисельник дорівнює $\Delta \cdot v^2$, і тому є від'ємним. Отже, екстремуму немає.

3) При $\Delta = 0$ вираз $d^2z(M_0) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$ стає повним квадратом. Справді, розкладаючи цей вираз на множники, маємо:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A(u - u_1)(u - u_2).$$

Тут u_1, u_2 – корені рівняння $Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0$. Вони дорівнюють один одному:

$$u_{1,2} = \frac{-2Bv \pm \sqrt{4B^2v^2 - 4ACv^2}}{2A} = \frac{-Bv \pm \sqrt{v^2\left(B^2 - AC\right)}}{A} =$$

$$= \frac{-Bv \pm \sqrt{-v^2\Delta}}{A} = \frac{-Bv \pm \sqrt{-v^2 \cdot 0}}{A} = -\frac{Bv}{A}.$$

Тоді

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = A\left(u + \frac{Bv}{A}\right)^2.$$

Як бачимо, цей вираз є напіввизначеним (додатно напіввизначеним при $A > 0$ або від'ємно напіввізначеним при $A < 0$). Рух точки M вздовж прямої $u = -\frac{Bv}{A}$ $\left(x - x_0 = -\frac{B(y-y_0)}{A}\right)$ залишає значення $d^2z(M_0)$ сталим і рівним нулю. Тому строгого екстремуму немає.

Але в даному випадку буде наявний нестрогий екстремум: нестрогий мінімум при $A, C > 0$ або нестрогий максимум при $A, C < 0$. Саме такий випадок був розглянутий у прикладі 4.29. В точках M_0 прямої $x + y = \frac{\pi}{2}$ маємо: $A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = -1$, $C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = -1$, $B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right|_{M_0} = -1$, тому $\Delta = AC - B^2 = 0$. Таким чином, ми одержуємо точки нестрогого максимуму (див. рис. 4.12.)

2°. Розглянемо тепер випадок $A = 0$. Тоді дослідженню підлягає вираз

$$d^2 z(M_0) = 2Buv + Cv^2.$$

Маємо: $\Delta = AC - B^2 = -B^2 \leqslant 0$. Отже, при $A = 0$ випадок 1) (коли $\Delta > 0$) виникнути не може.

2) Нехай $A = 0$ і $\Delta < 0$. Тоді $-B^2 < 0$, звідки $B \neq 0$. Отже,

$$d^2 z(M_0) = 2Buv + Cv^2 = 2Bv\left(u + \frac{C}{2B}v\right).$$

Нехай, наприклад, $v > 0$. Тоді за рахунок вибору величини u вираз у дужках може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, другий диференціал $d^2 z(M_0)$ не є знаковизначеним. В даній точці екстремуму немає взагалі, ні строгого ані нестрогого.

3) Якщо $A = 0$ і $\Delta = 0$, то $B = 0$, і $d^2 z(M_0) = Cv^2$. Якщо при цьому $C \neq 0$, то другий диференціал є напіввизначеним, і строгого екстремуму немає. Наприклад, при переміщенні вздовж вектора $\overrightarrow{M_0 M} = \{u; 0\}$, $u \neq 0$, отримуємо безліч точок, для яких $d^2 z(M_0) \equiv 0$.

Але в даному випадку буде наявний нестрогий екстремум: нестрогий мінімум при $C > 0$ або нестрогий максимум при $C < 0$.

Разом з тим, існують випадки, коли при $\Delta = 0$ екстремум виникає. Наприклад, функція $z = x^4 + y^4$, очевидно, має мінімум в точці $M_0(0; 0)$. В цьому разі другий (і навіть третій) диференціал в точці M_0 стає тотожно рівним нулю. Тому

$$A = B = C = \Delta = 0,$$

але це не заважає появі екстремуму. Зауважимо, в цьому разі мова про другий диференціал не йтиме, оскільки тепер за формулою Тейлора приріст Δz є многочленом четвертого степеня від змінних dx, dy, і питання про наявність естремуму може бути вирішеним за допомогою четвертого диференціалу.

На цьому повне доведення твердження завершено. Тепер алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум містить три прості кроки.

1. Складаємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Її розв'язки $M_k(x_k, y_k)$ – точки, підозрілі на екстремум. Кожну з них досліджуємо окремо.

2. Знаходимо частинні похідні і обчислюємо їх у досліджуваній точці: $A = z''_{xx}(M_k)$, $B = z''_{xy}(M_k)$, $C = z''_{yy}(M_k)$.

3. Обчислюємо число $\Delta = AC - B^2$. Якщо $\Delta < 0$, то екстремуму немає. Якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$ ($C > 0$), то маємо строгий мінімум. Якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$ ($C < 0$), то маємо строгий максимум. Випадок $\Delta = 0$ залишається сумнівним. Він підлягає додатковому дослідженню з використанням означень екстремумів.

◁ *Приклад 4.31.* Дослідити на екстремум функцію

$$z = 5x^2 + 2y^2 + 2xy - 12x - 6y.$$

Необхідна умова екстремуму

$$\begin{cases} z'_x = 10x + 2y - 12 = 0, \\ z'_y = 4y + 2x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y = 6, \\ 2y + x = 3. \end{cases}$$

Розвязок $M_0(1;1)$ цієї системи і є точкою, підозрілою на екстремум. Другі похідні:

$$z''_{xx} = 10, \qquad z''_{xy} = 2, \qquad z''_{yy} = 4.$$

Значення похідних в підозрілій точці

$$A = z''_{xx}(M_0) = 10, \qquad B = z''_{xy}(M_0) = 2, \qquad C = z''_{yy}(M_0) = 4.$$

Визначник

$$\Delta = AC - B^2 = 10 \cdot 4 - 2^2 = 36 > 0.$$

Отже, підозра підтвердилась, і екстремум наявний. Оскільки $A > 0$, то цей екстремум є строгим мінімумом. Він дорівнює

$$\min z = z(M_0) = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 12 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = -9.$$

Отже, $M_0(1;1)$ – точка строгого мінімуму, який дорівнює -9. ▷

◁ *Приклад 4.32.* Дослідити на екстремум функцію[16]

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

[16]Умову прикладу запозичено на веб-сторінці
`https://math1.ru/education/funct_sev_var/extr2.html`

Необхідна умова екстремуму:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ z'_y = 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Додаючи та віднімаючи ці рівняння, отримуємо:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9, \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases}$$

Враховуючи довільні сполучення знаків при здобуванні кореня, отримуємо сукупність чотирьох наступних систем:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Ці системи знову можна розв'язати додаванням і відніманням рівнянь. Отримуємо чотири точки, підозрілі на екстремум:

$$M_1(2;1), \qquad M_2(-1;-2), \qquad M_3(1;2), \qquad M_4(-2;-1).$$

На цьому перший етап дослідження завершено.

Другі похідні:

$$z''_{xx} = 6x, \qquad z''_{xy} = 6y, \qquad z''_{yy} = 6x.$$

На відміну від попереднього прикладу, другі похідні не виявились сталими числами; вони залежать від координат точки $M(x;y)$. Тому числа A, B, C, Δ можуть виявитись різними в різних точках M_k, $k = \overline{1,4}$. Отже, в різних точках, можливо, буде прийнято різні рішення. З цієї причини другий етап для кожної підозрілої точки необхідно провести окремо.

1) В разі точки $M_1(2;1)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$B = z''_{xy}(M_1) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$C = z''_{yy}(M_1) = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0.$$

Тому екстремум наявний. Оскільки при цьому $A > 0$, то це – строгий мінімум. Його значення

$$\min z = z(M_1) = 2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28.$$

2) В разі точки $M_2(-1;-2)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$B = z''_{xy}(M_2) = 6 \cdot (-2) = -12,$$

$$C = z''_{yy}(M_2) = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -6 \cdot (-6) - (-12)^2 = -108 < 0.$$

Отже, екстремуму немає; підозру спростовано.

3) В разі точки $M_3(1;2)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_3) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$B = z''_{xy}(M_3) = 6 \cdot 2 = 12,$$

$$C = z''_{yy}(M_3) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0.$$

Отже, екстремуму немає; підозру спростовано.

4) В разі точки $M_4(-2;-1)$ маємо:

$$A = z''_{xx}(M_4) = 6 \cdot (-2) = -12,$$

$$B = z''_{xy}(M_4) = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$C = z''_{yy}(M_4) = 6 \cdot (-2) = -12,$$

$$\Delta = AC - B^2 = -12 \cdot (-12) - (-6)^2 = 108 > 0.$$

Тому екстремум наявний. Оскільки при цьому $A < 0$, то це – строгий максимум. Його значення

$$\max z = z(M_4) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28. \rhd$$

Звернемось тепер до сумнівних випадків $\Delta = 0$. В таких випадках екстремум може бути як наявним, так і відсутнім. Встановити це можна з використанням означення екстремуму.

$\lhd$ *Приклад 4.33.* Нехай $z = x^6 + y^4$. Маємо:

$$z'_x = 6x^5, \qquad z'_y = 4y^3.$$

Необхідна умова екстремуму

$$\begin{cases} 6x^5 = 0, \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0(0;0)$ – підозріла на екстремум. Маємо далі:

$$z''_{xx} = 30x^4, \qquad A = z''_{xx}(M_0) = 0;$$

$$z''_{xy} = 0, \qquad B = z''_{xy}(M_0) = 0;$$

$$z''_{yy} = 12y^2, \qquad C = z''_{yy}(M_0) = 0.$$

Отже, $\Delta = 0$, і випадок є сумнівним. Але за допомогою означення мінімуму підозра підтверджується: точка $M_0(0;0)$ є точкою строгого мінімуму. Справді, $z(M_0) = 0$, і $z(M) > 0$ (як сума парних степенів) для будь-якої точки M, яка не збігається з точкою M_0.

Розглянемо також функцію $z = x^6 - y^4$. Так само отримаємо підозрілу точку $M_0(0;0)$ і встановимо сумнівність випадку. Але цього разу підозра спростовується. Справді, при русі вздовж вектора $\overrightarrow{M_0M_1}\,\{\delta;0\}$ отримаємо $z(M_1) = \delta^6 > 0$, а при русі вздовж вектора $\overrightarrow{M_0M_2}\,\{0;\delta\}$ – отримаємо $z(M_2) = -\delta^4 < 0$. Знаки приростів $z(M_1) - z(M_0)$ і $z(M_2) - z(M_0)$ різні, тому екстремуму немає.

Зауважимо, в цьому прикладі $d^2z(M_0) \equiv 0$, тому ми навіть не переходили від дослідження знака приросту Δz до дослідження знака другого диференціалу $d^2z(M_0)$, оскільки зараз це не має сенсу. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 4.34*. Розглянемо функцію $z = x^6 + y^5$. Аналогічно, підозріла точка – $M_0(0;0)$; випадок – сумнівний. Оберемо рухи $\overrightarrow{M_0M_1}\,\{0;\delta\}$ і $\overrightarrow{M_0M_2}\,\{0;-\delta\}$, $\delta > 0$. Маємо:

$$z(M_0) = 0, \qquad z(M_1) = \delta^5 > 0, \qquad z(M_2) = -\delta^5 < 0.$$

Знаки приростів $z(M_1) - z(M_0)$ і $z(M_2) - z(M_0)$ різні, тому екстремуму немає. $\triangleright$

При дослідженні функції $u(x, y, z)$ трьох змінних на екстремум так само формулюють необхідну умову у вигляді $du \equiv 0$. Вважаючи dx, dy, dz незалежними, отримують систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \\ u'_z = 0. \end{cases}$$

Її розв'язки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – підозрілі точки. Для спростування або підтвердження цієї підозри переходять до другого етапу – дослідження знаку другого диференціалу

$$d^2z(M_0) = z''_{xx}\,dx^2 + z''_{yy}\,dy^2 + z''_{zz}\,dz^2 +$$
$$+2z''_{xy}\,dx\,dy + 2z''_{yz}\,dy\,dz + 2z''_{zx}\,dz\,dx$$

(усі частинні похідні обчислено в точці M_0). Якщо він є знаковизначеним, то наявний відповідний строгий екстремум, а якщо напіввизначеним або не є визначеним, то строгого екстремуму немає (у випадку напіввизначеності може бути нестрогий екстремум). Механізм такого дослідження заснований на *критерії Сильвестра* і розглядається в курсі лінійної алгебри. Якщо за цим критерієм випадок стає сумнівним, переходять до дослідження знаків диференціалів вищих порядків штучними методами.

В разі функцій довільної кількості змінних дослідження на екстремум відбувається в аналогічний спосіб.

4.13 Умовні екстремуми

4.13.1 Елементарні відомості

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Поставимо задачу про знаходження її екстремумів за умови, яку задано додатковим рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Це рівняння називають **рівнянням зв'язку**, а відповідні екстремуми називають **умовними**. Як і раніше, точку $M_0(x_0, y_0)$ називають **точкою умовного мінімуму (максимуму),** якщо для точок $M(x, y)$ з δ-околу точки M_0 виконано нерівність $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$ відповідно). Але, на відміну від звичайних екстремумів, останні нерівності повинні виконуватись *не для усіх* точок δ-околу, а лише для тих, координати яких задовольняють рівнянню зв'язку. Нехай графіком рівняння $\varphi(x, y) = 0$ є деяка крива ℓ на площині Oxy. Оскільки умову $\varphi(M) = 0$ виконано, то $M \in \ell$ (це стосується в тому числі і точки M_0, тобто $M_0 \in \ell$ також). Отже, тепер перевірці підлягать лише «сусідні» точки кривої ℓ, які потрапляють всередину кола радіусом δ з центром в точці M_0, тобто лише точки дуги AB (рис. 4.13).

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ не містить z. Отже, якщо рухати криву ℓ паралельно самій собі вздовж осі Oz, то точки цієї кривої будуть продовжувати задовольняти умову $\varphi(x, y) = 0$. Тому можна сказати, що рівняння зв'язку визначає циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Oz. Наприклад, якщо $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, то рівняння $\varphi = 0$ визначає звичайний прямий круговий циліндр, віссю якого є вісь Oz. Переріз цього циліндру площиною $z = 0$ – коло одиничного радіусу з центром в початку координат.

Нехай в результаті перетину циліндру $\varphi = 0$ і поверхні $z(x, y)$ утворилась деяка крива ℓ'. Очевидно, її проекція на площину Oxy – це і є крива ℓ. З одного боку, крива ℓ' належить поверхні $z(x, y)$. Тому апліката z кожної точки кривої ℓ' є значенням досліджуваної функції. З іншого боку, крива ℓ' належить циліндру $\varphi = 0$, тобто для кожної точки кривої ℓ' додаткову умову $\varphi = 0$ виконано. Отже, задача про умовний екстремум набуває елементарного геометричного

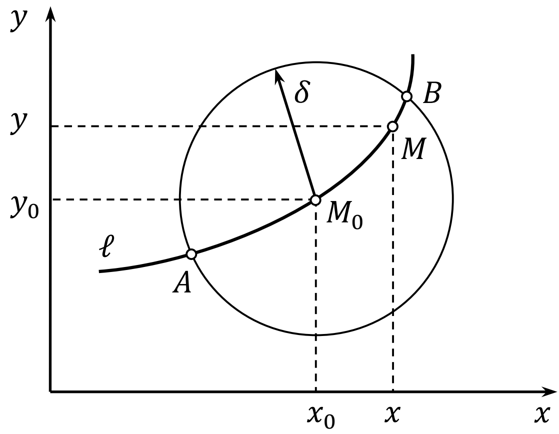


Рисунок 4.13 – Точка умовного екстремуму

сенсу: на просторовій кривій ℓ' потрібно знайти точки з максимальною і мінімальною висотою z.

Важливо зауважити наступне. При різних умовах (при різних рівняннях зв'язку) одна й та сама функція $z(x, y)$ в одній і тій самій точці $M_0(x_0, y_0)$ може або мати максимум, або мати мінімум, або не мати екстремуму взагалі.

$\triangleleft$ *Приклад 4.35.* Розглянемо локальну поведінку функції

$$z(x, y) = x^2 - y^2$$

в околі точки $M_0(0; 0)$.

Оберемо перше рівняння зв'язку у вигляді $\varphi_1(x, y) = 0$, де $\varphi_1(x, y) = 2y - x$. При цьому рівняння кривої ℓ_1 набуває вигляду $y = \frac{1}{2}x$, і ми отримуємо $z = \frac{3}{4}x^2 \geqslant 0$. Очевидно, функція $z(x, y)$ в точці M_0 досягає *умовного* мінімуму $\min z = z(M_0) = 0$ (за умови $\varphi_1 = 0$).

Оберемо друге рівняння зв'язку (*замість* першого) у вигляді $\varphi_2(x, y) = 0$. Нехай тепер $\varphi_2(x, y) = y - 2x$. При цьому рівняння кривої ℓ_2 набуває вигляду $y = 2x$, і $z = -3x^2 \leqslant 0$. Очевидно, отримуємо *умовний* максимум $\max z = z(M_0) = 0$ (за умови $\varphi_2 = 0$).

Оберемо третє рівняння зв'язку у вигляді $\varphi_3(x, y) = 0$. Покладемо $\varphi_3(x, y) = y - x$. При цьому рівняння кривої ℓ_3 набуває вигляду $y = x$, і $z \equiv 0$ (незалежно від x). За умови $\varphi_3 = 0$ екстремуму взагалі немає. Справді, при порівнянні з «сусідньою» точкою $M_1(\delta, \delta)$ маємо: $z(M_1) = z(M_0) = 0$, і жодну з нерівностей означення умовного екстремуму не виконано. $\triangleright$

Умова $\varphi(M) = 0$ визначає неявну функцію $y = y(x)$. Якщо вдається отримати її явний вигляд, то його можна підставити до виразу для z. Тоді досліджувана функція перетворюється на функцію однієї змінної:

$$z(x) = f(x, y(x)).$$

Алгоритм її дослідження на екстремуми вже відомий.

$\triangleleft$ *Приклад 4.36.* Функцію $z = x^2 + y^2$ дослідити на умовний екстремум за умови $x + y = 2$.

З умови маємо: $y = 2 - x$. Тоді досліджувана функція перетворюється на функцію однієї змінної:

$$z(x) = x^2 + (2 - x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

Критичні точки знаходимо з рівняння $z' = 0$:

$$4x - 4 = 0, \qquad x_0 = 1.$$

Друга похідна $z'' = 4 > 0$. Функція є опуклою донизу, отже ми знайшли точку мінімуму (втім, і так очевидно, що квадратична парабола вітками догори має єдиний мінімум). З умови маємо: $y_0 = 2 - x_0 = 1$. Остаточно, $M_0(1; 1)$ – точка умовного мінімуму. Його значення $\min z = z(M_0) = 1^2 + 1^2 = 2$.

