

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

**ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ
І ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

для студентів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

2024

Теоретичні відомості і індивідуальні завдання для самостійної роботи з диференціальних рівнянь для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл. : Д. І. Анпілогов. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 61 с.

Укладач: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Експерт спеціальності: Н.І. Фурманова, доцент, к.т.н.

Рецензент: Г.А. Шишканова, доцент, к.ф.-м.н.

Комп'ютерна верстка: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 24. 10.2024

Затверджено на засіданні
кафедри математики
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 04.10.2024

З М І С Т

Вступ	4
1 Теоретичні положення	5
1.1 Вступні терміни	5
1.2 Рівняння першого порядку	5
1.3 Лінійні рівняння першого порядку	6
1.4 Рівняння в повних диференціалах	8
1.5 Рівняння вищих порядків	10
1.6 Лінійні рівняння вищих порядків	11
1.7 Однорідні лінійні рівняння	12
1.8 Метод варіації довільних сталих	14
1.9 Випадок спеціальної правої частини	15
1.10 Системи диференціальних рівнянь	17
2 Індивідуальні завдання	20
3 Розв'язок типового варіанту	32
Література	60

ВСТУП

Методичні вказівки містять теоретичні відомості з розділу «Диференціальні рівняння» курсу вищої математики у відповідності до програми з курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців усіх спеціальностей.

Викладення побудовано в такий спосіб, щоб охопити основні типи звичайних диференціальних рівнянь і прийоми та методи їх розв'язання. Разом з тим, сформульовано теореми, які використовують при практичній побудові розв'язків.

Запропоновано індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів і приклад розв'язку одного варіанту.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1 Вступні терміни

При розв'язуванні фізичних, технічних або інших задач становлять інтерес рівняння, які містять шукану функцію і її похідні. Такі рівняння називають **диференціальними** рівняннями (ДР). Якщо шуканою є функція одного змінного, відповідне ДР називають **звичайним**. Ми розглядатимемо лише такі ДР.

Порядком звичайного ДР називають найвищий номер похідної, яка до нього входить. Найбільш загальний вигляд ДР n -го порядку є $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Розв'язком ДР називають функцію, при підстановці якої до ДР виникає тотожність.

Одне й те саме ДР n -го порядку зазвичай має безліч розв'язків $y = f(x; C_1, C_2, \dots, C_n)$, де C_k , $k = \overline{1, n}$ – незвизначені константи інтегрування. Сукупність усіх таких розв'язків називають **загальним розв'язком ДР**. Очевидно, загальний розв'язок є n -параметричною родиною функцій.

До рівняння можна приєднати додаткові умови у кількості, яка дорівнює порядку рівняння. Ці умови називають **початковими умовами**, оскільки вони визначають початкове значення шуканої функції і її похідних. З використанням початкових умов складають систему рівнянь відносно констант C_k . При підстановці знайдених значень до загального розв'язку виникає єдина функція, яка задовольняє не лише ДР, а ще й початкові умови. Її називають **частинним розв'язком**. Сукупність ДР і потрібної кількості початкових умов називають **задачею Коші**. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші становлять інтерес в теоретичному аспекті. Практично ми обмежимося розгляданням методів знаходження цього розв'язку.

1.2 Рівняння першого порядку

Найбільш загальний вигляд звичайних ДР першого порядку відносно функції $y(x)$ є $F(x, y, y') = 0$. Припустимо, це рівняння вдалось розв'язати відносно y' :

$$y' = f(x, y). \quad (1.1)$$

Кажуть, що ДР вдалося звести до **нормальної** (або нормалізованої) форми.

1°. Якщо права частина (1.1) не залежить від функції y , то нормальна форма має вигляд $y' = \varphi(x)$. Загальний розв'язок виникає в результаті безпосереднього інтегрування.

2°. Нехай права частина ДР в нормальній формі є добутком двох співмножників, кожен з яких є функцією лише одного аргументу:

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y). \quad (1.2)$$

Такі рівняння називають **диференціальними рівняннями з розділеними змінними**. Їх розв'язок легко побудувати аналітично:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y), \quad \frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x) dx, \quad \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x) dx + C.$$

3°. Нехай права частина ДР в нормальній формі залежить лише від одного аргументу $z = ax + by$, тобто (1.1) має вигляд $y' = f(ax + by)$. При введенні заміни $z(x) = ax + by(x)$ змінні можна розділити.

4°. Нехай права частина ДР в нормальній формі є функцією одного аргументу $z = \frac{y}{x}$, тобто (1.1) має вигляд $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Рівняння такого типу називають **однорідними ДР першого порядку**. При введенні заміни $z(x) = \frac{y}{x}$ рівняння також зводиться до вигляду (1.2).

1.3 Лінійні рівняння першого порядку

Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називають ДР вигляду

$$y' + p(x) \cdot y = f(x). \quad (1.3)$$

Для розв'язування такого рівняння користуються або **методом Лагранжа (методом варіації довільної сталої)**, або **методом Бернуллі**.

Розв'язування методом Лагранжа здійснюють в два етапи.

На *першому етапі* вихідному рівнянню зіставляють відповідне **однорідне лінійне звичайне диференціальне рівняння першого порядку**, яке виникає при відкиданні правої частини $f(x)$ і має вигляд:

$$y' + p(x) \cdot y = 0. \quad (1.4)$$

Це ДР з розділеними змінними. Його загальний розв'язок:

$$y_{\text{одн}} = C e^{-\int p(x) dx}.$$

На *другому етапі* загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходять, варіюючи невизначену константу інтегрування, тобто припускаючи її зміну в залежності від x . А саме, кажуть: **загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільної сталої) шукаємо у вигляді:**

$$y_{\text{неодн}}(x) = C(x) e^{-\int p(x) dx}. \quad (1.5)$$

Підставляючи цю функцію до (1.3), знаходять $\frac{dC}{dx}$, і далі $C(x)$. Остаточна відповідь виникає у вигляді (1.5).

Методом Бернуллі розв'язок задачі (1.3) шукають у вигляді

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді (1.3) можна звести до вигляду $(u' + p(x)u)v + uv' = f(x)$. Достатньо покласти

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ uv' = f(x). \end{cases}$$

Тут перше рівняння може бути розв'язаним як (1.4), а друге – безпосереднім інтегруванням.

Узагальненням (1.3) є *нелінійне* рівняння

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n, \quad n \neq 1.$$

Його називають **рівняння Бернуллі з показником n** . Методом Бернуллі його розв'язок шукають у вигляді $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, і отримують $(u' + pu)v + uv' = fu^n v^n$. Достатньо покласти

$$\begin{cases} u' + pu = 0, \\ uv' = fu^n v^n. \end{cases}$$

Тут перше рівняння може бути розв'язаним як (1.4), а друге – розділенням змінних.

Замість методу Бернуллі можна скористатись також *методом лінеаризації*: заміна $z(x) = [y(x)]^{1-n}$ перетворює рівняння Бернуллі на лінійне рівняння вигляду (1.3) відносно функції z .

1.4 Рівняння в повних диференціалах

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то нормальній формі (1.1) безпосередньо вдається надати вигляду $dy = f(x, y) dx$. Узагальнимо цей вигляд рівнянням

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називають **рівнянням в повних диференціалах**, якщо існує функція $u(x, y)$ така, що $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Тоді рівняння (1.6) набуває вигляду $du = 0$. Очевидно, його загальний розв'язок в неявному вигляді $u(x, y) = C$.

Часто «угледіти» потрібну функцію $u(x, y)$ важко. У нас навіть немає гарантії, що така функція існує.

Розглянемо випадок, коли таку гарантію можна надати. Нехай існує функція $u(x, y)$, диференціал $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ якої тотожно дорівнює виразу $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$. Тоді

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Продиференціюємо перше рівняння за змінною y , а друге – за змінною x :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Оскільки друга мішана частинна похідна функції u не залежить від порядку диференціювання, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Отримали *необхідну умову* існування потрібної функції u .

Обмежимося випадком, коли умова (1.8) виконана. Розглянемо два способи відновлення функції u за її повним диференціалом.

1°. Інтегруючи перше рівняння системи (1.7) за змінною x , знаходимо

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int P(x, y) dx + \varphi(y). \quad (*)$$

При обчисленні інтегралу $\int P dx$ вважаємо, що $y = \text{const}$. Функція $\varphi(y)$ відіграє роль невизначеної константи інтегрування (при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ ця функція зникне як

константа). Підставляємо знайдений вираз для u до другого рівняння системи (1.7):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi(y) + \int P dx \right) = Q, \quad \varphi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx.$$

Функцію $\varphi(y)$ знаходимо звідси інтегруванням за змінною y при $x = \text{const}$:

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y) dy + C = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx \right] dy + C.$$

Тепер функцію u знайдено у вигляді (*) з точністю до адитивної константи C .

Порядок дій можна змінити на протилежний: спочатку користуємось другим рівнянням системи (1.7), а потім – першим. З другого рівняння маємо:

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int Q(x, y) dy + \psi(x). \quad (**)$$

При обчисленні інтегралу $\int Q dy$ вважаємо, що $x = \text{const}$. Підставляємо знайдений вираз для u до першого рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi(x) + \int Q dy \right) = P, \quad \psi'(x) = P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dy.$$

Функцію $\psi(x)$ знаходимо звідси інтегруванням за змінною x при $y = \text{const}$:

$$\psi(x) = \int \psi'(x) dx + C = \int \left[P - \frac{\partial}{\partial x} \int Q dy \right] dx + C.$$

Тепер функцію u знайдено у вигляді (**) з точністю до адитивної константи C .

2°. Розглянемо другий спосіб побудови розв'язку рівняння (1.6). Цей спосіб дозволяє одразу знайти частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – деяка початкова точка координатної площини Oxy , а $M(x, y)$ – довільна поточна точка. Нехай M_0M – довільний контур, який не виводить за межі області D , в якій функції P, Q неперервно диференційовні. Оскільки за виконання умови (1.8) вираз $P dx + Q dy = du$ є повним диференціалом,

то криволінійний інтеграл від нього не залежить від форми контуру M_0M . Тоді частинний розв'язок в неявному вигляді

$$u(M) - u(M_0) = \int_{M_0M} P dx + Q dy.$$

Власне, цей спосіб містить обидва варіанти попереднього. Справді, вище ми обчислювали криволінійний інтеграл вздовж ламаної, перша ланка якої горизонтальна ($y = \text{const}$), а друга – вертикальна ($x = \text{const}$), або навпаки.

1.5 Рівняння вищих порядків

Звичайне ДР n -го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.9)$$

Нижче розглянуто припущення щодо функції F , за яких (1.9) вдається спростити шляхом зниження порядку.

1°. Нехай рівняння (1.9) **не містить в явному вигляді функцію** y і $(k-1)$ її перших похідних. Заміна $p(x) = y^{(k)}(x)$ знижує порядок на k одиниць, і рівняння набуває вигляду:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Після знаходження функції $p(x)$ її інтегрують k разів поспіль за змінною x .

2°. Нехай рівняння (1.9) **не містить в явному вигляді аргумент** x , тобто має вигляд:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В цьому випадку порядок вдається знизити на одиницю.

Вводять заміну $p(y) = y'$. Тоді

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = pp',$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \\
 &= \left(\frac{d^2p}{dy^2}p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p = p \left[pp'' + (p')^2\right],
 \end{aligned}$$

і т.д. Підкреслимо, тут символ «штрих» в правих частинах слід розуміти як символ похідної за «новим» аргументом y . Наприклад, рівняння $y'' = pp'$ слід розуміти в такий спосіб: $y''_{xx} = pp'_y$, тобто $\frac{d^2y}{dx^2} = p(y) \cdot \frac{dp}{dy}$.

1.6 Лінійні рівняння вищих порядків

Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку зі змінними коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \quad (1.10)$$

Тут $a_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ – деякі функції аргументу x . Рівняння (1.10), є неоднорідним за рахунок наявності правої частини $f(x)$.

Однорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку зі змінними коефіцієнтами, яке відповідає рівнянню (1.10), називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \quad (1.11)$$

Отже, з неоднорідного ДР відповідне йому однорідне виникає при відкиданні правої частини $f(x)$.

Неоднорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \quad (1.12)$$

Тепер a_k , $k = \overline{1, n}$ – деякі числа.

Однорідним лінійним звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку зі сталими коефіцієнтами, яке відповідає рівнянню (1.12), називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \quad (1.13)$$

Спочатку розв'язують однорідне рівняння, а потім враховують наявність правої частини.

1.7 Однорідні лінійні рівняння

Розглянемо теореми, які стосуються ДР (1.11), (1.13).

■ **Теорема 1.1.** Нехай кожна з функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ є частинним розв'язком лінійного однорідного ДР. Тоді суперпозиція (лінійна комбінація) $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ цих функцій також є розв'язком цього ДР при довільних і незалежних C_1 , C_2 .

Зауваження 1. Цю теорему назвають **принципом суперпозиції** (принципом накладання) розв'язків лінійного однорідного ДР за аналогією до численних випадків, коли загальний результат виникає при накладанні («змішуванні в певній пропорції») окремих внесків **без їх взаємного впливу**.

