РАСЧЕТ ДОПУСКОВ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Василега Н.М., Шило Г.Н., Гапоненко Н.П.

1. Интервальная арифметика

Математическое моделирование физических процессов на этапах проектирования и производства РЭС позволяет путем применения современных средств вычислительной техники значительно сократить затраты на натурные испытания, а в ряде случаев и вовсе отказаться от их проведения. Однако, формируемые на основе методов конечных элементов, конечных разностей или граничных элементов системы линейных алгебраических уравнений, являясь собственно математической моделью процесса, не учитывают разбросов параметров элементов моделируемой системы. Кроме того, при больших размерностях матричных систем накапливаются погрешности счета и представления действительных чисел в ЭВМ. И таким образом встаёт вопрос доверия результатам вычислений. Одним из путей преодоления этих трудностей является использование аппарата интервального анализа, в котором каждая физическая величина или параметр задается не одним значением, а интервалом её изменений в определенных границах

$$\mathbf{a} = [\,\underline{a}\;;\overline{a}\,],$$

где $\underline{a}$ и $\overline{a}$ — нижняя и верхняя граница интервала. Обычно при решении допусковых задач принимается $\underline{a} < \overline{a}$.

Решение *прямой допусковой задачи* — расчет результирующего допуска на основе известных отклонений параметров и физических величин рассматриваемой математической модели — производится с помощью прямых интервальных арифметических операций над интервалами

$$\mathbf{a} * \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ — прямые арифметические операции в интервальной арифметике.

При этом границы интервала $\mathbf{b}$ формируются по правилу

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \min\{\, \underline{a} * \underline{x};\; \underline{a} * \overline{x};\; \overline{a} * \underline{x};\; \overline{a} * \overline{x} \,\} \\ \overline{b} &= \max\{\, \underline{a} * \underline{x};\; \underline{a} * \overline{x};\; \overline{a} * \underline{x};\; \overline{a} * \overline{x} \,\} \end{aligned} \qquad (2)$$

Для операций сложения и вычитания равенство (1) может быть записано в явном виде /1/

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a} + \mathbf{x} = [\, \underline{a} + \underline{x};\; \overline{a} + \overline{x} \,]; \\ \mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{x} = [\, \underline{a} - \overline{x};\; \overline{a} - \underline{x} \,]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Операцию умножения в общем виде не удается выразить одним выражением вида (3). Правила выполнения умножения при различных знаках границ интервалов представлены в *табл. 1*.

Таблица 1 — Правила выполнения операции умножения в интервальной арифметике

Параметры интервалов	$\underline{x} > 0$	$0 \in \mathbf{x}$	$\overline{x} < 0$
$\underline{a} > 0$	$[\underline{a} \cdot \underline{x};\; \overline{a} \cdot \overline{x}]$	$[\overline{a} \cdot \underline{x};\; \overline{a} \cdot \overline{x}]$	$[\overline{a} \cdot \underline{x};\; \underline{a} \cdot \overline{x}]$
$0 \in \mathbf{a}$	$[\underline{a} \cdot \overline{x};\; \overline{a} \cdot \overline{x}]$	$[\min\{\underline{a} \cdot \overline{x};\; \overline{a} \cdot \underline{x}\};\; \max\{\underline{a} \cdot \underline{x};\; \overline{a} \cdot \overline{x}\}]$	$[\overline{a} \cdot \underline{x};\; \underline{a} \cdot \underline{x}]$
$\overline{a} < 0$	$[\underline{a} \cdot \overline{x};\; \overline{a} \cdot \underline{x}]$	$[\underline{a} \cdot \overline{x};\; \underline{a} \cdot \underline{x}]$	$[\overline{a} \cdot \overline{x};\; \underline{a} \cdot \underline{x}]$

Операция деления выполняется на основе операции умножения

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} / \mathbf{x} = [\,\underline{a};\ \overline{a}\,] \cdot \left[\frac{1}{\overline{x}};\ \frac{1}{\underline{x}}\right], \quad (0 \notin \mathrm{x})$$