Зауважимо, абсолютного мінімуму, рівного нулю, функція $z = x^2 + y^2$, очевидно, досягає в точці $M_1(0; 0)$. Але координати цієї точки не задовольняють умову $x + y = 2$. $\triangleright$

В багатьох випадках з умови $\varphi(x, y) = 0$ не вдається явно виразити y через x. Тому наша мета – сформувати альтернативний алгоритм пошуку умовного екстремуму, *не користуючись явним виглядом* $y(x)$.

Ми шукаємо екстремум функції однієї змінної $z(x)$. Тому скористаємось необхідною умовою екстремуму $\frac{dz}{dx} = 0$, або за формулою (4.13):

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Тут частинні похідні обчислено в шуканій точці M_0. Тому, доможаючи на dx, можна написати також

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} dy = 0. \tag{4.15}$$

Формально це рівняння виглядає як звичайна необхідна умова $dz(M_0) = 0$. Але раніше dx і dy були незалежними, і для її виконання потрібно було прирівняти до нуля множники при dx і при dy окремо. Це слугувало джерелом виникнення системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

для пошуку підозрілої точки. Тепер це не так, оскільки dx і dy пов'язані співвідношенням $d\varphi = 0$:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{M_0} dx + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{M_0} dy = 0. \tag{4.17}$$

Це співвідношення природно назвати *диференціальною формою* рівняння зв'язку.

Якщо $\varphi'_y \neq 0$ (ми продовжуємо вважати, що усі частинні похідні обчислено в шуканій точці M_0, але більше не підкреслюємо цього), то $dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,dx$. Підставляючи це до (4.15), отримуємо:

$$\left(z'_x - z'_y \cdot \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) dx = 0, \qquad \left(z'_x\varphi'_y - z'_y\varphi'_x\right) dx = 0.$$

Тут залишається лише одна незалежна змінна – dx. Тому останнє рівняння слугує джерелом виникнення тільки одного рівняння системи для знаходження шуканої точки. Приєднуючи до нього рівняння зв'язку, отримуємо:

$$\begin{cases} z'_x\varphi'_y - z'_y\varphi'_x = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Тепер для знаходження шуканої точки потрібно розв'язувати цю систему замість системи (4.16). Звичайно, і розв'язок її буде іншим.

Зауважимо, перше рівняння системи (4.18) можна отримати і без обмеження $\varphi'_y \neq 0$. Утворимо вектор $\overrightarrow{d\ell} = \{dx; dy\}$. Тоді рівняння (4.15) набуває вигляду $\operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$, а рівняння (4.17) – вигляду $\operatorname{grad} \varphi \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$. Але тепер вектор $\overrightarrow{d\ell}$ має не довільний напрямок, а напрямок дотичної до кривої $\varphi = 0$ в точці M_0. Тому тепер вектор $\operatorname{grad} z$ не зобов'язаний бути нульовим; він (як і вектор $\operatorname{grad} \varphi$) лише повинен бути перпендикулярним вектору $\overrightarrow{d\ell}$. Тоді вектори $\operatorname{grad} z$ і $\operatorname{grad} \varphi$ колінеарні, і $\operatorname{grad} z \times \operatorname{grad} \varphi = \overrightarrow{0}$. Маємо:

$$\operatorname{grad} z \times \operatorname{grad} \varphi = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ z'_x & z'_y & 0 \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Розкриваючи цей визначник, отримуємо:

$$0 \cdot \overrightarrow{i} + 0 \cdot \overrightarrow{j} + (z'_x \varphi'_y - z'_y \varphi'_x) \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

звідки і випливає перше рівняння системи (4.18).

Нехай систему (4.18) розв'язано. Її розв'язок – точка[17] M_0, яка і є підозрілою на умовний екстремум. На цьому перший етап дослідження завершено.

Систему (4.18) слід вважати лише необхідною (але не достатньою!) умовою умовного екстремуму, оскільки в точці M_0 екстремуму може і не бути. Тому переходимо до другого етапу. Для остаточного з'ясування питання дослідимо різницю

$$\Delta z = dz(M_0) + \frac{1}{2} d^2 z(M_0) + o(\rho^2), \qquad \rho = |M_0 M|.$$

Але тепер слід враховувати, що dy не є незалежною змінною, тобто вектор $\overrightarrow{d\ell}$ має не довільний напрямок. При цьому:

$$dz(M_0) = z'_x(M_0)\, dx + z'_y(M_0)\, dy = \operatorname{grad} z|_{M_0} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0.$$

Ще раз наголосимо: рівність $dz(M_0) = 0$ виконується не за рахунок того, що $\operatorname{grad} z|_{M_0} = \overrightarrow{0}$ (тобто $z'_x = z'_y = 0$), як це мало місце в разі звичайного екстремуму. Причина в іншому: зв'язок (4.17) між dx і dy змушує вектор $\overrightarrow{d\ell}$ бути перпендикулярним до вектора $\operatorname{grad} z|_{M_0}$.

Отже, тепер $\Delta z = \frac{1}{2} d^2 z(M_0) + o(\rho^2)$. Тоді (якщо нехтувати малими вищих порядків) величини Δz і $d^2 z(M_0)$ мають однаковий

[17] Якщо таких точок декілька, то подальший аналіз провадять для кожної з них, взятої окремо.

знак. Якщо він зберігається, то виникає умовний екстремум. Маємо:

$$d^2z(M_0) = z''_{xx}(M_0)\,dx^2 + 2z''_{xy}(M_0)\,dx\,dy + z''_{yy}(M_0)\,dy^2.$$

Сюди треба підставити dy, виражений через dx з рівняння (4.17). Отримаємо: $d^2z(M_0) = C\,dx^2$. Якщо $C > 0$, то M_0 – точка умовного мінімуму, а якщо $C < 0$ – умовного максимуму. Випадок $C = 0$ є сумнівним; він підлягає більш тонкому аналізу. В цьому разі досліджують збереження знаків вищих диференціалів з урахуванням зв'язку (4.17) між dx і dy. Тепер дослідження на умовний екстремум остаточно завершено.

4.13.2 Метод Лагранжа

В попередньому підпункті величини dx і dy були нерівноправними: dx ми вважали незалежною змінною, а dy – залежною. Іноді це може бути незручним. Лагранж запропонував метод, при якому dx і dy *виглядають* як рівноправні. Цей метод називають **методом множників Лагранжа.** Розглянемо його.

Домножимо рівняння (4.17) на деякий (поки що невизначений) множник λ. Результат додамо до рівняння (4.15). Групуючи доданки при dx і dy, отримуємо:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Тут dy – залежна змінна. Щоб вилучити її з подальших міркувань, підберемо λ так, щоб множник при dy став рівним нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Тоді (через незалежність dx) отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Оскільки нам потрібно перевіряти не усі точки δ-околу, а лише ті, які належать кривій ℓ, то до двох отриманих рівнянь потрібно ще приєднати рівняння зв'язку $\varphi = 0$, яке і визначає цю криву. Отримуємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Зауважимо, якщо з перших двох рівнянь виключити λ, то залишиться система, яка точно збігається з системою (4.18).

Нехай тепер розв'язком системи (4.19) є точка $N_0(x_0, y_0, \lambda_0)$. Залишається формально відкинути третю координату λ_0, і ми отримаємо таку саму підозрілу точку $M_0(x_0, y_0)$, яку і потрібно було отримати при розв'язуванні системи (4.18).

Утворимо допоміжну функцію трьох незалежних змінних (її називають *функцією Лагранжа*):

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y).}$$

Спробуємо знайти звичайний екстремум функції L, *формально вважаючи змінні x, y, λ незалежними.* З необхідної умови екстремуму

$$dL = L'_x\,dx + L'_y\,dy + L'_\lambda\,d\lambda = 0$$

через незалежність диференціалів dx, dy, $d\lambda$ випливає система рівнянь

$$\begin{cases} L'_x = z'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ L'_y = z'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ L'_\lambda = \varphi = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, отримана система точно збігається з (4.19). Але тепер при знаходженні похідних L'_x, L'_y, L'_λ все *виглядає* так, ніби величини x, y, λ є незалежними.

Отже, шукати точку $M_0(x_0, y_0)$, підозрілу на *умовний* екстремум функції $z(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ – це те саме, що шукати точку $N_0(x_0, y_0, \lambda_0)$, підозрілу на *звичайний* екстремум функції $L(x, y, \lambda)$, і потім відкидати третю координату λ_0. Тому побудова функції $L(x, y, \lambda)$ – це просто штучний мнемонічний прийом, який дозволяє зручно складати систему (4.19) для знаходження підозрілої точки M_0.

Тепер настає другий етап, коли підозру стосовно точки M_0 потрібно спростувати або підтвердити. Для цього достатньо дослідити знак другого диференціалу

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}\,dy^2.$$

Зауваження 1. При обчисленні d^2L вважають, що значення λ є сталим і таким, що виникає при розв'язуванні системи (4.19). Тому $d\lambda = 0$, і другий диференціал d^2L знаходять саме в наведеному вигляді, а не як $d^2L = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y} + d\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^2 L.$

Зауваження 2. При обчисленні d^2L враховують диференціальну форму (4.17) рівняння зв'язку, тому результат виникає у вигляді $d^2L = C\,dx^2$ (або $d^2L = C\,dy^2$). Якщо $C > 0$, то M_0 – точка умовного мінімуму, а якщо $C < 0$ – умовного максимуму. Випадок $C = 0$ є сумнівним. В цьому разі досліджують збереження знаків вищих диференціалів (також з урахуванням зв'язку (4.17) між dx і dy).

$\lhd$ *Приклад 4.37.* Функцію $z = x^2 + y^2$ дослідити на умовний екстремум методом множників Лагранжа за умови $x + y = 2$.

Утворимо функцію $\varphi(x, y) = x + y - 2$. Тоді умова подається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Функція Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

Необхідна умова екстремуму

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Додамо перші два рівняння: $2(x+y)+2\lambda = 0$. Оскільки $x+y = 2$, одержуємо: $2 \cdot 2 + 2\lambda = 0$, $\lambda = -2$. Тоді з перших двох рівнянь $x = -\frac{\lambda}{2} = 1$, $y = -\frac{\lambda}{2} = 1$. Отже, розв'язком системи є впорядкована трійка чисел $N_0(1; 1; -2)$. Відкидаючи третю координату, знаходимо точку $M_0(1; 1)$, підозрілу на умовний екстремум. Маємо:

$$L''_{xx} = 2, \qquad L''_{xx}\big|_{M_0} = 2;$$

$$L''_{xy} = 0, \qquad L''_{xy}\big|_{M_0} = 0;$$

$$L''_{yy} = 2, \qquad L''_{yy}\big|_{M_0} = 2.$$

Тоді $d^2L = 2\,dx^2 + 2\,dy^2$. В принципі, вже очевидно, що отримана квадратична форма є додатно визначеною, і наявний умовний мінімум. Проте, доведемо схему дослідження до кінця. Рівняння (4.17) набуває вигляду $d\varphi = dx + dy = 0$, звідки $dy = -dx$, і $d^2L = 4\,dx^2 \geqslant 0$, причому рівність досягається лише при $dx = 0$. Отже, підозра підтвердилась; маємо умовний мінімум. Він дорівнює $\min z = z(M_0) = z(1; 1) = 1^2 + 1^2 = 2$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 4.38.* Функцію $z = 1 - x - y$ дослідити на умовний екстремум методом множників Лагранжа за умови $x^2 + y^2 = 2$.

Утворимо функцію $\varphi(x,y)=x^2+y^2-2$. Тоді умова подається рівнянням $\varphi(x,y)=0$. Функція Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=1-x-y+\lambda(x^2+y^2-2).$$

Необхідна умова екстремуму

$$\begin{cases} L'_x=-1+2\lambda x=0,\\ L'_y=-1+2\lambda y=0,\\ L'_\lambda=x^2+y^2-2=0. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь: $x=y=\frac{1}{2\lambda}$. Третє рівняння набуває вигляду $\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2-2=0$, звідки $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Тоді $x_1=1$ і $y_1=1$, або $x_2=-1$ і $y_2=-1$. Отже, розв'язком системи є множина двох впорядкованих трійок чисел $N_1\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$, $N_2\left(-1;-1;-\frac{1}{2}\right)$. Відкидаючи третю координату, знаходимо точки $M_1(1;1)$ і $M_2(-1;-1)$, підозрілі на умовний екстремум. Маємо:

$$L''_{xx}=2\lambda,\qquad L''_{xy}=0,\qquad L''_{yy}=2\lambda.$$

Дослідимо точку $M_1(1;1)$:

$$L''_{xx}\big|_{M_1}=2\lambda_1=1,\qquad L''_{xy}\big|_{M_1}=0,\qquad L''_{yy}\big|_{M_1}=2\lambda_1=1.$$

Тоді $d^2L=dx^2+dy^2$. Рівняння (4.17) набуває вигляду $d\varphi=2x\,dx+$ $+2y\,dy=0$, звідки $dy=-\frac{x}{y}\,dx$. При підстановці точки M_1 маємо: $dy=-dx$, і $d^2L=2\,dx^2\geqslant 0$, причому рівність досягається лише при $dx=0$. Отже, підозра підтвердилась; маємо умовний мінімум. Він дорівнює $\min z=z(M_1)=z(1;1)=1-1-1=-1$.

Дослідимо точку $M_2(-1;-1)$:

$$L''_{xx}\big|_{M_2}=2\lambda_2=-1,\qquad L''_{xy}\big|_{M_2}=0,\qquad L''_{yy}\big|_{M_2}=2\lambda_2=-1.$$

Тоді $d^2L=-dx^2-dy^2$. Диференціювання умови φ веде до того самого результату $dy=-\frac{x}{y}\,dx$. При підстановці точки M_2 знову одержуємо $dy=-dx$, і $d^2L=-2\,dx^2\leqslant 0$, причому рівність досягається лише при $dx=0$. Отже, підозра підтвердилась; маємо умовний максимум. Він дорівнює

$$\max z=z(M_2)=z(-1;-1)=1-(-1)-(-1)=1.\ \triangleright$$

4.13.3 Метод Лагранжа (загальний випадок)

Метод множників Лагранжа може бути застосований також у більш загальному випадку. Нехай досліджувана функція залежить від $(n+m)$ змінних, і до неї приєднано m рівнянь зв'язку. Система рівнянь зв'язку робить залежними m змінних від решти n змінних. Тому природно перші n змінних вважати незалежними (і позначати x_i), а решту m змінних – залежними (і позначати y_k). Отже, зручно ввести позначення

$$z = z(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m).$$

Додаткові умови визначаються системою рівнянь зв'язку:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0, \\ \qquad \cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0. \end{cases}$$

Необхідною умовою екстремуму є рівність $dz = 0$. Маємо:

$$dz = \left(z'_{x_1}\,dx_1 + z'_{x_2}\,dx_2 + \cdots + z'_{x_n}\,dx_n\right) +$$

$$+\left(z'_{y_1}\,dy_1 + z'_{y_2}\,dy_2 + \cdots + z'_{y_m}\,dy_m\right) = \sum_{i=1}^{n} z'_{x_i}\,dx_i + \sum_{k=1}^{m} z'_{y_k}\,dy_k.$$

Якби усі аргументи x_i, y_k були незалежними, для виконання цієї умови було б достатньо прирівняти нулю множник при кожному диференціалі, тобто кожну частинну похідну функції z. Але тут міститься m диференціалів залежних аргументів dy_k. Ідея, як і раніше, полягає в тому, щоб позбавитись їх.

Продиференціюємо кожне рівняння зв'язку:

$$d\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} dy_k = 0, \qquad j = \overline{1;m}.$$

Усі такі рівняння утворюють систему лінійних рінянь, з якої можна знайти m виразів для dy_k. Кожен такий вираз, очевидно, є лінійною комбінацією диференціалів dx_k. Коефіцієнти кожної такої лінійної комбінації – частинні похідні функцій φ_j. Підставляючи вирази для dy_k до dz і групуючи доданки з множниками при однакових диференціалах dx_i, приходимо до рівняння вигляду:

$$A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2 + \cdots + A_n\,dx_n = 0.$$

Тут кожний коефіцієнт A_i є лінійною комбінацією частинних похідних функцій z і φ_j. Тепер в останньому рівнянні містяться тільки незалежні диференціали dx_i, тому воно слугує джерелом виникнення n рівнянь вигляду $A_i = 0$. Приєднуючи до них m рівнянь зв'язку, отримують систему з $(n+m)$ рівнянь. Нехай її розв'язок – точка

$$M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}; y_{01}, y_{02}, \cdots, y_{0m}).$$

Вона і є підозрілою на умовний екстремум. В цій точці $dz(M_0) = 0$ (при використанні виразів для dy_k через dx_i). Тому розглядають другий диференціал. До нього також підставляють вирази для усіх залежних диференціалів dy_k. Утворюється квадратична форма для n незалежних диференціалів dx_i. Її знакосталість (встановлена, наприклад, за критерієм Сильвестра), і є достатньою умовою умовного екстремуму в точці M_0.