Зауваження 2. Ця теорема справедлива і в разі ДР (1.13), і в разі ДР (1.11).

Зауваження 3. Цю теорему легко узагальнити на випадок довільної кількості розв'язків: якщо функції $y_i(x)$ (кожна окремо) є розв'язками лінійного однорідного ДР, то функція

$$y_{\text{одн}}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (1.14)$$

також є розв'язком цього ДР, причому при довільних C_i .

Нехай $y_i(x)$ – розв'язки деякого лінійного однорідного ДР. Кажуть, що сукупність цих розв'язків утворює **фундаментальну систему розв'язків (ФСР)**, якщо 1) їх кількість дорівнює порядку рівняння і 2) усі розв'язки $y_i(x)$ лінійно незалежні. Самі розв'язки $y_i(x)$ називають **фундаментальними**.

■ **Теорема 1.2.** Якщо функції $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, утворюють ФСР лінійного однорідного ДР n -го порядку, то розв'язок цього ДР, поданий суперпозицією (1.14), є загальним.

Щоб встановити факт лінійної незалежності функцій, обчислюють **визначник Вроньского**:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

■ **Теорема 1.3.** Якщо система функцій $y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, на деякому відрізку $x \in [a; b]$ лінійно залежна, то визначник Вроньского цих функцій на цьому відрізку дорівнює нулю.

Наслідок. Якщо $W \neq 0$, то функції лінійно незалежні.

Знаходження ФСР для ДР (1.11) при довільних залежностях $a_j = a_j(x)$ є складною задачею. Вона значно спрощується, якщо a_j – сталі. Тому далі в цьому пункті розглянемо лише ДР (1.13).

В цьому випадку фундаментальні розв'язки $y_k(x)$ за допомогою підстановки Ейлера шукають у вигляді

$$y_k(x) = e^{\lambda x}. \quad (1.15)$$

ДР (1.13) набуває вигляду

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0.$$

Многочлен

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1.16)$$

називають **характеристичним многочленом**, який відповідає однорідному рівнянню (1.13). Маємо:

$$F(\lambda) = 0.$$

Це **характеристичне рівняння**. Його корені λ_k підставляють до (1.15), і виникають фундаментальні розв'язки. В залежності від ситуації можливі наступні випадки.

1°. Якщо число λ – простий дійсний корінь, то до ФСР долучають один фундаментальний розв'язок: $y = e^{\lambda x}$.

2°. Якщо число λ – кратний дійсний корінь кратності p , то до ФСР долучають p фундаментальних розв'язків:

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}, \quad y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_p = x^{p-1} e^{\lambda x}.$$

3°. Якщо числа $\lambda = a \pm ib$ – прості комплексні корені, то до ФСР долучають два фундаментальні розв'язки:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx.$$

4°. Якщо числа $\lambda = a \pm ib$ є коренями характеристичного рівняння кратності p кожний, то відповідний цим кореням внесок у ФСР може бути прийнятий у вигляді

$$\begin{aligned} & e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx, \\ & x e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \sin bx, \\ & \dots, \\ & x^{p-1} e^{ax} \cos bx, \quad x^{p-1} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

1.8 Метод варіації довільних сталих

Перейдемо до розв'язування неоднорідних лінійних ДР. Вважатимемо, що права частина має довільний вигляд $f(x)$. Обмежимося випадком лінійного рівняння другого порядку:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \quad (*)$$

Нехай вдалося підібрати функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, які утворюють ФСР. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Тут C_1 , C_2 – довільні сталі. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (*) шукаємо методом Лагранжа варіації довільних сталих у вигляді:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \quad (\alpha)$$

Фактично від задачі пошуку однієї функції $y(x)$ ми переходимо до задачі пошуку двох функцій: $C_1(x)$, $C_2(x)$. Тому треба мати два рівняння. В нашому розпорядженні поки є лише одне – рівняння (*). Тому в процесі розв'язку треба побудувати ще одне.

Диференціюємо рівняння (α) :

$$y'(x) = C'_1 y_1 + C_1 y'_1 + C'_2 y_2 + C_2 y'_2.$$

Рівняння, якого досі бракувало, приймемо у вигляді:

$$C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0. \quad (**)$$

Тоді

$$y'(x) = C_1 y'_1 + C_2 y'_2. \quad (\beta)$$

Диференціюємо рівняння (β) :

$$y''(x) = C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2. \quad (\gamma)$$

Підставимо тепер рівняння (γ) , (β) , (α) до рівняння (*):

$$\begin{aligned} (C'_1 y'_1 + C_1 y''_1 + C'_2 y'_2 + C_2 y''_2) + a_1(x) (C_1 y'_1 + C_2 y'_2) + \\ + a_2(x) (C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x). \end{aligned}$$

Перегрупуваючи доданки, отримуємо:

$$C_1 (y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + C_2 (y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + \\ + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Тут

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 \equiv 0, \quad y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 \equiv 0,$$

оскільки $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки однорідного рівняння. Тоді рівняння (*) набуває вигляду

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Складемо систему рівнянь (**), (*):

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Матриця цієї системи є невиродженою, оскільки її визначник відмінний від нуля як визначник Вроньського ФСР $y_{1,2}(x)$. Тоді її розв'язок $\begin{pmatrix} C_1' & C_2' \end{pmatrix}^T$ існує і є єдиним. Інтегруючи компоненти цього розв'язку, знаходимо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$. Остаточним розв'язком неоднорідного рівняння (*) є вираз (α) при визначених функціях $C_1(x)$, $C_2(x)$.

1.9 Випадок спеціальної правої частини

Розглянутий метод Лагранжа занадто складний. В той же час, якщо вдається підібрати хоча б один частинний розв'язок неоднорідного рівняння, то його загальний розв'язок знайти дуже просто за допомогою наступної теореми.

■ **Теорема 1.4.** Загальний розв'язок неоднорідного лінійного ДР дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного лінійного ДР і будь-якого частинного розв'язку вихідного неоднорідного ДР:

$$y(x) = y_{\text{одн}}(x) + y_*(x).$$

Принцип підбору частинного розв'язку $y_*(x)$ полягає в наступному. Задаються таким виглядом («проектом») частинного

Таблиця 1.1 – Вигляд частинного розв'язку при різних спеціальних правих частинах $f(x) = P_s(x)e^{\mu x}$

$f(x)$	$y_*(x)$
P	Qx^α
$P e^{\mu x}$	$x^\alpha Q e^{\mu x}$
$P_s(x)$	$x^\alpha Q_s(x)$
$P \cos bx + Q \sin bx$	$x^\alpha (M \cos bx + N \sin bx)$
$e^{ax} (P \cos bx + Q \sin bx)$	$x^\alpha e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$
$P_s(x) e^{\mu x}$	$x^\alpha Q_s(x) e^{\mu x}$
$e^{ax} [P_{s'}(x) \cos bx +$ $+ Q_{s''}(x) \sin bx]$	$x^\alpha e^{ax} [M_s(x) \cos bx +$ $+ N_s(x) \sin bx],$ де $s = \max \{s', s''\}$

розв'язку, який **нагадує праву частину і узагальнює її**. Узагальнення відбувається за рахунок включення до вигляду розв'язку певної кількості параметрів. Наприклад, якщо права частина є *конкретним* лінійним двочленом, то такими параметрами будуть a і b у виразі $y_*(x) = ax + b$, який узагальнює усі лінійні двочлени. Подальша підстановка цього вигляду до ДР надає можливість методом невизначених коефіцієнтів скласти систему алгебраїчних рівнянь для знаходження цих параметрів. Сумісність такої системи теоретично обґрунтована для всіх **правих частин спеціального вигляду**. Так називають вираз

$$f(x) = P_s(x)e^{\mu x}, \quad (1.17)$$

де $P_s(x)$ – многочлен s -го степеня. Термін «спеціальний вигляд» застосовують також до лінійної комбінації таких виразів.

Число μ може бути комплексним, тому вираз (1.17) охоплює також випадки наявності тригонометричних функцій.

Зауважимо, для використання викладеного способу підбору навіть не потрібно інтегрувати: можна обмежитись лише раціональними операціями при розв'язуванні системи методу невизначених коефіцієнтів.

Вигляд, в якому при даній правій частині існування частинного розв'язку гарантується, подано в таблиці 1.1. Позначено: P, Q, M, N, a, b, μ – числа, $\mu = a + ib$; s, s', s'' – степені многочленів $P_s(x), Q_s(x), P_{s'}(x), Q_{s''}(x), M_s(x), N_s(x)$.

Вигляд «проекту розв'язку», який при даній правій частині гарантує сумісність системи методу невизначених коефіцієн-

тів, суттєво залежить від того, чи є число μ коренем характеристичного рівняння. Якщо так, то α позначає кратність цього кореня. Випадок вважають *резонансним*. Якщо ні, то випадок вважають *нерезонансним*; в цьому разі покладають $\alpha = 0$. Відповідно, співмножник x^α з «проекту розв'язку» зникає.

1.10 Системи диференціальних рівнянь

Нехай t – незалежна дійсна змінна, і $x_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ – деякі функції, диференційовні потрібну кількість разів. Нехай між змінною t , функціями $x_k(t)$ і їх похідними існує зв'язок, поданий рівнянням:

$$F\left(t; x_1, x_1', x_1'', \dots, x_1^{(m_1)}; \dots; x_n, x_n', x_n'', \dots, x_n^{(m_n)}\right) = 0.$$

Тут в круглих дужках у верхньому індексі вказано номер похідної. В наявності може бути одночасно декілька таких рівнянь (наприклад, ℓ штук):

$$F_i\left(t; x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}; \dots; x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}\right) = 0, \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (1.18)$$

Систему рівнянь (1.18) називають **системою** (звичайних) **диференціальних рівнянь (СДР)**. Найбільше з чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ називають **порядком СДР**.

Особливе місце серед СДР посідають СДР першого порядку, оскільки СДР довільного порядку *завжди може бути зведено* до СДР першого порядку ціною відповідного збільшення кількості рівнянь. Для цього достатньо новою літерою позначити кожну функцію $x_j(t)$ і усі її похідні, крім вищої. Тому надалі можна зосередитись лише на СДР першого порядку, і це не обмежуватиме загальності міркувань.

Систему рівнянь наступного вигляду

$$F_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; x_1', x_2', \dots, x_n') = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.19)$$

називають **системою диференціальних рівнянь (СДР) першого порядку**.

Функції F_i , які входять до (1.19), можуть бути нелінійними за своїми аргументами. В цьому випадку СДР (1.19) може

виявитись надзвичайно складною. Загальних методів розв'язування таких СДР не існує, навіть попри те, що похідні вищих порядків відсутні.

Уся справа значно спрощується, якщо з системи рівнянь (1.19) аналітично (без інтегрування) вдається виразити кожен окремо взятю похідну через аргумент і шукані функції:

$$x'_k = f_k(t; x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.20)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t; x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(t; x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \quad \quad \quad \dots, \\ x'_n = f_n(t; x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Кажуть також: рівняння (1.20) *розв'язано відносно похідних*. СДР першого порядку, подану у вигляді (1.20), називають **нормальною** (або *нормалізованою*). Число n іноді називають **порядком нормальної СДР**. Зокрема, при $n = 1$ отримаємо СДР, що складається з одного рівняння, яке збігається з (1.1). Надалі ми зосередимось лише на нормальних СДР.

Впорядковану сукупність функцій $x_k = \varphi_k(t)$, взятих у відповідній кількості, називають **розв'язком СДР**, якщо ці функції при підстановці до рівнянь СДР перетворюють кожне рівняння на тотожність в певному інтервалі значень t . Розв'язок, визначений цим означенням, є **частинним**. Як і в разі ДР, сукупність усіх частинних розв'язків утворює родину функцій, яку називають **загальним** розв'язком. Для виділення конкретного розв'язку з цієї родини, на додаток до рівнянь системи, потрібно сформулювати також початкові умови. Їх можна подати у вигляді $x_k(t_0) = x_{0k}$, де x_{0k} – деякі заздалегідь відомі числа. Зазвичай покладають $t_0 = 0$:

$$x_k(0) = x_{0k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.21)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{01}, \\ x_2(0) = x_{02}, \\ \quad \quad \quad \dots, \\ x_n(0) = x_{0n}. \end{cases}$$

Сукупність рівнянь (1.20) і початкових умов (1.21), взятих у відповідній кількості, називають **задачею Коші**.

Можна довести наступне: якщо кожна функція f_k в (1.20) є диференційовною за кожним своїм аргументом, то розв'язок задачі Коші *існує і є єдиним*. Звичайно, для СДР (1.20) цей розв'язок є частинним.

