

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ
МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВIDENTIFICATION OF OSCILLATION PARAMETERS
BY LEAST SQUARES METHOD

Д.И. Анпилогов, Н.В. Снижко

Запорожский национальный технический университет, Украина

D.I. Anpilogov, N.V. Snizhko

Zaporizhzhya National Technical University, Ukraine

Abstract

The parameter's identification of the oscillating system by known digital samples implemented in a variety packages of digital signal processing. However, this requires the use of sophisticated techniques of the theory of analytic signals. In this paper we construct an alternative approach based on the least squares method. The total volume of computations significantly shortened. The results are confirmed by statistical criteria.

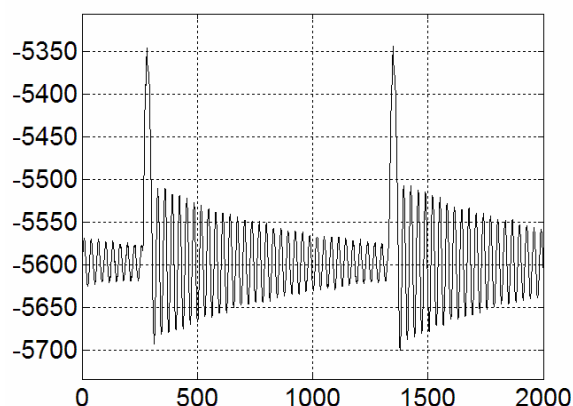
Keywords: digital signal processing, least squares method, period, damping coefficients, statistical criterion.

ВВЕДЕНИЕ

С развитием технологий высокоточной механической обработки актуализируются вопросы оценки параметров свободных колебаний обрабатываемых деталей при воздействии обрабатывающего инструмента [1]. Учёт этих колебаний позволяет повысить точность обработки. В настоящей работе предложена упрощённая методика оценки коэффициента затухания и частоты свободных колебаний, основанная на методе наименьших квадратов.

ИЗЛОЖЕНИЕ

1. Постановка задачи. Пластика, консольно заделанная одним концом, подвергается периодическим ударам инструмента по другому концу. Типовой вид виброграммы приведён на фиг. 1. Частота и период дискретизации $\nu = 16,7$ кГц, $\tau = \frac{1}{\nu}$. Горизонтальная ось проградуирована в единицах τ , а вертикальная – в условных единицах АЦП.



Фиг. 1. Типовой вид виброграммы

Наличие отрицательной постоянной составляющей вибросигнала обусловлено спецификой измерений. В пределах одного цикла затухания вид уравнения движения $X(t) = C + x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$. Задача сводится к оценке величин частоты ω свободных колебаний и коэффициента β затухания по данным фиг. 1.

2. Оценка периода свободных колебаний. Пусть моменты отсчёта сигнала $t_i = (i-1)\tau$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$, N – количество отсчётов; $X_i = X(t_i)$. Считая, что колебания происходят около

смещённого положения равновесия, определим это положение как среднее арифметическое отсчётов: $C = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i$. Рассмотрим величину

$$x(t) = X(t) - C = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Её значения $x_i = X_i - C$. Оценим период свободных колебаний как расстояние между соседними максимумами. Пусть они достигаются в точках $t = t_k$ – решениях системы $x'(t) = 0$, $x''(t) < 0$. Для функции (1) решения этой системы – числа t_k такие, что $\omega t_k + \varphi_0 = -\arctg \frac{\beta}{\omega} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда оценка периода $T = t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{\omega}$. Перебор всех членов массива x_i позволяет вычленив все локальные максимумы. Пусть их номера равны $i_0(s)$, $s = 0, 1, \dots, M-1$, M – количество максимумов, обнаруженных в одном цикле затухания. Величину t_k следует понимать как момент отсчёта с номером $i_0(s)$ (предыдущее значение i_0), а величину t_{k+1} – как момент отсчёта с номером $i_0(s+1)$ (последующее значение i_0). Получаем набор из $(M-1)$ чисел T_s . Для одного выбранного цикла затухания при $M = 24$ расчёты приводят к среднему значению $\frac{1}{\tau} \langle T \rangle = 31,3931$. Среднее квадратичное отклонение выборки составляет $\frac{1}{\tau} \langle \sigma \rangle = 0,820$.