Практично виключення залежних змінних dy_k провадять в наступний спосіб. Оскільки $dz = 0$ і $d\varphi_j = 0$, то

$$dz + \lambda_1\, d\varphi_1 + \lambda_2\, d\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\, d\varphi_m = 0,$$

$$dz + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, d\varphi_j = 0 \tag{4.20}$$

при довільних множниках λ_j (це і є множники Лагранжа). Підставимо сюди вирази для dz і $d\varphi_j$. Попередньо маємо:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, d\varphi_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} dy_k \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} dy_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} dy_k.$$

Тоді умова (4.20) набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^{n} z'_{x_i}\, dx_i + \sum_{k=1}^{m} z'_{y_k}\, dy_k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} dy_k = 0.$$

Групуючи доданки при однакових диференціалах dx_i і dy_k, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(z'_{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)}_{=0} dx_i + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(z'_{y_k} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} \right)}_{=0} dy_k = 0.$$

Для виключення залежних змінних dy_k залишається підібрати такі значення λ_j, за яких множник при кожному диференціалі dy_k буде рівним нулю (фактично достатньо розв'язати систему лінійних рівнянь відносно λ_j). Після цього рівняння буде містити лише незалежні змінні dx_i, отже, воно буде слугувати джерелом виникнення n рівнянь. Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} z'_{x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0, & i = \overline{1,n}; \\ z'_{y_k} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, & k = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Ця система зараз є неповною: вона містить $(n+m)$ рівнянь і $(n+2m)$ невідомих (n штук невідомих x_i, m штук невідомих y_k і m штук невідомих λ_j). Тому до отриманих рівнянь ще потрібно приєднати m рівнянь зв'язку. Маємо:

$$\begin{cases} z'_{x_i} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0, & i = \overline{1,n}; \\ z'_{y_k} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, & k = \overline{1,m}; \\ \varphi_j = 0, & j = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Виводити таку систему кожного разу або запам'ятовувати її дуже незручно. В той же час мнемонічний спосіб відтворення такої системи полягає в утворенні функції Лагранжа і дослідженні її на *звичайний* екстремум. Приймемо функцію Лагранжа у вигляді:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = z + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j.}$$

Тут

$$z = z(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m);$$
$$\varphi_j = \varphi_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_m), \qquad j = \overline{1, m}.$$

За всіма множниками λ_j функція L є лінійною. Необхідна умова звичайного екстремуму функції L має вигляд $dL \equiv 0$,

$$L'_{x_1}\,dx_1 + L'_{x_2}\,dx_2 + \cdots + L'_{x_n}\,dx_n +$$
$$+ L'_{y_1}\,dy_1 + L'_{y_2}\,dy_2 + \cdots + L'_{y_m}\,dy_m +$$
$$+ L'_{\lambda_1}\,d\lambda_1 + L'_{\lambda_2}\,d\lambda_2 + \cdots + L'_{\lambda_m}\,d\lambda_m \equiv 0.$$

Зараз ми домовляємось досліджувати функцію L на звичайний екстремум. Тому змінні x_i, y_k, λ_j *формально вважаємо незалежними.* Отже, тотожність $dL \equiv 0$ слугує джерелом виникнення $(n + 2m)$ рівнянь:

$$\begin{cases} L'_{x_i} = 0, & i = \overline{1, n}; \\ L'_{y_k} = 0, & k = \overline{1, m}; \\ L'_{\lambda_j} = 0, & j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Якщо врахувати вигляд функції L, то ця система в точності збігається з системою (4.21). Але вигляд

$$L = z + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

функції Лагранжа запам'ятати набагато простіше порівняно з цією системою.

Нехай систему (4.21) розв'язано. Її розв'язок

$$N_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}; y_{01}, y_{02}, \cdots, y_{0m}; \lambda_{01}, \lambda_{02}, \cdots \lambda_{0m})$$

і є точкою, підозрілою на *звичайний* екстремум функції L. Відкидаючи зайві координати λ_j, отримуємо точку

$$M_0(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n}; y_{01}, y_{02}, \cdots, y_{0m}),$$

яка і є підозрілою на *умовний* екстремум функції z. Як ми вже вказували, $dz(M_0) \neq 0$, але $dz(M_0) = 0$ при використанні залежностей усіх диференціалів dy_k від усіх диференціалів dx_i. Тому для підтвердження або спростування підозри про умовний екстремум залишається дослідити знак другого диференціалу $d^2L(M_0)$, який перетворюється на квадратичну форму n змінних dx_i.

Зауважимо, коли умов на одну менше, ніж аргументів досдіджуваної функції ($n = 1$), то вона перетворюється на функцію однієї змінної, і навіть не потрібно залучати уявлення про квадратичну форму.

$\triangleleft$ *Приклад 4.39.*[18] Дослідити на умовний екстремум функцію $u(x, y, z) = xy + yz$ за умов $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$. Обмежитись випадком $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

---

[18]Приклад запозичено з книги: Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов. – 10-е изд., испр. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

Утворимо функції $\varphi_1 = x^2 + y^2 - 2$, $\varphi_2 = y + z - 2$. Тоді умови мають вигляд $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Отже, маємо випадок $m = 2$ (кількість умов), $n + m = 3$ (кількість аргументів функції u). Функція Лагранжа:

$$L(x; y, z; \lambda_1, \lambda_2) = u + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 =$$
$$= xy + yz + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \lambda_2\left(y + z - 2\right).$$

Необхідна умова екстремуму функції L:

$$\begin{cases} L'_x = y + 2\lambda_1 x = 0, \\ L'_y = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ L'_z = y + \lambda_2 = 0, \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ L'_{\lambda_2} = y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом послідовного виключення невідомих. Виключимо λ_2 за допомогою третього рівняння: $\lambda_2 = -y$. Решта рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y + 2\lambda_1 x = 0, \\ x + z + 2\lambda_1 y - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо z за допомогою четвертого рівняння: $z = 2 - y$. Решта рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y + 2\lambda_1 x = 0, \\ x + 2 + 2\lambda_1 y - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо y за допомогою першого рівняння: $y = -2\lambda_1 x$. Решта рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} x + 2 - 4\lambda_1^2 x + 4\lambda_1 x = 0, \\ x^2 + 4\lambda_1^2 x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо x за допомогою першого рівняння: $x = \frac{2}{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}$. Останнє рівняння набуває вигляду:

$$x^2\left(1 + 4\lambda_1^2\right) = 2, \quad \frac{4\left(1 + 4\lambda_1^2\right)}{\left(4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1\right)^2} = 2, \quad 2\left(1 + 4\lambda_1^2\right) = \left(4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1\right)^2.$$

Тимчасово позначимо $t = 2\lambda_1$. Маємо:

$$2\left(1 + t^2\right) = \left(t^2 - 2t - 1\right)^2,$$

$$2 + 2t^2 = t^4 - 2t^2\left(2t + 1\right) + 4t^2 + 4t + 1,$$
$$t^4 - 4t^3 + 4t - 1 = 0, \qquad \left(t^4 - 1\right) - 4t\left(t^2 - 1\right) = 0,$$
$$\left(t^2 + 1\right)\left(t^2 - 1\right) - 4t\left(t^2 - 1\right) = 0, \qquad \left(t^2 - 4t + 1\right)\left(t^2 - 1\right) = 0.$$

Отримали корені $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $t_{3,4} = \pm 1$.

У випадку коренів $t_{1,2}$ маємо: $\lambda_1 = \frac{t}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. Тоді

$$x = \left.\frac{2}{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1}\right|_{\lambda_1 = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2 - 2\left(2 \pm \sqrt{3}\right) - 1} =$$

$$= \frac{2}{4 \pm 4\sqrt{3} + 3 - 4 \mp 2\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{\pm 2\sqrt{3} + 2}.$$

При виборі знаку «мінус» отримаємо: $x < 0$, що протирічить умові задачі. При виборі знаку «плюс» отримаємо: $\lambda_1 > 0$, $x > 0$. Але тоді з формули $y = -2\lambda_1 x$ випливає $y < 0$, що також протирічить умові задачі.

У випадку кореня $t_3 = 1$ маємо: $\lambda_1 = \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$. Тоді

$$x = \left. \frac{2}{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1} \right|_{\lambda_1 = \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - 2 - 1} = -1 < 0,$$

що знову протирічить умові задачі.

Нарешті, у випадку кореня $t_4 = -1$ маємо: $\lambda_1 = \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}$. Тоді

$$x = \left. \frac{2}{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1 - 1} \right|_{\lambda_1 = -\frac{1}{2}} = \frac{2}{1 + 2 - 1} = 1.$$

Тоді $y = -2\lambda_1 x = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1$, $z = 2 - y = 2 - 1 = 1$, $\lambda_2 = -y = -1$. Отримали критичну точку функції $L(x; y, z; \lambda_1, \lambda_2)$:

$$N_0(x_0; y_0, z_0; \lambda_{01}, \lambda_{02}) = N_0\left(1; 1, 1; -\frac{1}{2}, -1\right).$$

Відкидаючи множники Лагранжа, отримуємо точку $M_0(1, 1, 1)$, підозрілу на умовний екстремум функції $u(x, y, z)$.

З використанням знайдених значень λ_1, λ_2 маємо:

$$\begin{cases} L'_x = y - x, \\ L'_y = x + z - y - 1, \\ L'_z = y - 1. \end{cases}$$

Тоді другі похідні:

$$\begin{cases} L''_{xx} = -1, \\ L''_{yy} = -1, \\ L''_{zz} = 0, \\ L''_{xy} = 1, \\ L''_{yz} = 1, \\ L''_{zx} = 0. \end{cases}$$

Нам «пощастило», що ці похідні виявились константами. В загальному випадку сюди потрібно підставляти координати точки $M_0(1; 1; 1)$. Другий диференціал функції Лагранжа в точці M_0 дорівнює

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + L''_{yy}\,dy^2 + L''_{zz}\,dz^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + 2L''_{yz}\,dy\,dz + 2L''_{zx}\,dz\,dx =$$
$$= -dx^2 - dy^2 + 2\,dx\,dy + 2\,dy\,dz.$$

Але серед трьох диференціалів dx, dy, dz лише один є незалежним. Решту виразимо з рівнянь зв'язку. Маємо: $d\varphi_1 = 0$, $d\varphi_2 = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz = 0, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\,dx + 2y\,dy = 0, \\ dy + dz = 0. \end{cases}$$

В точці $M_0(1, 1, 1)$ маємо:

$$\begin{cases} 2\,dx + 2\,dy = 0, \\ dy + dz = 0. \end{cases}$$

Звідси $dy = -dx$, $dz = dx$. Тоді

$$d^2L = -dx^2 - dx^2 - 2\,dx^2 - 2\,dx^2 = -6\,dx^2 \leqslant 0,$$

причому рівність досягається лише при $dx = 0$. Отже, M_0 – точка умовного максимуму. Він дорівнює $\max u = u(M_0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$. $\triangleright$

4.14 Найбільше і найменше значення функції в області

В цьому пункті будемо мати на увазі **замкнену** область. Так називають множину, яка утворюється при об'єднанні точок області і точок її границі. Наприклад, нерівність $x^2 + y^2 < 1$ задає незамкнену область у формі кола одиничного радіусу з центром в початку координат, а нерівність $x^2 + y^2 \leqslant 1$ вже задає замкнену область, включаючи точки кола $x^2 + y^2 = 1$.

Задачу сформулюємо в наступний спосіб: знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області D.

Цю задачу для функції однієї змінної ми розв'язували в п. 3.7. Для функцій багатьох змінних умови існування розв'язку також подаються теоремами К. Вейєрштрасса. Перша теорема Вейєрштрасса стверджує: якщо функція $f(M)$ визначена і неперервна в деякій замкненій області, то вона обмежена, тобто існують числа a, A такі, що для довільної точки $M \in D$ виконано нерівність $a \leqslant f(M) \leqslant A$. За допомогою цієї теореми можна довести другу теорему Вейєрштрасса, яка стверджує: якщо функція $f(M)$ визначена і неперервна в деякій замкненій області, то вона досягає в цій області найбільшого і найменшого значень.

Практичні дії схожі на алгоритм пошуку найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ однієї змінної на даному інтервалі $x \in [a; b]$. А саме, найбільшого і найменшого значень функція двох змінних може досягати або в стаціонарних точках всередині області, або на границі області. Тому, по-перше, з рівняння $dz = 0$ (тобто з системи рівнянь $z'_x = 0$, $z'_y = 0$) знаходять точки $M_k(x_k, y_k)$, підозрілі на екстремум, і відкидають ті з них, які не потрапили ані всередину області, ані на її границю. В решті точок обчислюють значення $z_k = z(M_k)$ і додають їх до порівняння. (Як і у випадку функцій однієї змінної, з'ясовувати, чи досягається екстремум в цих точках, потреби немає). По-друге, перебирають усі точки границі області. У випадку функції однієї змінної було лише дві граничних точки: кінці інтервалу $x = a$ і $x = b$. Тепер їх нескінченно багато. Нехай границю області задано рівнянням[19] $y = \varphi(x)$. Тоді для точок границі

[19]Границя області може бути заданою рівнянням $x = \psi(y)$, або параметрично системою рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$. В будь-якому разі, переходячи від області

досліджувана функція перетворюється на функцію однієї змінної $z(x) = f(x, \varphi(x))$, і задача зводиться до вже відомої. Якщо границя області є складною, її можна розбивати на окремі ділянки (задаватись різним виглядом функції $y = \varphi(x)$). Підозрілі точки, знайдені при дослідженні границі, також вносять до «списку підозрюваних». Остаточну відповідь знаходять, порівнюючи значення функції $z = f(x, y)$ в усіх підозрілих точках області і її границі.

Може знайтись точка $M_0(x_0, y_0)$, яка потрапить до «списку підозрюваних» з різних причин. Наприклад, як підозрювана на екстремум функції $z = f(x, y)$ і одночасно як гранична точка чергової ділянки границі. Звичайно, обчислювати значення функції $z = f(x_0, y_0)$ (і в подальшому порівнювати його з іншими значеннями) достатньо лише один раз.

$\lhd$ *Приклад 4.40*. Знайти найменше і найбільше значення функції $z = 2y^3 + \frac{1}{12}x^2 - 6y^2 - xy + x + 6y$ в області в формі трикутника ABC з вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(6;0)$.

Точки, підозрювані на екстремум, знайдемо з необхідної умови екстремуму:

$$\begin{cases} z'_x = \frac{1}{6}x - y + 1 = 0, \\ z'_y = 6y^2 - 12y - x + 6 = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо: $x = 6(y - 1)$. Тоді друге рівняння набуває вигляду:

$$6y^2 - 12y - 6(y-1) + 6 = 0, \qquad y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Його корені $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Відповідно $x_1 = 6(y_1 - 1) = 0$, $x_2 = 6(y_2 - 1) = 6$. Знайшли точки $M_1(0;1)$, $M_2(6;2)$. Точку M_2 відкидаємо як таку, що не належить області трикутника ABC (рис. 4.14). В точці M_1 маємо:

$$z(M_1) = z(0;1) = 2 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 0^2 - 6 \cdot 1^2 - 0 \cdot 1 + 0 + 6 \cdot 1 = 2.$$

Точка M_1 – перша в «списку підозрюваних».

Дослідимо точки границі на ділянках AB, AC, BC окремо.

до її границі, ми зменшуємо кількість змінних на одиницю, тобто знову зводимо досліджувану функцію до функції однієї змінної: $z(y) = f(\psi(y), y)$ або $z(t) = f(x(t), y(t))$ відповідно.

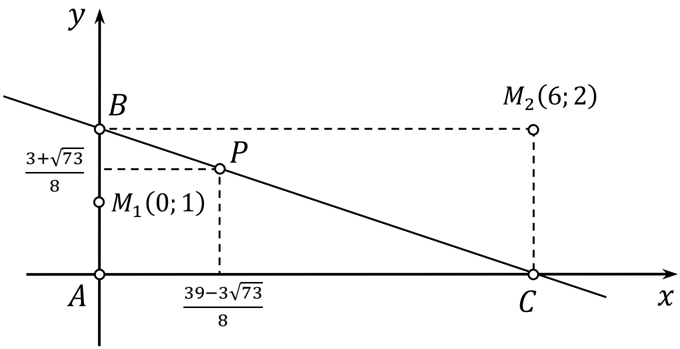


Рисунок 4.14 – До прикладу 4.40

На ділянці AB маємо: $x = 0$, $y \in [0; 2]$. Функція $z(x, y)$ перетворюється на функцію одного аргументу: $z(y) = 2y^3 - 6y^2 + 6y$. До «списку підозрюваних» додамо критичні точки функції $z(y)$ на інтервалі $y \in [0; 2]$, а також кінці цього інтервалу. Критична точка виникає з рівняння $\frac{dz}{dy} = 0$. Маємо: $6y^2 - 12y + 6 = 0$, звідки $y = 1$. Це відповідає точці M_1, яку до порівняння вже додано. Крім того, за рахунок кінців інтервалу $y = 0$, $y = 2$ до «списку підозрюваних» включаємо також точки A і B. Маємо:

$$z(A) = z(0; 0) = 0, \qquad z(B) = z(0; 2) = 4.$$

На ділянці AC маємо: $x \in [0; 6]$, $y = 0$. Функція $z(x, y)$ перетворюється на функцію одного аргументу: $z(x) = \frac{x^2}{12} + x$. До «списку підозрюваних» додамо критичні точки функції $z(x)$ на інтервалі $x \in [0; 6]$, а також кінці цього інтервалу. Критична точка виникає з рівняння $\frac{dz}{dx} = 0$. Маємо: $\frac{x}{6} + 1 = 0$, звідки $x = -6$. Ця точка не потрапляє на інтервал $x \in [0; 6]$; її потрібно відкинути. Залишається до «списку підозрюваних» додати кінці інтервалу: точку A (при $x = 0$) і точку C (при $x = 6$). Але точка A в цьому списку вже є. Додамо лише точку C. Маємо:

$$z(C) = z(6; 0) = 9.$$

Розглянемо ділянку BC. Рівняння прямої BC «у відрізках»: $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$, звідки $x = 6 - 3y$, причому $y \in [0; 2]$. Функція $z(x, y)$

знову перетворюється на функцію одного аргументу. Підставляючи вираз $x = 6 - 3y$ до виразу для досліджуваної функції, отримуємо:

$$z(y) = 2y^3 + \frac{1}{12}(6-3y)^2 - 6y^2 - (6-3y)y + (6-3y) + 6y.$$

Зводимо подібні:

$$z(y) = 2y^3 - \frac{9}{4}y^2 - 6y + 9.$$

Зараз має сенс перевірити правильність зведення подібних. Значення $y = 2$ відповідає точці B. Маємо:

$$z(2) = 2 \cdot 2^3 - \frac{9}{4} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 9 = 16 - 9 - 12 + 9 = 4 = z(B).$$

Значення $y = 0$ відповідає точці C. Маємо:

$$z(0) = 2 \cdot 0^3 - \frac{9}{4} \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 = z(C).$$

Кінцям інтервалу $y \in [0;2]$ відповідають точки B і C. Але їх до «списку підозрюваних» вже долучено. Залишається знайти критичну точку з рівняння $\frac{dz}{dy} = 0$. Маємо: $6y^2 - \frac{9}{2}y - 6 = 0$, $4y^2 - 3y - 4 = 0$, звідки $y = \frac{3\pm\sqrt{73}}{8}$. При виборі знаку «мінус» отримуємо від'ємне значення. Воно не потрапляє на інтервал $y \in [0;2]$; його потрібно відкинути. Тоді $y = \frac{3+\sqrt{73}}{8} \approx 1{,}44 \in [0;2]$. Відповідна абсциса $x = 6 - 3y = \frac{39-3\sqrt{73}}{8}$. Отримали підозрілу точку $P\left(\frac{39-3\sqrt{73}}{8}; \frac{3+\sqrt{73}}{8}\right)$. Для неї

$$z(P) = z\left(\frac{39-3\sqrt{73}}{8}; \frac{3+\sqrt{73}}{8}\right) = \frac{837-73\sqrt{73}}{128} \approx 1{,}67.$$

Складання «списку підозрюваних» завершено. Тепер достатньо серед значень $z(M_1)$, $z(A)$, $z(B)$, $z(C)$, $z(P)$ обрати найбільше і найменше. Остаточна відповідь: найменше значення досліджуваної функції $z(x,y)$ в трикутній області ABC дорівнює нулю і досягається в точці $A(0;0)$, а найбільше – дорівнює 9 і досягається в точці $C(6;0)$.

