

УДК 539.3

- Пожуєв А. В. канд. ф.-м. наук, професор, професор кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, e-mail: scorpio6828@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4083-5139
- Пожуєв В. І. д-р ф.-м. наук, професор, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету «Запорізька політехніка», м. Запоріжжя, Україна, e-mail: pozhuevvi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9163-7888
- Міхайлуца О. М. канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри електроніки, інформаційних систем та програмного забезпечення Запорізького національного університету, м. Запоріжжя, Україна, e-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2935-7997

## ДІЯ ЖОРСТКОГО ТІЛА НА ВНУТРІШНЮ ПОВЕРХНЮ ТОВСТОСТІННОГО БІМЕТАЛІЧНОГО ЦИЛІНДРА

**Мета роботи.** Отримання точного розв'язання задачі про напружено-деформований стан довгого товстостінного біметалічного циліндра в рамках класичної теорії пружних матеріалів, а потім, використовуючи отримані при такій постановці результати, запропонувати більш прості інженерні підходи і дослідити можливість використання асимптотичних формул для експрес-аналізів на стадії проектування таких елементів конструкцій.

**Методи дослідження.** Для основного тіла циліндра використовуються класичні рівняння теорії пружності у переміщеннях. Для зовнішнього покриття (напилення) записуються рівняння теорії оболонок, які ґрунтуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Застосовується комплексне інтегральне перетворення Фур'є та метод Файлона для наближеного знаходження оригіналів напружень і переміщень. Також використовуються асимптотичні подання циліндричних функцій Бесселя для великих значень аргументу та подання невластних інтегралів у вигляді комбінацій елементарних та спеціальних табульованих функцій.

**Отримані результати.** Побудована математична модель для аналізу напружено-деформованого стану біметалічного циліндру з тонким зовнішнім шаром з іншого матеріалу ніж матеріал внутрішнього шару. Записані різні граничні умови на внутрішній поверхні циліндра, які описують передачу від жорсткого тіла або заданих зусиль, або заданих переміщень. Для усіх розглянутих варіантів за допомогою методу інтегральних перетворень результати отримано у вигляді невластних інтегралів, для обчислення яких застосовано спеціальний метод, орієнтований на обчислення інтегралів із сильно осцилюючими функціями. Наведені приклади конкретних графіків зміни компонент напружено-деформованого стану в матеріалі циліндра. В залежності від умов на внутрішній поверхні циліндра, запропоновані більш прості моделі для опису основного тіла, які ґрунтуються в залежності від характеру опису взаємодії жорсткого тіла і циліндра на одному рівнянні теорії пружності. При такому підході невластні інтеграли обернення в деяких важливих випадках вдалося за допомогою асимптотичного підходу отримати в замкнутому вигляді, як комбінацію елементарних і спеціальних табульованих функцій. Порівняння з точним підходом дозволило довести можливість використання наближених моделей.

**Наукова новизна.** Побудована модель поведінки біметалічного циліндра як тіла, основний шар якого описується рівняннями теорії пружності, а для зовнішнього покриття використовується теорія оболонок. Розглянуті різні способи опису передачі на внутрішню поверхню циліндра зусиль і переміщень від жорсткого тіла. Показано можливість використання асимптотичного підходу для отримання порівняно простих формул для проведення попередніх розрахунків на стадії проектування таких елементів конструкцій.

**Практична цінність.** Отримані в роботі формули, графіки і алгоритми розрахунку можуть використовуватися в практиці роботи проектних організацій, які займаються бурильними установками, магістральними трубопроводами, артилерійськими стволами. Особливо важливо, що дані результати роботи можуть бути використані для так званих експрес-аналізів і попередньої оцінки.

**Ключові слова:** теорія пружності, інтегральні перетворення, напруження, переміщення, граничні умови, асимптотичне подання.

### Вступ

Розглядається статична задача про напружено-деформований стан нескінченно довгого циліндра, всередині якого знаходиться абсолютно тверде тіло,

зовнішній діаметр якого співпадає з внутрішнім діаметром циліндра. Від віссесиметричного жорсткого тіла на циліндр передається або продовжна поперечна взаємодія (задача А), або обертальні зусилля чи переміщення (задача В). Зазначимо, що задачі такого виду

виникають при проектуванні і розрахунку артилерійських стволів, балістичних установок, обсадних труб в бурильних установках, магістральних трубопроводів при русі очисних тіл і таке подібне. Раніше в роботах [5, 6, 8] розглянуті стаціонарні динамічні задачі про рух зі сталюю швидкістю вздовж циліндра диску, що обертається, а в роботах [3, 7] задачі про рух тангенціального навантаження в циліндричній порожнині в неособмежному пружному середовищі. Робота [2] присвячена стаціонарній динамічній задачі про напружено-деформований стан, який викликається в циліндрі рухом абсолютно твердого тіла.

### Мета роботи

Метою дослідження є побудова математичної моделі для аналізу напружено деформованого стану товстостінного циліндра, підкріпленого на зовнішній поверхні шаром міцнішого матеріалу, коли на внутрішню поверхню передаються зусилля або переміщення від жорсткого тіла. Для побудови моделі будуть використовуватися чіткі рівняння теорії пружності для основного тіла циліндра та рівняння теорії оболонок для опису поведінки покриття. Необхідно розглянути різні варіанти граничних умов на внутрішній поверхні, а також розробити алгоритм розв'язання задачі, що ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Фур'є та спеціального прийому для обчислення інтегралів обігу. Крім того, до мети дослідження можна віднести побудову спрощених моделей поведінки циліндра та використання простих інженерних формул для експрес-аналізів ще на етапі проектування. При цьому точні результати можуть бути використані як еталон для оцінки меж застосування результатів асимптотичного підходу.

### Матеріал і методика досліджень

Розглядається нескінченно довгий циліндр з внутрішнім радіусом  $a$ , зовнішня поверхня якого радіуса  $b$  покрита тонким шаром іншого матеріалу. Всередині циліндра знаходиться вісесиметричне абсолютно жорстке тіло, від якого на внутрішню поверхню циліндра передаються задані зусилля або задані переміщення. Розглянуті різні граничні умови на внутрішній поверхні, а також різні моделі для опису напружено-деформованого стану матеріалу циліндра.