Для розв'язування СДР і відповідних задач Коші використовують метод виключення, методи заміни змінних, а також різні числові методи. Обмежимося застосуванням методу виключення до лінійних СДР другого порядку:

$$\begin{cases} x'_1 = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_1, \\ x'_2 = f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + g_2. \end{cases}$$

Тут усі величини залежать від t . Продиференціюємо перше рівняння системи:

$$x''_1 = f'_{11}x_1 + f_{11}x'_1 + f'_{12}x_2 + f_{12}x'_2 + g'_1.$$

Підставимо сюди вирази для x'_1, x'_2 :

$$\begin{aligned} x''_1 &= f'_{11}x_1 + f_{11}(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + g_1) + \\ &+ f'_{12}x_2 + f_{12}[f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + g_2] + g'_1 = \\ &= (f'_{11} + f_{11}^2 + f_{12}f_{21})x_1 + [f'_{12} + f_{12}(f_{11} + f_{22})]x_2 + \\ &+ (f_{11}g_1 + f_{12}g_2 + g'_1). \end{aligned}$$

Звідси:

$$x_2 = \frac{x''_1 - (f'_{11} + f_{11}^2 + f_{12}f_{21})x_1 - f_{11}g_1 - f_{12}g_2 - g'_1}{f'_{12} + f_{12}(f_{11} + f_{22})}.$$

Підставляючи цей вираз до першого рівняння системи, отримаємо лінійне ДР відносно шуканої функції x_1 . Знайшовши з нього x_1 , далі знайдемо x_2 за останньою формулою. Остаточно, розв'язок СДР – впорядкована сукупність функцій x_1, x_2 .

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Задача 1. Розв'язати диференціальне рівняння з розділеними змінними.

- В-1. $2yy' = (y^2 + 1)(3x^2 + \cos x)$. В-2. $y' = 2xe^{y-x^2}$.
В-3. $2y'\sqrt{1+e^x} = e^x(y^2 + 1)$. В-4. $y'\sqrt{1-x^2} = y$.
В-5. $(x^2 + 9)y' = 3\cos^2 y$. В-6. $(3y^2 + 4y^3)y' = 2e^{2x}$.
В-7. $y'\sin^2 x = 2y + 3$. В-8. $y'\sin x = \sqrt{1-y^2}\cos x$.
В-9. $y' = (y^2 - 1)\cos 2x$. В-10. $yy'\sqrt{1-x^2} = \sqrt{y^2 + 1}$.
В-11. $y'(x^2 + 6)\cos y = 2xe^{-\sin y}$. В-12. $xy' = y^2 + 4$.
В-13. $y'x\cos y = 2\ln x$. В-14. $y'e^{x^3} = 3(y^2 + 1)x^2$.
В-15. $8yy' = 3(2y^2 + 1)\sqrt{x+1}$.

Задача 2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння.

- В-1. $x^2y' = y^2 + xy$. В-2. $xy' = 3(x+y)$.
В-3. $y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{1+e^{y/x}}{e^{2y/x}}}$. В-4. $2y' = \frac{3y}{x} + \frac{x}{y}$.
В-5. $xy' = y\left[1 + \frac{1}{2(\ln y - \ln x)}\right]$. В-6. $x^2y' = y^2 + xy + 9x^2$.
В-7. $xyy' = y^2 + \frac{x^2}{\cos \frac{y}{x}}$. В-8. $(xy^2 - x^3)y' = y^3$.
В-9. $xy' = y + 2\sqrt{xy + 3x^2}$. В-10. $y' = \frac{2x^3y + 3y^4}{x^4 + 3xy^3}$.
В-11. $y' = \frac{2y^4 + x^2y^2 - x^3y}{2xy^3 - x^4}$. В-12. $2x^2y' = y^2 + 2xy - x^2$.
В-13. $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$. В-14. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{2ye^{y^2/x^2}}$.
В-15. $2x^3yy' + x^4 + y^4 = 0$.

Задача 3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами.

- В-1. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x}$. В-2. $y' + 3x^2y = \cos xe^{-x^3}$.
В-3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}\sqrt{x}$. В-4. $y' + y\cos x = 2xe^{x^2-\sin x}$.
В-5. $y' + 2xy = \frac{3x^2-5}{e^{x^2}}$. В-6. $y' - y\cos x = \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}$.
В-7. $y' + 3x^2y = 5x^4e^{-x^3}$. В-8. $y' + \frac{y}{1+x^2} = \frac{2\cos 2x}{e^{\arctg x}}$.
В-9. $y' - 3y\cos 3x = \frac{1}{x}e^{\sin 3x}$. В-10. $y' + \frac{y}{x^2} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
В-11. $y' - 2xy = e^{x^2}\operatorname{ctg} x$. В-12. $y' - 7x^6y = \frac{2xe^{x^7}}{x^2+1}$.
В-13. $y' + (2x+5)y = \frac{3\operatorname{ctg} 3x}{e^{x^2+5x}}$. В-14. $y' - \frac{y}{x\ln x} = 2\ln x$.
В-15. $y' - \frac{2y}{x} = e^xx^2$.

Задача 4. Розв'язати нелінійне диференціальне рівняння першого порядку.

- В-1. $y'(2e^{2y} - 2xy) = y^2$. В-2. $y'(3\cos 3y - 4xy^3) = y^4$.

- В-3. $y' \left(\frac{2y}{y^2+1} - x \cos y \right) = \sin y.$ В-4. $y' \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{x}{y} \right) = \ln y.$
 В-5. $y' \left(\operatorname{ctg} y - 2xye^{y^2} \right) = e^{y^2}.$ В-6. $y' \left(\frac{2}{y^2-1} - \frac{x}{\cos^2 y} \right) = \operatorname{tg} y.$
 В-7. $y' (5y^4 - x \sin 2y) = \sin^2 y.$ В-8. $y' \left(\frac{1}{y} - 4xy^3 \right) = y^4.$
 В-9. $y' \left(\frac{1}{y^2} - 3x \cos 3y \right) = \sin 3y.$ В-10. $y' (e^y + x \sin y) = \cos y.$
 В-11. $y' \left(\frac{3y^2}{y^3+1} - 2xy \right) = y^2.$ В-12. $y' \left(\frac{2y}{(y^2+1)^2} - xe^y \right) = e^y.$
 В-13. $y' \left(2 \cos 2y - \frac{x}{\cos^2 y} \right) = \operatorname{tg} y.$ В-14. $y' \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{x}{\sin^2 y} \right) = \operatorname{ctg} y.$
 В-15. $y' \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{1+y^2} \right) = \operatorname{arctg} y.$

Задача 5. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі. Виконати перевірку.

- В-1. $y' - y \operatorname{ctg} x = y^2 \sin x.$ В-2. $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot y\sqrt{y}.$
 В-3. $y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{y^4 e^x}{3 \ln^3 x}.$ В-4. $y' - \frac{3x^2 y}{x^3+1} = \frac{2xy^2}{x^3+1}.$
 В-5. $y' + \frac{y}{x} = xy^2 e^x.$ В-6. $y' - 2xy + 2xy^3 = 0.$
 В-7. $y' - \frac{y}{x+3} = \sqrt{y}.$ В-8. $y' - \frac{2y}{2x+5} = \frac{(2x+5)^3 e^{3x}}{y^2}.$
 В-9. $y' - \frac{3y}{x} = 4x^2 \sqrt{xy}.$ В-10. $y' - \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{2x^3}{y} e^{2 \operatorname{tg} x}.$
 В-11. $y' - \frac{xy}{x^2+1} = 2\sqrt{y} \sqrt{x^2+1}.$ В-12. $y' - 3x^2 y = 3x^2 y^2 e^{-x^3}.$
 В-13. $y' - \frac{2y}{x} = 2xe^x \sqrt{y}.$ В-14. $y' - \frac{(4x^3+1)y}{x^4+x} = \frac{y^4 \sin 3x}{(x^4+x)^3}.$
 В-15. $y' - y \cos x = \frac{(2x+3)y^2}{e^{\sin x}}.$

Задача 6. Розв'язати диференціальне рівняння в повних диференціалах.

- В-1. $(2x + 3x^2 y) dx + x^3 dy = 0.$
 В-2. $(2y^2 + 9x^2 y) dx + (4xy + 3x^3) dy = 0.$
 В-3. $(2y + 3y^2) dx + (2x + 6xy) dy = 0.$
 В-4. $(y^3 - 2xy) dx + (3xy^2 - x^2) dy = 0.$
 В-5. $(y^2 + 2y^4) dx + (2xy + 8xy^3) dy = 0.$
 В-6. $(6xy + 2y^2) dx + (3x^2 + 4xy) dy = 0.$
 В-7. $(4xy + 9x^2 y^2) dx + (2x^2 + 6x^3 y) dy = 0.$
 В-8. $(6xy^2 - 2y^3) dx + (6x^2 y - 6xy^2) dy = 0.$
 В-9. $(8xy^3 + 3y^2) dx + (12x^2 y^2 + 6xy) dy = 0.$
 В-10. $(4xy^4 - 9x^2 y) dx + (8x^2 y^3 - 3x^3) dy = 0.$
 В-11. $(6x^2 y^2 + y) dx + (4x^3 y + x) dy = 0.$
 В-12. $(2y^3 + 2xy^2) dx + (6xy^2 + 2x^2 y) dy = 0.$
 В-13. $(2xy^2 - 2y^3) dx + (2x^2 y - 6xy^2) dy = 0.$
 В-14. $(2xy + 3y^2) dx + (x^2 + 6xy) dy = 0.$
 В-15. $(2y^4 - 2xy) dx + (8xy^3 - x^2) dy = 0.$

Задача 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку, якщо рівняння не містить а) шукану функцію; б) аргумент.

$$\text{B-1. а) } \begin{cases} y'' - \frac{y'}{x} = 8x^2, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y'' = 2 \operatorname{tg} 2y \cdot (y')^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-2. а) } \begin{cases} y'' + \frac{2y'}{x} = 4x, \\ y(3) = 9, \\ y'(3) = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3(y')^2 = y^4 + yy'', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-3. а) } \begin{cases} y'' + \frac{2xy'}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2(y')^2 + yy'' = \frac{2}{y}, \\ y(0) = \frac{4}{3}, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-4. а) } \begin{cases} xy'' = y' + 4x, \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} yy'' = 2y^2 + (y')^2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{B-5. а) } \begin{cases} y'' = 2y' \operatorname{tg} x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y'y'' = 18y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

$$\text{B-6. а) } \begin{cases} y'' = \frac{(x-1)y'}{x} + \frac{e^x}{x^3}, \\ y(1) = e, \\ y'(1) = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y^3 y'' = y', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{B-7. а) } \begin{cases} x^3 y'' = (y')^3, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (3y^2 + 1)y'' + 6y(y')^2 = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-8. а) } \begin{cases} 2(x+1)y'' = y', \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y'y'' \cos^4 y = \sin y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-9. а) } \begin{cases} (x+1)y'' + y' = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (y^2 + 1)y'' = 2y(y')^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-10. а) } \begin{cases} y'' = (y')^2 \cos 2x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y'' + \frac{2}{(2y+1)^3} = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{B-11. а) } \begin{cases} y'' + \frac{y'}{2(x+1)} = x + 1, \\ y(0) = \frac{32}{15}, \\ y'(0) = \frac{7}{5}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y'y'' + e^{-3y} = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{В-12. а) } \begin{cases} y'' + \frac{3y'}{2x} = 3\sqrt{x}, \\ y(1) = \frac{12}{5}, \\ y'(1) = 0; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y'y'' \sin^4 2y + 2 \cos 2y = 0, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \\
\text{В-13. а) } \begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} yy'' + 3(y')^2 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = \frac{1}{4}. \end{cases} \\
\text{В-14. а) } \begin{cases} y'' + \frac{2xy'}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} (y')^2 y'' = 192y^2, \\ y(0) = \frac{1}{4}, \\ y'(0) = \sqrt{2}. \end{cases} \\
\text{В-15. а) } \begin{cases} y'' + \frac{4y'}{x+1} = \frac{4}{x+1}, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 1; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} (5y^4 + 1)^3 y'' + 20y^3 = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}
\end{array}$$

Задача 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих). Зробити перевірку.

$$\begin{array}{ll}
\text{В-1. } y'' - 2y' + y = 36xe^x \ln x. & \text{В-2. } y'' - 2y' + y = 35x\sqrt{x}e^x. \\
\text{В-3. } y'' - 2y' + y = e^x \ln x. & \text{В-4. } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \\
\text{В-5. } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x}. & \text{В-6. } y'' - 2y' + y = -\frac{e^x}{x^2}. \\
\text{В-7. } y'' - 2y' + y = \frac{2e^x \ln x}{x}. & \text{В-8. } y'' - 2y' + y = \frac{3e^x}{2\sqrt{x}}. \\
\text{В-9. } y'' - 2y' + y = -\frac{e^x}{2x\sqrt{x}}. & \text{В-10. } y'' - 2y' + y = \frac{1}{1-x}. \\
\text{В-11. } y'' - 2y' + y = e^x \sqrt{x}. & \text{В-12. } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}. \\
\text{В-13. } y'' - 2y' + y = \frac{9e^x \ln x}{2\sqrt{x}}. & \text{В-14. } y'' - 2y' + y = \frac{x+1}{x^2} \cdot e^x. \\
\text{В-15. } y'' - 2y' + y = \frac{x^2+1}{x^3} \cdot e^x.
\end{array}$$

