УДК 517.547.7
Сніжко Н.В.[1]
[1] канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ГЕЛЬДЕРА ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

В роботі вивчається структура узагальнених просторів Гельдера функцій двох комплексних змінних. Встановлюються умови, що накладаються на структурні характеристики просторів, при виконанні яких простори збігаються або вкладені один в одного.

Нехай $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ – кістяк Ляпунова, утворений довільними замкненими контурами Ляпунова γ_1 і γ_2 на комплексній площині; функція $x(t,\tau) \in C$ на γ, де $t \in \gamma_1$, $\tau \in \gamma_2$. Розглядаються функціонали [1]

$$\omega_{\mathrm{k}}(\delta_1, \delta_2; x) = \sup_{\substack{|h| \le \delta_1 \\ |\eta| \le \delta_2}} \left| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^{\nu} x(t + \nu h, \tau + \nu\eta) \right|,$$

$$\omega_{k,1}(\delta_1,\delta_2;x)=\sup_{\substack{|h|\le\delta_1\\|\eta|\le\delta_2}}\left|\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{k+l-\nu-\mu}C_k^{\nu}C_l^{\mu}x(t+\nu h,\tau+\mu\eta)\right|,$$

$$\omega_k(\delta_1,0;x)=\omega_{k,0}(\delta_1,\delta_2;x)=\sup_{\tau\in\gamma_2}\sup_{|h|\le\delta_1}\left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^{\nu}x(t+\nu h,\tau)\right|,$$

$$\omega_k(0,\delta_2;x)=\omega_{0,k}(\delta_1,\delta_2;x)=\sup_{t\in\gamma_2}\sup_{|\eta|\le\delta_2}\left|\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^{\nu}x(t,\tau+\nu h)\right|,$$

які є відповідно повним, мішаним і частинними модулями неперервності функції $x(t,\tau)$ порядку k ($k+l$), де k, l – натуральні числа. Нехай $\omega(\delta_1,\delta_2)$ – деякий модуль неперервності, а $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ – відповідні йому [2] прості (одновимірні) модулі неперервності. Під узагальненим простором Гельдера H_ω будемо розуміти множину функцій $x(t,\tau)\in C$ на γ, модулі неперервності яких задовольняють умови:

$$\omega(\delta_1,\delta_2;x)\le C_1\omega(\delta_1,\delta_2), \tag{A}$$

$$\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;x)\le C_2\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2), \tag{B}$$

де C_1, C_2 – сталі, що залежать тільки від $x(t,\tau)$. Слід зауважити, що умова (B) не випливає з умови (A).

Норму в просторі H_ω введемо наступним чином:

$$\|x(t,\tau)\|_{H_\omega}=\|x(t,\tau)\|_C+H(x;\omega)+H^{t\tau}(x;\omega)=$$

$$=\max_{(t,\tau)\in\gamma}|x(t,\tau)|+\sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\ne0}\frac{\omega(\delta_1,\delta_2;x)}{\omega(\delta_1,\delta_2)}+\sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\ne0}\frac{\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;x)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)}. \tag{1}$$

Зауважимо, що в просторі $H_\omega\equiv H_{\Omega_1\Omega_2}$ норму можна визначити і таким чином:

$$\|x(t,\tau)\|_{H_{\Omega_1\Omega_2}}=\|x(t,\tau)\|_C+H^t(x;\Omega_1)+H^\tau(x;\Omega_2)+H^{t\tau}(x;\omega)=$$

$$=\max_{(t,\tau)\in\gamma}|x(t,\tau)|+\sup_{\delta_1>0}\frac{\omega(\delta_1,0;x)}{\Omega_1(\delta_1)}+\sup_{\delta_2>0}\frac{\omega(0,\delta_2;x)}{\Omega_2(\delta_2)}+\sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\ne0}\frac{\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;x)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)}. \tag{2}$$

Теорема 1. В просторі H_ω норми (1) і (2) еквівалентні.

Теорема 2. [3] Відносно норми (1) простір H_ω є банаховим.

З твердження теореми 1 випливає, що простір H_ω є банаховим і відносно норми (2).

Модулі неперервності $\omega^{(1)}(\delta_1,\delta_2)\equiv\omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}(\delta_1,\delta_2)\equiv\omega^{(2)}$ назвемо еквівалентними ($\omega^{(1)}\sim\omega^{(2)}$), якщо існують сталі $0<m,M<\infty$ такі, що

$$0<m=\inf_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0}\frac{\omega^{(1)}(\delta_1,\delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1,\delta_2)},\ \sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0}\frac{\omega^{(1)}(\delta_1,\delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1,\delta_2)}=M<+\infty .$$

Теорема 3. [3] Простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ співпадають тоді і тільки тоді, коли $\omega^{(1)}\sim\omega^{(2)}$.

Теорема 4. Нехай простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ такі, що їх характеристики $\omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}$ не еквівалентні. Тоді:

1) якщо $m=\inf\limits_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0}\dfrac{\omega^{(1)}(\delta_1,\delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1,\delta_2)}>0$, $M=\sup\limits_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0}\dfrac{\omega^{(1)}(\delta_1,\delta_2)}{\omega^{(2)}(\delta_1,\delta_2)}=\infty$, то простір $H_{\omega^{(2)}}$ вкладений у простір $H_{\omega^{(1)}}$;

2) якщо $m=0$, $M<\infty$, то простір $H_{\omega^{(1)}}$ вкладений у простір $H_{\omega^{(2)}}$;

3) якщо $m=0$, $M=\infty$, то простори $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ не будуть вкладені один в одного, тобто існують функції $x(t,\tau)$, що належать простору $H_{\omega^{(1)}}$ і не належать простору $H_{\omega^{(2)}}$, і навпаки. В цьому випадку переріз просторів $H_{\omega^{(1)}}$ і $H_{\omega^{(2)}}$ містить клас Ліпшиця в якості вкладеного простору.

Ці теореми узагальнюють відомі результати щодо класичних двовимірних просторів Гельдера $H_{\alpha\beta}$, $0<\alpha,\beta\leq 1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.–Л. : Гостехиздат, 1949. – 688 с.

2. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : ГИФМЛ, 1965. – 624 с.

3. Сніжко Н. В. Класифікація узагальнених просторів Гельдера функцій двох змінних / Н. В. Сніжко // Вісник Київського ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 124–128.