Розглянемо спочатку так звану продовжно-поперечну взаємодію тіла циліндру, коли від жорсткого тіла на циліндр передаються зусилля або переміщення в радіальному і вісєвому напрямках.

Рівновагу основного тіла циліндра описуємо класичними рівняннями теорії пружності у переміщеннях [1, 4], які для вісєсиметричної задачі записуються так

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial r} + 2\mu_1 \frac{\partial \omega_\phi}{\partial x} &= 0, \\ (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2\mu_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_\phi) &= 0, \\ \theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_{r1}) + \frac{\partial U_{x1}}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \frac{\partial U_{r1}}{\partial x} - \frac{\partial U_{x1}}{\partial r}, \\ \lambda_1 &= \frac{E_1 \nu_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $U_{r1}$  і  $U_{x1}$  – переміщення точок циліндра у напрямках радіуса і осі,  $E_1$ ,  $\nu_1$  – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу циліндра.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\nu_2}{b} \frac{\partial W_2}{\partial x} &= \frac{1 - \nu_2}{2\mu_2} q_x, \\ \frac{\nu_2}{b} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 W_2}{\partial x^4} + \frac{W_2}{b^2} - \frac{1 - \nu_2}{2\mu_2 h} (q_r - p) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $U_2, W_2$  – переміщення у напрямках осей  $x$  і  $r$  циліндричної системи координат,  $q_x, q_r$  – осьове і радіальне зусилля, які передаються на покриття з боку основного тіла циліндра,  $h$  – товщина покриття,  $\nu_2, \mu_2$  – механічні характеристики матеріалу покриття.

Зазначимо, що контакт між шарами циліндра двосторонній (відставання виключається) і відбувається по серединній поверхні оболонки, радіус якої, враховуючи малість товщини покриття  $h$  співпадає з зовнішнім радіусом основного тіла циліндра.

Граничні умови контакту між шарами записуються у такій формі при  $r = b$

$$\begin{aligned} U_2 &= U_{x1}, \quad W_2 = U_{r2}, \\ \sigma_{rr} &= -q_r, \quad \sigma_{xx} = -q_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Розглянуті різні варіанти граничних умов на внутрішній поверхні циліндра, зокрема, якщо від жорсткого тіла передаються одночасно радіальні і вісєві зусилля, то будемо мати при  $r = a$

$$\sigma_{rr} = -p(x), \quad \sigma_{xx} = -q(x). \quad (4)$$

Якщо передається лише одне із цих зусиль, тоді при  $r = a$

$$\sigma_{rr} = -p(x), \quad \sigma_{xx} = 0. \quad (5)$$

при  $r = a$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{xx} = -q(x). \quad (6)$$

Коли на внутрішню поверхню від жорсткого тіла передаються переміщення і не передаються зусилля, тоді при  $r = a$

$$U_{rr} = f_1(x), \quad U_{xx} = f_2(x). \quad (7)$$

Аналогічно (5) і (6) можна записати частинні вирази для таких умов.

Зазначимо, що якщо враховувати лише радіальні зусилля або переміщення, то достатньо точно поведінку основного шару циліндра можна описувати наближеною моделлю, у якій враховується лише радіальні переміщення. Тоді маємо таке рівняння рівноваги

$$\frac{\partial^2 U_{r1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{r1}}{\partial r} - \frac{U_{r1}}{r^2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\partial^2 U_{r1}}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) стане ще більш простішим, якщо моделювати тіло системою, що складена з дисків, не пов'язаних один з одним за координатою  $x$ . Для такої моделі замість рівняння (8) будемо мати таке рівняння

$$\frac{\partial^2 U_{r1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{r1}}{\partial r} - \frac{U_{r1}}{r^2} = 0. \quad (9)$$

Зв'язок між напругами і переміщеннями у всіх випадках у циліндричній системі координат запишемо в такому вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial U_{x1}}{\partial x} + \lambda_1 \left( \frac{\partial U_{r1}}{\partial r} + \frac{U_{r1}}{r} \right), \\ \sigma_{rr} &= \mu_1 \left( \frac{\partial U_{x1}}{\partial r} + \frac{\partial U_{r1}}{\partial x} \right), \\ \sigma_{rx} &= (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial U_{r1}}{\partial r} + \lambda_1 \left( \frac{\partial U_{x1}}{\partial r} + \frac{U_{r1}}{r} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для подальшого дослідження у всіх рівняннях перейдемо до безрозмірних змінних, коли усі лінійні величини  $r, x, U_r, U_x, U_1$  віднесені до  $b$ , при цьому через  $\chi^2 = h/b$  позначена відносна товщина зовнішнього покриття.

Для розв'язання задачі застосовується комплексне інтегральне перетворення Фур'є для усіх заданих і шуканих величин у такій формі

$$\begin{aligned} \varphi^0(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\xi x} dx, \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^0(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Тоді у просторі зображень рівняння (1) запишуться в такому вигляді

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{d\theta^0}{dr} + 2\mu_1 i \xi W_\varphi^0 &= 0, \\ i \xi (\lambda_1 + 2\mu_1) \theta^0 - \frac{2\mu_1}{r} \frac{d}{dr} (r W_\varphi^0) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Закон Гука, переписаний з використанням співвідношень Коші у просторі зображень записується так

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^0}{\mu_1} &= \frac{2\nu_1}{1-2\nu_1} \left( i \xi U_x^0 + \frac{U_r^0}{r} \right) + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{dU_r^0}{dr}, \\ \frac{\sigma_{xx}^0}{\mu_1} &= \frac{2\nu_1}{1-2\nu_1} \left( \frac{dU_{r1}^0}{dr} + \frac{U_r^0}{r} \right) + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} i \xi U_x^0, \\ \frac{\sigma_{rx}^0}{\mu_1} &= \frac{dU_{x1}^0}{dr} + i \xi U_{r1}^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Після застосування перетворення Фур'є рівняння (2) приймають наступний вигляд

$$\begin{aligned} -\xi^2 U_2^0 + \frac{\nu_2}{\chi} i \xi W_2^0 &= \frac{1-\nu_2}{2\mu_2} q_x^0, \\ \frac{\nu_2}{\chi} i \xi U_2^0 + \frac{\chi^2}{12} \xi^4 W_2^0 + \frac{1}{\chi^2} W_2^0 &= \frac{1-\nu_2}{2\mu_2 \chi} q_r^0. \end{aligned} \quad (14)$$

Загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (12) записується в такому вигляді

$$\begin{aligned} \chi U_r^0 &= [\xi r I_0(\xi r) - 4(1-\nu_1) I_1(\xi r)] C_1 + I_1(\xi r) C_2 + \\ &+ [\xi r K_0(\xi r) - 4(1-\nu_1) K_1(\xi r)] C_3 - K_1(\xi r) C_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут  $I_n(x), K_n(x)$  – функції Бесселя від умовного аргументу першого та другого роду, а функції  $C_k(\xi)$ , ( $k = \overline{1,4}$ ) визначаються з граничних умов.