Задача 9. Розв'язати задачу Коші для однорідного диференціального рівняння.

$$\begin{array}{l}
\text{В-1. а) } y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1; \\
\text{б) } y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3; \\
\text{в) } y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1; \\
\text{г) } y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -3; \\
\text{д) } y'' - 2y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3. \\
\text{В-2. а) } y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1; \\
\text{б) } y'' + 2y' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0; \\
\text{в) } y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2; \\
\text{г) } y'' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2; \\
\text{д) } y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4. \\
\text{В-3. а) } y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4; \\
\text{б) } y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 7; \\
\text{в) } y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = 16;
\end{array}$$

- р) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;
 А) $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.
 B-4. а) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$;
 б) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 в) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 5$;
 р) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;
 А) $y'' - 4y' + 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.
 B-5. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$;
 б) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;
 в) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 13$;
 р) $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;
 А) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
 B-6. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;
 б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -8$;
 в) $y''' + y'' - y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$;
 р) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
 А) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
 B-7. а) $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 10$;
 б) $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$;
 в) $y''' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$;
 р) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$;
 А) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.
 B-8. а) $y'' - 7y' + 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
 б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$;
 в) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$;
 р) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 8$;
 А) $y'' + 4y' + 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
 B-9. а) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 б) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 в) $y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$, $y''(0) = -11$;
 р) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
 А) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
 B-10. а) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$;
 б) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
 в) $y''' - 3y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 5$;
 р) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;
 А) $y'' + 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.
 B-11. а) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 9$;
 б) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
 в) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 13$;

г) $y'' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6;$

д) $y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 1.$

В-12. а) $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 2;$

б) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1;$

в) $y''' - 12y' + 16y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = 8;$

г) $y'' + 16y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0;$

д) $y'' + 4y' + 13y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$

В-13. а) $y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 10;$

б) $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5;$

в) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2, y''(0) = -3;$

г) $y'' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 0;$

д) $y'' - 6y' + 10y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3.$

В-14. а) $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 4, y'(0) = -8;$

б) $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -5;$

в) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 8;$

г) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6;$

д) $y'' + 6y' + 10y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -9.$

В-15. а) $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -12;$

б) $y'' - 8y' + 16y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 11;$

в) $y''' + 6y'' + 9y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = -4, y''(0) = 15;$

г) $y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 12;$

д) $y'' - 6y' + 13y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 12.$

Задача 10. Побудувати загальний розв'язок.

В-1. $y^{(IV)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$

В-2. $y^{(IV)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0.$

В-3. $y^{(IV)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0.$

В-4. $y^{(IV)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0.$

В-5. $y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$

В-6. $y^{(IV)} + 4y''' + 14y'' + 20y' + 25y = 0.$

В-7. $y^{(IV)} + 8y''' + 26y'' + 40y' + 25y = 0.$

В-8. $y^{(IV)} + 8y''' + 32y'' + 64y' + 64y = 0.$

В-9. $y^{(IV)} - 4y''' + 24y'' - 40y' + 100y = 0.$

В-10. $y^{(IV)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0.$

В-11. $y^{(IV)} - 12y''' + 62y'' - 156y' + 169y = 0.$

В-12. $y^{(IV)} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0.$

В-13. $y^{(IV)} + 12y''' + 62y'' + 156y' + 169y = 0.$

В-14. $y^{(IV)} + 8y''' + 42y'' + 104y' + 169y = 0.$

В-15. $y^{(IV)} + 12y''' + 56y'' + 120y' + 100y = 0.$

Задача 11. Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною.

- B-1. а) $y'' + y' - 6y = -4e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$;
 б) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x - 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$;
 в) $y'' - 3y' + 2y = (6x + 1)e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 г) $y'' - 4y' + 3y = 10 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 А) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{2x} \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.
- B-2. а) $y'' + 3y' - 4y = 6e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;
 б) $y'' - 4y' + 3y = 6x^2 - 16x + 7$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 в) $y'' - 4y' + 3y = (x - 2)e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$;
 г) $y'' - 4y' + 3y = 10 \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;
 А) $y'' + 2y' - 3y = 26e^{2x} \cos x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$.
- B-3. а) $y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 б) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 10x + 6$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;
 в) $y'' - 5y' + 4y = (2x + 1)e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 г) $y'' - 2y' - 3y = 10 \cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;
 А) $y'' + 3y' - 4y = 50e^{-x} \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.
- B-4. а) $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$;
 б) $y'' - 6y' + 5y = -5x^2 + 12x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$;
 в) $y'' - 5y' + 6y = (4x - 6)e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;
 г) $y'' - 2y' - 3y = 10 \sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$;
 А) $y'' - 2y' - 8y = 26e^{3x} \sin x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -15$.
- B-5. а) $y'' - y' - 12y = -12e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$;
 б) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x - 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
 в) $y'' - 6y' + 8y = (3x - 4)e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$;
 г) $y'' + 2y' - 3y = 10 \cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;
 А) $y'' - y' - 6y = 50e^{-x} \sin 2x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -15$.
- B-6. а) $y'' - 2y' - 8y = -9e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$;
 б) $y'' - 6y' + 8y = 8x^2 + 4x - 10$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$;
 в) $y'' - 7y' + 12y = (6x + 1)e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 14$;
 г) $y'' + 2y' - 3y = 10 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$;
 А) $y'' - 6y' + 5y = 20e^x \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.
- B-7. а) $y'' - y' - 6y = -6e^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;
 б) $y'' + y' - 6y = -6x^2 + 8x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -6$;
 в) $y'' - y' - 2y = (2x - 5)e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$;
 г) $y'' + 4y' + 3y = 10 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 А) $y'' - 2y' - 3y = 10e^{2x} \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.
- B-8. а) $y'' - 3y' - 4y = -6e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 13$;
 б) $y'' - y' - 2y = -4x^2 - 4x + 4$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -3$;
 в) $y'' - 2y' - 3y = (8x - 4)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$;
 г) $y'' + 4y' + 3y = 10 \sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;
 А) $y'' - y' - 2y = 10e^{2x} \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

- B-9. а) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$;
 б) $y'' - 2y' - 3y = -3x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$;
 в) $y'' - 3y' - 4y = (6x + 1)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$;
 г) $y'' + 3y' + 2y = 10 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
 А) $y'' - y = 10e^{2x} \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
 B-10. а) $y'' - y' - 2y = -2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$;
 б) $y'' - 3y' - 4y = -4x^2 - 6x - 2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$;
 в) $y'' - y' - 6y = (6x - 7)e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 г) $y'' + 3y' + 2y = 10 \sin x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -1$;
 А) $y'' - 7y' + 12y = 10e^{2x} \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
 B-11. а) $y'' - 7y' + 12y = 6e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 б) $y'' - 4y' - 5y = -5x^2 - 13x - 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 11$;
 в) $y'' - 2y' - 8y = 9xe^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$;
 г) $y'' + y' - 2y = 10 \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$;
 А) $y'' - 6y' + 8y = 5e^{2x} \cos 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -6$.
 B-12. а) $y'' - 6y' + 8y = 3e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 б) $y'' - y' - 6y = -6x^2 - 2x + 8$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -3$;
 в) $y'' - y' - 12y = (12x - 1)e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$;
 г) $y'' + y' - 2y = 10 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$;
 А) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{2x} \sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 7$.
 B-13. а) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 б) $y'' - 2y' - 8y = -8x^2 - 4x - 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
 в) $y'' + 3y' - 4y = (6x + 7)e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$;
 г) $y'' - y' - 2y = 10 \cos x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$;
 А) $y'' - 5y' + 4y = 10e^{2x} \cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
 B-14. а) $y'' - 5y' + 4y = -2e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$;
 б) $y'' - 3y' - 10y = -10x^2 - 6x - 8$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -9$;
 в) $y'' + 2y' - 3y = (5x + 11)e^{2x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -6$;
 г) $y'' - y' - 2y = 10 \sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;
 А) $y'' - 4y' + 3y = 5e^x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 B-15. а) $y'' - 4y' + 3y = -e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 б) $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 + x + 4$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$;
 в) $y'' + y' - 2y = (4x + 5)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$;
 г) $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
 А) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x} \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.

Задача 12. Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною. Врахувати збіг параметру μ правої частини з коренем характеристичного рівняння.

- B-1. а) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;

$$\text{б)} y'' - 3y' + 2y = (2x + 3)e^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = 3;$$

$$\text{в)} y'' - 2y' + y = (6x + 4)e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$\text{г)} y'' + y = 12x \cos x, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$\text{B-2. а)} y'' - 4y' + 3y = 4e^{3x}, y(0) = 3, y'(0) = 7;$$

$$\text{б)} y'' - 4y' + 3y = (4x + 6)e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 3;$$

$$\text{в)} y'' - 2y' + y = (12x + 6)e^x, y(0) = 1, y'(0) = 1;$$

$$\text{г)} y'' + y = 8x \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$\text{B-3. а)} y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$\text{б)} y'' - 5y' + 4y = (12x + 7)e^{4x}, y(0) = 1, y'(0) = 5;$$

$$\text{в)} y'' + 2y' + y = (18x + 2)e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$\text{г)} y'' + 4y = 16x \cos 2x, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

$$\text{B-4. а)} y'' - 6y' + 5y = -4e^{5x}, y(0) = 3, y'(0) = 10;$$

$$\text{б)} y'' - 5y' + 6y = (4x + 3)e^{3x}, y(0) = 2, y'(0) = 4;$$

$$\text{в)} y'' + 2y' + y = (6x - 4)e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = -2;$$

$$\text{г)} y'' + 4y = 32x \sin 2x, y(0) = -1, y'(0) = 2.$$

$$\text{B-5. а)} y'' - 5y' + 6y = -2e^{3x}, y(0) = 2, y'(0) = 2;$$

$$\text{б)} y'' - 6y' + 8y = (4x - 2)e^{4x}, y(0) = 3, y'(0) = 8;$$

$$\text{в)} y'' - 4y' + 4y = (6x - 2)e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$\text{г)} y'' + 9y = 72x \cos 3x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$\text{B-6. а)} y'' - 6y' + 8y = -6e^{4x}, y(0) = 0, y'(0) = -5;$$

$$\text{б)} y'' - 7y' + 12y = (2x - 1)e^{4x}, y(0) = 0, y'(0) = -4;$$

$$\text{в)} y'' - 4y' + 4y = (12x + 2)e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 3;$$

$$\text{г)} y'' + 9y = 36x \sin 3x, y(0) = 0, y'(0) = 3.$$

$$\text{B-7. а)} y'' - 7y' + 10y = -6e^{5x}, y(0) = 2, y'(0) = 5;$$

$$\text{б)} y'' - y' - 2y = (6x + 2)e^{2x}, y(0) = 2, y'(0) = -2;$$

$$\text{в)} y'' + 4y' + 4y = (24x + 2)e^{-2x}, y(0) = 2, y'(0) = -4;$$

$$\text{г)} y'' + 16y = 64x \cos 4x, y(0) = -1, y'(0) = 5.$$

$$\text{B-8. а)} y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

$$\text{б)} y'' - 2y' - 3y = (8x - 2)e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = -2;$$

$$\text{в)} y'' + 4y' + 4y = (6x + 8)e^{-2x}, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$\text{г)} y'' + 16y = 64x \sin 4x, y(0) = 1, y'(0) = -4.$$

$$\text{B-9. а)} y'' - 8y' + 15y = 2e^{5x}, y(0) = 1, y'(0) = 6;$$

$$\text{б)} y'' - 3y' - 4y = (10x + 2)e^{4x}, y(0) = 2, y'(0) = 3;$$

$$\text{в)} y'' - 6y' + 9y = (6x + 6)e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = 4;$$

$$\text{г)} y'' + y = 16x \cos x, y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

$$\text{B-10. а)} y'' - 9y' + 20y = 2e^{5x}, y(0) = 0, y'(0) = 3;$$

$$\text{б)} y'' - y' - 6y = (10x + 2)e^{3x}, y(0) = 1, y'(0) = -2;$$

$$\text{в)} y'' - 6y' + 9y = (12x + 2)e^{3x}, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$\text{г)} y'' + y = 20x \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$\text{B-11. а)} y'' - y' - 2y = 9e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 2;$$

- б) $y'' - 2y' - 8y = (12x + 8)e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$;
 в) $y'' + 6y' + 9y = (12x - 2)e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$;
 г) $y'' + 4y = 80x \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

- В-12. а) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;
 б) $y'' - y' - 12y = (14x + 9)e^{4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$;
 в) $y'' + 6y' + 9y = (6x + 2)e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$;
 г) $y'' + 4y = 96x \sin 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

- В-13. а) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$;
 б) $y'' + 3y' + 2y = (2x - 3)e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
 в) $y'' - 8y' + 16y = (6x + 4)e^{4x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -3$;
 г) $y'' + 9y = 36x \cos 3x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

- В-14. а) $y'' - 4y' - 5y = 6e^{5x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 11$;
 б) $y'' + 4y' + 3y = (4x + 2)e^{-3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -9$;
 в) $y'' - 8y' + 16y = (12x + 2)e^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
 г) $y'' + 9y = 36x \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

- В-15. а) $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -4$;
 б) $y'' + 5y' + 4y = (6x - 5)e^{-4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -7$;
 в) $y'' + 8y' + 16y = (12x + 4)e^{-4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$;
 г) $y'' + 16y = 64x \cos 4x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Задача 13. Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь.