Решение *обратной допусковой задачи* — расчет допусков параметров или физических величин по известному результирующему допуску — не может производится с помощью операций прямой интервальной арифметики. Связано это с тем, что применение прямых интервальных арифметических операций к решению обратной задачи генерирует интервалы большей ширины. Например, вычитание и деление одинаковых интервалов не приводит к появлению нулевого и единичного интервалов:

$$[\,1;\ 3\,] - [\,1;\ 3\,] = [\,-2;\ 2\,] \neq [\,0;\ 0\,];$$
$$[\,1;\ 3\,]\ /\ [\,1;\ 3\,] = [\,\frac{1}{3};\ 3\,] \neq [\,1;\ 1\,].$$

Решение обратной задачи с помощью обратной интервальной арифметики сводится к выполнению операций вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} \circledast \mathbf{a}, \tag{4}$$

где $\circledast \in \{\oplus, \ominus, \odot, \oslash\}$ — обратные арифметические операции в интервальной арифметике.

Границы неизвестного **x** при этом формируются по правилам

$$\underline{x} = max\ min\ \{\underline{b} * \underline{a};\ \underline{b} * \overline{a};\ \overline{b} * \underline{a};\ \overline{b} * \overline{a}\};$$
$$\overline{x} = min\ max\ \{\underline{b} * \underline{a};\ \underline{b} * \overline{a};\ \overline{b} * \underline{a};\ \overline{b} * \overline{a}\}. \tag{5}$$

Для обратных интервальных операций сложения и вычитания равенство (4) записывается в явном виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a} = [\,\underline{a} + \overline{b};\ \overline{a} + \underline{b}\,];$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{b} \ominus \mathbf{a} = [\,\underline{a} - \underline{b};\ \overline{a} - \overline{b}\,]. \tag{6}$$

Правила выполнения операции деления в обратной интервальной арифметике представлены в *табл.2*.

В результате применения обратной арифметической операции формируется интервал $\mathbf{x'} \supseteq \mathbf{x}$.

Например, при прямом умножении интервалов $\mathbf{a}$=[-5; 3], $\mathbf{x}$=[2; 4] получим $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = [-5; 3] \cdot [2; 4] = [-20; 12]$.

Решение этого уравнения относительно $\mathbf{x}$ приводит к результату

$$\mathbf{x}' = \mathbf{b} \oslash \mathbf{a} = [-20;\ 12] \oslash [-5;\ 3] = \left[-\frac{12}{5};\ 4\right] \supset \mathbf{x}$$

Интересно, что подстановка $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}'$ в уравнение (1) приводит к исходному результату

$$[-5;\ 3]\left[-\frac{12}{5};\ 4\right] = [-20;\ 12]$$

Таблица 2 — Правила выполнения операции деления в обратной интервальной арифметике

Параметры интервалов	$\underline{a} > 0$	$0 \in \mathbf{a}$	$\overline{a} < 0$
$\underline{b} > 0$	$[\underline{b}/\underline{a},\ \overline{b}/\overline{a}]$	—	$[\overline{b}/\underline{a},\ \underline{b}/\overline{a}]$
$0 \in \mathbf{b}$	$[\underline{b}/\overline{a},\ \overline{b} \cdot \overline{a}]$	$[\max\{\underline{b}/\overline{a},\ \overline{b}/\underline{a}\};\ \min\{\underline{b}/\underline{a},\ \overline{b}/\overline{a}\}]$	$[\overline{b}/\underline{a},\ \underline{b}/\underline{a}]$
$\overline{b} < 0$	$[\underline{b}/\overline{a},\ \overline{b}/\underline{a}]$	—	$[\overline{b}/\overline{a},\ \underline{b}/\underline{a}]$

Таким образом, решение обратной допусковой задачи с помощью обратной интервальной арифметики позволяет получить максимально возможное отклонение параметров или физических величин в исследуемой модели.