Підставляючи (15) в (13), отримаємо вирази для трансформант напруг. Після цього задовольняємо у просторі зображень перетворенням умовам (13) при  $r = 1$  і знаходимо вирази для  $C_1 - C_4$  через трансформанти переміщень зовнішнього шару циліндру. Тоді можна знайти залежності між зусиллями на границі шарів циліндра і переміщеннями у зовнішньому шарі, зокрема, будемо мати таке

$$q_r^0 = -\mu_1 f(\xi) W_2^0, \quad (16)$$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^4 \frac{\Delta_j}{\det \|a_{jk}\|}. \quad (17)$$

де  $\Delta_j$  – алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка визначника  $\det \|a_{jk}\|$ , а елементи визначника знаходяться за формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \xi I_0(\xi) - 4(1-\nu_1) I_1(\xi); & a_{12} &= I_1(\xi); \\ a_{13} &= \xi K_0(\xi) - 4(1-\nu_1) K_1(\xi); & a_{14} &= -K_1(\xi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi^2 I_0(\xi) - 2(1-\nu_1)\xi J_1(\xi)] \\
 a_{22} &= \frac{\xi}{1+\nu_1} I_1(\xi) \\
 a_{23} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi^2 K_0(\xi) - 2(1-\nu_1)\xi K_1(\xi)] \\
 a_{24} &= -\frac{\xi}{1+\nu_1} K_1(\xi) \\
 a_{31} &= \frac{1}{1+\nu_1} [(\xi^2 + 4 - 4\nu_1)I_0(\xi) - \xi(3 - 2\nu_1)I_1(\xi)] \\
 a_{32} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi I_0(\xi) - I_1(\xi)] \\
 a_{33} &= \frac{1}{1+\nu_1} \left[ \xi \frac{1}{1-2\nu_1} K_0(\xi) - 4(1+\nu_1)K_1(\xi) \right] \\
 a_{34} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi K_0(\xi) + K_1(\xi)] \\
 a_{41} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi^2 I_0(\xi) - 2(1-\nu_1)\xi J_1(\xi)] \\
 a_{42} &= \frac{\xi}{1+\nu_1} I_1(\xi) \\
 a_{43} &= \frac{1}{1+\nu_1} [\xi^2 K_0(\xi) - 2(1-\nu_1)\xi K_1(\xi)] \\
 a_{44} &= -\frac{\xi}{1+\nu_1} K_1(\xi)
 \end{aligned}$$

Після підстановки залежності (16) і аналогічної залежності для  $q_r^0$  у рівняння (14) і задоволення після розв'язання рівнянь (14) перетворенням граничним умовам (4)–(7) на внутрішній поверхні циліндра, отримуємо розв'язання задачі у просторі зображень. При цьому остаточні формули для трансформант переміщень і напруг залежать від виду функцій  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  у формулах (4)–(7).

Для прикладу, якщо вважати, що від жорсткого тіла на внутрішню поверхню передаються радіальні і осьові переміщення, а на зовнішню поверхню передаються радіальні зусилля, рівномірно розподілені по ділянках скінченної довжини  $2l$ , а жорстке тіло вважати достатньо вузьким, тоді доцільно в (5) і (7) покласти наступне

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p_0 h(x, 2l_*), \\
 h(x, 2l_*) &= \begin{cases} 1, & |x| \leq l_* \\ 0, & |x| > l_* \end{cases} \quad l_* = l/b, \\
 f_1(x) &= \frac{\bar{W}_0}{1+\alpha^2 x^2}, \quad f_2(x) = \frac{\bar{U}_0}{1+\beta^2 x^2}
 \end{aligned} \quad (18)$$

або в такому вигляді

$$f_1(x) = W_0 e^{-\alpha|x|}, \quad f_2(x) = U_0 e^{-\beta|x|}. \quad (20)$$

Тоді трансформанти переміщень для законів (19) мають такий вигляд

$$f_1^0(\xi) = \frac{W_0}{b} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{|\xi|}{\alpha}}, \quad f_1^1(\xi) = \frac{W_0}{b} \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{|\xi|}{\alpha}}. \quad (21)$$

У випадку формул (20) будемо мати

$$\begin{aligned}
 f_1^0(\xi) &= \frac{2W_0\alpha}{b(\alpha^2 + \xi^2)}, \\
 f_2^0(\xi) &= \frac{2U_0\beta}{b(\beta^2 + \xi^2)}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Застосовуючи формулу обернення комплексного перетворення Фур'є з врахуванням (21) для радіального переміщення основного шару циліндра у просторі оригіналів отримуємо результат у вигляді комбінації невласних інтегралів

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{r1}}{W_0} &= \frac{1}{\alpha} \int \sum_{j=1}^4 \frac{\Delta_j}{\det \|a_{jk}\|} e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \cos(\xi x) dx - \\
 &- \frac{U_0^*}{\beta} \int \sum_{j=1}^4 \frac{\Delta_j}{\det \|a_{jk}\|} e^{-\frac{\xi}{\beta}} \sin(\xi x) dx + \\
 &+ \frac{p_0^*}{\pi l_*} \int \sum_{j=1}^4 \frac{\Delta_j}{\det \|a_{jk}\|} \frac{\sin(\xi l_*)}{\xi} \cos(\xi x) dx \\
 p_0^* &= \frac{p_0}{\mu_2 W_0}, \quad U_0^* = \frac{U_0}{W_0}.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогічні формули можна записати для  $U_{x1}, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ .

Зрозуміло, що у загальному випадку записані вище невласні інтеграли не обчислюються аналітично, тобто результати не можна отримати у вигляді комбінацій елементарних і навіть спеціальних функцій. Нижче ми покажемо, як для деяких окремих випадків можна за допомогою асимптотичних подань функцій Бесселя знайти формули для малих значень змінної  $x$ , тобто поблизу початку координат, але у загальному випадку для отримання результатів за формулами виду (23) необхідно застосовувати наближені чисельні методи, зокрема, найбільш ефективним для обернення інтегрального перетворення Фур'є є відомий метод Файлона, орієнтований на обчисленні інтегралів із сильно осцилюючими підінтегральними функціями.

В якості прикладу за методом Файлона проведені розрахунки для таких значень безрозмірних параметрів  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\chi = 0,01$ ,  $l_* = 0,001$ ,  $U_0^* = 0$ . Безрозмірна товщина циліндра  $\varepsilon = a/b$ , а також значення коефіцієнта  $\alpha$  в законах (19), (20) варіювалися. Як показали розрахунки, якщо обрати значення параметра  $\alpha$  в законах (19), (20) із умови  $f_1^{(1)}(0,2) = f_1^{(2)}(0,2)$ , тоді різниця в результатах для цих законів буде малою.

На рис. 1 наведені графіки зміни безрозмірних радіальних переміщень  $W^* = U_{r1}/U_0$  за товщиною циліндра в перетині  $x = 0$ , причому крива 1 відповідає циліндру без зовнішнього шару покриття, 2 – циліндру, який підкріплений на зовнішній поверхні тільки жорстким матеріалом, 3 – циліндр в абсолютно жорсткій обоймі, 4 – нескінченно товстий циліндр (циліндрична порожнина в пружному просторі).

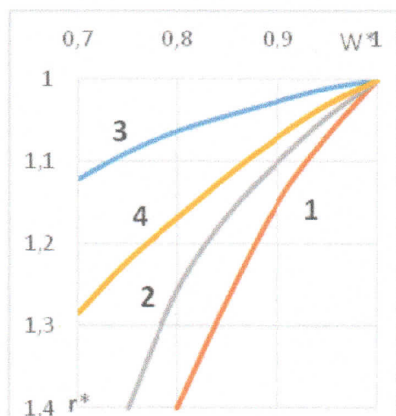


Рисунок 1. Розподіл радіальних переміщень

Аналогічні результати для вісєвого переміщення  $U^* = U_{x1}/U_0$  наведені на рис. 2. Зрозуміло, що вісєві переміщення, які викликаються радіальним зміщеннями жорсткого тіла, на порядок менші від радіальних.

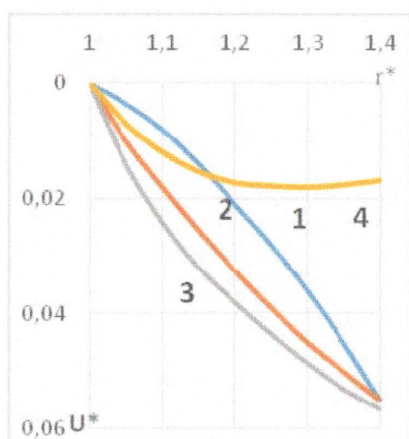


Рисунок 2. Зміна осьових переміщень за товщиною

Рис. 3 ілюструє розподіл за товщиною циліндра безрозмірних радіальних напружень  $\sigma^* = -\sigma_{rr}b/G_1U_0$ , причому для кривої 3 відкладено не  $\sigma^*$ , а  $0,25\sigma^*$ , оскільки у випадку жорсткої обойми такі напруження збільшуються у кілька разів. На рис. 4 наведені графіки для дотичних напружень  $\tau^* = -\sigma_{rx}b/G_1U_0$ . Як і вісєві переміщення, ці напруження помітно менші від нормальних, причому, вони менш чутливі до зміни граничних умов на зовнішній поверхні основного тіла циліндра.

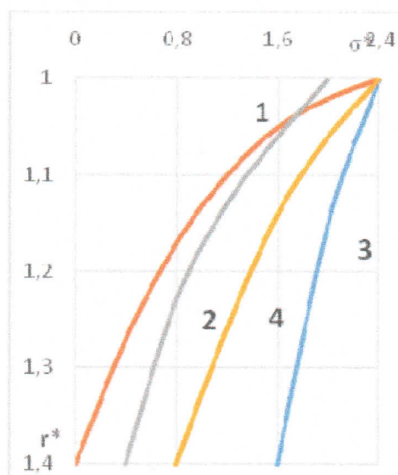


Рисунок 3. Графіки радіальних напружень

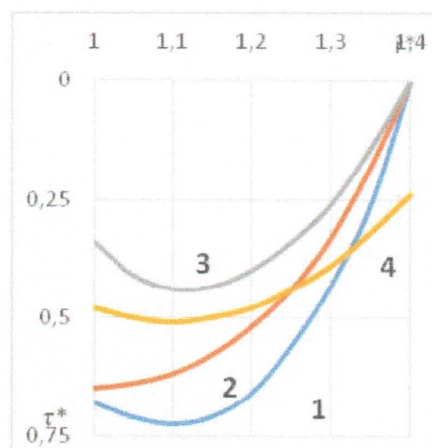


Рисунок 4. Дотичні напруження

#### Результати асимптотичного підходу

Розв'язання задачі значно спрощується, якщо використовувати для циліндра не точні рівняння (1), а більш прості моделі, які випливають з (1). Зокрема, якщо цікавитися аналізом напружено-деформованого стану циліндра, який викликається передачею від жорсткого тіла радіальних навантажень або переміщень, то достатньо близькі до точних результати можна отримати застосовуючи модель, яка описується рівняннями (8). Загальний розв'язок цього рівняння у просторі зображень записується у вигляді

$$U_r^0 = I_1(\xi r)C_1(\xi) + K_1(\xi r)C_2(\xi). \quad (24)$$

Тоді у формулах (16), (17) замість визначників четвертого порядку будемо мати детермінанти другого порядку і, зрозуміло, що у просторі оригіналів значно простішими стають підінтегральні функції у формулах виду (23). Треба лише пам'ятати, що у цьому випадку не будуть враховуватися осьові задані переміщення і дотичні навантаження. Інтеграли виду (23) знову обчислюються наближено за методом Файлона і відповідні криві на рис. 1 і рис. 3 практично співпадають з точними результатами.