- В-1. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 5.$
 В-2. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 8x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 9x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 4.$
 В-3. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2, \\ x_2' = x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 4.$
 В-4. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 3.$
 В-5. $\begin{cases} x_1' = 6x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 4.$
 В-6. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 9.$
 В-7. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 3.$
 В-8. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2, \\ x_2' = -x_1 - x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 0.$
 В-9. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 3.$

$$\text{B-10. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 8x_2, \\ x'_2 = 3x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\text{B-11. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 6x_2, \\ x'_2 = 3x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{B-12. } \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 8x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\text{B-13. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2, \\ x'_2 = 6x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 5.$$

$$\text{B-14. } \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 6x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\text{B-15. } \begin{cases} x'_1 = 8x_1 - 5x_2, \\ x'_2 = 6x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 7.$$

Задача 14. Розв'язати задачу Коші для системи неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь.

$$\text{B-1. } \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 - t + 4, \\ x'_2 = 12x_1 - 6x_2 - 18t + 7, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 10.$$

$$\text{B-2. } \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 + 2t - 11, \\ x'_2 = 12x_1 - 7x_2 + 4t - 46, \end{cases} \quad x_1(0) = 6, \quad x_2(0) = 5.$$

$$\text{B-3. } \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 2x_2 - 8t + 2, \\ x'_2 = 6x_1 - 5x_2 - 17t + 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 10.$$

$$\text{B-4. } \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 10x_2 - 4t + 25, \\ x'_2 = 5x_1 - 8x_2 - 2t + 20, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 5.$$

$$\text{B-5. } \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 4x_2 + t + 4, \\ x'_2 = 10x_1 - 7x_2 + 4t + 14, \end{cases} \quad x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 14.$$

$$\text{B-6. } \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 + 2t + 5, \\ x'_2 = 6x_1 - 4x_2 + 4t + 18, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 9.$$

$$\text{B-7. } \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 3x_2 - t - 10, \\ x'_2 = 18x_1 - 8x_2 - 2t - 26, \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 6.$$

$$\text{B-8. } \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 3x_2 - 5t + 3, \\ x'_2 = 4x_1 - 4x_2 - 4t + 1, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{B-9. } \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - 3x_2 - 2t - 7, \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 + 2t - 1, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\text{B-10. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2 + 2t + 1, \\ x'_2 = 12x_1 - 5x_2 + 6t + 4, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 7.$$

$$\text{B-11. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2t + 3, \\ x'_2 = 9x_1 - 4x_2 - 2t + 5, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 4.$$

$$\text{B-12. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 4x_2 - 6t - 1, \\ x'_2 = 3x_1 - 3x_2 - 3t - 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{В-13. } \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - x_2 + 5t + 1, \\ x'_2 = 6x_1 - x_2 + 7t + 5, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 5.$$

$$\text{В-14. } \begin{cases} x'_1 = 9x_1 - 4x_2 - 5t + 2, \\ x'_2 = 12x_1 - 5x_2 - 7t + 3, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{В-15. } \begin{cases} x'_1 = 6x_1 - 4x_2 - 2t + 1, \\ x'_2 = 3x_1 - x_2 - 2t - 2, \end{cases} \quad x_1(0) = 7, \quad x_2(0) = 7.$$

Задача 15. Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь з урахуванням кратності кореня характеристичного рівняння.

$$\text{В-1. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{В-2. } \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{В-3. } \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{В-4. } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 4x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{В-5. } \begin{cases} x'_1 = 6x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{В-6. } \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2, \\ x'_2 = 16x_1 - 6x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 3.$$

$$\text{В-7. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{В-8. } \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2.$$

$$\text{В-9. } \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$\text{В-10. } \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - 3x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$\text{В-11. } \begin{cases} x'_1 = 4x_1 - x_2, \\ x'_2 = 4x_1, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$\text{В-12. } \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2, \\ x'_2 = 9x_1 - 5x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 5.$$

$$\text{В-13. } \begin{cases} x'_1 = 5x_1 - x_2, \\ x'_2 = 4x_1 + x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

$$\text{В-14. } \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 9x_2, \\ x'_2 = 4x_1 - 9x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1.$$

$$\text{В-15. } \begin{cases} x'_1 = 6x_1 - x_2, \\ x'_2 = 4x_1 + 2x_2, \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1.$$

3 РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

Задача 1. Розв'язати диференціальне рівняння з розділеними змінними:

$$(x + \sin x)(y + 1)y' = (1 + \cos x)(y^2 + 2y).$$

Маємо:

$$(x + \sin x)(y + 1) \frac{dy}{dx} = (1 + \cos x)(y^2 + 2y),$$

$$\frac{(y + 1) dy}{y^2 + 2y} = \frac{(1 + \cos x) dx}{x + \sin x},$$

і змінні розділено. Інтегруємо:

$$\int \frac{(y + 1) dy}{y^2 + 2y} = \int \frac{(1 + \cos x) dx}{x + \sin x}.$$

Введемо заміни $y^2 + 2y = z$, $(2y + 2) dy = dz$, $(y + 1) dy = \frac{1}{2} dz$; $x + \sin x = t$, $(1 + \cos x) dx = dt$. Маємо:

$$\int \frac{\frac{1}{2} dz}{z} = \int \frac{dt}{t}, \quad \ln |z| = 2 \ln |t| + \ln |C|, \quad z = Ct^2.$$

Вводимо обернені заміни:

$$y^2 + 2y = C(x + \sin x)^2.$$

Загальний розв'язок знайдено у неявному вигляді.

Віповідь: $y^2 + 2y = C(x + \sin x)^2$.

Задача 2. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} + xe^{-\sin \frac{y}{x}}.$$

З метою надати рівнянню вигляд, який містить лише похідну y' і відношення $\frac{y}{x}$, розділимо рівняння на x :

$$y' \cos \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + e^{-\sin \frac{y}{x}}.$$

Очевидно, це однорідне рівняння. Введемо заміну $z(x) = \frac{y(x)}{x}$,
 $y = xz$, $y' = z + xz'$. Маємо:

$$(z + xz') \cos z = z \cos z + e^{-\sin z},$$

$$z \cos z + xz' \cos z = z \cos z + e^{-\sin z}, \quad x \cos z \frac{dz}{dx} = e^{-\sin z}.$$

Отримали рівняння з розділеними змінними:

$$\cos z e^{\sin z} dz = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знаходимо:

$$e^{\sin z} = \ln |x| + C, \quad e^{\sin \frac{y}{x}} = \ln |x| + C.$$

Віповідь: $e^{\sin \frac{y}{x}} = \ln |x| + C$.

Задача 3. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами: $y' + (3x^2 - 6x)y = \frac{e^{3x^2 - x^3}}{2\sqrt{x+1}}$.

Розв'яжемо це рівняння методом варіації довільної сталої.
Відповідне однорідне рівняння:

$$y' + (3x^2 - 6x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = (6x - 3x^2)y, \quad \frac{dy}{y} = (6x - 3x^2) dx.$$

Отримали рівняння з розділеними змінними. Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln |y| = 3x^2 - x^3 + \ln |C|, \quad y_{\text{одн}} = Ce^{3x^2 - x^3}.$$

Тоді розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C(x)e^{3x^2 - x^3}.$$

Підставляючи цей вираз в умову задачі, маємо:

$$C'e^{3x^2 - x^3} + Ce^{3x^2 - x^3}(6x - 3x^2) + (3x^2 - 6x)Ce^{3x^2 - x^3} = \frac{e^{3x^2 - x^3}}{2\sqrt{x+1}},$$

$$C' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad C(x) = \int C' dx = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + C_0.$$

Остаточно:

$$y = C(x)e^{3x^2 - x^3} = (\sqrt{x+1} + C_0) e^{3x^2 - x^3}.$$

Віповідь: $y = (\sqrt{x+1} + C_0) e^{3x^2-x^3}$.

Задача 4. Розв'язати нелінійне диференціальне рівняння першого порядку: $y' \left(\frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \arcsin y$.

Це рівняння є нелінійним за змінною y , але змінна x входить до нього лише в першому степені. Тому переходимо до задачі пошуку оберненої функції $x(y)$. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \left(\frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} \right) &= \arcsin y, \\ \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2} - \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} &= \arcsin y \cdot \frac{dx}{dy}, \\ \frac{dx}{dy} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї задачі методом Бернуллі шукаємо у вигляді добутку $x(y) = u(y) \cdot v(y)$:

$$\begin{aligned} u'v + uv' + uv \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}, \\ \left(u' + u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} \right) v + uv' &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}, \end{aligned}$$

Функцію u підберемо як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dy} + u \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y} = 0, \quad \frac{du}{u} = - \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \arcsin y}.$$

Отримали рівняння з розділеними змінними. Його інтегрування веде до результату:

$$\ln u = - \ln (\arcsin y), \quad u = \frac{1}{\arcsin y}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\arcsin y} \cdot v' &= \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2 \arcsin y}, \quad v' = \frac{3-4y}{(2y^2-3y)^2}, \\ v(y) = \int v'(y) dy &= \int \frac{(3-4y) dy}{(2y^2-3y)^2} = \left\| \frac{2y^2-3y = t}{(4y-3) dy = dt} \right\| = \end{aligned}$$

$$= \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2y^2 - 3y} + C.$$

Остаточно маємо

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = \frac{1}{\arcsin y} \cdot \left(\frac{1}{2y^2 - 3y} + C \right).$$

Віповідь: $x \arcsin y = \frac{1}{2y^2 - 3y} + C$.

Задача 5. Розв'язати диференціальне рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{(2x+1)y}{x^2+x} = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2+x)y^2}.$$

В лівій частині шукана функція $y(x)$ міститься в першому степені, а в правій – в степені $n = \frac{2}{3} \neq 1$. Отже, це диференціальне рівняння Бернуллі з показником $n = \frac{2}{3}$. Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто шукатимемо загальний розв'язок у вигляді $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Нижче функцію $u(x)$ оберемо на власний розсуд за міркуваннями зручності. Рівняння набуває вигляду

$$u'v + uv' - \frac{(2x+1)uv}{x^2+x} = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2+x)u^2v^2}.$$

Групуємо перший і третій доданки в лівій частині:

$$\left(u' - \frac{(2x+1)u}{x^2+x} \right) v + uv' = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2+x)u^2v^2},$$

Отже, в якості u зручно обрати довільний частинний розв'язок рівняння $u' - \frac{(2x+1)u}{x^2+x} = 0$. Маємо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(2x+1)u}{x^2+x}, \quad \frac{du}{u} = \frac{(2x+1) dx}{x^2+x}.$$

Виникло рівняння з розділеними змінними. Після інтегрування одержуємо:

$$\ln |u| = \ln |x^2+x| + \ln |C|, \quad u = C(x^2+x).$$

Оскільки ми зараз шукаємо довільний частинний розв'язок, то при інтегруванні невизначена константа інтегрування може бути обраною в довільний спосіб. Зручно покласти $C = 1$, і ми отримуємо:

$$u = x^2 + x.$$

Тоді рівняння набуває вигляду

$$uv' = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2 + x)u^2v^2}, \quad v' = 3 \cos x \sqrt[3]{x^2 + x} \cdot u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$$

при вже відомій функції $u(x)$. Підставляючи її, знаходимо:

$$v' = 3 \cos x v^{\frac{2}{3}}.$$

Це рівняння з розділеними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = 3 \cos x v^{\frac{2}{3}}, \quad v^{-\frac{2}{3}} dv = 3 \cos x dx.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$3v^{\frac{1}{3}} = 3 \sin x + \tilde{C}.$$

Позначаючи $\tilde{C} = 3C$ і підносячи до кубу, знаходимо:

$$v = (\sin x + C)^3.$$

Остаточно маємо:

$$y = uv = (x^2 + x) (\sin x + C)^3.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} & (2x + 1) (\sin x + C)^3 + (x^2 + x) \cdot 3(\sin x + C)^2 \cdot \cos x - \\ & - \frac{(2x + 1)}{x^2 + x} \cdot (x^2 + x) (\sin x + C)^3 = \\ & = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2 + x) (x^2 + x)^2 (\sin x + C)^6}, \\ & (x^2 + x) \cdot 3(\sin x + C)^2 \cdot \cos x = 3 \cos x \sqrt[3]{(x^2 + x)^3 (\sin x + C)^6}, \end{aligned}$$

що очевидно.

Віповідь: $y = (x^2 + x) (\sin x + C)^3$.

Задача 6. Розв'язати диференціальне рівняння в повних диференціалах: $(6xy^2 + 4y) dx + (6x^2y + 4x) dy$.