Зауважимо, в типових ситуаціях точки, стаціонарні за першим диференціалом dz (в нащому випадку – точка M_1) зазвичай потрапляють всередину області, а не на її границю. І навіть в цьому разі немає потреби ідентифікувати їх (встановлювати, чи є вони точками екстремуму, і якого саме). $\triangleright$

4.15 Питання для перевірки

1. Що таке функція багатьох змінних? Наведіть приклади.

2. Чому функцію багатьох змінних називають функцією точки? Як розуміють термін «точка» в цьому контексті?

3. Що таке область визначення функції двох змінних? Наведіть приклади.

4. Яка геометрична відмінність областей визначення функцій двох і трьох змінних?

5. Як може виглядати «графік» функції двох змінних? Які ще є сучасні можливості графічного подання функцій багатьох змінних?

6. Що таке ізолінія (лінія рівня)?

7. Що таке δ-окіл точки M_0 у багатовимірному просторі?

8. Нехай M_0 – точка у тривимірному просторі. Яку форму має δ-окіл точки M_0?

9. Що таке границя функції багатьох змінних в точці?

10. Нехай задано функцію двох змінних і точку M_0. Чи правильно казати: якщо існує подвійна границя функції в точці, то існує і повторна границя?

11. Нехай задано функцію двох змінних і точку M_0. Чи правильно казати: якщо існує повторна границя функції в точці, то існує і подвійна границя?

12. Яку функцію багатьох змінних називають неперервною в даній точці?

13. Сформулюйте означення частинних похідних. Якими символами можут бути позначені частинні похідні?

14. Як виглядає рівняння нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ в даній точці?

15. Як виглядає рівняння площини, дотичної до поверхні $z = = f(x, y)$ в даній точці?

16. Що називають диференціалом функції двох змінних?

17. Як обчислюють диференціал функції двох змінних?

18. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції двох змінних?

19. Що таке функція двох змінних, диференційовна в точці?

20. Чи правильно казати: якщо функція двох змінних є диференційовною в точці, то існують її частинні похідні в цій точці?

21. Чи правильно казати: якщо існують частинні похідні функції двох змінних в точці, то вона є диференційовною в цій точці?

22. Що таке похідна функції двох змінних за напрямком даного вектора?

23. Як практично обчислити похідну функції двох змінних за напрямком даного вектора, якщо відомі її частинні похідні і напрямні косинуси даного вектора?

24. Що таке набла? Які операції позначає цей символ?

25. Що таке градієнт?

26. Як практично обчислити похідну функції двох змінних за напрямком даного вектора, якщо відомі її градієнт і координати даного вектора?

27. Куди спрямований вектор градієнту?

28. Який зміст модуля вектора градієнту?

29. Нехай задано функцію двох змінних. Як визначити напрямок дотичної до лінії рівня в даній точці?

30. Нехай функцію однієї змінної $y = y(x)$ задано неявно рівнянням $F(x, y) = 0$. За якою формулою знаходять похідну $\frac{dy}{dx}$ з використанням частинних похідних функції F?

31. Нехай функцію двох змінних $z = z(x, y)$ задано неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$. За якими формулами знаходять частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ з використанням частинних похідних функції F?

32. Нехай $z = z(x(t), y(t))$ – складна функція однієї змінної t. За якою формулою знаходять похідну $\frac{dz}{dt}$ з використанням частинних похідних z'_x, z'_y?

33. Нехай $z = z(x, y(x))$ – складна функція однієї змінної x. За якою формулою знаходять похідну $\frac{dz}{dx}$ з використанням частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$?

34. Нехай $z = z(u(x, y), v(x, y))$ – складна функція двох змінних x, y. За якими формулами знаходять частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$?

35. Що таке частинні похідні вищих порядків?

36. Що таке мішані частинні похідні?

37. Нехай $u = u(x, y, z)$ – функція трьох змінних, диференційовна достатню кількість разів. Скільки *різних* мішаних частинних похідних другого порядку вона має?

38. За яких умов друга мішана частинна похідна функції двох змінних не залежить від порядку диференціювання?

39. За якими формулами обчислюють диференціали вищих порядків функції двох змінних? Проведіть аналогію з біномом Ньютона.

40. За якими формулами обчислюють вищі диференціали вищих порядків функції трьох змінних?

41. Як виглядає формула Тейлора функції двох змінних? Запишіть явний вигляд доданків першого, другого і третього порядків.

42. Що таке точка локального мінімуму? Що таке локальний мінімум?

43. Що таке точка локального максимуму? Що таке локальний максимум?

44. З яких двох етапів складається дослідження функції багатьох змінних на екстремум?

45. В чому полягає необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних?

46. Чи є правильним твердження: якщо диференціал функції багатьох змінних в деякій точці тотожно дорівнює нулю, то в цій точці досягається екстремум?

47. Чи є правильним твердження: якщо в деякій точці диференційовна функція багатьох змінних досягає екстремуму, то диференціал функції в цій точці тотожно дорівнює нулю?

48. Як спростувати або підтвердити підозру про екстремум функції двох змінних в критичній точці?

49. Як спростувати або підтвердити підозру про екстремум функції трьох змінних в критичній точці?

50. Що таке умовний екстремум? Для яких точок δ-околу підозрілої точки M_0 мають бути виконані нерівності означення умовного екстремуму?

51. В яких випадках при дослідженні функції двох змінних на умовний екстремум можна обійтись без функції Лагранжа?

52. Як складають функцію Лагранжа при дослідженні функції двох змінних на умовний екстремум?

53. Як виглядає необхідна умова умовного екстремуму? Чим вона відрізняється від необхідної умови екстремуму?

54. Як спростувати або підтвердити підозру про умовний екстремум функції двох змінних?

55. Сформулюйте першу і другу теореми Вейєрштрасса, на яких базується знаходження найбільшого і найменшого значень функції багатьох змінних в даній області.

56. Опишіть порядок практичних дій при знаходженні найбільшого і найменшого значень функції багатьох змінних в даній області.

5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

«При вивченні наук
задачі корисніші за правила».
І. Ньютон

5.1 Границі. Функції однієї змінної

В задачах 1-7 правило Лопіталя не використовувати.

Задача 1. Обчислити границю послідовності.

В-1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{2n+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^3+1}$.

В-2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n}{2n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+5n}{2n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n}{2n^4+1}$.

В-3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{3+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n^3}{3+2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{3+2n^2}$.

В-4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+n^3}{5-n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+n^4}{5-n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+n^2}{5-n^3}$.

В-5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{3+4n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{3+4n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+5}{3+4n^2}$.

В-6. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-n^2}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-n^2}{n^3+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-n^2}{n^2+1}$.

В-7. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n^4}{1+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n^4}{1+n^4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n^4}{1+n^5}$.

В-8. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-4}{n^2+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-4}{n^3+2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-4}{n^4+2n}$.

В-9. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n^5}{8+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n^5}{8+n^5}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n^5}{8+n^6}$.

В-10. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3+5}{3n^2+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+5}{3n^2+2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3+5}{3n^4+2n}$.

В-11. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n+2}$.

В-12. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^3+4n}{3n^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^3+4n}{3n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^2+4n}{3n^3+1}$.

В-13. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^2+4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{n^3+4}$.

В-14. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4+2}{n^4+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+2}{n^4+2n}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4+2}{n^3+2n}$.

В-15. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-n^2}{2+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-n^2}{2+n^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-n^3}{2+n^2}$.

Задача 2. Обчислити границю функції.

В-1. а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x^2-3x+2)^3}$.

В-2. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{(x-1)^3}$.

В-3. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^2-5x+6)^2}$.

В-4. а) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{(x-4)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\left(x^2-16\right)^3}{(x-4)^2}$.

В-5. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^3}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^3}{(x^2-x-2)^4}$.

В-6. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(x^2-7x+12\right)^2}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{(x-3)^2}$.

В-7. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x^2+3x+2)^3}$.

В-8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2-6x+5\right)^3}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{(x-1)^2}$.

В-9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{(x^2-6x+8)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^2-6x+8}$.

В-10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{(x-2)^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2+x-6\right)^3}{x-2}$.

В-11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x^2+3x-4)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{(x^2+3x-4)^2}$.

В-12. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x-8\right)^2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)^2}$.

В-13. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{x^2+4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{(x^2+4x+3)^2}$.

В-14. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{x^2+6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{(x^2+6x+5)^2}$.

В-15. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\left(x^2-3x-10\right)^3}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{(x-5)^2}$.

Задача 3. Обчислити границю функції.

В-1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$. В-3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+4x}-3}{x-2}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{1+3x}-2}$. В-5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$. В-6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$. В-8. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$. В-9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{6x-3}-3}{x-2}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x+4}-1}{x+1}$. В-11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$. В-12. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. В-14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{6x+19}-5}{x-1}$. В-15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}-4}{x-2}$.

Задача 4. Обчислити границю функції.

В-1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$. В-3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-1}\right)^{x}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{x^2}$. В-5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3x}$. В-6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{2x}$. В-8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{x^3}$. В-9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-7}{5x+7}\right)^{x}$. В-11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{4-x}\right)^{2x}$. В-12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-5}\right)^{2x}$. В-14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{\frac{x}{4}}$. В-15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+2}{x^4+3}\right)^{x^4}$.

Задача 5. Обчислити границю функції.

В-1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sin \pi x}$. В-3. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. В-5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$. В-6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} x}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$. В-8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$. В-9. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos x-\cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. В-11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos 2x}$. В-12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi-2\arccos x}{x}$. В-14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$. В-15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{6x-\pi}$.

Задача 6. Обчислити границю функції.

В-1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{e^{x}-e^{\pi}}{\sin x}$. В-3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{x+1}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{tg} 3\pi x}$. В-5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^8-1}$. В-6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{e^{x}-e^{3}}{\sqrt{x+1}-2}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^{x}-1)}{e^{x^2}-1}$. В-8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x\ln(1+x)}{1-\cos 2x}$. В-9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x-\sin x}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$. В-11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg} x}$. В-12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x+x^2}$. В-14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2x^2\right)}{x^2-x^3}$. В-15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2+x^5)}$.

Задача 7. Обчислити границю функції.

В-1. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x^{47}}\right)^{48}-x^{48}\right]$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x^{47}}\right)^{48}-x^{47}\right]$.

В-2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-x^3\right)$.

В-3. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2x}+6e^{x}}-e^{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{3x}+6e^{x}}-e^{x}\right)$.

В-4. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x^3+6x^2}-x\right)$.

В-5. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+\frac{2}{x}}-e^{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x+\frac{2}{x}}-e^{x}\right)$.

В-6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(e^{x}+e^{-4x}\right)^{5}-e^{5x}\right]$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(e^{x}+e^{-4x}\right)^{5}-e^{4x}\right]$.

В-7. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{e^{3x}+12e^{2x}}-e^{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{e^{4x}+12e^{2x}}-e^{x}\right)$.

В-8. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+8x^3}-x^3\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+8x^3}-x^4\right)$.

В-9. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{x^8}\right)^{5}-x^{10}\right]$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{1}{x^8}\right)^{5}-x^{10}\right]$.

В-10. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^8+12x^6}-x^2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^8+12x^6}-x\right)$.

В-11. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+3e^{-x}}-e^x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x+3e^{-x}}-e^x\right)$.

В-12. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+15x^4}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+15x^4}-x\right)$.

В-13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6}{x}-\frac{12}{2x+x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6}{x^2}-\frac{12}{2x+x^2}\right)$.

В-14. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+8x^7}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^9+8x^7}-x\right)$.

В-15. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[7]{x^{14}-21x^{12}}-x^2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[7]{x^{14}-21x^{12}}-x\right)$.

Задача 8. Обчислити границю функції за правилом Лопіталя.

В-1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x-\operatorname{tg} x}$. В-3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1+x}-1}$. В-5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$. В-6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\operatorname{arctg} x}$. В-8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\sin x}$. В-9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{\operatorname{tg} x-x}$. В-11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^2}$. В-12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^x-e^{-x}-2x}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln(1+x^2)}$. В-14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\arcsin x-x}$. В-15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^3}$.

Задача 9. Обчислити границю функції за правилом Лопіталя.

В-1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos 3x}$. В-2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. В-3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$.

В-4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x}$. В-5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$. В-6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

В-7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}$. В-8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$. В-9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$.

В-10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{tg}^2 x}$. В-11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x)^5}-1-\frac{5}{2}x}{x^2}$. В-12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^2}-1}{x^2}$.

В-13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2+x^5}$. В-14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. В-15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x^2}$.

Задача 10. Нехай $x\to 0$. Встановити порядок малості нескінченно малої величини $\beta(x)$ по відношенню до нескінченно малої величини $\alpha(x)=x$.

В-1. $\beta(x)=e^{2x^2+3x^3}-1$. В-2. $\beta(x)=\operatorname{tg}^3 2x-x^2$.

В-3. $\beta(x)=\ln(1+x^3-5x^2)$. В-4. $\beta(x)=\operatorname{arctg}(3x^5+5x^3)$.

В-5. $\beta(x)=\sin\left(x^2+2\sqrt{x^5}\right)$. В-6. $\beta(x)=\sqrt{1+x^3-x^2}-1$.

В-7. $\beta(x)=\left(1+x^2\right)^{13}-1$. В-8. $\beta(x)=\ln\left(\cos^2 x\right)$.

В-9. $\beta(x)=e^{x+x\sqrt{x}}-1$. В-10. $e^{\cos^2 x}-e$.

В-11. $\beta(x)=\left(x^2+3x^3\right)^{13}$. В-12. $\beta(x)=\operatorname{tg}\left(x^3-x^2\right)$.

В-13. $\beta(x)=\sqrt{1-\cos x}$. В-14. $\beta(x)=\sqrt[3]{1+6x^4-9x^2}$.
В-15. $\beta(x)=\sqrt{\ln(1+x^4)}$.

Задача 11. Знайти похідну функції $y=f(x)$ в точці x_0.

В-1. а) $y=\ln(3x-5)$, $x_0=2$; б) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{12}$.
В-2. а) $y=e^{x^2-2x}$, $x_0=2$; б) $y=\operatorname{tg}2x$, $x_0=\frac{\pi}{8}$.
В-3. а) $y=\ln\left(x^2-3\right)$, $x_0=2$; б) $y=\arcsin(2x+1)$, $x_0=-\frac{1}{2}$.
В-4. а) $y=\frac{\cos\left(x^2\right)}{\sqrt{\pi}}$, $x_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; б) $y=e^{x^2-9}$, $x_0=3$.
В-5. а) $y=2\ln\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)$, $x_0=2$; б) $y=\operatorname{arctg}(2x-1)$, $x_0=1$.
В-6. а) $y=e^{x^3-x}$, $x_0=1$; б) $y=\frac{\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{3}}$, $x_0=0$.
В-7. а) $y=16\arcsin\frac{x}{10}$, $x_0=6$; б) $y=\ln\left(2x^3-1\right)$, $x_0=1$.
В-8. а) $y=e^{x^4-1}$, $x_0=1$; б) $y=\frac{\operatorname{tg}2x^2}{\sqrt{2\pi}}$, $x_0=\sqrt{2\pi}$.
В-9. а) $y=3\ln\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)$, $x_0=3$; б) $y=e^{\sin 2x}$, $x_0=0$.
В-10. а) $y=e^{\operatorname{tg}3x}$, $x_0=0$; б) $y=\ln(2x-3)$, $x_0=2$.
В-11. а) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2+3x\right)$, $x_0=0$; б) $y=e^{1+x-\cos x}$, $x_0=0$.
В-12. а) $y=5\sqrt{x^2+9}$, $x_0=4$; б) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.
В-13. а) $y=2\ln\left(x^2+x\right)$, $x_0=1$; б) $y=18\sqrt[3]{2x+6}$, $x_0=1$.
В-14. а) $y=6e\sqrt{\ln(x+e)}$, $x_0=0$; б) $y=e^{\sin(x-\beta)}$, $x_0=\beta$.
В-15. а) $y=160\sqrt[5]{x+31}$, $x_0=1$; б) $y=\operatorname{arctg}\ln(x+1)$, $x_0=0$.

Задача 12. Знайти похідну заданої функції.

В-1. а) $y=\sin 2x\cdot\ln x$; б) $y=\frac{\cos 2x}{e^x}$.
В-2. а) $y=\sqrt{x^2+3x}\cdot e^{2x}$; б) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{arctg}x}$.
В-3. а) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot e^{x^2}$; б) $y=\frac{\arcsin 2x}{\ln(x+1)}$.
В-4. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}\cdot e^{\sin x}$; б) $y=\frac{\ln\left(x^2+3x\right)}{\operatorname{tg}x}$.
В-5. а) $y=e^{\cos 2x}\cdot\ln\sqrt{x+1}$; б) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{2x}}$.
В-6. а) $y=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot e^x$; б) $y=\frac{\sqrt{\ln(2x+5)}}{\cos 3x}$.
В-7. а) $y=e^{\sin 2x}\cdot\ln(2x-5)$; б) $y=\frac{\arcsin 2x}{x}$.
В-8. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\cdot\ln(3x+7)$; б) $y=\frac{e^{2x+3}}{\sin^2 x}$.
В-9. а) $y=\sin 3x\cdot\ln x$; б) $y=\frac{\operatorname{arctg}3x}{e^{2x+7}}$.
В-10. а) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot e^{\sin 2x}$; б) $y=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{3x+1}}$.
В-11. а) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\cdot e^{3-x^2}$; б) $y=\frac{\sqrt{2x+4}}{\sin x+\cos x}$.
В-12. а) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\ln(x-2)$; б) $y=\frac{e^{x^2+2x}}{\operatorname{arctg}x}$.
В-13. а) $y=\cos 2x\cdot\ln(x+1)$; б) $y=\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\sqrt[3]{x+1}}$.

В-14. а) $y=\sqrt{x^2+4x}\cdot\ln\left(x^2-4x\right)$; б) $y=\frac{\arcsin 2x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

В-15. а) $y=e^{\sqrt{x+3}}\cdot\sin 2x$; б) $y=\frac{\ln\left(x^3+x\right)}{x^2+1}$.