Очевидно, s -е максимальное значение достигается не в момент $t_{i_0(s)} = \tilde{t}_{i_0}(s)$, а в некоторый соседний момент, в который отсчёт не производился. В дополнение к точке $t_{i_0(s)}$ рассмотрим ещё $2N^*$ точек. По массиву отсчётов максимумов с номерами от $i_0 - N^*$ до $i_0 + N^*$ методом наименьших квадратов (МНК) построим аппроксимирующую параболу в виде

$$x_s^*(t) = p_s \left(\frac{t - \tilde{t}_{i_0}(s)}{\tau} \right)^2 + q_s \frac{t - \tilde{t}_{i_0}(s)}{\tau} + r_s.$$

Для этого минимизируем функцию

$$S(p_s, q_s, r_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=i_0-N^*}^{i_0+N^*} (x_s^*(t_i) - x_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=-N^*}^{N^*} (p_s j^2 + q_s j + r_s - x_{(j+i_0)})^2$$

(введена замена $i - i_0(s) = j$). Решим систему уравнений (индекс s у искомых переменных p , q , r далее опускается)

$$\frac{\partial S}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = 0.$$

В матричной форме имеем (диапазон суммирования не указываем; он остаётся неизменным):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_{(j+i_0)} \cdot j^2 \\ \sum x_{(j+i_0)} \cdot j \\ \sum x_{(j+i_0)} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Здесь $a_{11} = \sum j^4$, $a_{13} = a_{22} = a_{31} = \sum j^2$, $a_{33} = 2N^* + 1$. Заметим, значения p , q , r для максимумов с разными номерами s будут отличаться только за счёт правой части (2); матрица этой системы для всех максимумов будет одинаковой и зависящей только от одного числа N^* . В практических расчётах далее принято $N^* = 4$.

Типичный ход аппроксимирующей параболы $x_s^*(t)$ для некоторого максимума ($i_0 = 205$) показан на фиг. 2. Кружочками отмечены отсчёты вибросигнала, сплошной линией – график параболической аппроксимации. Вершина параболы отмечена квадратиком. Абсцисса вершины скорректирована и больше не является целочисленной (в единицах τ).



Фиг. 2. Аппроксимация вибросигнала в окрестности максимума

Эта абсцисса найдена как уточнённое положение s -го максимума из уравнения $\frac{dx^*(t)}{dt} = 0$ (индекс s опускается). Для s -го максимума получаем

$$t_{i_0}^*(s) = \tau \left(i_0(s) - \frac{q_s}{2p_s} \right).$$

(До сих пор это положение мы оценивали величиной $t_{i_0}(s) = \bar{t}_{i_0}(s)$). Тогда оценка периода

$$\frac{T^*}{\tau} = \frac{t_{i_0}^*(s+1)}{\tau} - \frac{t_{i_0}^*(s)}{\tau} = \Delta i_0 + \frac{q_s}{2p_s} - \frac{q_{s+1}}{2p_{s+1}}.$$

С учётом уточнённых положений максимумов для среднего значения получаем $\frac{1}{\tau} \langle T^* \rangle = 31,3853$. Среднее квадратичное отклонение выборки составляет $\frac{1}{\tau} \langle \sigma^* \rangle = 0,126$. Как видим, $\langle T^* \rangle \approx \langle T \rangle$, однако $\langle \sigma^* \rangle \ll \langle \sigma \rangle$, т.е. коррекция положений максимумов к существенному отличию в оценке периода не приводит, однако способствует улучшению точности оценки.

3. Оценка коэффициента затухания.

Оценим коэффициент затухания с помощью МНК при определении скорости убывания огибающей исходного сигнала. Сообразно (1) будем искать огибающую в виде $A(t) = x_0 e^{-\beta t}$.

Будем считать её заданной точками (t_m, x_m) максимумов. Здесь абсциссы $t_m = t_{i_0}^*(s)$, ординаты $x_m = x_s^*(t_m)$.

Непосредственное применение МНК затруднено, поскольку зависимость огибающей от параметра β нелинейна. Используем линеаризующую замену переменных, положив $y = \ln A$. Введя замены $a = \ln x_0$, $b = \beta \tau$, получим

$$y = a - b \frac{t}{\tau}.$$

Эта прямая должна аппроксимировать набор точек (t_m, y_m) , где $y_m = \ln x_m$. Минимизируем функцию

$$S(a, b) = \frac{1}{2} \sum_m \left(a - b \frac{t_m}{\tau} - y_m \right)^2$$

(суммирование происходит только по точкам максимумов; их количество M). Имеем систему $\partial S / \partial a = \partial S / \partial b = 0$. В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} M & -\sum \frac{t_m}{\tau} \\ \sum \frac{t_m}{\tau} & -\sum \left(\frac{t_m}{\tau} \right)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_m \\ \sum y_m \cdot \frac{t_m}{\tau} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Эта система легко разрешима. Коэффициент затухания в единицах периода дискретизации:

$$\beta = \frac{b}{\tau} = b \nu.$$

На примере одного цикла затухания величина b при решении системы (3) оказывается равной 0,00124. Сравним полученный результат с приближённой оценкой, которую построим так.