2. Решение интервальных систем линейных

АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Если математическая модель формируется на основе методов конечных элементов, конечных разностей или граничных элементов, то решение обратной допусковой задачи может быть сведено к решению системы из n интервальных линейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{13}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{n3}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Решение системы может быть выполнено методом исключения переменных. Деление каждого уравнения на коэффициент при неизвестном $\mathbf{x}_1$ и вычитание из всех последующих уравнений первого с использованием операций обратной интервальной арифметики приводит к уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_{22}^{(1)}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{23}^{(1)}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{2n}^{(1)}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2^{(1)} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathbf{a}_{n2}^{(1)}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{n3}^{(1)}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{nn}^{(1)}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n^{(1)} \end{array}\right\},$$

где $\mathbf{a}_{ij}^{(1)} = \mathbf{c}_{ij}^{(1)} \ominus \mathbf{c}_{1j}^{(1)}$; $\quad \mathbf{b}_i^{(1)} = \mathbf{d}_i^{(1)} \ominus \mathbf{d}_1^{(1)}$;

$\mathbf{c}_{ij}^{(1)} = \mathbf{a}_{ij} \oslash \mathbf{a}_{i1}$; $\quad \mathbf{d}_i^{(1)} = \mathbf{b}_i \oslash \mathbf{a}_{i1}$.

Аналогичная процедура, примененная поочередно ко всем уравнениям системы, позволяет формировать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_{12}^{(1)}\mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_{13}^{(1)}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{c}_{1n}^{(1)}\mathbf{x}_n &= \mathbf{d}_1^{(1)}\\
\mathbf{x}_2 + \mathbf{c}_{23}^{(2)}\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{c}_{2n}^{(2)}\mathbf{x}_n &= \mathbf{d}_2^{(2)}\\
\mathbf{x}_3 + \ldots + \mathbf{c}_{3n}^{(3)}\mathbf{x}_n &= \mathbf{d}_3^{(3)}\\
\ldots \qquad\qquad \ldots \quad &\ \ \ldots\\
\mathbf{x}_n &= \mathbf{d}_n^{(n)}
\end{aligned}\right\}$$

где
$$\mathbf{c}_{ij}^{(k)} = \mathbf{a}_{ij}^{(k-1)} \oslash \mathbf{a}_{ik}^{(k-1)}; \qquad \mathbf{d}_i^{(k)} = \mathbf{b}_i^{(k-1)} \oslash \mathbf{a}_{ik}^{(k-1)};$$
$$\mathbf{a}_{ij}^{(k)} = \mathbf{c}_{ij}^{(k)} \ominus \mathbf{c}_{kj}^{(k)}; \qquad \mathbf{b}_i^{(k)} = \mathbf{d}_i^{(k)} \ominus \mathbf{d}_k^{(k)}.$$

Из полученной системы неизвестные определяются обратным ходом с использованием операций обратной интервальной арифметики.

Применение этого метода, являющегося интервальной разновидностью метода Гаусса, для интервальных систем с границами интервалов одного знака приводит к алгебраическому решению задачи, которое характеризуется получением верного равенства при подстановке его в исходную систему (7). Например, применение описанной процедуры к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
[2;3]\,\mathbf{x}_1 + [3;4]\,\mathbf{x}_2 &= [8;18]\\
[3;4]\,\mathbf{x}_1 + [1;2]\,\mathbf{x}_2 &= [5;14]
\end{aligned}\right\}$$

приводит к алгебраическому решению: $\mathbf{x}_1 = [1;\ 2]$; $\mathbf{x}_2 = [2;\ 3]$.

В случае нульсодержащих корней и коэффициентов такого решения системы получить не удается в связи с супердистрибутивными соотношениями между операциями умножения и обратного интервального вычитания

$$\mathbf{x}\,(\mathbf{a} \ominus \mathbf{b}) \subseteq \mathbf{x}\,\mathbf{a} \ominus \mathbf{x}\,\mathbf{b}.$$

Ограничение применения метода Гаусса происходит также при необходимости останова процедуры исключения переменных, когда встречается операция обратного деления интервала с границами одного знака на нульсодержащий интервал или в случае появления в промежуточных результатах обратных интервалов, у которых $\underline{a} > \overline{a}$.