Задача 13. Знайти похідну показниково-степеневої функції, застосовуючи логарифмічне диференціювання.

В-1. $y=(\sin 2x)^x$. В-2. $y=(\cos 2x)^{\sqrt{x}}$. В-3. $y=(\operatorname{arctg} x)^{x^2}$.

В-4. $y=(\ln x)^{2x}$. В-5. $y=(\operatorname{tg} x)^{\ln x}$. В-6. $y=(\operatorname{arctg} x)^x$.

В-7. $y=x^{\operatorname{arctg} x}$. В-8. $y=\left(x^2+x\right)^x$. В-9. $y=(x+\sqrt{x})^{x^3}$.

В-10. $y=(x\sin x)^{x^2}$. В-11. $y=\left(x^2\ln x\right)^x$. В-12. $y=(x+2)^{\cos x}$.

В-13. $y=\left(x^2+1\right)^x$. В-14. $y=(\arcsin x)^x$. В-15. $y=x^{(e^x)}$.

Задача 14. Знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично.

В-1. $\begin{cases} x(t)=t+\ln t+5; \\ y(t)=t^3-t^2. \end{cases}$ В-2. $\begin{cases} x(t)=\sin 2t; \\ y(t)=t^2+t. \end{cases}$

В-3. $\begin{cases} x(t)=t-\frac{1}{t}; \\ y(t)=\ln(2t+1). \end{cases}$ В-4. $\begin{cases} x(t)=e^{3t}; \\ y(t)=\sin\ln t. \end{cases}$

В-5. $\begin{cases} x(t)=\operatorname{tg} t; \\ y(t)=t^4+2t. \end{cases}$ В-6. $\begin{cases} x(t)=e^{\cos t}; \\ y(t)=t+\ln t. \end{cases}$

В-7. $\begin{cases} x(t)=t^5+t^2; \\ y(t)=2t+\cos t. \end{cases}$ В-8. $\begin{cases} x(t)=t^3-t; \\ y(t)=\frac{1}{1-t}. \end{cases}$

В-9. $\begin{cases} x(t)=\sqrt{t^2+1}; \\ y(t)=\sin t+\operatorname{tg} t. \end{cases}$ В-10. $\begin{cases} x(t)=t^6-t^3; \\ y(t)=\operatorname{arctg} 2t. \end{cases}$

В-11. $\begin{cases} x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right); \\ y(t)=e^{3t}. \end{cases}$ В-12. $\begin{cases} x(t)=2t-t^5; \\ y(t)=\ln\left(t^2+1\right). \end{cases}$

В-13. $\begin{cases} x(t)=t^3+3t; \\ y(t)=\arcsin 2t. \end{cases}$ В-14. $\begin{cases} x(t)=\operatorname{arctg}(2t+1); \\ y(t)=t^2-\sin t. \end{cases}$

В-15. $\begin{cases} x(t)=t^3+2t; \\ y(t)=e^{\operatorname{tg} t}. \end{cases}$

Задача 15. В точці $M_0(x_0;y_0)$ обчислити похідну функції $y(x)$, заданої неявно.

В-1. $x^2+2xy+2y^2+4x+2y-11=0$, $M_0(1;1)$.

В-2. $x^2+2xy+y^2+4x+y-2=0$, $M_0(0;1)$.

В-3. $3x^2+xy+y^2+3x+2y-6=0$, $M_0(1;0)$.

В-4. $3x^2+xy-y^2+3x+2y-21=0$, $M_0(2;1)$.

В-5. $3x^2+xy-y^2+4x+2y-9=0$, $M_0(1;2)$.

В-6. $4x^2+xy+y^2+2x+4y-50=0$, $M_0(3;1)$.

В-7. $2x^2+xy+3y^2+3x+y-38=0$, $M_0(1;3)$.

В-8. $x^2 + xy + 3y^2 + 4x + 2y - 51 = 0$, $M_0(2;3)$.
В-9. $x^2 + xy + 3y^2 + x + 3y - 36 = 0$, $M_0(3;2)$.
В-10. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$, $M_0(-1;1)$.
В-11. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y - 30 = 0$, $M_0(3;0)$.
В-12. $x^2 + 5xy + y^2 + 4x + 4y - 32 = 0$, $M_0(0;4)$.
В-13. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 4y - 6 = 0$, $M_0(0;1)$.
В-14. $3x^2 + 4xy + y^2 + 2x - y - 34 = 0$, $M_0(2;2)$.
В-15. $2x^2 + 2xy + y^2 + 4x + y - 38 = 0$, $M_0(3;1)$.

Задача 16. Обчислити в першому наближенні та знайти відносну похибку.

В-1. $\sqrt{4{,}12}$. В-2. $(1{,}01)^{20}$. В-3. $\sqrt[3]{8{,}12}$.
В-4. $\sqrt{67{,}2}$. В-5. $\sqrt{36{,}24}$. В-6. $2{,}02^3$.
В-7. $\sqrt[4]{82{,}08}$. В-8. $\sqrt{15{,}2}$. В-9. $\cos 0{,}2$.
В-10. $\frac{1}{\pi}\operatorname{tg} 3{,}6^\circ$. В-11. $\sqrt[3]{126{,}5}$. В-12. $\sqrt{50{,}4}$.
В-13. $\sqrt[5]{33{,}6}$. В-14. $\sqrt[3]{29{,}7}$. В-15. $\sqrt[10]{1075{,}2}$.

Задача 17. Дослідити функцію і побудувати її графік.

В-1. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$. В-2. $y = \frac{1}{x^2+1}$. В-3. $y = \frac{x}{x^2-1}$.
В-4. $y = x + \frac{1}{x}$. В-5. $y = x - \frac{1}{x}$. В-6. $y = \frac{1}{x^2-2x}$.
В-7. $y = 2x - \frac{1}{x^2}$. В-8. $y = e^{-x^2}$. В-9. $y = xe^x$.
В-10. $y = x^2e^x$. В-11. $y = x\ln x$. В-12. $y = x^3 - 2x^2 + x$.
В-13. $y = \frac{1}{x^2-6x+8}$. В-14. $y = e^x + e^{-x}$. В-15. $y = \frac{e^x}{x}$.

Задача 18.

В-1. Всередину даного кола вписати прямокутник найбільшої площі. Яку частину площі кола складає площа цього прямокутника?

В-2. Всередину даної кулі вписати конус найбільшого об'єму. Яку частину об'єму кулі складає об'єм цього конуса?

В-3. Всередину даного прямокутного трикутника вписати прямокутник найбільшої площі так, щоб його суміжні сторони належали катетам. Яку частину площі трикутника складає площа цього прямокутника?

В-4. Всередину даної кулі вписати циліндр, який має найбільший об'єм. Яку частину об'єму кулі складає об'єм цього циліндра?

В-5. На постаменті висотою H стоїть пам'ятник висотою H. На якій відстані від постаменту повинен знаходитись спостерігач, щоб бачити пам'ятник під найбільшим кутом? Спостереження ведеться з поверхні землі. У відповіді надати відношення знайденої відстані до H.

В-6. Навколо кулі радіуса r описати конус з найменшою площею бічної поверхні.

В-7. Навколо кулі радіуса r описати правильну чотирикутну піраміду найменшого об'єму.

В-8. Відомо, що міцність брусу з прямокутним поперечним перерізом пропорціональна до ширини перерізу і до квадрату висоти перерізу. Знайти розміри брусу найбільшої міцності, який можна вирізати з колоди радіусом R.

В-9. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 16π м^3. Знайти радіус і висоту бака, якщо на його виготовлення витрачається найменша кількість матеріалу.

В-10. Потрібно виготовити конічну воронку з твірною L. Знайти висоту воронки, якщо її об'єм є найбільшим.

В-11. Дріт опором R розрізають на два шматки. Знайти опір кожного шматка, якщо при їх паралельному з'єднанні утворюється найбільший опір.

В-12. Знайти найменшу відстань між точковим предметом і його дійсним зображенням, утворюваним у збиральній лінзі з фокусною відстанню F. Предмет знаходиться на оптичній осі.

В-13. З дерева виготовили прямокутний паралелепіпед з квадратною основою. Знайти розміри паралелепіпеда, якщо на його фарбування витрачається найменша кількість фарби. Об'єм паралелепіпеда дорівнює V.

В-14. Серед усіх рівнобедрених трикутників з периметром $2p$ знайти той, що має найбільшу площу. У відповіді надати добуток усіх трьох сторін.

В-15. Всередину даного півкола вписати прямокутник найбільшої площі. Яку частину площі півкола складає площа цього прямокутника?

Задача 19. Заданий многочлен $f(x)$ розкласти за степенями двочлена $(x - x_0)$.

В-1. $f(x) = 4 - 10x + 18x^2 - 12x^3 + 3x^4$, $x_0 = 1$.
В-2. $f(x) = 21 - 36x + 25x^2 - 8x^3 + x^4$, $x_0 = 2$.
В-3. $f(x) = 7 + 17x + 21x^2 + 11x^3 + 2x^4$, $x_0 = -1$.
В-4. $f(x) = 2 + 12x + 19x^2 + 8x^3 + x^4$, $x_0 = -2$.

B-5. $f(x) = -2 - 4x + 18x^2 - 16x^3 + 4x^4$, $x_0 = 1$.
B-6. $f(x) = 3 + 27x + 27x^2 + 9x^3 + x^4$, $x_0 = -3$.
B-7. $f(x) = 3 - 3x + 9x^2 - 5x^3 + x^4$, $x_0 = 1$.
B-8. $f(x) = 9 - 6x + 7x^2 - 4x^3 + x^4$, $x_0 = 1$.
B-9. $f(x) = 6 + 10x + 13x^2 + 8x^3 + 2x^4$, $x_0 = -1$.
B-10. $f(x) = 5 - 3x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$, $x_0 = 1$.
B-11. $f(x) = 3 - 8x + 12x^2 - 6x^3 + x^4$, $x_0 = 2$.
B-12. $f(x) = 42 + 68x + 42x^2 + 11x^3 + x^4$, $x_0 = -2$.
B-13. $f(x) = -25 + 18x^2 - 8x^3 + x^4$, $x_0 = 3$.
B-14. $f(x) = 28 + 60x + 47x^2 + 16x^3 + 2x^4$, $x_0 = -2$.
B-15. $f(x) = 17 - 30x + 24x^2 - 8x^3 + x^4$, $x_0 = 2$.

5.2 Функції багатьох змінних

Задача 1. Знайти та зобразити на координатній площині Oxy область визначення заданої функції двох змінних.

B-1. $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x + 2 - y}$.
B-2. $f(x,y) = \ln\left(4(x + y - 1) - x^2 - y^2\right)$.
B-3. $f(x,y) = \sqrt{|x| + |y| - 2}$.
B-4. $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 - 25\right) + \sqrt{18 - (x-7)^2 - y^2}$.
B-5. $f(x,y) = \arcsin\frac{x^2+y^2+1}{26} + \sqrt{16y - 3x^2}$.
B-6. $f(x,y) = \ln\left(2\sqrt{x} - y\right) + \sqrt{y - x}$.
B-7. $f(x,y) = \arccos\frac{y-x-4}{2} \cdot \sqrt{y - x^2}$.
B-8. $f(x,y) = \sqrt{25 - (x-5)^2 - y^2} + \ln\left(|x - 5| - 3\right)$.
B-9. $f(x,y) = \ln\left(4x - x^2 - y^2\right) \cdot \arccos\left(\frac{x+y}{2} - 1\right)$.
B-10. $f(x,y) = \sqrt{y - |x|} + \arcsin\frac{x^2+y^2}{8}$.
B-11. $f(x,y) = \arccos\left(\frac{4x}{\pi} - 1\right) + \sqrt{y - \sin x}$.
B-12. $f(x,y) = \sqrt{y - e^x} \cdot \ln(x + y - 1)$.
B-13. $f(x,y) = \sqrt{x - y^2 - 1} \cdot \sqrt{29 - x^2 - y^2}$.
B-14. $f(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right) - \sqrt{x + y - 4}$.
B-15. $f(x,y) = \sqrt{4 - x - y^2} \cdot \ln(x + y - 2)$.

Задача 2. Задано функцію $z = f(x,y)$ двох змінних і точку $M_0(x_0, y_0)$. Обчислити різницю $f'_x(M_0) - f'_y(M_0)$.

B-1. $z = xy^x$, $M_0(1; e)$.
B-2. $z = 5y\sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(3; 4)$.
B-3. $z = x^3y^2$, $M_0(1; 1)$.
B-4. $z = 26\,\mathrm{arctg}\left(x + y^2\right)$, $M_0(1; 2)$.
B-5. $z = \sin\frac{x}{y}$, $M_0(0; 1)$.
B-6. $z = 4\sqrt{x^2 + xy}$, $M_0(1; 3)$.

В-7. $z=\frac{9xy}{x+y}$, $M_0(1;2)$. В-8. $z=3\ln\left(x^2-y^2\right)$, $M_0(2;1)$.
В-9. $z=\frac{x^2}{y^2+1}$, $M_0(1;0)$. В-10. $z=x^2y+2\sqrt{xy}$, $M_0(1;1)$.
В-11. $z=\frac{2(x-y)}{x+y}$, $M_0(1;1)$. В-12. $z=\sqrt{x^2+y^3}$, $M_0(1;0)$.
В-13. $z=e^{x^2-y^2}$, $M_0(1;-1)$. В-14. $z=6\ln\left(2x+3\sqrt{y}\right)$, $M_0(0;1)$.
В-15. $z=\frac{x^3}{y^2}$, $M_0(1;1)$.

Задача 3. Задано функцію $z=f(x,y)$ двох змінних і точку $M_0(x_0,y_0)$. Побудувати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ у відповідній точці $N_0(x_0,y_0,z_0)$.
В-1. $z=x^2y^3$, $M_0(1;1)$. В-2. $z=\ln\left(x^2+2xy\right)$, $M_0(1;0)$.
В-3. $z=xe^{y-x}$, $M_0(1;1)$. В-4. $z=3\sqrt{x^2-y^2}$, $M_0(5;4)$.
В-5. $z=\frac{2x}{y^2+1}$, $M_0(1;0)$. В-6. $z=\operatorname{arctg}\left(x^2-y\right)$, $M_0(2;4)$.
В-7. $z=y\cos\frac{y}{x}$, $M_0(1;0)$. В-8. $z=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$, $M_0(1;1)$.
В-9. $z=\frac{x^2y+1}{xy^2+1}$, $M_0(1;0)$. В-10. $z=\ln\left(x^2-y\right)$, $M_0(2;3)$.
В-11. $z=\frac{x^2+y}{xy}$, $M_0(1;1)$. В-12. $z=\left(x^2+2xy\right)^3$, $M_0(-1;1)$.
В-13. $z=\frac{4xy}{x+y}$, $M_0(1;1)$. В-14. $z=x^2+y^x$, $M_0(-1;1)$.
В-15. $z=2\sqrt{xy}$, $M_0(1;4)$.

Задача 4. Знайти диференціал функції $z=f(x,y)$ двох змінних.
В-1. $z=\ln\left(2x^2+3y^3\right)$. В-2. $z=xy^x$. В-3. $z=\sin(xy)$.
В-4. $z=\operatorname{arctg}(2x+3y)$. В-5. $z=e^{\frac{y}{x}}$. В-6. $z=\ln\frac{x^2+1}{y}$.
В-7. $z=\sin\left(x^2+y^3\right)$. В-8. $z=\cos\frac{x}{y}$. В-9. $z=\frac{x^2+1}{y^2+1}$.
В-10. $z=\cos\left(y^3-x^2\right)$. В-11. $z=y^{2x}$. В-12. $z=\sqrt{x^4+y^6}$.
В-13. $z=e^{2x}\sin 3y$. В-14. $z=x^3y^5$. В-15. $z=\operatorname{tg}\frac{3x}{2y+1}$.

Задача 5. Функцію $z=f(x,y)$ задано неявно. Обчислити її частинні похідні в точці $M_0(1;1)$.
В-1. $3x^2-2xy+y^2+z^3+z-4=0$.
В-2. $4x^2-4xy+2y^2+z^3+z-4=0$.
В-3. $5x^2-6xy+3y^2+z^3+z-4=0$.
В-4. $6x^2-8xy+4y^2+z^3+z-4=0$.
В-5. $x^2+2xy-y^2+z^3+z-4=0$.
В-6. $4xy-2y^2+z^3+z-4=0$.
В-7. $-x^2+6xy-3y^2+z^3+z-4=0$.
В-8. $-2x^2+8xy-4y^2+z^3+z-4=0$.
В-9. $7x^2-6xy+y^2+z^3+z-4=0$.

B-10. $8x^2 - 8xy + 2y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$
B-11. $9x^2 - 6xy - y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$
B-12. $8x^2 - 4xy - 2y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$
B-13. $7x^2 - 2xy - 3y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$
B-14. $6x^2 - 4y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$
B-15. $5x^2 + 2xy - 5y^2 + z^3 + z - 4 = 0.$

Задача 6. Обчислити похідну функції $z = f(x, y)$ в точці M_0 за напрямком вектора $\overrightarrow{\ell}$.

B-1. $z = 10x^2y - 5xy^3$, $M_0(3; 1)$, $\overrightarrow{\ell} = \{-3; 4\}$.
B-2. $z = 5xe^{x-y}$, $M_0(2; 2)$, $\overrightarrow{\ell} = \{4; 3\}$.
B-3. $z = y \sin(xy)$, $M_0(0; 5)$, $\overrightarrow{\ell}\{3; -4\}$.
B-4. $z = \ln\left(x^2 - y\right)^5$, $M_0(1; 0)$, $\overrightarrow{\ell}\{3; 4\}$.
B-5. $z = 10\sqrt{6x^2 - 2y}$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{-3; -4\}$.
B-6. $z = \left(x^2 + xy - y^2\right)^5$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{3; -4\}$.
B-7. $z = 5 \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, $M_0(3; 0)$, $\overrightarrow{\ell}\{4; 3\}$.
B-8. $z = 5 \arcsin(2x - y)$, $M_0(2; 4)$, $\overrightarrow{\ell}\{4; -3\}$.
B-9. $z = 5 \operatorname{arctg}\left(x^2 - 3y\right)$, $M_0(3; 3)$, $\overrightarrow{\ell}\{3; 4\}$.
B-10. $z = 5xy^x$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{-3; 4\}$.
B-11. $z = \frac{x^2}{y^2+1}$, $M_0(5; 0)$, $\overrightarrow{\ell}\{3; -4\}$.
B-12. $z = \frac{10x}{y} + \frac{15y}{x}$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{-3; 4\}$.
B-13. $z = 13x^2y^3$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{-5; 12\}$.
B-14. $z = \left(x^3 + 2xy - 2y^2\right)^{13}$, $M_0(1; 1)$, $\overrightarrow{\ell}\{5; 12\}$.
B-15. $z = \ln\left(x^2 + 2xy - 4\right)^{13}$, $M_0(1; 2)$, $\overrightarrow{\ell}\{5; -12\}$.