За умовою маємо: $P = 6xy^2 + 4y$, $Q = 6x^2y + 4x$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy + 4$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy + 4$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Отже, маємо повний диференціал у лівій частині. Тоді шукана функція

$$u = \int P dx = \int (6xy^2 + 4y) dx = 3x^2y^2 + 4xy + \varphi(y).$$

Тоді $\frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 + 4xy + \varphi(y)) = Q(x, y)$, $6x^2y + 4x + \varphi'(y) = 6x^2y + 4x$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$. Розв'язок має вигляд $u = \text{const}$, $3x^2y^2 + 4xy + C = \text{const}$, $3x^2y^2 + 4xy = \text{const}$.

Віповідь: $3x^2y^2 + 4xy = \text{const}$.

Задача 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку, якщо рівняння не містить а) шукану функцію; б) аргумент:

$$\text{а) } \begin{cases} xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ y(1) = 4, \\ y'(1) = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'' = 8y^3, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

а) Рівняння не містить шукану функцію $y(x)$, тому позначимо новою літерою молодшу з наявних похідних: $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$. Початкова умова $z(1) = y'(1) = 3$. Отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} xz' + z = \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ z(1) = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \\ z(1) = 3. \end{cases}$$

Лінійне рівняння зі змінними коефіцієнтами розв'язуємо методом Бернуллі: нехай $z(x) = u(x) \cdot v(x)$. Маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad v \left(u' + \frac{u}{x} \right) + uv' = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Підберемо функцію $u(x)$:

$$u' + \frac{u}{x} = 0, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln u = -\ln x, \quad u = \frac{1}{x}.$$

Тоді:

$$0 + \frac{1}{x} \cdot v' = \frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad v = 2\sqrt{x} + C,$$

$$z(x) = u(x) \cdot v(x) = \frac{2\sqrt{x} + C}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{C}{x}.$$

З початкових умов:

$$3 = \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{C}{1}, \quad C = 1, \quad z(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$y = \int y'(x) dx = \int z(x) dx = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = 4\sqrt{x} + \ln|x| + B.$$

З початкових умов:

$$4 = 4\sqrt{1} + \ln|1| + B, \quad B = 0.$$

Остаточно: $y = 4\sqrt{x} + \ln|x|$.

б) Рівняння не містить аргумент x , тому, вважаючи y новим незалежним аргументом, покладемо $p(y) = y'$. Маємо:

$$y'' = y''_{xx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y' = pp'_y = pp'.$$

Тут похідна в правій частині береться за змінною y . Рівняння набуває вигляду $pp' = 8y^3$.

За початковими умовами при $x = 0$ одночасно відбуваються дві рівності: $y = -1$ і $p(y) = y' = 2$. Отже, початкова умова $p|_{y=-1} = 2$, або $p(-1) = 2$. Отримали задачу Коші:

$$\begin{cases} pp' = 8y^3, \\ p(-1) = 2. \end{cases}$$

Розділяючи змінні і інтегруючи, отримуємо:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = 8y^3, \quad p dp = 8y^3 dy, \quad \frac{p^2}{2} = 2y^4 + C.$$

З початкових умов:

$$\frac{2^2}{2} = 2 \cdot (-1)^4 + C, \quad C = 0, \quad \frac{p^2}{2} = 2y^4, \quad p = 2y^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2y^2.$$

Знову розділяємо змінні і інтегруємо:

$$\frac{dy}{y^2} = 2 dx, \quad -\frac{1}{y} = 2x + B.$$

З початкових умов:

$$-\frac{1}{-1} = 2 \cdot 0 + B, \quad B = 1.$$

Тоді $-\frac{1}{y} = 2x + 1$. Остаточно: $y = -\frac{1}{2x+1}$.

Віповідь: а) $y = 4\sqrt{x} + \ln|x|$; б) $y = -\frac{1}{2x+1}$.

Задача 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' - 2y' + y = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$. Зробити перевірку.

Запропоноване рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Але права частина $f(x) = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ не є спеціальною правою частиною вигляду (1.17). Тому розв'яжемо це рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих).

Відповідне однорідне рівняння: $y'' - 2y' + y = 0$. Його характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda - 1)^2 = 0$. Маємо корінь $\lambda = 1$ другої кратності. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{\text{одн}} = C_1y_1 + C_2y_2$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом Лагранжа (варіації довільних сталих) шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

В цей момент ми переходимо від задачі пошуку однієї функції $y(x)$ до задачі пошуку двох функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$. Згідно до п. 1.8 складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження похідних $C'_1(x)$, $C'_2(x)$ шуканих функцій:

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}.$$

За правилами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = (1+x)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} & (1+x)e^x \end{vmatrix} = -15e^{2x}(x+1)\sqrt{x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}} \end{vmatrix} = 15e^{2x} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}.$$

Отже,

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -15 \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right), \quad C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 15 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 C_1(x) &= \int C'_1(x) dx = -15 \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\
 &= -15 \left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) + B_1 = -6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + B_1, \\
 C_2(x) &= \int C'_2(x) dx = 15 \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \\
 &= 15 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) + B_2 = 10x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}} + B_2.
 \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$\begin{aligned}
 y &= \left(-6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + B_1 \right) e^x + \left(10x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}} + B_2 \right) x e^x = \\
 &= \left(-6x^{\frac{5}{2}} - 10x^{\frac{3}{2}} + B_1 \right) e^x + \left(10x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + B_2 x \right) e^x = \\
 &= \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} + B_1 + B_2 x \right) e^x = \\
 &= \underbrace{\left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} \right) e^x}_{y_*} + \underbrace{\left(B_1 + B_2 x \right) e^x}_{y_{\text{одн}}}.
 \end{aligned}$$

Тут доданок

$$y_{\text{одн}} = (B_1 + B_2 x) e^x = B_1 e^x + B_2 x e^x = B_1 y_1 + B_2 y_2$$

є загальним розв'язком однорідного рівняння. Тому для перевірки достатньо до рівняння підставити лише частину

$$y_* = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} \right) e^x$$

отриманого виразу. Ця функція, як ми зараз переконаємось, і є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Маємо:

$$\begin{aligned}
 y'_* &= \left(4 \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} + 20 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right) e^x + \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} \right) (e^x)' = \\
 &= \left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}} \right) e^x,
 \end{aligned}$$

$$y''_* = \left(4 \cdot \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 30 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 30 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)e^x + \\ + \left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}}\right)(e^x)' = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 40x^{\frac{3}{2}} + 75x^{\frac{1}{2}} + 15x^{-\frac{1}{2}}\right)e^x.$$

Підставляючи ці похідні до лівої частини вихідного рівняння, отримуємо:

$$y''_* - 2y'_* + y_* = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 40x^{\frac{3}{2}} + 75x^{\frac{1}{2}} + 15x^{-\frac{1}{2}}\right)e^x - \\ - 2\left[\left(4x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{3}{2}} + 30x^{\frac{1}{2}}\right)e^x\right] + \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}}\right)e^x = \\ = 15x^{\frac{1}{2}}e^x + 15x^{-\frac{1}{2}}e^x = 15e^x\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 15e^x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}},$$

що збігається з правою частиною $f(x)$. Отже, функція y_* і справді є частинним розв'язком неоднорідного рівняння, а сума $y = y_* + y_{\text{одн}}$ – загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

Вігновіть: $y = \left(4x^{\frac{5}{2}} + 20x^{\frac{3}{2}} + B_1 + B_2x\right)e^x$.

Задача 9. Розв'язати задачу Коші:

- а) $y'' + 6y' + 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -8$;
- б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;
- в) $y''' - 10y'' + 33y' - 36y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$;
- г) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -12$;
- д) $y'' + 6y' + 25y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

а) Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$. Його корені $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$. Вони виявились дійсними і відмінними один від одного. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{-2x}$. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{-4x} + C_2e^{-2x}.$$

Для похідної маємо вираз $y' = -4C_1e^{-4x} - 2C_2e^{-2x}$. При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ -4C_1 - 2C_2 = -8. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Тоді розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови) $y = e^{-4x} + 2e^{-2x}$.

б) Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$. Його корінь $\lambda_1 = -4$ має кратність 2. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функції $y_1 = e^{-4x}$ і приєднаної до неї функції $y_2 = xe^{-4x}$. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}.$$

Для похідної маємо вираз $y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-4x} - 4C_2 x e^{-4x}$. При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -4C_1 + C_2 = 3. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 = 3$. Тоді розв'язок задачі Коші $y = 3xe^{-4x}$.

в) Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = 0$. Нехай його корені λ_1 , λ_2 , λ_3 . Тоді характеристичне рівняння повинно мати вигляд

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0.$$

Розкриваючи дужки, легко переконатись, що вільний член лівої частини дорівнює $-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, тобто $-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -36$. Тому якщо числа λ_1 , λ_2 , λ_3 є цілими, то вони повинні бути дільниками числа -36 . Отже, корені можуть знайтись серед чисел ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 6 , ± 9 , ± 12 , ± 18 , ± 36 . Методом підбору легко встановити, що число $\lambda = 4$ є коренем рівняння. З урахуванням цього:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 &= \lambda^3 - 4\lambda^2 - 6\lambda^2 + 33\lambda - 36 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 4) - 6\lambda^2 + 24\lambda + 9\lambda - 36 = \\ &= \lambda^2(\lambda - 4) - 6\lambda(\lambda - 4) + 9(\lambda - 4) = \\ &= (\lambda - 4)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda - 4)(\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Отже, корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 3$ (кратності 2), $\lambda_3 = 4$ (простий).

Зауважимо, знайти корені можна також за допомогою інтернет-ресурсу: wolframalpha.com. В рядок по центру екрану введіть послідовність символів $x^3-10x^2+33x-36=0$ і натисніть клавішу «Enter».

За знайденими коренями будемо фундаментальну систему розв'язків: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$, $y_3 = e^{4x}$. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{4x}.$$

Для похідних маємо вирази

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + 4C_3 e^{4x},$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 9C_2 x e^{3x} + 16C_3 e^{4x}.$$

При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = -1, \\ 3C_1 + C_2 + 4C_3 = -1, \\ 9C_1 + 6C_2 + 16C_3 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 = 3$, $C_3 = -1$. Тоді розв'язок задачі Коші $y = 3xe^{3x} - e^{4x}$.

г) Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 16 = 0$. Його корені $\lambda_{1,2} = \pm 4i$. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Для похідної маємо вираз $y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$. При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ 4C_2 = -12. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок $C_1 = 2$, $C_2 = -3$. Тоді розв'язок задачі Коші $y = 2 \cos 4x - 3 \sin 4x$.

д) Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$. Його корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i.$$

Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{-3x} \cos 4x$, $y_2 = e^{-3x} \sin 4x$. Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-3x} \cos 4x + C_2 e^{-3x} \sin 4x.$$

Для похідної маємо вираз

$$y' = -3C_1 e^{-3x} \cos 4x - 4C_1 e^{-3x} \sin 4x - \\ -3C_2 e^{-3x} \sin 4x + 4C_2 e^{-3x} \cos 4x.$$

При використанні початкових умов виникає система рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = 4, \\ -3C_1 + 4C_2 = 0. \end{cases}$$

Маємо очевидний розв'язок $C_1 = 4$, $C_2 = 3$. Тоді розв'язок задачі Коші $y = 4e^{-3x} \cos 4x + 3e^{-3x} \sin 4x = (4 \cos 4x + 3 \sin 4x) e^{-3x}$.
Віповідь: а) $y = e^{-4x} + 2e^{-2x}$; б) $y = 3xe^{-4x}$; в) $y = 3xe^{3x} - e^{4x}$; г) $y = 2 \cos 4x - 3 \sin 4x$; д) $y = (4 \cos 4x + 3 \sin 4x) e^{-3x}$.

Задача 10. Побудувати загальний розв'язок однорідного рівняння: $y^{(IV)} - 12y''' + 56y'' - 120y' + 100y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 = 0.$$

Його корені, знайдені за допомогою wolframalpha.com, дорівнюють $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Тому розкладання лівої частини на множники повинно містити фрагмент

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \\ = \lambda^2 - (3 + i + 3 - i)\lambda + (3 + i)(3 - i) = \lambda^2 - 6\lambda + 10.$$

Цей квадратний тричлен має бути дільником лівої частини:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 & \lambda^2 - 6\lambda + 10 \\ \lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 & \lambda^2 - 6\lambda + 10 \\ \hline -6\lambda^3 + 46\lambda^2 - 120\lambda & \\ -6\lambda^3 + 36\lambda^2 - 60\lambda & \\ \hline 10\lambda^2 - 60\lambda + 100 & \\ 10\lambda^2 - 60\lambda + 100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отже, характеристичний многочлен є повним квадратом:

$$\lambda^4 - 12\lambda^3 + 56\lambda^2 - 120\lambda + 100 = (\lambda^2 - 6\lambda + 10)^2.$$

Тому кожний з коренів $\lambda_{1,2}$ є коренем другої кратності. Тоді до фундаментальної системи розв'язків входять функції

$$y_1 = e^{3x} \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \sin x,$$

а також приєднані до них функції

$$y_3 = xe^{3x} \cos x, \quad y_4 = xe^{3x} \sin x.$$

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 =$$

$$= C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x + C_3 x e^{3x} \cos x + C_4 x e^{3x} \sin x.$$

Віповідь: $y = C_1 e^{3x} \cos x + C_2 e^{3x} \sin x + C_3 x e^{3x} \cos x + C_4 x e^{3x} \sin x$.