Алгебраическое решение в этом случае можно получить при преобразовании системы (7) к системе обычных алгебраических уравнений. Задача определения интервальных корней системы в этом случае сводится к задаче определения границ интервалов. Возможность такого преобразования основывается на представлении слагаемых системы (7) в виде

$$[\underline{a}_{ij}\,;\ \overline{a}_{ij}\,][\,\underline{x}_j\,;\ \overline{x}_j\,] = [\,\underline{g}_{ij}\,;\ \overline{g}_{ij}\,],$$

где $\underline{g}_{ij}$ и $\overline{g}_{ij}$ - нижняя и верхняя границы произведения.

С учетом правил (3) выполнения операций интервальной арифметики каждое из интервальных уравнений системы представляется двумя уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{g}_{ij} = \underline{b}_i; \qquad \sum_{j=1}^{n} \overline{g}_{ij} = \overline{b}_i\,. \tag{8}$$

В общем случае для определения границ интервалов создается разреженная матрица вещественных коэффициентов размерности $2n$, в каждой строке которой размещается не более n ненулевых элементов. Границы интервалов корней системы (7) являются решением системы линейных алгебраических уравнений (8), если известны правила из *табл.1* для всех интервальных произведений системы (7). При отсутствии таких сведений задача решается методом последовательных приближений.

Процедуру решения рассмотрим на примере отыскания интервальных корней системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} [\ 2\,;\,4\,]\,\mathbf{x}_1 + [-2\,;\,4\,]\,\mathbf{x}_2 = [\,-2\,;\,2\,] \\ [-1\,;\,2\,]\,\mathbf{x}_1 + [\ 2\,;\,4\,]\,\mathbf{x}_2 = [\,-2\,;\,2\,] \end{array}\right\},$$

для произведений которой неизвестны правила *табл.1*. В качестве начального приближения будем считать, что корни системы удовлетворяют условию $\underline{x}_1 > 0;\ \underline{x}_2 > 0$. Тогда можно составить систему уравнений размерности $2n = 4$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

которой удовлетворяют корни

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \left[-\frac{5}{7};\ \frac{3}{7} \right]; \qquad \mathbf{x}_2^{(1)} = \left[-\frac{11}{14};\ \frac{2}{7} \right].$$

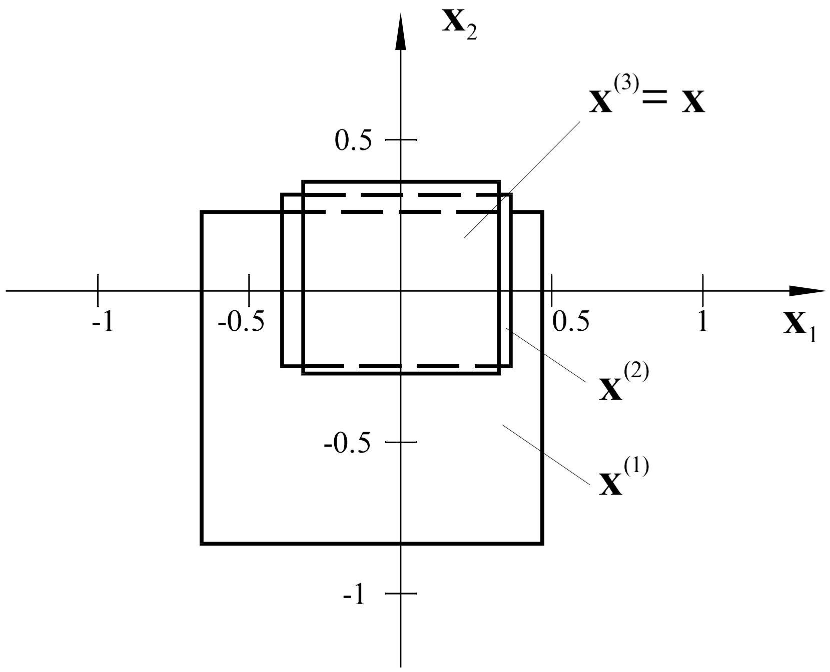
Полученные значения позволяют уточнить правило *табл.1* для каждого произведения и составить новую систему уравнений, из которой получаем следующее приближение :

$$\mathbf{x}_1^{(2)} = \left[-\frac{3}{7};\ \frac{5}{14} \right]; \qquad \mathbf{x}_2^{(2)} = \left[-\frac{2}{7};\ \frac{9}{28} \right].$$