Задача 7. За умови попередньої задачі знайти напрямний вектор дотичної до лінії рівня в точці M_0.

Задача 8. Дослідити задану функцію на екстремуми.

B-1. $z = 2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 - xy + 6x + y.$
B-2. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 6x + y.$
B-3. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 18x + y.$
B-4. $z = 2x^3 + 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 6x + y.$
B-5. $z = 2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 + xy + 18x + y.$
B-6. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 + xy + 6x + y.$
B-7. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 + xy - 6x + y.$
B-8. $z = 2x^3 + 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 + xy + 6x + y.$
B-9. $z = 2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 + xy + 12x.$

В-10. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 + xy.$
В-11. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 + xy - 12x.$
В-12. $z = 2x^3 + 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 + xy.$
В-13. $z = 2x^3 - 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 - xy + 2y.$
В-14. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 12x + 2y.$
В-15. $z = 2x^3 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 24x + 2y.$
В-16. $z = 2x^3 + 6x^2 + \frac{1}{12}y^2 - xy - 12x + 2y.$

Задача 9. Дослідити задану функцію $z = z(x, y)$ на умовні екстремуми за умови $\varphi(x, y) = 0$ методом Лагранжа.

В-1. $\begin{cases} z(x,y) = y^3 + x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y; \\ \varphi(x,y) = x + y + 1. \end{cases}$

В-2. $\begin{cases} z(x,y) = 4y^3 + 3x^2 - 19xy - 2y^2 + x - 3y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 2. \end{cases}$

В-3. $\begin{cases} z(x,y) = 4y^3 + 2x^2 + 15xy + 28y^2 - x - 5y; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 3. \end{cases}$

В-4. $\begin{cases} z(x,y) = y^3 + x^2 - 15xy + 8y^2 + x - 5y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 1. \end{cases}$

В-5. $\begin{cases} z(x,y) = 3y^3 + x^2 + 11xy - 3y^2 + x - 2y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 2. \end{cases}$

В-6. $\begin{cases} z(x,y) = 4y^3 + 3x^2 + xy - 16y^2 + x; \\ \varphi(x,y) = x + 2y - 2. \end{cases}$

В-7. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 + x^2 - 10xy + 18y^2 + x - 5y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 2. \end{cases}$

В-8. $\begin{cases} z(x,y) = y^3 + x^2 + 8xy + 9y^2 + x - 3y; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 1. \end{cases}$

В-9. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 + x^2 - 12xy + 23y^2 + x - 3y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 2. \end{cases}$

В-10. $\begin{cases} z(x,y) = y^3 + x^2 + 3xy - 4y^2 + x - 3y; \\ \varphi(x,y) = x - y + 2. \end{cases}$

В-11. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 + 5x^2 + 10xy - 15y^2 + 2x; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 4. \end{cases}$

В-12. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 - 2x^2 + 8xy + 27y^2 + x - 2y; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 2. \end{cases}$

В-13. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 - 2x^2 + 22xy + 81y^2 + x + y; \\ \varphi(x,y) = x + 3y + 1. \end{cases}$

В-14. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 + x^2 - 17xy - 23y^2 + x - 4y; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 2. \end{cases}$

В-15. $\begin{cases} z(x,y) = 2y^3 - 7x^2 - 6xy + 7y^2 + x; \\ \varphi(x,y) = x + 2y + 1. \end{cases}$

Задача 10. Знайти найбільше і найменше значення даної функції $z(x,y)$ в області трикутника OBC, де $O(0;0)$ – початок системи координат.

В-1. $z = x^3 + 3x^2 - 12xy + 4y^2 + 3x + 4y$, $B(0;3)$, $C(3;3)$.
В-2. $z = 2x^3 - 11x^2 + 4xy + y^2 + 8x - 14y$, $B(0;4)$, $C(4;0)$.
В-3. $z = x^3 - 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 7x - 16y$, $B(3;3)$, $C(3;0)$.
В-4. $z = x^3 - 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 9x$, $B(3;3)$, $C(3;0)$.
В-5. $z = -2x^3 + 9x^2 + 3y^2 - 12x - 12y$, $B(0;3)$, $C(3;0)$.
В-6. $z = x^3 - 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 15x - 6y$, $B(0;2)$, $C(2;2)$.
В-7. $z = 4x^3 - 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 12x - 12y$, $B(0;3)$, $C(-3;0)$.
В-8. $z = 3x^3 + x^2 + 4xy + 4y^2 - 15x - 12y$, $B(0;3)$, $C(3;0)$.
В-9. $z = 2x^3 - 3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y$, $B(0;3)$, $C(3;0)$.
В-10. $z = -x^3 + 4x^2 - 4xy - 2y^2 + 11x + 20y$, $B(3;2)$, $C(3;0)$.
В-11. $z = -2x^3 - x^2 + 4xy - 4y^2 - 4x + 20y$, $B(0;3)$, $C(-3;0)$.
В-12. $z = -3x^3 - 4x^2 - 8xy - 4y^2 + 25x + 16y$, $B(0;2)$, $C(2;0)$.
В-13. $z = 2x^3 + 9x^2 - 12xy + 2y^2 - 12x + 8y$, $B(0;2)$, $C(2;0)$.
В-14. $z = x^3 - 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x - 12y$, $B(0;3)$, $C(3;3)$.
В-15. $z = x^3 - 2x^2 + 4xy + y^2 - 7x - 8y$, $B(0;3)$, $C(3;0)$.

6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗКІВ

6.1 Границі. Функції однієї змінної

Задача 1. Обчислити границю послідовності:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n+7}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n^3+7}$.
Розв'язок.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{7}{n}}=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n}}=\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{2n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+\frac{2}{n}}{2+\frac{7}{n}}=\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n^3+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{2n^2+\frac{7}{n}}=0$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}$; б) ∞; в) 0.

Задача 2. Обчислити границю:
а) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{x^2-9x+14}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x^2-9x+14}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{(x^2-9x+14)^2}$.
Розв'язок.

а) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{x^2-9x+14}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{7-2}=\frac{1}{5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{x^2-9x+14}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 7}\frac{(x-7)^2}{(x-7)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{x-2}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{(x^2-9x+14)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)^2(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 7}\frac{1}{(x-7)(x-2)^2}=$
$=\infty$.

Відповідь: а) $\frac{1}{5}$; б) 0; в) ∞.

Задача 3. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

Розв'язок. За наявності невизначеності типу «нуль на нуль» домножимо на спряжене:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

Задача 4. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2x}\right)^x$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2+2x}\right)^x=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^2+2x\right)+(5-2x)}{x^2+2x}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5-2x}{x^2+2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5-2x}{x^2+2x}\right)^{\frac{x^2+2x}{5-2x}}\right]^{\frac{5-2x}{x^2+2x}\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-2x^2}{x^2+2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-2}{1+\frac{2}{x}}}=e^{\frac{0-2}{1+0}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{e^2}$.

Задача 5. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{(6x-\pi)^2}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{(6x-\pi)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\|\begin{matrix}t=x-\frac{\pi}{6}\\ t\to 0\\ x=t+\frac{\pi}{6}\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{36t^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{36t^2}=\frac{1}{18}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

Відповідь: $\frac{1}{18}$.

Задача 6. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{x+4}-e^3}{\ln(2+x)}$.

Розв'язок.

$$\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+4}-e^3}{\ln(2+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left\|\begin{matrix}t=x+1\\ t\to 0\\ x=t-1\end{matrix}\right\|=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+3}-e^3}{\ln(1+t)}=$$

$$=e^3\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{\ln(1+t)}=e^3\lim_{t\to 0}\frac{\frac{e^t-1}{t}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^3\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=e^3\cdot\frac{1}{1}=e^3.$$

Відповідь: e^3.

Задача 7. Обчислити границю функції:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}-x^{29}\right];$$

$$\text{б)} \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}-x^{28}\right].$$

Розв'язок. а) Позначимо $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}$, $g(x)=x^{29}$. Очевидно, маємо невизначеність типу $[\infty-\infty]$. Порівняємо порядки росту:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}}{x^{29}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x^2\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)\right]^{14}}{x^{29}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{28}\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)^{14}}{x^{29}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)^{14}}{x}=0.$$

Отже, величина $g(x)$ є величиною більш високого порядку росту, і невизначеність розкривається на її користь, тобто відповіддю є мінус нескінченність. Справді:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}-x^{29}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{29}\left(\frac{\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}}{x^{29}}-1\right)=-\infty.$$

Тут дріб, як ми довели, прямує до нуля, а тоді «велика дужка» прямує до мінус одиниці.

б) Позначимо $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}$, $g(x)=x^{28}$. Тепер, як легко встановити, величини $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великими одного порядку росту. Маємо:

$$\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}-x^{28}=\left[x^2\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)\right]^{14}-x^{28}=$$

$$=x^{28}\left[\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)^{14}-1\right]=\frac{\left(1+\frac{1}{7x^{28}}\right)^{14}-1}{\frac{1}{x^{28}}}.$$

Тоді при заміні $t=\frac{1}{x^{28}}$, $t\to 0$, границя цього відношення стає рівною

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2+\frac{1}{7x^{26}}\right)^{14}-x^{28}\right]=[\infty-\infty]=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1+\frac{t}{7}\right)^{14}-1}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{14\cdot\frac{t}{7}}{t} = 2.$$

Скористались таблицею еквівалентів, п. 8.
Відповідь: а) $-\infty$; б) 2.

Задача 8. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$ за правилом Лопіталя.
Розв'язок.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)'}{(x^3)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+x}-1+x\right)'}{(3x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+1}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{(1+x)^2}+1\right)'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6} = \frac{\frac{2}{(1+0)^3}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.
Задача 9. За правилом Лопіталя обчислити границі:
а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2}{x^3}$.
Встановити також порядок малості чисельника.
Розв'язок. а) Маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2\right)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3-1+2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{-\frac{2}{3}}-1+2x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((1+3x)^{-\frac{2}{3}}-1+2x\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{5}{3}}\cdot 3+2}{2} = 0.$$

Отже, виявляється, що $\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2 = o(x^2)$.

б) Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+3x}-1-x+x^2\right)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3-1+2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{-\frac{2}{3}}-1+2x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+3x)^{-\frac{2}{3}}-1+2x\right)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{5}{3}}\cdot 3+2}{6x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+3x)^{-\frac{5}{3}}+2}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-2(1+3x)^{-\frac{5}{3}}+2\right)'}{(6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{10}{3}(1+3x)^{-\frac{8}{3}}\cdot 3}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{10}{6}(1+3x)^{-\frac{8}{3}}=\frac{5}{3}\neq 0.$$

Отже, чисельник має третій порядок малості порівняно з x.
Відповідь: а) 0; б) $\frac{5}{3}$. Чисельник має третій порядок малості порівняно з x.

Задача 10. Нехай $x\to 0$. Встановити порядок малості нескінченно малої величини $\beta(x)=\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x}$ по відношенню до нескінченно малої величини $\alpha(x)=x$.

Розв'язок.

Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\beta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=1\cdot 0=0.$$

Отже, $\beta(x)$ – і справді нескінченно мала величина. Нехай порядок малості $\beta(x)$ відносно $\alpha(x)$ дорівнює n. Тоді за означенням порядку малості границя

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^n}$$

існує, є скінченною і відмінною від нуля. Маємо:

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^{n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^{n+1}}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{\cos x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2}{4x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}x^{2-n}.$$

Тут перші три границі існують, є скінченними і відмінними від нуля. Отже, оскільки

$$\lim_{x\to 0}x^{2-n} = \begin{cases} 1, & n=2; \\ \infty, & n>2; \\ 0, & n<2, \end{cases}$$

потрібно покласти $n = 2$.

Відповідь: $\beta(x)$ має другий порядок малості відносно $\alpha(x)$.

Задача 11. Знайти похідну функції $y = f(x)$ в точці x_0:

а) $y = \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; б) $y = e^{x^2+3x}$, $x_0 = 0$.

Розв'язок. а)

$$y'(x) = \left(\sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)\right)' =$$

$$= \cos\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)' = \cos\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot 7 = 7\cos\left(7x-\frac{\pi}{6}\right).$$

Тоді

$$y'(x_0) = 7\cos\left(7\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right) = 7\cos\pi = -7.$$

б)

$$y'(x) = \left(e^{x^2+3x}\right)' = e^{x^2+3x}\cdot\left(x^2+3x\right)' = (2x+3)e^{x^2+3x}.$$

Тоді

$$y'(x_0) = (2\cdot 0+3)e^0 = 3.$$

Відповідь: а) -7; б) 3.

Задача 12. Знайти похідну заданої функції:

$$\text{а) } y = \operatorname{tg} x\cdot\ln\left(x^2+1\right); \qquad \text{б) } y = \frac{\sqrt{x^3+2x}}{e^x}.$$

Розв'язок. а) Диференціюємо як добуток:

$$y' = \left(\operatorname{tg} x\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)' = (\operatorname{tg} x)'\cdot\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{tg} x\cdot\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot \left(x^2+1\right)' =$$

$$= \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos^2 x} + \frac{2x \operatorname{tg} x}{x^2+1};$$

б) Диференціюємо як дріб:

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x^3+2x}}{e^x}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^3+2x}\right)' \cdot e^x - \sqrt{x^3+2x} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}} \cdot \left(x^3+2x\right)' \cdot e^x - \sqrt{x^3+2x} \cdot e^x}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}} - \sqrt{x^3+2x}}{e^x} = \frac{3x^2+2-2\left(x^3+2x\right)}{e^x \cdot 2\sqrt{x^3+2x}} =$$

$$= \frac{-2x^3+3x^2-4x+2}{2e^x\sqrt{x^3+2x}}.$$

Відповідь: а) $y' = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos^2 x} + \frac{2x \operatorname{tg} x}{x^2+1}$; б) $y' = \frac{-2x^3+3x^2-4x+2}{2e^x\sqrt{x^3+2x}}$.

Задача 13. Знайти похідну функції $y(x) = (\arcsin x)^{x^3}$, застосовуючи логарифмічне диференціювання.

Розв'язок. Маємо:

$$\ln y(x) = \ln (\arcsin x)^{x^3} = x^3 \ln(\arcsin x).$$

Тут ліва частина є складною функцією, в тому числі $y(x)$ – внутрішня, $\ln y$ – зовнішня. Тоді

$$[\ln y(x)]' = \left[x^3 \ln(\arcsin x)\right]',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(x^3\right)' \cdot \ln(\arcsin x) + x^3 \cdot [\ln(\arcsin x)]' =$$

$$= 3x^2 \ln(\arcsin x) + x^3 \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 3x^2 \ln(\arcsin x) + \frac{x^3}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

Тоді

$$y' = y \cdot \left(3x^2 \ln(\arcsin x) + \frac{x^3}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= (\arcsin x)^{x^3} \cdot \left(3x^2 \ln(\arcsin x) + \frac{x^3}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right).$$

Відповідь: $y' = (\arcsin x)^{x^3} \left(3x^2 \ln(\arcsin x) + \frac{x^3}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}\right)$.

Задача 14. Знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x(t) = t^5 + t^2; \\ y(t) = 2t - t^3. \end{cases}$

Розв'язок. З умови задачі маємо:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 5t^4 + 2t; \\ \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 2 - 3t^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 20t^3 + 2; \\ \ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -6t. \end{cases}$$

Тоді за відомим формулами

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2-3t^2}{5t^4+2t};$$

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{-6t\left(5t^4+2t\right) - \left(2-3t^2\right)\left(20t^3+2\right)}{\left(5t^4+2t\right)^3} =$$

$$= \frac{30t^5 - 40t^3 - 6t^2 - 4}{\left(5t^4+2t\right)^3}.$$

Відповідь: $y'_x = \frac{2-3t^2}{5t^4+2t}$; $y''_{xx} = \frac{30t^5-40t^3-6t^2-4}{(5t^4+2t)^3}$.

Задача 15. В точці $M_0(2;5)$ обчислити похідну функції $y(x)$, заданої неявно: $2x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y - 17 = 0$.

Розв'язок. Спочатку переконаємось, що точка M_0 і справді належить графіку функції. Для цього підставимо її координати в ліву частину умови задачі:

$$2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5^2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 17 = 0,$$

що очевидно. Диференціюючи умову задачі, отримуємо:

$$4x + 2(xy)' - 2yy' + 2 + 2y' = 0,$$

$$4x + 2(y + xy') - 2yy' + 2 + 2y' = 0.$$

Отримали рівняння для знаходження y'. Його розв'язок:

$$y' = -\frac{4x+2y+2}{2x-2y+2} = -\frac{2x+y+1}{x-y+1}.$$

Підставляючи сюди координати точки M_0, отримуємо:

$$y'(M_0) = -\frac{2 \cdot 2 + 5 + 1}{2 - 5 + 1} = 5.$$

Відповідь: $y'(M_0) = 5$.

Задача 16. Обчислити в першому наближенні вираз $\sqrt[3]{68{,}8}$ та знайти відносну похибку.

Розв'язок. Введемо функцію $y(x) = \sqrt[3]{x}$. Покладемо $x_0 = 64$. Це найближче значення аргументу, для якого значення функції обчислюється зручно і точно:

$$y_0 = y(x_0) = \sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Знайдемо похідну:

$$y'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

В даній точці отримуємо:

$$y'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}.$$

Тоді диференціал функції в даній точці дорівнює

$$dy(x_0) = y'(x_0)\,dx = \frac{1}{48}\,dx.$$

За умовою задачі покладемо $x = 68{,}8$. Тоді приріст аргументу

$$dx = x - x_0 = 68{,}8 - 64 = 4{,}8.$$

Точне значення функції в даній точці

$$\sqrt[3]{68{,}8} = y = y_0 + \Delta y.$$

Наближене значення в першому наближенні виникає, коли приріст Δy функції підміняють її першим диференціалом dy:

$$\sqrt[3]{68{,}8} \approx y_* = y_0 + dy = 4 + \frac{1}{48}\,dx = 4 + \frac{1}{48} \cdot 4{,}8 = 4{,}1.$$

Тоді відносна похибка (точне значення обчислюється на калькуляторі)

$$\delta = \frac{y_* - y}{y} \cdot 100\% = \left(\frac{y_*}{y} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{4{,}1}{\sqrt[3]{68{,}8}} - 1\right) \cdot 100\% \approx 0{,}06\%.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{68{,}8} \approx 4{,}1$ з відносною похибкою $\delta \approx 0{,}06\%$.