Задача 11. Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною:

а) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$;

б) $y'' + 2y' - 8y = -8x^2 + 4x + 10$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -16$;

в) $y'' - 6y' + 5y = (12x - 8)e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$;

г) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$;

д) $y'' - 7y' + 12y = 2e^{3x} \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

а) Однорідне рівняння: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Права частина $f(x) = 2e^{3x}$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = 3$, який не збігається з жодним з коренів $\lambda_{1,2}$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = ae^{3x},$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y'_* = 3ae^{3x}, \quad y''_* = 9ae^{3x}.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$9ae^{3x} - 3 \cdot 3ae^{3x} + 2 \cdot ae^{3x} = 2e^{3x},$$

звідки $a = 1$. Тоді $y_* = e^{3x}$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$

Маємо:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3e^{3x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 6; \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 + 3 = 10. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 3$, $C_2 = 2$. Остаточню, розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови) набуває вигляду $y = 3e^x + 2e^{2x} + e^{3x}$.

б) Однорідне рівняння: $y'' + 2y' - 8y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-4x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$.

Права частина $f(x) = -8x^2 + 4x + 10 = (-8x^2 + 4x + 10) \cdot e^0$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = 0$, який не збігається з жодним з коренів $\lambda_{1,2}$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = q_0 x^2 + q_1 x + q_2,$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y'_* = 2q_0 x + q_1, \quad y''_* = 2q_0.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$2q_0 + 2(2q_0 x + q_1) - 8(q_0 x^2 + q_1 x + q_2) = -8x^2 + 4x + 10.$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x^2: & -8q_0 = -8; \\ x^1: & 4q_0 - 8q_1 = 4; \\ x^0: & 2q_0 + 2q_1 - 8q_2 = 10. \end{array}$$

Її розв'язок $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = -1$. Тоді $y_* = x^2 - 1$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + x^2 - 1.$$

Маємо:

$$y' = 2C_1e^x - 4C_2e^{2x} + 2x.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 3; \\ y'(0) = 2C_1 - 4C_2 = -16. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 = 4$. Остаточно, розв'язок задачі Коші набуває вигляду $y = 4e^{-4x} + x^2 - 1$.

в) Однорідне рівняння: $y'' - 6y' + 5y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{5x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1e^x + C_2e^{5x}$.

Права частина $f(x) = (12x - 8)e^{-x}$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = -1$, який не збігається з жодним з коренів $\lambda_{1,2}$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = (q_0x + q_1)e^{-x},$$

який узагальнює вигляд правої частини. Маємо:

$$y'_* = q_0e^{-x} - (q_0x + q_1)e^{-x} = (-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x},$$

$$y''_* = -q_0e^{-x} - (-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x} = (q_0x - 2q_0 + q_1)e^{-x}.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} (q_0x - 2q_0 + q_1)e^{-x} - 6(-q_0x + q_0 - q_1)e^{-x} + \\ + 5(q_0x + q_1)e^{-x} = (12x - 8)e^{-x}. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} xe^{-x}: & q_0 + 6q_0 + 5q_0 = 12; \\ e^{-x}: & (-2q_0 + q_1) - 6(q_0 - q_1) + 5q_1 = -8. \end{array}$$

Її розв'язок $q_0 = 1$, $q_1 = 0$. Тоді $y_* = xe^{-x}$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^x + C_2e^{5x} + xe^{-x}.$$

Маємо:

$$y' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} + e^{-x} - x e^{-x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 2; \\ y'(0) = C_1 + 5C_2 + 1 = 7. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Остаточню, розв'язок задачі Коші набуває вигляду $y = e^x + e^{5x} + x e^{-x}$.

г) Однорідне рівняння: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Права частина $f(x) = 10 \sin x$ є комбінацією спеціальних правих частин з параметром $\mu = 0 \pm 1i$, який не збігається з жодним з коренів $\lambda_{1,2}$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = M \cos x + N \sin x,$$

який узагальнює вигляд правої частини. Нагадаємо, з відсутності косинусу в правій частині не впливає, що цей косинус повинен бути відсутнім і в частинному розв'язку; його наявність ми припускаємо за допомогою доданку $M \cos x$. Маємо:

$$y'_* = -M \sin x + N \cos x, \quad y''_* = -M \cos x - N \sin x.$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &(-M \cos x - N \sin x) - 3(-M \sin x + N \cos x) + \\ &+ 2(M \cos x + N \sin x) = 10 \sin x. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} \cos x: & -M - 3N + 2M = 0; \\ \sin x: & -N + 3M + 2N = 10. \end{array}$$

Її розв'язок $M = 3$, $N = 1$. Тоді $y_* = 3 \cos x + \sin x$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3 \cos x + \sin x.$$

Маємо:

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 3 \sin x + \cos x.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 3 = 4; \\ y'(0) = C_1 + 2C_2 + 1 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Остаточо, розв'язок задачі Коші набуває вигляду $y = e^x + 3 \cos x + \sin x$.

д) Однорідне рівняння: $y'' - 7y' + 12y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ має корені $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{4x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Права частина $f(x) = 2e^{3x} \sin x$ є комбінацією спеціальних правих частин з параметром $\mu = 3 \pm 1i$, який не збігається з жодним з коренів $\lambda_{1,2}$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = e^{3x} (M \cos x + N \sin x),$$

який узагальнює вигляд правої частини. Нагадаємо, з відсутності косинусу в правій частині не впливає, що цей косинус повинен бути відсутнім і в частинному розв'язку; його наявність ми припускаємо за допомогою доданку $M \cos x$. Маємо:

$$\begin{aligned} y'_* &= 3e^{3x} (M \cos x + N \sin x) + e^{3x} (-M \sin x + N \cos x) = \\ &= e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x], \\ y''_* &= 3e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x] + \\ &+ e^{3x} [-(3M + N) \sin x + (3N - M) \cos x] = \\ &= e^{3x} [(8M + 6N) \cos x + (8N - 6M) \sin x]. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &e^{3x} [(8M + 6N) \cos x + (8N - 6M) \sin x] - \\ &- 7e^{3x} [(3M + N) \cos x + (3N - M) \sin x] + \\ &+ 12e^{3x} (M \cos x + N \sin x) = 2e^{3x} \sin x. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{cases} \cos x e^{3x}: & (8M + 6N) - 7(3M + N) + 12M = 0; \\ \sin x e^{3x}: & (8N - 6M) - 7(3N - M) + 12N = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок $M = 1$, $N = -1$. Тоді $y_* = e^{3x} (\cos x - \sin x)$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x).$$

Маємо:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{4x} + 3e^{3x} (\cos x - \sin x) + e^{3x} (-\sin x - \cos x).$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1; \\ y'(0) = 3C_1 + 4C_2 + 3 - 1 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Остаточню розв'язок задачі Коші набуває вигляду $y = e^{3x} - e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x)$.

Віповідь: а) $y = 3e^x + 2e^{2x} + e^{3x}$; б) $y = 4e^{-4x} + x^2 - 1$;

в) $y = e^x + e^{5x} + xe^{-x}$; г) $y = e^x + 3 \cos x + \sin x$;

д) $y = e^{3x} - e^{4x} + e^{3x} (\cos x - \sin x)$.

Задача 12. Розв'язати задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною. Врахувати збіг параметру μ правої частини з коренем характеристичного рівняння.

а) $y'' - 2y' - 8y = 12e^{4x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -8$;

б) $y'' + 5y' + 6y = (2x - 3)e^{-3x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -12$;

в) $y'' + 8y' + 16y = (18x + 4)e^{-4x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -7$;

г) $y'' + 16y = 128x \sin 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 12$.

а) Однорідне рівняння: $y'' - 2y' - 8y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$ має корені $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{-2x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$.

Права частина $f(x) = 12e^{4x}$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = 4$, тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді $y_* = pe^{4x}$. Але параметр μ збігається з коренем

λ_1 , і ми маємо резонансний випадок. Кратність кореня λ_1 дорівнює $\alpha = 1$ (цей корінь є простим). Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = px^\alpha e^{4x} = pxe^{4x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y'_* &= pe^{4x} + 4pxe^{4x} = (4px + p)e^{4x}, \\ y''_* &= 4pe^{4x} + 4(4px + p)e^{4x} = (16px + 8p)e^{4x}. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$(16px + 8p)e^{4x} - 2(4px + p)e^{4x} - 8pxe^{4x} = 12e^{4x},$$

звідки $p = 2$. Тоді $y_* = 2xe^{4x}$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} + 2xe^{4x}.$$

Маємо:

$$y' = 4C_1e^{4x} - 2C_2e^{-2x} + 2e^{4x} + 8xe^{4x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 5; \\ y'(0) = 4C_1 - 2C_2 + 2 = -8. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 = 5$. Остаточнo, $y = 5e^{-2x} + 2xe^{4x}$.

б) Однорідне рівняння: $y'' + 5y' + 6y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ має корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$. Як бачимо, $\lambda_2 \neq \lambda_1$, тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-3x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

Права частина $f(x) = (2x - 3)e^{-3x}$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = -3$, тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді $y_* = (q_0x + q_1)e^{-3x}$. Але параметр μ збігається з коренем λ_2 , і ми маємо резонансний випадок. Кратність кореня λ_2 дорівнює $\alpha = 1$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = x^\alpha (q_0x + q_1)e^{-3x} = (q_0x^2 + q_1x)e^{-3x}.$$

Маємо:

$$y'_* = (2q_0x + q_1)e^{-3x} - 3(q_0x^2 + q_1x)e^{-3x} =$$

$$\begin{aligned}
&= [-3q_0x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x}, \\
y''_* &= [-6q_0x + (2q_0 - 3q_1)] e^{-3x} - \\
&- 3 [-3q_0x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x} = \\
&= [9q_0x^2 + (-12q_0 + 9q_1)x + (2q_0 - 6q_1)] e^{-3x}.
\end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned}
&[9q_0x^2 + (-12q_0 + 9q_1)x + (2q_0 - 6q_1)] e^{-3x} + \\
&+ 5 [-3q_0x^2 + (2q_0 - 3q_1)x + q_1] e^{-3x} + \\
&+ 6 (q_0x^2 + q_1x) e^{-3x} = (2x - 3) e^{-3x}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять x^2e^{-3x} , взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l}
xe^{-3x}: & (-12q_0 + 9q_1) + 5(2q_0 - 3q_1) + 6q_1 = 2; \\
e^{-3x}: & (2q_0 - 6q_1) + 5q_1 = -3,
\end{array}$$

звідки $q_0 = -1$, $q_1 = 1$. Тоді $y_* = (x - x^2) e^{-3x}$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + (x - x^2) e^{-3x}.$$

Маємо:

$$y' = -2C_1e^{-2x} - 3C_2e^{-3x} + (1 - 2x) e^{-3x} - 3(x - x^2) e^{-3x}.$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 5; \\ y'(0) = -2C_1 - 3C_2 + 1 = -12. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 2$, $C_2 = 3$. Остаточно,

$$y = 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + (x - x^2) e^{-3x}.$$

в) Однорідне рівняння: $y'' + 8y' + 16y = 0$. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ має корінь $\lambda_{1,2} = -4$ кратності $\alpha = 2$. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = xe^{-4x}$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$.