Що стосується використання моделі, яка ґрунтується на рівнянні (9), тоді у просторі зображень радіальні переміщення даються такою формулою

$$U_r^0 = rC_1(\xi) + \frac{1}{r}C_2(\xi). \quad (25)$$

Проведений аналіз результатів показав, що якісно така модель дає результати, подібні до результатів за двома попередніми моделями, але при обчисленні невластних інтегралів обернення треба брати більш дрібну розбивку ділянки інтегрування.

Якщо головну увагу треба приділити передачі від жорсткого тіла до циліндра осевого переміщення або дотичного навантаження, то стан рівноваги основного тіла циліндру можна описувати таким одним рівнянням теорії пружності

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial^2 U_{,1}}{\partial x^2} = 0. \quad (26)$$

Тоді у просторі зображень за Фур'є розв'язання цього рівняння записується у вигляді

$$U_{,1}^0 = I_0(\xi r)C_1(\xi) + K_0(\xi r)C_2(\xi). \quad (27)$$

Після відповідних викладок приходимо для знаходження вісєвих переміщень і дотичних напружень до формул аналогічних (23). Зазначимо при цьому, що коли ми використовуємо більш прості моделі (8), (9), (26), які є частинними випадками точних рівнянь теорії пружності, то використовуємо асимптотичні подання для функцій Бесселя [10] в деяких із розглянутих тут випадках вдається аналітично обчислити невластні інтеграли обернення і отримати результати у вигляді комбінацій елементарних і спеціальних табульованих функцій. Наприклад, використовуючи подання функцій  $I_n(\xi)$  і  $K_n(\xi)$  для великих значень аргументу в останньому випадку для дотичної взаємодії жорсткого тіла і циліндра знаходимо такі аналітичні формули, які справедливі для точок близьких до значення координати  $x = 0$ .

Перший випадок, коли від жорсткого тіла передається осєве навантаження, яке розподілене по кільцю, тобто

$$q(x) = q_0 \delta(x)$$

тоді

$$\tau^* \Big|_{x>0} = \frac{\sigma_{xx} b}{q_0} = -\frac{s}{\pi} [\sin(sx)si(sx) + \cos[sx]ci(sx)]. \quad (28)$$

де  $s = \frac{\nu_1}{2(1+\nu_1)}$ ,  $si(z)$ ,  $ci(z)$  – інтегральні синус і косинус функції аргументу  $z$

$$si(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad ci(z) = \int_0^z \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Ці функції приймають дійсні значення для усіх

дійсних значень аргументу  $x$ , подані у вигляді графіків і таблиць [10].

У другому випадку вісьове зусилля передається на внутрішню поверхню циліндра рівномірно розподіленим по ділянках скінченної довжини  $2l$

$$q(x) = \frac{q_0}{2l} h(x, 2l), \quad h(x, 2l) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l \\ 0, & |x| > l \end{cases}$$

Для такого навантаження отримаємо наступні формули

$$\tau^* = \frac{1}{2\pi l_*} \begin{cases} \pi - ci(d)\sin(d) + \cos(d)si(d) - \\ - ci(e)\sin(e) + \cos(e)si(e), & x < l_* \\ \frac{\pi}{2} - ci(2si_*)\sin(2si_*) + \cos(2si_*)si(2si_*), & x = l_* \end{cases} \quad (29)$$

$$d = (l_* + x)s, \quad e = (l_* - x)s, \quad l_* = l/b.$$

Якщо розглянути систему взаємно врівноважених зусиль на однаковій відстані  $2\beta b$  одне від одного, які описуються таким чином

$$q(x) = q_0 \sum_{k=1}^n [\delta(x - k\beta) - \delta(x + k\beta)]$$

то для даного випадку асимптотична формула записується так

$$\tau^* \Big|_{|x|<\beta} = \frac{s}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\sin(x_2)si(x_2) - \sin(x_1)si(x_1) + \cos(x_2)ci(x_2) - \cos(x_1)ci(x_1)}{2} \right],$$

$$x_1 = (k\beta - x)s, \quad x_2 = (k\beta + x)s. \quad (30)$$

Розглянуто також випадок, коли від жорсткого тіла на внутрішню поверхню циліндра передається крутильне навантаження або обертальні переміщення. У цьому випадку будемо застосовувати для основного тіла циліндра одне рішення теорії пружності у вигляді

$$\frac{\partial^2 U_{\theta 1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\theta 1}}{\partial r} - \frac{U_{\theta 1}}{r^2} + \frac{\partial^2 U_{\theta 1}}{\partial x^2} = 0. \quad (31)$$

Для зовнішнього шару записуємо одне рівняння теорії оболонок. Застосовуючи перетворення Фур'є, у просторі зображень розв'язання отриманого із (31) рівняння записуємо у вигляді

$$U_{\theta 1}^0 = I_1(\xi r)C_1(\xi) + K_1(\xi r)C_2(\xi). \quad (32)$$

Умови контакту між шарами циліндра записуються аналогічно (3) при  $r = b$

$$U_{\theta 1}^0 = V^0, \quad \sigma_{r, \theta}^0 = -q_{\theta 2}^0. \quad (33)$$

Розглянуто два варіанти умов на внутрішній поверхні циліндра: коли від жорсткого тіла передаються на циліндр віссиметричне тангенціальне переміщення (задача 1), тоді при  $r = a$

$$U_{\theta 1}^0 = f_1^0(\xi). \quad (34)$$

або на внутрішню поверхню передається задане кру-

тильне навантаження (задача 2), тоді при  $r = a$

$$\sigma_{r\theta}^0 = -p_{\theta}^0(\xi). \quad (35)$$

Підставляючи вираз (32) у закон Гука, записаний із залученням співвідношень Коші у просторі зображень, а потім задовольняючи умовам (33) і (34) або (35), знаходимо трансформанти шуканих величин. В якості прикладу в задачі 1 розглянуто наступний закон зміни тангенціальних переміщень внутрішньої поверхні циліндру

$$f_1(\xi) = \frac{V_0}{1 + \alpha^2 x^2}. \quad (36)$$

Тоді після застосування оберненого перетворення Фур'є оригінали переміщень і напруг точок циліндру даються невласними інтегралами такого виду

$$\sigma^* = -\frac{\sigma_{r\theta} b}{G_1 V_0} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_1(\xi, r_*) e^{-\frac{\xi}{\alpha} \cos(\xi x)} F(\xi)}{F(\xi)} d\xi. \quad (37)$$