Процесс вычисления заканчивается на третьем приближении, когда корни становятся равными корням алгебраического решения :

$$\mathbf{x}_1^{(3)} = \mathbf{x}_1 = \left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3} \right]; \qquad \mathbf{x}_2^{(3)} = \mathbf{x}_2 = \left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3} \right].$$

Характер изменения корней в процессе приближений представлен на рисунке.



Количество итераций значительно сокращается, если априорно известны зоны расположения интервальных корней системы. Например, для рассмотренного примера процесс определения границ интервалов заканчивается на первой итерации, если в качестве начальных приближений используются корни $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = [-1;\ 1]$.

3. Выбор начальных приближений

Выбор начальных приближений можно осуществлять исходя из особенностей математической модели. Например, указанием на нульсодержащие корни может служить нульсодержащие свободные члены системы (7). Однако при большой размерности системы подобные рекомендации выполнить чрезвычайно сложно, и возникает необходимость формирования начальных приближений с использованием более формализованного подхода, основанного на упрощении исходной системы уравнений путем замены интервалов их средними значениями или усреднением корней. Наиболее целесообразно, по-видимому, для получения начальных приближений использовать методы средних точек, средних коэффициентов, одноименных границ и средних корней.

С помощью *метода средних точек* /2/ выполняется сведение интервальных коэффициентов, неизвестных и правых частей уравнений (7) к их средним значениям

$$\tilde{a}_{ij} = mid\,\mathbf{a}_{ij} = \frac{\underline{a}_{ij} + \overline{a}_{ij}}{2};\ \ \tilde{x}_i = mid\,\mathbf{x}_i = \frac{\underline{x}_i + \overline{x}_i}{2};\ \ \tilde{b}_i = mid\,\mathbf{b}_i = \frac{\underline{b}_i + \overline{b}_i}{2}.$$

В результате для определения начальных приближений формируется система из n линейных алгебраических уравнений. Но для нульсодержащих корней и коэффициентов сформированная система не дает истинного распределения коэффициентов в уравнениях (8) и поэтому процесс приближения к алгебраическому решению может иметь малую сходимость. Необходимо также иметь в виду, что при симметричных границах интервалов $\mathbf{b}_i$ система становится однородной и имеет тривиальные корни. Кроме этого необходимо учитывать, что корни сформированной системы чаще всего далеки от среднего значения корней системы (7).

С помощью *метода средних коэффициентов* выполняется усреднение коэффициентов $\mathbf{a}_{ij}$ системы, что позволяет сформировать две независимые системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{B}}; \qquad\qquad \tilde{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{B}},$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ — матрица средних значений коэффициентов;

$\underline{\mathbf{X}}$ и $\overline{\mathbf{X}}$ — вектор нижних и верхних границ неизвестных;

$\underline{\mathbf{B}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ — вектор нижних и верхних границ свободных членов.

Из этих уравнений определяются нижние $\underline{x}_i$ и верхние $\overline{x}_i$ границы начального приближения. На первый взгляд вычисленные корни должны быть оценкой сверху алгебраических корней системы. В большинстве случаев это отвечает действительности. Но при большом количестве нульсодержащих корней и коэффициентов начальные приближения могут иметь обратные интервалы, в которых $\underline{x}_i > \overline{x}_i$. Сходимость решений задачи в этих случаях становится проблематичной.

Методом одноименных границ начальные приближения формируются на основе решения двух систем линейных алгебраических уравнений, которые содержат произведения одноименных границ коэффициентов и корней системы

$$\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{B}}; \qquad \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{B}}$$

где $\underline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ — матрицы нижних и верхних границ коэффициентов.

