1

УДК 62-503.4

Александрова Т. Е.

Канд. техн. наук, доцент Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ РОБАСТНЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается проблема синтеза оптимального по точности стабилизатора подвижного объекта с учетом требования робастности замкнутой системы стабилизации к изменениям конструктивного параметра объекта.

Ключевые слова: робастные системы, функции чувствительности, интегральный квадратичный функционал, весовые коэффициенты.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В процессе эксплуатации любой технической системы значения ее конструктивных параметров отличаются от номинальных. При этом в той или иной степени изменяются динамические характеристики системы. Динамическую систему будем называть робастной, если изменения ее параметров не приводят к существенному изменению динамических характеристик системы. Для синтеза робастных динамических систем целесообразно использовать аппарат теории чувствительности [1, 2]. Основные задачи, рассматриваемые в теории чувствительности, состоят в анализе влияния малых отклонений конструктивных параметров на динамическую систему, а также в синтезе динамической системы, малочувствительной к изменению этих параметров.

Пусть дифференциальное уравнение возмущенного движения замкнутой линейной системы стабилизации «подвижный объект – стабилизатор» в общем случае записывается

$$\overset{\circ}{X}(t) = A(\alpha, \beta) X(t), \tag{1}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)$ – n-мерный вектор состояния объекта; $\alpha \in G_\alpha$ – m-мерный вектор параметров стабилизатора; $\beta \in G_\beta$ – варьируемый параметр, значения которого изменяются в процессе эксплуатации объекта. Требуется отыскать оптимальный вектор $\alpha^* \in G_\alpha$, обеспечивающий максимальную точность стабилизации системы (1), в смысле минимума интегрального квадратичного функционала

$$J(\alpha, \beta_0) = \int_0^T \left\langle X(t), QX(t) \right\rangle dt, \tag{2}$$

при непрерывных вариациях конструктивного параметра $\beta \in G_\beta$ причем через β_0 обозначено номинальное значение параметра β.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Введем в рассмотрение вектор чувствительности [3, 4]

$$S(t) = \frac{\partial X(t)}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1(t)}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial x_2(t)}{\partial \beta} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(t)}{\partial \beta} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющий векторно-матричному дифференциальному уравнению

$$\overset{\circ}{S}(t) = \frac{\partial \overset{\circ}{X}(t)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[A(\alpha,\beta)X(t)\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \beta}A(\alpha,\beta)\right]_{\beta=\beta_0} X(t) + A(\alpha,\beta)\frac{\partial X(t)}{\partial \beta} \qquad (4)$$

с начальным условием $S(0) = 0$.

С учетом (3) уравнение (4) принимает вид

$$\overset{\circ}{S}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial \beta}A(\alpha,\beta)\right]_{\beta=\beta_0} X(t) + A(\alpha,\beta)S(t). \qquad (5)$$

Запишем функцию чувствительности интегрального квадратичного функционала (2)

$$s_{n+1}(\alpha,\beta) = \frac{\partial J(\alpha,\beta_0)}{\partial \beta} = \int_0^T \left\langle \frac{\partial \langle X(t), QX(t)\rangle}{\partial X(t)}, \frac{\partial X(t)}{\partial \beta} \right\rangle =$$

$$= \int_0^T \langle QX(t), S(t)\rangle dt. \qquad (6)$$

Функция чувствительности (6) является количественной оценкой робастности замкнутой системы (1) к изменению конструктивного параметра β. Чем меньше значение модуля функции чувствительности (6), вычисленной на решениях уравнений (1) и (5), тем выше показатель робастности замкнутой системы стабилизации.