де  $F(\xi) = (s_2 + n_1 \xi s_1) s_3 + s_4 - n_1 \xi,$  (38)

$$\begin{aligned} s_1 &= K_1(\xi \varepsilon) / K_1(\xi), & s_2 &= K_2(\xi \varepsilon) / K_1(\xi) \\ s_3 &= I_1(\xi) / I_1(\xi \varepsilon), & s_4 &= I_2(\xi) / I_1(\xi \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\sigma_1(\xi, r_*) = (s_4 - n_1 \xi) s_7 - (s_2 + n_1 \xi s_1) s_8. \quad (39)$$

$$n_1 = \frac{\nu_1}{2(1 + \nu_1)}.$$

$s_5, \dots, s_8$  отримуються із  $s_1, \dots, s_4$ , якщо в чисельниках в якості аргументу взяти  $\xi r_*$ .

Аналогічно записуються результати в задачі 2, зокрема, якщо на внутрішню поверхню циліндру від жорсткого тіла передається кільцеве обертальне навантаження

$$p_{\theta}(x) = p_{\theta}^0 \delta(x). \quad (40)$$

тоді переміщення і напруги точок циліндру знаходяться за формулами такого виду

$$V_i^* = \frac{U_0 G_1}{p_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_2(\xi, r_*) \cos(\xi x)}{\xi F_1(\xi)} d\xi. \quad (41)$$

В обох задачах розглянуті, аналогічно пункту 1, частині варіанти умов між внутрішнім і зовнішнім шарами циліндра, а саме, відсутність зовнішнього шару, жорсткий зовнішній шар, дуже товстий внутрішній шар. Результати знаходилися за формулами виду (37), (41) чисельно за допомогою методу Файлона і для усіх розглянутих випадків побудовані картини зміни переміщень і тангенціальних напружень за товщиною і за довжиною циліндра, аналогічні рис. 1-4.

Якщо скористатися, як це робилося вище, для

циліндричних функцій асимптотичними поданнями, то інтеграли виду (37), (41) значно спростуються і для окремих частинних випадків можуть бути виражені в елементарних функціях. В задачі 1 тут отримані наступні результати.

Якщо зовнішній шар відсутній, тобто циліндр однорідний, тоді розподіл тангенціальних напруг внутрішньої поверхні циліндра за довжиною описується такою формулою

$$\sigma^*(x, \varepsilon) = -\frac{\alpha}{1 + \alpha^2 x^2} \sin(2 \arctg(\alpha x)); \quad \varepsilon = \frac{a}{b}. \quad (42)$$

Вважаючи зовнішній шар дуже жорстким, будемо мати наступне подання для обчислення тангенціальних переміщень за товщиною в перетині  $x = 0$

$$V_1^*(0, r_*) = \frac{1}{2 b_1 \alpha \sqrt{r_*}} [\psi(d_1) - \psi(d_2)], \quad (43)$$

де  $d_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha^{-1} + a_1}{b_1} \right), \quad d_2 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha^{-1} - a_1}{b_1},$

$a_1 = \varepsilon - r_*, \quad b_1 = \varepsilon - 1, \quad \psi(x)$  – пси-функція Ейлера

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1 - e^{-t}} \right) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

або  $\psi(x) = \ln x - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{x+k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{x+k} \right) \right].$

Якщо внутрішній шар циліндру вважати порівняно товстим, тоді для переміщень і напруг в околі точок  $x = 0$ , справедливі наступні подання для закону (36)

$$V_1^*(x, r_*) = \frac{1 + \alpha(r_* - 1)}{\sqrt{r_*} [(1 + \alpha)(r_* - 1)^2 + \alpha^2 x^2]}, \quad (44)$$

$$\sigma^*(x, r_*) = \frac{1}{\alpha \sqrt{r_*}} \frac{\cos[2 \arctg(\alpha x d^{-1})]}{x^2 + d^2}. \quad (45)$$

В задачі 2 для навантаження (40) отримані наступні асимптотичні результати.

Якщо зовнішній шар циліндра відсутній, тоді будемо мати

$$V_1^*(x, 1) = -\frac{1}{\pi} \ln \left( 2sh \frac{\pi x}{2b_1} \right). \quad (46)$$

$$\sigma_1^*(x, r_*) = -\frac{1}{2b_1 \sqrt{r_*}} \frac{\sin \frac{\pi a_1}{b_1}}{ch \frac{\pi x}{b_1} + \cos \frac{\pi a_1}{b_1}}. \quad (47)$$

Коли зовнішній шар вважати абсолютно жорстким, тоді приходимо до таких формул

$$V_1^*(x, r^*) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\pi x}{h_1} \right), & (r^* = 1, x > 0) \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{r^*}} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b_1} + \sin \frac{\pi a_1}{2b_1}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b_1} - \sin \frac{\pi a_1}{2b_1}}, & (r^* > 1) \end{cases}, \quad (48)$$

$$\sigma_1^*(x, r^*) = -\frac{1}{b_1\sqrt{r^*}} \frac{\cos \frac{\pi a_1}{2b_1} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b_1}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x}{2b_1} + \cos \frac{\pi a_1}{2b_1}}. \quad (49)$$

Вважаючи внутрішній шар циліндра дуже товстим, можна використати таку наближену формулу

$$\sigma_1^*(x, r^*) = -\frac{1}{\pi} \frac{r^* - 1}{(r^* - 1)^2 + x^2}. \quad (50)$$

Ще раз зазначимо, що отримані порівняно прості формули у вигляді комбінацій елементарних та спеціальних табульованих функцій можуть використовуватись для попередніх експертних висновків, щоб швидко оцінювати напружено-деформований стан в конструкціях даного виду і якщо виникне необхідність в уточненні результатів, тоді треба провести наведені на початку даної роботи точні розрахунки з використанням інтегральних перетворень і точних рівнянь теорії пружності.