Задача 17. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{x-1}$ і побудувати її графік.

Розв'язок. 1. Область визначення функції $x \neq 1$.

2. Визначимо множину значень функції. Нехай певне значення y належить множині значень. Тоді рівняння $y = \frac{x^2}{x-1}$ повинно мати принаймні один розв'язок x. Маємо: $y \cdot (x-1) = x^2$, $x^2 - xy + y = 0$. Це рівняння є квадратним відносно x, тому для існування принаймні одного кореня дискримінант рівняння повинен бути не меншим за нуль. Маємо:

$$D = (-y)^2 - 4y = y^2 - 4y \geqslant 0.$$

Розв'язком цієї нерівності є множина $y \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. Це і є множина значень функції.

3. Рівняння $y = 0$, тобто $\frac{x^2}{x-1} = 0$, має єдиний розв'язок $x = 0$. Отже, перетин графіка з координатними осями відбувається лише в початку координат.

4. $y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = -\frac{x^2}{x+1}$. Це не збігається ні з $y(x)$, ані з $-y(x)$, тому розглядувана функція не є ні парною, ані непарною. Отже, відсутня і осьова, і центральна симетрія графіка.

5. Очевидно, розглядувана функція не є періодичною.

6. Очевидно, точка $x = 1$ є точкою розриву. Оскільки границя $\lim\limits_{x \to 1} y(x) = \infty$, то цей розрив є неусувним нескінченним розривом другого роду.

7. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Очевидно, функція є диференційовною в кожній точці області визначення.

8. Знайдемо інтервали монотонності. Для цього дослідимо знаки першої похідної методом інтервалів (рис. 6.1). Інтервали монотонного зростання: $x \in (-\infty; 0)$, $x \in (2; +\infty)$. Інтервали монотонного спадання: $x \in (0; 1)$, $x \in (1; 2)$.

9. Знайдемо екстремуми функції. При переході через точку $x = 0$ відбувається зміна зростання на спадання, і функція в

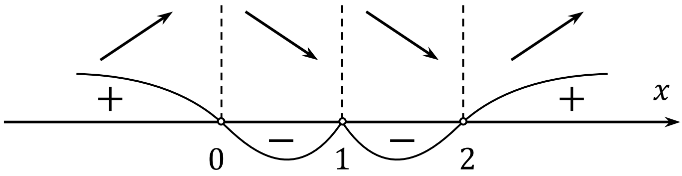


Рисунок 6.1 – До визначення інтервалів монотонності

цій точці є неперервною. Отже, маємо максимум:

$$\max y = y(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0.$$

При переході через точку $x = 2$ відбувається зміна спадання на зростання, і функція в цій точці є неперервною. Отже, маємо мінімум:

$$\min y = y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4.$$

Факт того, що $\min y > \max y$, не містить протиріччя, оскільки ці екстремуми лежать на різних гілках графіку (по різні боки від точки розриву $x = 1$).

10. Дослідимо графік на опуклість. Для цього знайдемо другу похідну:

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2 - \left(x^2-2x\right)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - \left(x^2-2x\right)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - 2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3} =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

В цьому разі рішення можна прийняти без методу інтервалів: якщо $x > 1$, то $y'' > 0$, і графік є опуклим донизу; якщо $x < 1$, то $y'' < 0$, і графік є опуклим догори.

11. Дослідимо графік на точки перегину. При переході через точку $x = 1$ відбувається зміна знаку другої похідної, але перегин не виникає, оскільки функція є розривною в цій точці.

12. Дослідимо графік на наявність асимптот. Маємо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Тоді маємо далі:

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Отже, маємо похилу асимптоту $y = kx + b = x + 1$.

Крім того, оскільки $\lim\limits_{x\to 1} y(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty$, то наявна також вертикальна асимптота $x = 1$.

Графік функції з урахуванням викладеного вище подано на рис. 6.2.

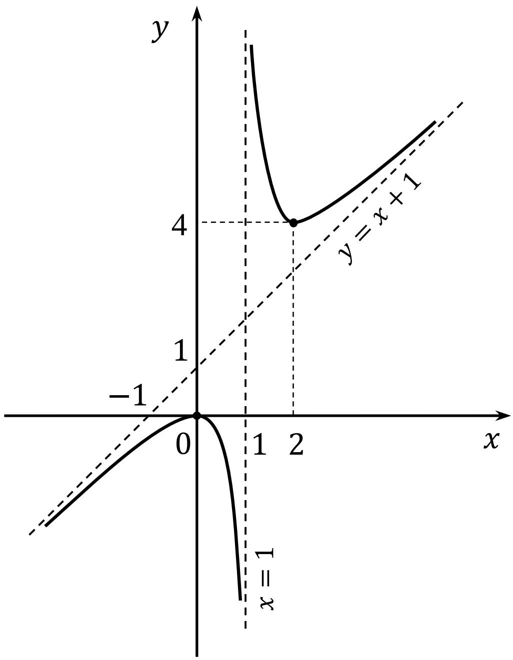


Рисунок 6.2 – Графік функції $y = \frac{x^2}{x-1}$

Відповідь: див. рис. 6.2.

Задача 18. Джерело з ЕРС $\mathcal{E}$ і внутрішнім опором r живить деякий ланцюг. При якому опорі R ланцюга джерело передає в ланцюг найбільшу потужність? Чому вона дорівнює?

Розв'язок. Струм в колі за законом Ома для повного ланцюга дорівнює $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Тоді потужність, яка виділяється на зовнішньому навантаженні R, за законом Джоуля-Ленца дорівнює $P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} \cdot R$. Отримали функцію $P(R) = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{R}{(R+r)^2}$. Це функція аргументу R, який за фізичним змістом змінюється в інтервалі від нуля до нескінченності. (При $R = 0$ виникає режим роботи реального джерела, який називають коротким замиканням; при $R = \infty$ виникає режим роботи реального джерела, який називають холостим ходом). Параметри $\mathcal{E}$, r є властивостями джерела; при зміні зовнішнього навантаження R вони не змінюються. Тому $\mathcal{E} = \text{const}$, $r = \text{const}$. Отже, потрібно знайти найбільше значення функції $P(R)$ одного незалежного змінного R на інтервалі $R \in [0; +\infty)$.

Для похідної отримуємо вираз:

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{d}{dR}\left(\frac{R}{(R+r)^2}\right) = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{R'(R+r)^2 - R\left((R+r)^2\right)'}{\left((R+r)^2\right)^2} =$$

$$= \mathcal{E}^2 \cdot \frac{(R+r)^2 - R \cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{(R+r) - 2R}{(R+r)^3} = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Критичні точки: $R = r$ (похідна дорівнює нулю) і $R = -r$ (похідна не існує). Точку $R = -r$ відкидаємо як таку, що не належить інтервалу $R \in [0; +\infty)$. Точку $R = r$, яка залишилась, доповнюємо кінцями інтервалу. Отже, «список підозрюваних» містить три точки: $R_1 = 0$, $R_2 = r$, $R_3 = +\infty$. Значення функції в цих точках становлять:

$$P_1 = P(R_1) = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{0}{(0+r)^2} = 0,$$

$$P_2 = P(R_2) = \mathcal{E}^2 \cdot \frac{r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r},$$

$$P_3 = P(R_3) = \lim_{R \to +\infty} \mathcal{E}^2 \cdot \frac{R}{(R+r)^2} = 0,$$

де значення $P_3 = P(+\infty)$ розуміється в граничному сенсі при $R \to +\infty$. Очевидно, число P_2 – найбільше серед трьох знайдених. Отже, найбільшу потужність навантаження споживає від реального джерела за умови, що опори джерела і навантаження однакові. Ця потужність дорівнює $P_{\text{найб.}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$. До речі, режим роботи реального джерела при $R = r$ називають режимом *узгодження за потужністю*.

Відповідь: при опорі $R = r$; $P_{\text{найб.}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$.

Задача 19. Многочлен $f(x) = 41+69x+49x^2+16x^3+2x^4$ розкласти за степенями двочлена $(x - x_0)$ при $x_0 = -2$.

Розв'язок. За формулою Тейлора маємо:

$$f(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 +$$

$$+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 + \frac{f^{(IV)}(-2)}{4!}(x+2)^4.$$

Подальше накопичення доданків, навіть у вигляді $o(x+2)^4$, сенсу не має, оскільки для многочлена четвертого степеня усі похідні, починаючи з п'ятої, тотожно дорівнюють нулю.

Маємо:

$$f(-2) = 41 + 69 \cdot (-2) + 49 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^4 = 3.$$

Перша похідна:

$$f'(x) = 69 + 98x + 48x^2 + 8x^3.$$

Перша похідна в даній точці:

$$f'(-2) = 69 + 98 \cdot (-2) + 48 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2)^3 = 1.$$

Друга похідна:

$$f''(x) = 98 + 96x + 24x^2.$$

Друга похідна в даній точці:

$$f'(-2) = 98 + 96 \cdot (-2) + 24 \cdot (-2)^2 = 2.$$

Третя похідна:

$$f'''(x) = 96 + 48x.$$

Третя похідна в даній точці:

$$f'''(-2) = 96 + 48 \cdot (-2) = 0.$$

Четверта похідна:

$$f^{(IV)}(x) = 48, \qquad f^{(IV)}(-2) = 48.$$

Вищі похідні: $f^{(n)}(x) \equiv 0$, $n \geqslant 5$. Тоді отримуємо:

$$f(x) = 3 + 1 \cdot (x+2) + \frac{2}{2!}(x+2)^2 + \frac{0}{3!}(x+2)^3 + \frac{48}{4!}(x+2)^4 =$$

$$= 3 + (x+2) + (x+2)^2 + 2(x+2)^4.$$

Відповідь: $f(x) = 3 + (x+2) + (x+2)^2 + 2(x+2)^4$.

6.2 Функції багатьох змінних

Задача 1. Знайти та зобразити на координатній площині Oxy область визначення функції

$$f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} + \arcsin\left(y - |x|\right).$$

Розв'язок. Очевидно, значення функції визначено за одночасного виконання наступних умов:

$$\begin{cases} 25 - x^2 - y^2 \geqslant 0; \\ -1 \leqslant y - |x| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 5^2; \\ |x| - 1 \leqslant y \leqslant |x| + 1. \end{cases}$$

З першої нерівності випливає, що поточна точка $M(x,y)$ повинна бути внутрішньою для кола радіусом 5 з центром в початку координат. З другої нерівності випливає, що поточна точка $M(x,y)$ повинна бути розташована між графіками функцій $f(x) = |x| - 1$ і $g(x) = |x| + 1$.

Знайдемо точки перетину графіка функції $f(x)$ з колом. Для цього розв'яжемо систему рівнянь, що задають ці лінії:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ y = |x| - 1. \end{cases}$$

З другого рівняння $|x| = y + 1$. Оскільки $|x| \geqslant 0$, то розв'язки можуть виникати лише при $y+1 \geqslant 0$, $y \geqslant -1$. Оскільки $x^2 = |x|^2$, то перше рівняння набуває вигляду

$$(y+1)^2 + y^2 = 25, \qquad y^2 + y - 12 = 0.$$

Його корені $y_1 = -4$, $y_2 = 3$. Корінь y_1 є стороннім. З використанням кореня y_2 маємо: $|x| = y_2 + 1 = 4$, $x = \pm 4$. Отже, точки перетину $A(-4;3)$, $B(4;3)$. Точки перетину графіка $g(x)$ з колом легко знайти аналогічно. Їх координати $C(-3;4)$, $D(3;4)$.

Відповідне креслення подано на рис. 6.3

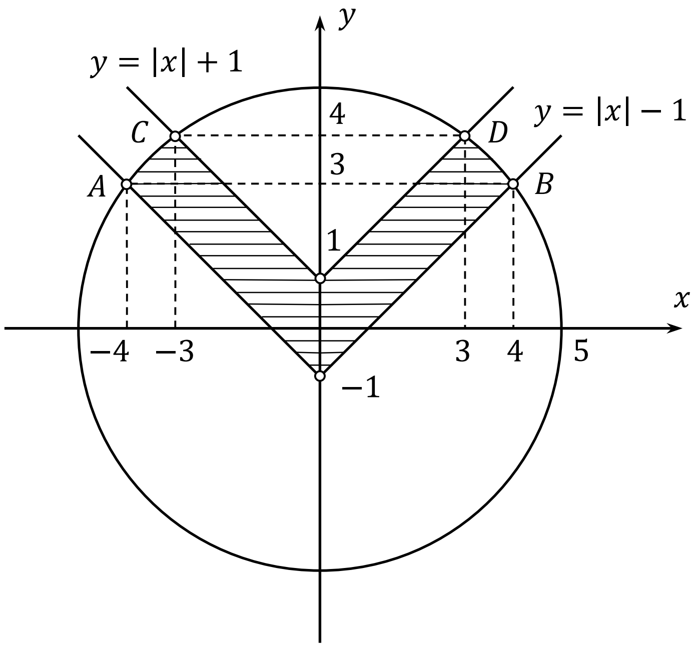


Рисунок 6.3 – До задачі 1

Відповідь: Рис. 6.3

Задача 2. Задано функцію $f(x, y) = \arcsin(1 - x - 2y)$ двох змінних і точку $M_0(1, 0)$. Обчислити різницю $f'_x(M_0) - f'_y(M_0)$.

Розв'язок.

Знайдемо частинні похідні:

$$f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arcsin(1 - x - 2y)\right) =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1 - x - 2y)}{\sqrt{1 - (1 - x - 2y)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x - 2y)^2}},$$

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\arcsin(1-x-2y)\right) =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(1-x-2y)}{\sqrt{1-(1-x-2y)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-(1-x-2y)^2}}.$$

Обчислимо ці похідні в даній точці:

$$f'_x(M_0) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-1-2\cdot 0)^2}} = -1,$$

$$f'_y(M_0) = -\frac{2}{\sqrt{1-(1-1-2\cdot 0)^2}} = -2.$$

Тоді

$$f'_x(M_0) - f'_y(M_0) = -1-(-2) = 1.$$

Відповідь: 1.

Задача 3. Задано функцію $z = \arcsin\left(x^2+xy-2y^2\right)$ двох змінних і точку $M_0(1,1)$. Побудувати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = f(x,y)$ у відповідній точці $N_0(1,1,z_0)$.

Розв'язок. Значення функції в даній точці:

$$z_0 = z(M_0) = \arcsin\left(1^2+1\cdot 1-2\cdot 1^2\right) = \arcsin 0 = 0.$$

Частинні похідні:

$$z'_x = \frac{1\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy-2y^2\right)}{\sqrt{1-\left(x^2+xy-2y^2\right)^2}} = \frac{2x+y}{\sqrt{1-\left(x^2+xy-2y^2\right)^2}},$$

$$z'_y = \frac{1\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy-2y^2\right)}{\sqrt{1-\left(x^2+xy-2y^2\right)^2}} = \frac{x-4y}{\sqrt{1-\left(x^2+xy-2y^2\right)^2}}.$$

Частинні похідні в даній точці:

$$z'_x(M_0) = \frac{2\cdot 1+1}{\sqrt{1-\left(1^2+1\cdot 1-2\cdot 1^2\right)^2}} = 3,$$

$$z'_y(M_0) = \frac{1-4\cdot 1}{\sqrt{1-\left(1^2+1\cdot 1-2\cdot 1^2\right)^2}} = -3.$$

З використанням (4.3) отримуємо рівняння дотичної площини:

$$3(x-1)-3(y-1)-(z-0) = 0, \qquad 3x-3y-z = 0.$$

З використанням (4.4) отримуємо рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-0}{-1}.$$

Відповідь: $3x-3y-z=0$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-0}{-1}$.
Задача 4. Знайти диференціал функції $z=\left(x^2+y\right)\left(y^2+x\right)$.
Розв'язок. Обчислимо частинні похідні і знайдемо диференціал функції двох змінних за формулою $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Замість диференціювання добутку простіше розкрити дужки. Маємо:

$$z=x^2y^2+x^3+y^3+xy.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2+3x^2+y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y+3y^2+x.$$

Отже,

$$dz=\left(2xy^2+3x^2+y\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+x\right)dy.$$

Відповідь: $dz=\left(2xy^2+3x^2+y\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+x\right)dy$.
Задача 5. Функцію $z=f(x,y)$ задано неявно рівнянням

$$x^2+6xy-5y^2+z^3+z-4=0.$$

Обчислити її частинні похідні в точці $M_0(1;1)$.
Розв'язок. Введемо функцію $F(x,y,z)=x^2+6xy-5y^2+z^3+z-4$. Тепер функцію $z=f(x,y)$ рівнянням $F(x,y,z)=0$ задано неявно. Нехай $z_0=f(M_0)=f(1;1)$. В точці $M_0(1;1)$ з використанням рівняння $F(x,y,z)=0$ маємо:

$$1^2+6\cdot1\cdot1-5\cdot1^2+z_0^3+z_0-4=0,\qquad z_0^3+z_0=2.$$

Очевидний розв'язок цього рівняння $z_0=1$. Він є єдиним, оскільки функція $\varphi(t)=t^3+t$ є неперервною і монотонною ($\varphi'(t)=3t^2+1>0$, $t\in\mathbb{R}$). Тоді частинні похідні z'_x, z'_y в точці $M_0(1;1)$ можуть бути вираженими через частинні похідні F'_x, F'_y, F'_z в точці $N_0(1;1;z_0)=N_0(1;1;1)$ за формулами (4.10), (4.11).
Маємо:

$$F'_x=2x+6y,\qquad F'_y=6x-10y,\qquad F'_z=3z^2+1.$$

Тоді

$$z'_x\big|_{M_0} = -\left.\frac{F'_x}{F'_z}\right|_{N_0} = -\left.\frac{2x+6y}{3z^2+1}\right|_{N_0} = -\frac{2\cdot 1+6\cdot 1}{3\cdot 1^2+1} = -2,$$

$$z'_y\big|_{M_0} = -\left.\frac{F'_y}{F'_z}\right|_{N_0} = -\left.\frac{6x-10y}{3z^2+1}\right|_{N_0} = -\frac{6\cdot 1-10\cdot 1}{3\cdot 1^2+1} = 1.$$

Відповідь: $z'_x\big|_{M_0} = -2$, $z'_y\big|_{M_0} = 1$.

Задача 6. Обчислити похідну функції $z = (2x+y)^3$ в точці $M_0(1;-1)$ за напрямком вектора $\overrightarrow{\ell} = \{1;2\}$.