К векторным дифференциальным уравнениям (1) и (5) добавим еще два скалярных уравнения

$$x_{n+1}(t) = \langle X(t), QX(t)\rangle; \qquad (7)$$

$$s_{n+1}(t) = \langle S(t), QX(t)\rangle \qquad (8)$$

с нулевыми начальными условиями. Тогда, сравнивая соотношения (2) и (6) с уравнениями (7) и (8), можно записать

$$J(\alpha,\beta_0) = x_{n+1}(T); \quad s_{n+1}(\alpha,\beta) = s_{n+1}(T).$$

Сформируем аддитивный функционал

$$J(\alpha,\beta_0,\gamma_1,\gamma_2) = \gamma_1^2 x_{n+1}(T) + \gamma_2^2 \left|s_{n+1}(T)\right|, \qquad (9)$$

где γ_1 и γ_2 – весовые коэффициенты, подлежащие выбору. Минимизация функционала (9), вычисляемого на решениях системы дифференциальных уравнений (1), (5), (7) и (8), по $\alpha \in G_\alpha$ приводит к отысканию оптимального вектора $\alpha^* \in G_\alpha$, обеспечивающего высокую точность стабилизации замкнутой системы (1) при непрерывных вариациях конструктивного параметра $\beta \in G_\beta$.

Рассмотрим задачу выбора весовых коэффициентов аддитивного функционала (9).

Функционалы (2) и (6) имеют различные размерности, следовательно, различные размерности имеют также весовые коэффициенты γ_1 и γ_2.

В этой связи введем обозначения

$$\overline{x}_{n+1}(T) = \frac{x_{n+1}(T)}{x_{n+1}^{\max}(T)};$$

$$\overline{s}_{n+1}(T) = \frac{s_{n+1}(T)}{s_{n+1}^{\max}(T)}. \qquad (10)$$

$$\overline{\gamma}_1 = \gamma_1\sqrt{x_{n+1}^{\max}(T)};$$

$$\overline{\gamma}_2 = \gamma_2\sqrt{s_{n+1}^{\max}(T)}, \qquad (11)$$

где $x_{n+1}^{\max}(T)$, $s_{n+1}^{\max}(T)$ – максимально допустимые значения функционалов (2) и (6), вычисленных на множестве G_α. Тогда аддитивный функционал (9) принимает вид

$$J(\alpha,\beta_0,\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2) = \overline{\gamma}_1^2\overline{x}_{n+1}(T) + \overline{\gamma}_2^2\left|\overline{s}_{n+1}(T)\right|, \qquad (12)$$

причем в соотношении (12) функционалы $\overline{x}_{n+1}(T)$ и $\left|\overline{s}_{n+1}(T)\right|$, а также весовые коэффициенты $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ безразмерны.

Минимизация функционала (12) при заданных значениях весовых коэффициентов $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ не вызывает затруднений. В то же время, попытка минимизации функционала (12) по $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ без ограничений на эти коэффициенты приводит к тривиальному решению $\overline{\gamma}_1 = \overline{\gamma}_2 = 0$, при котором функционал (12) обращается в нуль. В этой связи на величины весовых коэффициентов $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ наложим ограничение

$$\overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2 = 1. \qquad (13)$$

Обозначим через $\overline{x}_{n+1}^*(T)$ и $\left|\overline{s}_{n+1}(T)\right|^*$ минимальные значения функционалов (10), которые имеют место при минимизации каждого из этих функционалов в отдельности. Тогда при фиксированных значениях весовых коэффициентов $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ минимально возможное значение функционала (12) составляет

$$J(\alpha,\beta_0,\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2) = \overline{\gamma}_1^2\overline{x}_{n+1}^*(T) + \overline{\gamma}_2^2\left|\overline{s}_{n+1}(T)\right|^*. \qquad (14)$$

Отыщем минимум функционала (14) по $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ при ограничении (13). Для решения этой задачи на условный экстремум построим функцию Лагранжа

$$F(\alpha,\beta_0,\overline{\gamma}_1,\overline{\gamma}_2) = \overline{\gamma}_1^2\overline{x}_{n+1}^*(T) + \overline{\gamma}_2^2\left|\overline{s}_{n+1}(T)\right|^* +$$

$$+\lambda(1-\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2) \qquad (15)$$

и запишем условия минимума функции (15):