У майбутньому запропоновані тут підходи до розв'язання статичних задач можна розповсюдити на нестационарні динамічні задачі, доповнюючи інтегральне перетворення Фур'є за вісєвою координатою перетворенням Лапласа за часом з наступним сумісним оберненням обох перетворень за допомогою методу Файлона і зміщених поліномів Лежандра (при точному підході) [11] або асимптотичних подань для циліндричних Функцій і використання теорії лишків для аналітичного обернення перетворення Лапласа.

### Висновки

1. Запропонована модель для розрахунку напружено-деформованого стану двошарового біметалічного циліндру з тонким покриттям з іншого ніж основний шар матеріалу, яка ґрунтується на одночасному використанні рівнянь теорії пружності і теорії оболонок для тонкого покриття.

2. Розглянуті різні варіанти опису взаємодії між жорстким тілом і внутрішньою поверхнею товстостінного циліндра.

3. Запропоновані спрощені моделі для запису поведінки основного шару в залежності від записаних умов взаємодії жорсткого тіла і циліндра.

4. Результати отримані шляхом застосування інтегрального перетворення Фур'є за осьовою координатою і розвинутого в даній роботі спеціального ал-

горитму для чисельного обернення вказаного перетворення, який базується на методі Файлона.

5. Отримані таким шляхом результати подані у вигляді графіків, які можна використовувати для порівняння результатів, знайдених з використанням спрощених підходів.

6. З використанням асимптотичних виразів для циліндричних функцій Бесселя вдалося отримати для окремих із розглянутих задач компоненти напружень і переміщень у вигляді комбінацій елементарних і спеціальних табульованих функцій. Такі формули можна використовувати для попередньої оцінки на стадії проектування таких елементів конструкцій.

### Список літератури

1. Трач В. М. Опір матеріалів (спеціальний курс), теорія пружності та пластичності [Текст] : підручник для студ вищих навч. закладів / В. М. Трач, А. М. Подворний. – Київ : Каравела, 2016. – 434 с.
2. Махінко Н. О. Розрахунок тонкостінних циліндричних оболонок на асиметричне навантаження за моментною теорією / Н. О. Махінко // Збірник наукових праць УкрДУЗТ. – 2019. – Вип. 184. – С. 51–61.
3. Parnes R. Progressing torsional loads a bore in an elastic medium [Text] / R. Parnes. // International Journal of Solids and Structures. – 1980. – 16(7). – P. 653–670.
4. Хомик, Н. І. Опір матеріалів (спецкурс) і основи теорії пружності і пластичності [Текст] : курс лекцій для студ. напр. підгот. «Будівництво» / Н. І. Хомик, Т. А. Довбуш, Н. А. Рубінець. – Тернопіль : ФОП Паляниця В. А., 2017. – 232 с.
5. Пожуев, В. И. Движение жесткого вращающегося тела вдоль цилиндра, заключенного в упругую оболочку [Текст] / В. И. Пожуев // Изв. ВУЗов. Серия Машиностроение. – 1983. – 6. – С. 18–22.
6. Пожуев, В. И. Асимптотическое решение задачи о движении жесткого вращающегося диска внутри толстостенного цилиндра [Текст] / В. И. Пожуев. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1988. – 52. – С. 31–35.
7. Пожуев, В. И. Действие подвижной скручивающей нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде [Текст] / В. И. Пожуев. // Строит. Механика и расчет сооружений. – 1984. – 6. – С. 58–61.
8. Горшков, А. Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций [Текст] / А. Г. Горшков, В. И. Пожуев. – М. : Машиностроение, 1992. – 224 с.
9. Манжос О. Нестационарна реакція циліндричної оболонки з пружним шаром на дію рухомого радіального навантаження. [Текст] / О. Манжос, А. Пожуев, О. Михайлуца // Технічні науки та технології. – 2023. – 2 (32). – С. 107–116.
10. Research on the dynamic response of pressurized cylindrical shell structures subjected to a near-field underwater explosion [Text] / W. S. Mao, M. S. Zhong, X. B. Xie et al. // AP Advances, – 2023. – 2(64). – P. 68–71.

11. Пожуєв А. В. Нестационарні процеси в пластинах і оболонках, які взаємодіють з тривимірним пружним середовищем [Текст] / А. В. Пожуєв, В. І. Пожуєв. – Запоріжжя: Кругозір, 2015. – 228 с.

12. Fidrovska N. Deformation of cylindrical shell by external pressure [Text] / N. Fidrovska, E. Slepuzhnikov, I. Perevoznik, S. Khursenko // Sciences of Europe. – 2021. – 2(64). – P. 68–71.

13. Deformation of cylindrical shell by external pressure [Text] / N. Fidrovska, E. Slepuzhnikov, I. Perevoznik, S. Khursenko // Sciences of Europe. – 2021. – 2(64). – P. 68–71.

14. Bhattacharyya A. Analysis of the dynamics of thin isotropic cylindrical shell in asymptotic approach [Text] / A. Bhattacharyya, B. Mukhopadhyay // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – 40 (9–10). – P. 5324–5334.

15. Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load [Text] / B. Khalfi, M. T. Nasraoui, J. Chakhari et al. // Acta Mechanica. – 2023. – 5. – P. 143–159.

Одержано 02.04.2024

## ACTION OF A SOLID BODY ON THE INNER SURFACE OF A THICK-WALLED BIMETAL CYLINDER

- Pozhuyev A. Candidate of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: scorpio6828@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4083-5139
- Pozhuev V. Dr. Sc., Professor, Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, National University Zaporizhzhia Polytechnic, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: pozhuevvi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9163-7888
- Mikhailutsa O. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Electronics, Information systems and Software, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, Ukraine, e-mail: elenamikhaylutsa7@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2935-7997

**Purpose.** The goal of the work is to obtain an exact solution to the problem of the stress-strain state of a long thick-walled bimetallic cylinder within the framework of the classical theory of elastic materials. Then, using the results obtained with this formulation, it is necessary to propose simpler engineering approaches and explore the possibilities of using asymptotic formulas for express analyzes at the design stage of such structural elements.