Розв'язок. Модуль напрямного вектора:

$$\left|\overrightarrow{\ell}\right| = \sqrt{\overrightarrow{\ell}\cdot\overrightarrow{\ell}} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

Орт напрямного вектора:

$$\overrightarrow{\ell_0} = \frac{\overrightarrow{\ell}}{\left|\overrightarrow{\ell}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\overrightarrow{\ell} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Частинні похідні:

$$z'_x = 3(2x+y)^2\cdot 2, \qquad z'_y = 3(2x+y)^2.$$

Частинні похідні в даній точці:

$$z'_x(M_0) = 3(2\cdot 1-1)^2\cdot 2 = 6, \qquad z'_y(M_0) = 3(2\cdot 1-1)^2 = 3.$$

Градієнт функції z в точці M_0:

$$\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \left\{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\right\} = \{6;3\}.$$

Похідну за напрямком знаходимо як скалярний добуток градієнта і орта даного напрямку:

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \operatorname{grad} z\big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{\ell_0} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

Задача 7. Задано поверхню $z = (2x+y)^3$. Знайти напрямний вектор дотичної до лінії рівня в точці $M_0(1;-1)$.

Розв'язок. Частинні похідні:

$$z'_x = 3(2x+y)^2 \cdot 2, \qquad z'_y = 3(2x+y)^2.$$

Частинні похідні в даній точці:

$$z'_x(M_0) = 3(2 \cdot 1 - 1)^2 \cdot 2 = 6, \qquad z'_y(M_0) = 3(2 \cdot 1 - 1)^2 = 3.$$

Градієнт функції z в точці M_0:

$$\operatorname{grad} z|_{M_0} = \left\{z'_x(M_0); z'_y(M_0)\right\} = \{6; 3\}.$$

Нехай шуканий вектор $\overrightarrow{s}\{u; v\} \neq \overrightarrow{0}$. Оскільки при русі точки M від положення M_0 вздовж лінії рівня значення функції z залишається сталим, то похідна цієї функції вздовж напрямку дотичної до лінії рівня в точці M_0 (тобто вздовж напрямку вектора $\overrightarrow{s}$) дорівнює нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{M_0} = \operatorname{grad} z|_{M_0} \cdot \frac{\overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{s}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{s}|}\left(\operatorname{grad} z|_{M_0} \cdot \overrightarrow{s}\right) = 0.$$

Оскільки $|\overrightarrow{s}| \neq 0$, достатньо розв'язати рівняння

$$\operatorname{grad} z|_{M_0} \cdot \overrightarrow{s} = 0.$$

Маємо:

$$6u + 3v = 0, \qquad v = -2u.$$

Покладемо $u = C$, $v = -2C$, $C \in \mathbb{R}$. Тоді шуканий вектор має координати

$$\overrightarrow{s} = \{u; v\}, \qquad \overrightarrow{s} = \{C; -2C\}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{s} = \{C; -2C\}$, де $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$.

Задача 8. Дослідити функцію $z = 2x^3 - 9x^2 + \frac{1}{12}y^2 - xy + 6x + 2y$ на екстремуми.

Розв'язок. Необхідна умова екстремуму:

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 - 18x - y + 6 = 0, \\ z'_y = \frac{1}{6}y - x + 2 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо: $y = 6(x-2)$. Тоді перше рівняння набуває вигляду:

$$6x^2 - 18x - 6(x-2) + 6 = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Його корені $x_1 = 1$, $x_1 = 3$. Відповідно $y_1 = 6(x_1 - 2) = -6$, $y_2 = 6(x_2 - 2) = 6$. Точки, підозрювані на екстремум: $M_1(1; -6)$, $M_2(3; 6)$.

Другі частинні похідні:

$$z''_{xx} = 12x - 18, \qquad z''_{xy} = -1, \qquad z''_{yy} = \frac{1}{6}.$$

В точці M_1 маємо:

$$A = z''_{xx}|_{M_1} = 12 \cdot 1 - 18 = -6,$$

$$B = z''_{xy}\big|_{M_1} = -1, \qquad C = z''_{yy}\big|_{M_1} = \frac{1}{6}.$$

Тоді $\Delta = AC - B^2 = -6 \cdot \frac{1}{6} - (-1)^2 = -2 < 0$. Отже, екстремуму немає; підозру спростовано.

В точці M_2 маємо:

$$A = z''_{xx}|_{M_2} = 12 \cdot 3 - 18 = 18,$$

$$B = z''_{xy}\big|_{M_2} = -1, \qquad C = z''_{yy}\big|_{M_2} = \frac{1}{6}.$$

Тоді $\Delta = AC - B^2 = 18 \cdot \frac{1}{6} - (-1)^2 = 2 > 0$. Отже, екстремум наявний. Оскільки $A > 0$, то це – строгий мінімум. Він дорівнює

$$\min z = z(M_2) = z(3; 6) = -12.$$

Відповідь: $\min z = z(3; 6) = -12$.

Задача 9. Методом Лагранжа дослідити на умовні екстремуми а) функцію $z(x, y) = 2y^3 + 2x^2 + 12xy - 5y^2 + x - 3y$ за умови $x + 5y + 4 = 0$; б) функцію $z(x, y) = 2x - y$ за умови

$$9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25 = 0.$$

Розв'язок. а) Введемо функцію $\varphi(x, y) = x + 5y + 4$. Тоді умова подається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Утворимо функцію Лагранжа $L(x, y; \lambda) = z + \lambda\varphi$. Маємо:

$$L(x, y; \lambda) = 2y^3 + 2x^2 + 12xy - 5y^2 + x - 3y + \lambda\left(x + 5y + 4\right).$$

Необхідними умовами екстремуму є система наступних рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

З використанням вигляду функції Лагранжа одержуємо:

$$\begin{cases} 4x + 12y + 1 + \lambda = 0, \\ 6y^2 + 12x - 10y - 3 + 5\lambda = 0, \\ x + 5y + 4 = 0. \end{cases}$$

Виключимо λ з цієї системи. Для цього з другого рівняння віднімемо перше, попередньо домножене на 5:

$$6y^2 - 8x - 70y - 8 = 0.$$

Підставимо сюди вираз $x = -5y - 4$, який випливає з третього рівняння:

$$6y^2 + 8(5y + 4) - 70y - 8 = 0, \;\; 6y^2 - 30y + 24 = 0, \;\; y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Корені цього рівняння $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Відповідно,

$$x_1 = -5y_1 - 4 = -9, \qquad x_2 = -5y_2 - 4 = -24.$$

Отримали дві критичні точки: $M_1(-9; 1)$, $M_2(-24; 4)$. Значення λ, які відповідають цим точкам, знайдемо з першого рівняння системи: $\lambda = -4x - 12y - 1$. Маємо: $\lambda_1 = 23$, $\lambda_2 = 47$.

Другі похідні функції Лагранжа:

$$L''_{xx} = 4, \qquad L''_{xy} = 12, \qquad L''_{yy} = 12y - 10.$$

Тоді вираз для другого диференціалу

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}\,dy^2 =$$

$$= 4\,dx^2 + 24\,dx\,dy + (12y - 10)dy^2.$$

Продиференціюємо рівняння зв'язку: $d\varphi = 0$, $d(x + 5y + 4) = 0$, $dx = -5\,dy$.

Зауважимо, нам «пощастило», що рівняння зв'язку $\varphi = 0$ – лінійне, і тому частинні похідні $\varphi'_x = 1$, $\varphi'_y = 5$ не залежать від x і y. В іншому разі зв'язок між dx і dy набував би різного вигляду в різних точках. До речі, з цієї ж причини лінійності рівняння зв'язку $\varphi = 0$ другі похідні L''_{xx}, L''_{xy}, L''_{yy} не залежать від λ, тому значення $\lambda_{1,2}$ в даному прикладі можна було не знаходити.

З використанням знайденого зв'язку $dx = -5\,dy$ маємо:

$$d^2L = 4 \cdot 25\,dy^2 - 24 \cdot 5\,dy^2 + (12y - 10)dy^2 = (12y - 30)dy^2.$$

В точці M_1 маємо:

$$d^2L(M_1) = (12y_1 - 30)dy^2 = (12 \cdot 1 - 30)dy^2 = -18\,dy^2 \leqslant 0,$$

причому рівність досягається тільки при $dy = 0$. Отже, в даній точці досягається умовний максимум. Він дорівнює

$$\max z = z(M_1) = 39.$$

В точці M_2 маємо:

$$d^2L(M_2) = (12y_2 - 30)dy^2 = (12 \cdot 4 - 30)dy^2 = 18\,dy^2 \geqslant 0,$$

причому рівність досягається тільки при $dy = 0$. Отже, в даній точці досягається умовний мінімум. Він дорівнює

$$\min z = z(M_2) = 12.$$

б) Введемо функцію

$$\varphi(x, y) = 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25.$$

Тоді умова подається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$. Утворимо функцію Лагранжа $L(x, y; \lambda) = z + \lambda\varphi$. Маємо:

$$L(x, y; \lambda) = 2x - y + \lambda\left(9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25\right).$$

Необхідні умови екстремуму набувають вигляду

$$\begin{cases} L'_x = 2 + \lambda\,(18x - 24y + 20) = 0, \\ L'_y = -1 + \lambda\,(32y - 24x + 15) = 0, \\ L'_\lambda = 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25 = 0. \end{cases}$$

Спробуємо виразити x і y через λ з перших двох рівнянь і підставити до третього:

$$\begin{cases} 18x - 24y = -\frac{2}{\lambda} - 20, \\ -24x + 32y = \frac{1}{\lambda} - 15, \\ 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25 = 0. \end{cases}$$

Перші два рівняння утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно x і y. Розширена матриця системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & -24 & -\frac{2}{\lambda} - 20 \\ -24 & 32 & \frac{1}{\lambda} - 15 \end{array}\right).$$

Домножимо перший рядок на $\frac{4}{3}$ і додамо до другого:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & -24 & -\frac{2}{\lambda} + 20 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} - 15 + \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{\lambda} - 20\right) \end{array}\right).$$

Отже, ранг матриці системи дорівнює 1. Щоб система була сумісною, за теоремою Кронекера-Капеллі потрібно, щоб ранг розширеної матриці системи також дорівнював 1. Тому потрібно покласти

$$\frac{1}{\lambda} - 15 + \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{\lambda} - 20\right) = 0.$$

Звідси $\lambda = -\frac{1}{25}$. З використанням цього значення система набуває вигляду

$$\begin{cases} 18x - 24y = 30, \\ -24x + 32y = -40, \\ 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25 = 0. \end{cases}$$

Тепер друге рівняння є наслідком першого, і тому може бути відкинуте. Тоді:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 20x + 15y + 25 = 0. \end{cases}$$

Маємо: $y = \frac{3x-5}{4}$. Підставляючи це до другого рівняння, отримуємо:

$$9x^2 + 16\left(\frac{3x-5}{4}\right)^2 - 24x \cdot \frac{3x-5}{4} + 20x + 15 \cdot \frac{3x-5}{4} + 25 = 0.$$

Після зведення подібних це рівняння виявляється лінійним. Його єдиний розв'язок: $x = -1$. Тоді $y = \frac{3\cdot(-1)-5}{4} = -2$. Отже, отримали єдину критичну точку $M_0(-1; -2)$ при $\lambda = -\frac{1}{25}$. Другі похідні функції Лагранжа:

$$L''_{xx} = 18\lambda, \qquad L''_{xy} = -24\lambda, \qquad L''_{yy} = 32\lambda.$$

Тоді вираз для другого диференціалу:

$$d^2L = L''_{xx}\,dx^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + L''_{yy}\,dy^2 =$$

$$= 18\lambda\,dx^2 - 48\lambda\,dx\,dy + 32\lambda\,dy^2 = \lambda\left(18 - 48\frac{dy}{dx} + 32\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)dx^2.$$

Продиференціюємо рівняння зв'язку: $d\varphi = \varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = -\frac{18x - 24y + 20}{32y - 24x + 15}.$$

Маємо:

$$d^2L = \lambda\left(18 + 48\cdot\frac{18x-24y+20}{32y-24x+15} + 32\left(\frac{18x-24y+20}{32y-24x+15}\right)^2\right)dx^2.$$

Підставимо сюди критичну точку$M_0(-1;-2)$ і відповідне їй значення $\lambda = -\frac{1}{25}$:

$$d^2L(M_0) = -2\,dx^2 \leqslant 0,$$

причому рівність досягається лише при $dx = 0$. Отже, наявний умовний максимум. Він дорівнює

$$\max z = z(M_0) = \left.(2x-y)\right|_{M_0} = 2\cdot(-1) - (-2) = 0.$$

Відповідь: а) умовний максимум досягається в точці $M_1(-9;1)$ і дорівнює 39, умовний мінімум досягається в точці $M_2(-24;4)$ і дорівнює 12;

б) умовний максимум досягається в точці $M_0(-1;-2)$ і дорівнює нулю.

Задача 10. Знайти найбільше і найменше значення функції $z(x,y) = x^3 - 2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 6y$ в області трикутника OBC з вершинами в точках $O(0;0)$, $B(3;3)$, $C(3;0)$.

Розв'язок. Стаціонарні точки знаходимо, прирівнюючи до нуля обидві перші похідні:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 4x - 4y - 3 = 0; \\ z'_y = -4x + 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння отримуємо: $y = 2x - 3$. Тоді перше рівняння набуває вигляду:

$$3x^2 - 4x - 4(2x-3) - 3 = 0, \qquad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Його корені: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Відповідно, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$. Отримали дві критичні точки: $M_1(3;3)$, $M_2(1;-1)$. Точка M_2 не потрапляє ні в область трикутника OBC, ані на його границю (рис. 6.4); цю точку відкидаємо. Навпаки, точка M_1 є першою у «списку підозрюваних». Значення функції у цій точці становить

$$z(M_1) = z(B) = 3^3 - 2\cdot 3^2 - 4\cdot 3\cdot 3 + 3^2 - 3\cdot 3 + 6\cdot 3 = -9.$$

Тут підкреслено, що точка M_1 збігається з точкою B.

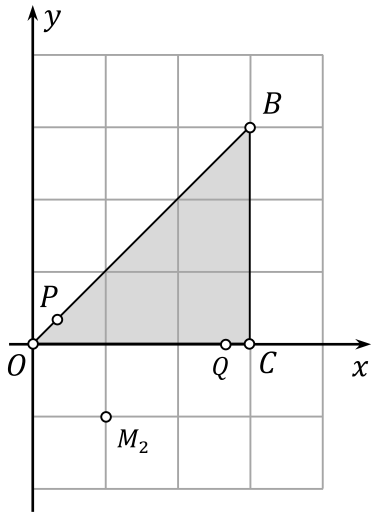


Рисунок 6.4 – До задачі 10

Дослідимо точки границі на ділянках OB, OC, BC окремо.

На ділянці OB маємо: $y = x$, $x \in [0;3]$. Функція $z(x,y)$ при підстановці $y = x$ перетворюється на функцію одного аргументу: $z(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$. До «списку підозрюваних» додамо критичні точки функції $z(x)$ на інтервалі $x \in [0;3]$, а також кінці цього інтервалу. Критичні точки виникають з рівняння $\frac{dz}{dx} = 0$. Маємо: $3x^2 - 10x + 3 = 0$, звідки $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Значенню x_1 відповідає точка M_1, тобто точка B (її до порівняння вже додано). Значенню x_2 відповідає точка P. Крім того, за рахунок кінців інтервалу $x = 0$, $x = 3$ до «списку підозрюваних» включаємо також точки O і B. Отже, точка B потрапляє до цього списку з двох причин: і як критична, і як кінець інтервалу. Її до порівняння вже долучено. Маємо:

$$z(O) = z(0;0) = 0, \qquad z(P) = z\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27}.$$

На ділянці OC маємо: $x \in [0;3]$, $y = 0$. Функція $z(x,y)$ перетворюється на функцію одного аргументу: $z(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. До «списку підозрюваних» додамо критичні точки функції $z(x)$ на інтервалі $x \in [0;3]$, а також кінці цього інтервалу. Критичні точки виникають з рівняння $\frac{dz}{dx} = 0$. Маємо: $3x^2 - 6x - 3 = 0$, звідки $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Значення $x = 1 - \sqrt{2}$ не потрапляє на інтервал $x \in [0;3]$; його потрібно відкинути. Залишається до «списку підозрюваних» додати точку $Q(1+\sqrt{2};0)$, а також кінці інтервалу: точку O (при $x = 0$) і точку C (при $x = 3$). Але точка O в цьому списку вже є. Додамо лише точки C і Q. Маємо:

$$z(C) = z(3;0) = 0, \qquad\qquad z(Q) = z(1+\sqrt{2};0) = -2-2\sqrt{2}.$$

На ділянці BC маємо: $x = 3$, $y \in [0;3]$. Функція $z(x,y)$ знову перетворюється на функцію одного аргументу: $z = y^2 - 6y$. Зараз доречно перевірити наступне. Значення $y = 0$ відповідає точці C. Маємо:

$$z(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 = z(C).$$

Значення $y = 3$ відповідає точці B. Маємо:

$$z(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9 = z(B).$$

Кінцям інтервалу $y \in [0;3]$ відповідають точки B і C. Але їх до «списку підозрюваних» вже долучено. Залишається знайти критичну точку з рівняння $\frac{dz}{dy} = 0$. Маємо: $2y - 6 = 0$, $y = 3$. Це значення відповідає точці B, яку до порівняння вже додано.

Складання «списку підозрюваних» завершено. Тепер достатньо серед значень $z(M_1) = z(B)$, $z(O)$, $z(B)$, $z(C)$, $z(P)$, $z(Q)$ обрати найбільше і найменше. Очевидно, найбільшим у списку є значення $z(P) = \frac{13}{27}$, а найменшим – значення $z(B) = -9$. Додамо, досліджувати, чи є точка B точкою мінімуму (насправді – є), потреби немає.

Відповідь: Найбільше значення функції дорівнює $\frac{13}{27}$ і досягається в точці $P\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; найменше значення дорівнює -9 і досягається в точці $B(3;3)$.

Література

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – 17-е изд. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – 10-е изд. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

[3] Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. и др. – К. : Вища школа, 1974. – 680 с.

[4] Математический анализ в примерах и задачах, ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы / Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. и др. – К. : Вища школа, 1977. – 672 с.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I / Г.М. Фихтенгольц. – 6-е изд. – М. : ГИФМЛ, 1966. – 608 с.

Навчальне видання

Анпілогов Дмитро Ігорович
Сніжко Наталія Вікторівна

Диференціальне числення

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір *Анпілогов Д.І.*
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 04.03.2021. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 17,9.
Тираж 100 прим. Зам. № 126.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.