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta_0,\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2)}{\partial\bar{\gamma}_1} = 2\bar{\gamma}_1 x^*_{n+1}(T) - \lambda = 0; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial F(\alpha,\beta_0,\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2)}{\partial\bar{\gamma}_2} = 2\bar{\gamma}_2 \left|\bar{s}_{n+1}(T)\right|^* - \lambda = 0. \qquad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) получаем

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\lambda}{2\bar{x}^*_{n+1}(T)}; \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{\lambda}{2\left|\bar{s}_{n+1}(T)\right|^*}. \qquad (18)$$

Резюмируя изложенное, можно указать следующий алгоритм решения проблемы параметрического синтеза оптимального робастного стабилизатора подвижного объекта:

– используя векторное дифференциальное уравнение возмущенного движения замкнутой системы стабилизации подвижного объекта (1) и вводя в рассмотрение вектор чувствительности (3), составляем векторное дифференциальное уравнение чувствительности (5);

– к векторным дифференциальным уравнениям (1) и (5) добавляем два скалярных уравнения (7) и (8), совместные решения которых в момент времени $t=T$ позволяют количественно оценить точность стабилизации и степень робастности замкнутой системы стабилизации;

– используя один из известных численных методов оптимизации [5], на решениях системы дифференциальных уравнений (1), (7) с начальными условиями $X(0)$, $x_{n+1}(0)=0$ находим минимум функции $x_{n+1}(T)=x^*_{n+1}(T)$ по векторному параметру $\alpha \in G_\alpha$;

– на решениях системы дифференциальных уравнений (1), (5), (8) с начальными условиями $X(0)$, $S(0)=0$, $s_{n+1}(0)=0$ находим минимум функции $\left|s_{n+1}(T)\right| = \left|s_{n+1}(T)\right|^*$ по векторному параметру $\alpha \in G_\alpha$;

– используя формулы (22) и (23) находим значения весовых коэффициентов γ_1 и γ_2 аддитивного функционала (9);

– используя один из численных методов оптимизации, на решениях системы дифференциальных уравнений (1), (5), (7), (8) с начальными условиями $X(0)$, $S(0)=0$, $x_{n+1}(0)=0$, $s_{n+1}(0)=0$ находим минимум аддитивного функционала (9) по векторному параметру $\alpha \in G_\alpha$.

Полученное значение $\alpha^* \in G_\alpha$ обеспечивает высокую точность стабилизации подвижного объекта и одновременно робастность замкнутой системы стабилизации к вариациям конструктивного параметра $\beta \in G_\beta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенвассер, Е. Н.* Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. – Л. : Энергия, 1971. – 292.
2. *Томович, Р.* Общая теория чувствительности / Р. Томович, М. Вукобратович. – М. : Сов. Радио, 1972. – 240 с.
3. *Александров, Е. Е.* Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров, М. В. Бех. – Х. : Основа, 1993. – 113 с.
4. *Александров, Е. Е.* Синтез робастного стабилизатора для позиционного электропривода / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова, И. В. Костяник // Технічна електродинаміка. Спеціальний випуск «Силова електроніка та енергоефективність». – 2010. – Ч. 1. – С. 178–181.
5. *Химмельблау, Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

Стаття надійшла до редакції 24.02.2012.

Александрова Т. Є.

ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РОБАСТНИХ СТАБІЛІЗАТОРІВ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглядається проблема синтезу оптимального за точністю стабілізатора рухомого об'єкта з урахуванням вимоги робастності замкненої системи стабілізації до зміни конструктивних параметрів об'єкта.

Ключові слова: робастні системи, функції чутливості, інтегральний квадратичний функціонал, вагові коефіцієнти.

Alexandrova T. Ye.

PARAMETRIC SYNTHESIS OF ROBUST OPTIMAL STABILIZERS OF MOVING OBJECTS

The problem of optimal synthesis for the accuracy of the stabilizer of a moving object with the requirement of robustness of the closed-loop system stability to changes in design parameter of the object.

Key words: robust system, the sensitivity function, the integral quadratic functional, the weights.