Начальные приближения, которые являются корнями этих систем, позволяют оценить сверху корни допусковой задачи, когда $\forall \underline{a}_{ij} > 0$ или $\forall\, \overline{a}_{ij} < 0$. Эти интервалы обычно имеют большую ширину. При большом числе нульсодержащих корней и коэффициентов среди начальных приближений могут появляться обратные интервалы.

С помощью *метода средних корней* выполняется усреднение интервальных корней в каждой строке системы (7), что позволяет интервальные уравнения представить в виде:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b}_i,$$

а начальные приближения определять с помощью соотношения

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{b}_i \oslash \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij}.$$

Сформированные начальные приближения обычно представляют собой интервалы, которые дают оценку сверху алгебраическому решению системы (7).

Тестирование сходимости решений при различных методах определения начального приближения проводилось на системе уравнений с матрицей коэффициентов $\mathbf{a}_{ij}$

$$\begin{bmatrix} [\ 2\,;4] & [\ 1\,;\ \ 3] & [-2\,;\ 2] & [-4\,;2] & [-2\,;1] \\ [-2\,;1] & [\ 2\,;\ 4] & [\ 2\,;\ 3] & [-1\,;1] & [-3\,;1] \\ [-2\,;1] & [-3\,;\ 1] & [\ 2\,;\ 4] & [\ 1\,;2] & [-2\,;1] \\ [\ 1\,;3] & [-3\,;-1] & [-4\,;\ 1] & [\ 2\,;4] & [\ 3\,;4] \\ [-2\,;2] & [2\,;\ 3] & [-2\,;-1] & [-4\,;1] & [\ 2\,;4] \end{bmatrix}.$$

Свободные члены уравнений формировались для корней системы :

$\mathbf{x}_1$ = [-1; 1]; $\mathbf{x}_2$ = [1; 2]; $\mathbf{x}_3$ = [-1; 2]; $\mathbf{x}_4$ = [-2; 1]; $\mathbf{x}_5$ = [-2; -1].

Для решения задач методом последовательных приближений была разработана программа в системе программирования Turbo-Pascal версии 6.0, в которой арифметические операции над интервалами производились с использованием TPX-Precompiler версии 1.1 D.

Результаты тестирования представлены в *табл.3*, где знаком “*” отмечены случаи, когда процедура получения результата не приводила к алгебраическому решению (происходило зацикливание), а знак “**” относится к появлению обратных интервалов.

Таблица 3 — Количество приближений при изменении элементов главной диагонали

Метод	Множитель элементов главной диагонали				
	0.5	1	2	5	10
Средних точек	*	5	3	3	3
Средних коэффициентов	4**	5**	2	2	1
Одноименных границ					

	6**	4	2	2	2
Средних корней	*	2	2	2	1

На сходимость процесса последовательных приближений существенное влияние оказывает вес элементов главной диагонали. При множителях меньших 0.5 матрица коэффициентов становилась вырожденной, и решение системы, как правило, представлялось в виде обратных интервалов. Количество итераций во всех случаях не превышало размерности системы.

Результаты исследований показывают, что применение разных начальных приближений влияет на скорость и сходимость решения задачи и зависимость их от ширины интервалов, размерности системы и наличии нульсодержащих элементов. При доминирующих значениях интервальных коэффициентов главной диагонали скорость сходимости решения задачи возрастает. Уменьшение значений элементов главной диагонали приводит к росту влияния на скорость решения задачи нульсодержащих элементов, что проявляется в увеличении количества итераций, появлении корней в виде обратных интервалов или невозможности вообще получения решения задачи (возникает зацикливание). В реальных допусковых задачах наиболее перспективным для определения начальных приближений является использование методов средних корней и средних коэффициентов. Количество итераций при использовании метода последовательных приближений не превышало размерности системы.

Литература

1.Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления.-М.: Мир, 1987.

2.Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system //Reliable Computing. -1995.- N1.-P.15-31.