**Research methods.** For the main body of the cylinder, the classical equations of the theory of elasticity in displacements are used. For the outer coating (sputtering), the shell theory equations are written based on the Kirchhoff-Love hypotheses. The complex integral Fourier transform and the Filon method are used to approximately find the original stresses and displacements. Asymptotic representations of cylindrical Bessel functions for large values of the argument and representations of improper integrals in the form of combinations of elementary and special tabulated functions are also used.

**Results.** A mathematical model has been constructed to analyze the stress-strain state of a bimetallic cylinder with a thin outer layer of a material different from that of the inner layer. Various boundary conditions are recorded on the inner surface of the cylinder, describing the transmission from a rigid body of either specified forces or specified displacements. For all considered options, using the method of integral transformations, the results were obtained in the form of improper integrals, for the calculation of which a special method was used, aimed at calculating integrals with highly oscillating functions. Examples of specific graphs of changes in the components of the stress-strain state in the cylinder material are given. Depending on the conditions on the inner surface of the cylinder, simpler models are proposed to describe the main body, which are based, depending on the nature of the description of the interaction of the rigid body and the cylinder, on one equation of the theory of elasticity. With this approach, in some important cases it was possible to obtain improper inversion integrals using the asymptotic approach in closed form as a combination of elementary and special tabulated functions. Comparison with the exact approach allowed us to prove the possibility of using approximate models.

**Scientific novelty.** A model of the behavior of a bimetallic cylinder as a body is constructed, the main layer of which is described by the equations of the theory of elasticity, and the theory of shells is used for the outer coating. Various methods of describing the transfer of forces and displacements from a rigid body to the inner surface of the cylinder are considered. The possibility of using the asymptotic approach to obtain relatively simple formulas for carrying out preliminary calculations at the design stage of such structural elements is shown.

**Practical value.** The formulas, graphs and calculation algorithms obtained in the work can be used in the practice

of design organizations involved in drilling rigs, main pipelines, and artillery shafts. It is especially important that these work results can be used for so-called express analyzes and preliminary assessments.

**Key words:** theory of elasticity, integral transformations, stresses, displacements, boundary conditions, asymptotic representation.

### References

1. Trach, V. M., Podvornyy A. M. (2016). Opir materialiv (spetsial'nyy kurs), teoriya pruzhnosti ta plastychnosti [Strength of materials (special course), theory of elasticity and plasticity]. Karavella, 434.
2. Makhyn'ko N. O. (2019). Rozrakhunok tonkostinnykh tsylindrychnykh obolonok na nesymetrychne navantazhennya z vykorystannyam myttyevoyi teorii [Calculation of thin-walled cylindrical shells for asymmetric loading using instantaneous theory]. Zbirnyk naukovykh prats' UkrHUZT, 184, 51–61.
3. Parnes, R. (1980). Progressing torsional loads a bore in an elastic medium. *International Journal of Solids and Structures*, 16 (7), 653–670.
4. Khomyk, N. I., Dovbush, T. A., Rubinets' N. A. (2017). Opir materialiv (spetskurs) i osnovy teoriiy pruzhnosti i plastychnosti [Tekst] – FOP Palyanytsya V. A., 232.
5. Pozhuev, V. I. (1983). Dvizheniye zhestkogo vrashchayushchegosya tela vdol' tsilindra, zaklyuchennogo v upruguyu oboymu [Movement of a rigid rotating body along a cylinder enclosed in an elastic cage]. *Izv. VUZov. Seriya Mashinostroyeniye*, 6, 18–22.
6. Pozhuev, V. I. (1988). Asimptoticheskoye resheniye zadachi o dvizhenii zhestkogo vrashchayushchegosya diska vnutri tolstosten-nogo tsilindra [Asymptotic solution to the problem of the motion of a rigid rotating disk inside a thick-walled cylinder]. *Soprotivleniye materialov i teoriya sooruzheniy*, 52, 31–35.
7. Pozhuev, V. I. (1984). Deystviye podvizhnoy skruchivayushchey nagruzki na tsilindricheskuyu obolochku v uprugoy srede [Action of a moving torsional load on a cylindrical shell in an elastic medium]. *Stroit. Mekhanika i raschet sooruzheniy*, 6, 58–61.
8. Gorshkov, A. G., Pozhuev, V. I. (1992). *Statsionarnyye zadachi dinamiki mnogosloynnykh konstruksiy* [Stationary problems of dynamics of multilayer structures]. *Mashinostroyeniye*, 224.
9. Manzhos, O., Pozhuyev, A., Mikhaylutsa, O. (2023). Nestatsionarna reaktsiya tsylindrychnoyi obolonky z pruzhnym sharom na diyu rukhomoho radial'noho navantazhennya. [Non-stationary response of a cylindrical shell with an elastic layer to the action of a moving radial load] *Tekhnichni nauky ta tekhnolohiyi*, 2 (32), 107–116.
10. Mao, W. S., Zhong, M. S., Xie, X. B., Ma, H. Y., Yang, G. L., Fan., L. (2023). Research on the dynamic response of pressurized cylindrical shell structures subjected to a near-field underwater explosion. *AIP Advances*, 2(64), 68–71
11. Pozhuyev, A. V., Pozhuev, V. I. (2015). Nestatsionarni protsesy v plastynakh i obolonkakh, yaki vzayemodiyut' z tryvymirnym pruzhnym seredo-vyshchem [Unsteady processes in plates and shells interacting with a three-dimensional elastic medium]. *Kruhozir*, 228.
12. Fidrovska, N., Slepuzhnikov, E., Perevoznik, I., Khursenko, S. (2021). Deformation of cylindrical shell by external pressure. *Sciences of Europe*, 2(64), 68–71.
13. Petrosian, L. G., Ambartsumian, V. A. (2020). *Static and Dynamic Analysis of Engineering Structures: Incorporating the Boundary Element Method*. John Wiley & Sons Ltd, 501.
14. Bhattacharyya, A., Mukhopadhyay, B. (2016). Analysis of the dynamics of thin isotropic cylindrical shell in asymptotic approach. *Applied Mathematical Modelling*, 40 (9–10), 5324–5334.
15. Khalfi, B., Nasraoui, M. T., Chakhari, J., Ross, A., Chafra, M. (2023). Dynamic behavior of cylindrical shell with partial constrained viscoelastic layer damping under an impact load. *Acta Mechanica*, 5, 143–159.