Права частина $f(x) = (18x + 4)e^{-4x}$ є спеціальною правою частиною з параметром $\mu = -4$, тому частинний розв'язок слід було б шукати у вигляді $y_* = (q_0x + q_1)e^{-4x}$. Але параметр μ збігається з коренем $\lambda_{1,2}$, і ми маємо резонансний випадок. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_* = x^\alpha (q_0x + q_1) e^{-4x} = (q_0x^3 + q_1x^2) e^{-4x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y'_* &= (3q_0x^2 + 2q_1x) e^{-4x} - 4(q_0x^3 + q_1x^2) e^{-4x} = \\ &= [-4q_0x^3 + (3q_0 - 4q_1)x^2 + 2q_1x] e^{-4x}, \\ y''_* &= [-12q_0x^2 + (6q_0 - 8q_1)x + 2q_1] e^{-4x} - \\ &- 4[-4q_0x^3 + (3q_0 - 4q_1)x^2 + 2q_1x] e^{-4x} = \\ &= [16q_0x^3 + (-24q_0 + 16q_1)x^2 + (6q_0 - 16q_1)x + 2q_1] e^{-4x}. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} &[16q_0x^3 + (-24q_0 + 16q_1)x^2 + (6q_0 - 16q_1)x + 2q_1] e^{-4x} + \\ &+ 8[-4q_0x^3 + (3q_0 - 4q_1)x^2 + 2q_1x] e^{-4x} + \\ &+ 16(q_0x^3 + q_1x^2) e^{-4x} = (18x + 4)e^{-4x}. \end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять x^3e^{-4x} , x^2e^{-4x} , взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складемо систему:

$$\begin{array}{l|l} xe^{-4x}: & (6q_0 - 16q_1) + 16q_1 = 18; \\ e^{-4x}: & 2q_1 = 4, \end{array}$$

звідки $q_0 = 3$, $q_1 = 2$. Тоді $y_* = (3x^3 + 2x^2)e^{-4x}$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x} + (3x^3 + 2x^2)e^{-4x}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y' &= -4C_1e^{-4x} + C_2e^{-4x} - 4C_2xe^{-4x} + \\ &+ (9x^2 + 4x)e^{-4x} - 4(3x^3 + 2x^2)e^{-4x}. \end{aligned}$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2; \\ y'(0) = -4C_1 + C_2 = -7. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Остаточно,

$$y = 2e^{-4x} + xe^{-4x} + (3x^3 + 2x^2)e^{-4x} = (3x^3 + 2x^2 + x + 2)e^{-4x}.$$

г) Однорідне рівняння: $y'' + 16y = 0$, характеристичне рівняння $\lambda^2 + 16 = 0$, корені $\lambda_{1,2} = 0 \pm 4i$. Тому фундаментальна система розв'язків складається з функцій $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$, а загальний розв'язок однорідного рівняння за принципом суперпозиції $y_{\text{одн}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

Права частина $f(x) = 128x \sin 4x$ є комбінацією спеціальних правих частин з параметром $\mu = \pm 4i$, тому випадок є резонансним. За рахунок цього частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} y_* &= x [(q_0x + q_1) \cos 4x + (q_2x + q_3) \sin 4x] = \\ &= (q_0x^2 + q_1x) \cos 4x + (q_2x^2 + q_3x) \sin 4x. \end{aligned}$$

(Нагадаємо, сполучення многочлену з косинусом в цьому представленні повинно бути в наявності навіть попри те, що в правій частині таке сполучення відсутнє). Маємо:

$$\begin{aligned} y'_* &= (2q_0x + q_1) \cos 4x - 4(q_0x^2 + q_1x) \sin 4x + \\ &+ (2q_2x + q_3) \sin 4x + 4(q_2x^2 + q_3x) \cos 4x = \\ &= [4q_2x^2 + (2q_0 + 4q_3)x + q_1] \cos 4x + \\ &+ [-4q_0x^2 + (2q_2 - 4q_1)x + q_3] \sin 4x, \\ y''_* &= [8q_2x + (2q_0 + 4q_3)] \cos 4x - \\ &- 4[4q_2x^2 + (2q_0 + 4q_3)x + q_1] \sin 4x + \\ &+ [-8q_0x + (2q_2 - 4q_1)] \sin 4x + \\ &+ 4[-4q_0x^2 + (2q_2 - 4q_1)x + q_3] \cos 4x = \\ &= [-16q_0x^2 + (16q_2 - 16q_1)x + (2q_0 + 8q_3)] \cos 4x + \\ &+ [-16q_2x^2 + (-16q_0 - 16q_3)x + (2q_2 - 8q_1)] \sin 4x. \end{aligned}$$

Тоді неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} & [-16q_0x^2 + (16q_2 - 16q_1)x + (2q_0 + 8q_3)] \cos 4x + \\ & + [-16q_2x^2 + (-16q_0 - 16q_3)x + (2q_2 - 8q_1)] \sin 4x + \\ & + 16 [(q_0x^2 + q_1x) \cos 4x + (q_2x^2 + q_3x) \sin 4x] = 128x \sin 4x. \end{aligned}$$

Легко бачити, що усі доданки, які містять $x^2 \cos 4x$, $x^2 \sin 4x$, взаємно знищуються. Тоді методом невизначених коефіцієнтів складаємо систему:

$$\begin{array}{l|l} x \cos 4x: & (16q_2 - 16q_1) + 16q_1 = 0; \\ \cos 4x: & (2q_0 + 8q_3) = 0; \\ x \sin 4x: & (-16q_0 - 16q_3) + 16q_3 = 128; \\ \sin 4x: & (2q_2 - 8q_1) = 0, \end{array}$$

звідки $q_2 = 0$, $q_1 = 0$, $q_0 = -8$, $q_3 = 2$. Тоді

$$y_* = -8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x,$$

і загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{\text{одн}} + y_* = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x.$$

Маємо:

$$\begin{aligned} y' &= -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x - \\ &- 16x \cos 4x + 32x^2 \sin 4x + 2 \sin 4x + 8x \cos 4x. \end{aligned}$$

Тоді з використанням початкових умов виникає система:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2; \\ y'(0) = 4C_2 = 12. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 2$, $C_2 = 3$. Остаточно,

$$y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x.$$

Віповідь: а) $y = 5e^{-2x} + 2xe^{4x}$; б) $y = 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + (x - x^2)e^{-3x}$; в) $(3x^3 + 2x^2 + x + 2)e^{-4x}$; г) $2 \cos 4x + 3 \sin 4x - 8x^2 \cos 4x + 2x \sin 4x$.

Задача 13. Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 3x_2, \\ x'_2 = 6x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.

Маємо лінійну однорідну СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння за змінною t :

$$x_1'' = 7x_1' - 3x_2'.$$

Підставимо сюди вирази для x_1' , x_2' з умови задачі:

$$x_1'' = 7(7x_1 - 3x_2) - 3(6x_1 - 2x_2) = 31x_1 - 15x_2.$$

Виразимо звідси x_2 :

$$x_2 = \frac{31x_1 - x_1''}{15}. \quad (*)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$x_1' = 7x_1 - 3 \cdot \frac{31x_1 - x_1''}{15}, \quad 5x_1' = 35x_1 - (31x_1 - x_1''),$$

$$x_1'' - 5x_1' + 4x_1 = 0.$$

Функцію x_2 виключили, а для функції x_1 отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, його корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Загальний розв'язок

$$x_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Похідні:

$$x_1'(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t}, \quad x_1''(t) = C_1 e^t + 16C_2 e^{4t}.$$

Підставляючи ці вирази до (*), отримуємо:

$$x_2 = \frac{31(C_1 e^t + C_2 e^{4t}) - (C_1 e^t + 16C_2 e^{4t})}{15} = 2C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Стовпець

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{4t} \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

є загальним розв'язком вихідної СДР. Для отримання розв'язку задачі Коші треба константам C_1 , C_2 надати таких значень, за яких виконуються початкові умови. З використанням цих умов отримуємо систему

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 = 2, \\ x_2(0) = 2C_1 + C_2 = 3. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = C_2 = 1$. При підстановці цих значень до загального розв'язку отримуємо розв'язок задачі Коші.

Вигновіть: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{4t} \\ 2e^t + e^{4t} \end{pmatrix}.$

Задача 14. Розв'язати задачу Коші для системи неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 3x_2 - 2t + 3, \\ x'_2 = 6x_1 - 2x_2 - 4t + 6 \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 2, x_2(0) = 2$.

Маємо лінійну неоднорідну СДР зі сталими коефіцієнтами. Продиференціюємо перше рівняння за змінною t :

$$x''_1 = 7x'_1 - 3x'_2 - 2.$$

Підставимо сюди вирази для x'_1, x'_2 з умови задачі:

$$\begin{aligned} x''_1 &= 7(7x_1 - 3x_2 - 2t + 3) - 3(6x_1 - 2x_2 - 4t + 6) - 2 = \\ &= 31x_1 - 15x_2 - 2t + 1. \end{aligned}$$

Виразимо звідси x_2 :

$$x_2 = \frac{31x_1 - 2t + 1 - x''_1}{15}. \quad (*)$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння умови задачі:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 7x_1 - 3 \cdot \frac{31x_1 - 2t + 1 - x''_1}{15} - 2t + 3, \\ 5x'_1 &= 35x_1 - (31x_1 - 2t + 1 - x''_1) - 10t + 15, \\ x''_1 - 5x'_1 + 4x_1 &= 8t - 14. \end{aligned}$$

Функцію x_2 виключили, а для функції x_1 отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, його корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x_{1, \text{одн}}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Оскільки права частина є многочленом першого степеню і число $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то маємо

нерезонансний випадок, і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x_{1,*}(t) = at + b, \quad x'_{1,*}(t) = a, \quad x''_{1,*}(t) = 0.$$

Неоднорідне рівняння набуває вигляду

$$0 - 5a + 4(at + b) = 8t - 14.$$

Методом невизначених коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{array}{l|l} t^1: & 4a = 8; \\ t^0: & -5a + 4b = -14. \end{array}$$

Її розв'язок $a = 2$, $b = -1$. Тоді частинний розв'язок неоднорідного ДР дорівнює $x_{1,*}(t) = 2t - 1$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР:

$$x_1(t) = x_{1,\text{одн}}(t) + x_{1,*}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1.$$

Похідні:

$$x'_1(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{4t} + 2, \quad x''_1(t) = C_1 e^t + 16C_2 e^{4t}.$$

Підставляючи ці вирази до (*), отримуємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{31(C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1) - 2t + 1 - (C_1 e^t + 16C_2 e^{4t})}{15} = \\ &= 2C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 4t - 2. \end{aligned}$$

Стовпець

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 2t - 1 \\ 2C_1 e^t + C_2 e^{4t} + 4t - 2 \end{pmatrix}$$

є загальним розв'язком вихідної СДР. Для отримання розв'язку задачі Коші треба константам C_1 , C_2 надати таких значень, за яких виконуються початкові умови. З використанням цих умов отримуємо систему

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 + C_2 - 1 = 2, \\ x_2(0) = 2C_1 + C_2 - 2 = 2. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. При підстановці цих значень до загального розв'язку отримуємо розв'язок задачі Коші.

Вігновіть: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2e^{4t} + 2t - 1 \\ 2e^t + 2e^{4t} + 4t - 2 \end{pmatrix}.$

Задача 15. Розв'язати задачу Коші для системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь з урахуванням кратності кореня характеристичного рівняння:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 4x_2, \\ x_2' = 9x_1 - 10x_2 \end{cases}$$

з початковими умовами $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$.

Продиференціюємо перше рівняння і підставимо до нього x_1' і x_2' з умови задачі:

$$x_1'' = 2x_1' - 4x_2' = 2(2x_1 - 4x_2) - 4(9x_1 - 10x_2) = -32x_1 + 32x_2.$$

Звідси $x_2 = x_1 + \frac{1}{32}x_1''$. Підставимо це до першого рівняння:

$$x_1' = 2x_1 - 4\left(x_1 + \frac{1}{32}x_1''\right), \quad x_1'' + 8x_1' + 16x_1 = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ має єдиний корінь $\lambda = -4$. Тоді загальний розв'язок $x_1 = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$. Похідні:

$$\begin{aligned} x_1' &= -4C_1e^{-4t} + C_2e^{-4t} - 4C_2te^{-4t} = (C_2 - 4C_1)e^{-4t} - 4C_2te^{-4t}, \\ x_1'' &= -4(C_2 - 4C_1)e^{-4t} - 4C_2e^{-4t} + 16C_2te^{-4t} = \\ &= (16C_1 - 8C_2)e^{-4t} + 16C_2te^{-4t}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{1}{32}x_1'' = \\ &= (C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}) + \frac{1}{32}((16C_1 - 8C_2)e^{-4t} + 16C_2te^{-4t}) = \\ &= \left(\frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2\right)e^{-4t} + \frac{3}{2}C_2te^{-4t}. \end{aligned}$$

З використанням початкових умов маємо систему:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 = 1, \\ x_2(0) = \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_2 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язок $C_1 = 1, C_2 = 2$. Підставляючи ці значення до загального розв'язку, отримуємо розв'язок задачі Коші:

$$x_1 = e^{-4t} + 2te^{-4t}, \quad x_2 = e^{-4t} + 3te^{-4t}.$$

Вігновіть: $x_1 = e^{-4t} + 2te^{-4t}, x_2 = e^{-4t} + 3te^{-4t}.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гудименко Ф.С. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф.С. Гудименко, І.А. Павлюк, В.О. Волкова. – К. : Вища школа, 1972. – 156 с.

2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2 : Учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М : «Оникс», 2003. – 416 с.

3. Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало, П.С. Бондаренко. – К. : Вища школа, 1974. – 472 с.

4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – изд. 4. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

5. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – изд. 3. – М : Наука, 1986. – 272 с.

6. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – Изд. 8-е, испр. – М. : Либроком, 2013. – 256 с. (Вся высшая математика в задачах).

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – изд. 5. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.

8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 206 с.

9. Самойленко А.М. та ін. Диференціальні рівняння: Підручник / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.

10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – изд. 11, испр. – М. : URSS, 2016. – 512 с.

11. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. – изд. 2. – М. : КомКнига, 2007. – 240 с.

12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. : Ленанд, 2015. – 240 с.

13. Шкіль М.І. Звичайні диференціальні рівняння : Навч. посібник / М.І. Шкіль, М.А. Сотніченко. – К. : Вища школа, 1992. – 303 с.

14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – изд. 3. – М. : ЛКИ, 2014. – 312 с.