Пусть i_0 , $i_0 + 1$ – точки предыдущего и последующего максимумов. Имеем:

$$x_{i_0} - C = x_0 e^{-\beta t_{i_0}}, \quad x_{i_0+1} - C = x_0 e^{-\beta t_{i_0+1}}.$$

Исключая их этих уравнений x_0 и учитывая, что $t_{i_0+1} - t_{i_0} = T$, получаем

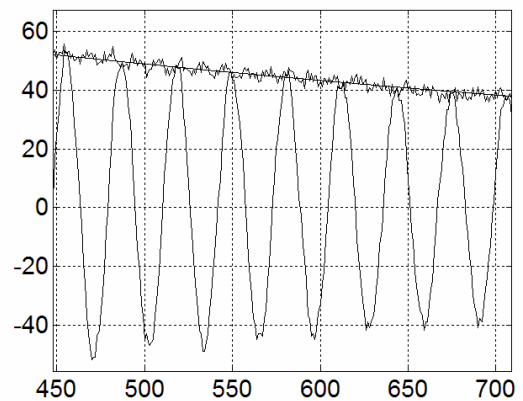
$$b_m = \frac{1}{T/\tau} (y_m - y_{m+1}), \quad m = \overline{1, M-1}.$$

Последнее выражение и есть оценка затухания по паре соседних максимумов. Матожидание и среднее квадратичное отклонение этой выборки составляют $\langle b \rangle = 0,00126$ и $\sigma_b = 0,00061$. Как видим, решение b системы (3) и оценка $\langle b \rangle$ отличаются друг от друга на величину, значительно меньшую σ_b . Это свидетельствует о практической приемлемости нахождения коэффициента b как решения системы (3). В то же время, отношение $\frac{\sigma_b}{\langle b \rangle} \approx 0,48$ не является малым, т.е. разброс в выборке b_m весьма велик. Впрочем, это и так было ясно, поскольку из-за ошибки измерений даже монотонность амплитуд максимумов в некоторых местах нарушается (минимумов это касается в той же мере). Следовательно, для сравнения с решением системы (3) требуется иной, более точный способ оценки.

Это способ может сводиться к вычленению огибающей затухающего сигнала и вычислению модуля соответствующего аналитического сигнала [2]. Функция `hilbert()` пакета расширения Signal Processing Toolbox среды MATLAB (вопреки своему названию) не выполняет преобразование Гильберта; она лишь формирует аналитический сигнал, дополняя исходный физический (и следовательно, вещественный) сигнал соответствующими комплексными значениями. Последующее применение функции `abs()` вычисления модуля (в данном случае – модулей комплексных значений отсчётов аналитического сигнала) имеет своим результатом огибающую [3]. Распорядиться её значениями можно так же

точно, как и скорректированными координатами максимумов. Система, аналогичная (3), приводит к альтернативному значению b' .

Пример работы пары функций `hilbert()`, `abs()` показан на фиг. 3. Огибающая `abs(hilbert(x_i))` изображена быстро осциллирующей кривой, а графики её аналитического выражения $A(t) = x_0 e^{-\beta t}$ построены с использованием решений системы (3), сформированной как на основе массивов скорректированных максимумов, так и на основе массивов значений огибающей. Оба последних графика на фиг. 3 оказались графически неразличимыми.



Фиг. 3. Вычленение и аппроксимация огибающей

Произведём сравнение решений b системы (3), получаемых с использованием массивов скорректированных максимумов, и решений b' этой системы, получаемых с использованием массивов значений огибающей, применяя статистические критерии.

Рассматривая 33 различных цикла затухания, получим две независимые выборки из генеральных совокупностей случайных величин b и b' объёмом $m = n = 33$ каждая. Осуществлялась проверка статистической гипотезы о равенстве генеральных средних указанных выборок с использованием статистики Стьюдента [4]

$$T = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}$$

при конкурирующей гипотезе: «средние не равны» (критическая область является двусторонней). Предварительно проверена гипотеза о равенстве дисперсий выборок с помощью критерия Фишера-Снедекора, что позволило применить вышеуказанный критерий Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних. (Заметим, вид статистического распределения выборок не установлен, однако статистика Стьюдента этого и не требует). Получено наблюдаемое значение статистики $T = 1,182$ (при критическом значении $T^* = 2$, уровень значимости $\alpha = 0,05$). Гипотеза на этом уровне значимости не отвергается. Следовательно, с надёжностью 0,95 можно утверждать, что решения системы (3), полученной обоими способами, одинаковы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен способ оценки коэффициента затухания и частоты собственных колебаний на примере анализа некоторого цифрового вибросигнала. Способ основан на коррекции положений максимумов методом наименьших квадратов. Результат применения этого способа оказывается таким же, как и при

использовании громоздких специализированных функций цифровой обработки среды MATLAB. Однако предложенный способ, в отличие от этих функций, не связан с арифметикой комплексных чисел и с цифровыми аналогами интегральных преобразований. Кроме того, использованная матрица метода наименьших квадратов оказывается одинаковой при коррекции положений всех максимумов, что минимизирует общий объём вычислений. Это позволяет рассматривать предложенный способ как удобную замену громоздких функций цифровой обработки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Altintas Y. Manufacturing automation : metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design / Yusuf Altintas. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 382 p.
- [2] Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. – СПб. : Питер, 2003. – 604 с.
- [3] Преобразование Гильберта. Аналитический сигнал. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://dsplib.ru/content/hilbert/hilbert.html>.
- [4] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1972. – 368 с.