

Министерство образования и науки Украины
Запорожский национальный технический университет

На правах рукописи

МАТЮХИН АНТОН ЮРЬЕВИЧ

УДК 539.3:51.001.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО
ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, профессор

ЧИГИРИНСКИЙ ВАЛЕРИЙ

ВИКТОРОВИЧ

Запорожье – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Раздел 1 Анализ напряженно–деформированного состояния тел в прикладных задачах теории пластичности с учетом неоднородности пластического течения.....	11
1.1. Анализ осесимметричного напряженного состояния металла при осевом нагружении полых тел вращения.....	11
1.2. Анализ влияния неоднородной пластической деформации на силовые и кинематические параметры.....	16
1.3. Методы решения задач теории пластичности	32
1.3.1. Метод линий скольжения	34
1.3.2. Энергетические методы решения задач теории пластичности.....	35
1.3.3 Метод решения уравнений равновесия и условия пластичности.....	41
1.3.4 Метод гармонических функций.....	44
1.4. Выводы.....	46
Раздел 2 Методы теоретических и экспериментальных исследований пластического формоизменения полых тел вращения.....	48
2.1 Метод теоретического исследования напряженно-деформированного состояния тел с использованием гармонических функций.....	50
2.2 Метод экспериментального исследования течения металла при симметричном осевом нагружении полых тел вращения.....	61
2.3 Метод конечных элементов.....	66
2.4 Выводы.....	68
Раздел 3 Постановка осесимметричной задачи теории пластичности для тел вращения с центральным отверстием.....	70

3.1	Производство толстостенных тел вращения, их практическое применение.....	70
3.2	Постановка замкнутой осесимметричной задачи теории пластичности.....	75
3.3	Построение обобщенных дифференциальных уравнений осесимметричной задачи в цилиндрических координатах.....	77
3.4	Выводы.....	80
Раздел 4 Определение компонентов тензора напряжений и скоростей деформаций осесимметричной задачи теории пластичности.....		81
4.1	Аналитическое решение обобщенного уравнения равновесия. Определение нормальных и касательных напряжений.....	82
4.2	Определение полей скоростей деформации.....	91
4.3	Математическая модель пластической среды в условиях осесимметричного напряженного состояния.....	95
4.4	Выводы.....	106
Раздел 5 Решение некоторых прикладных задач теории пластичности для полых тел вращения с использованием гармонических функций.....		107
5.1	Определение компонентов тензора напряжений при осевом нагружении полых цилиндрических заготовок. Двухзонный очаг деформирования.....	108
5.2	Определение положения нейтрального сечения при двустороннем течении металла.....	121
5.3	Анализ одностороннего течения металла при осевом нагружении толстостенных тел вращения.....	133
5.4	Граничные условия при решении плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах полуобратным методом.....	139
5.5	Сравнительный анализ полученных результатов с МКЭ в программе ANSYS.....	147
5.6	Выводы.....	151
Выводы.....		153

Список использованных источников.....	156
Приложение А.....	173
Приложение Б.....	175
Приложение В.....	176

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Реальные процессы обработки металлов всегда сопровождаются неравномерностью пластического формоизменения, что оказывает влияние на силовые и кинематические параметры, качество готовой продукции. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что неравномерность пластического формоизменения имеет общую закономерность как в напряженном, так и в деформированном состоянии. Основными факторами влияющими на появление неоднородности и характер ее распределения являются фактор формы и коэффициент контактного трения.

Возникает необходимость оценки процесса пластического формоизменения с позиции неравномерности пластического течения. В теории пластичности это возможно тогда, когда ставится и решается замкнутая задача, т.е. решается система дифференциальных уравнений учитывающих как статические, так и кинематические условия задачи.

Считается, что полное решение системы дифференциальных уравнений теории пластичности определяет действительное напряженно-деформированное состояние.

Разработка математических моделей на базе замкнутой задачи теории пластичности в условиях осесимметричного неоднородного пластического формоизменения, позволяет получить действительное напряженно-деформированное состояние среды, что является актуальной проблемой.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа выполнена на кафедре обработки металлов давлением Запорожского национального технического университета в соответствии с планами государственных бюджетных научно-исследовательских работ за 2012 – 2015 года по теме: “Розробка технології

виробництва та обладнання для виробів зниженої металоємності в умовах машинобудівного та металургійних виробництв” (шифр – 01512, номер государственной регистрации 0113U002419) и 2015 – 2018 года по теме: “Моделювання динамічних та статичних задач, нові матеріали, обладнання та технології в обробці металів тиском.” (шифр – 01515, номер государственной регистрации 0115U004904).

Вклад соискателя, как исполнителя данных научно- исследовательских тем, состоит в разработке математической модели осесимметричного напряженного состояния металла при осевом нагружении полых тел вращения в условиях неоднородного пластического течения.

Цель и задачи исследования. Целью диссертации является разработка математической модели на базе замкнутого решения задачи теории пластичности в условиях осесимметричного нагружения для обеспечения достоверности и надежности результата в условиях неравномерного пластического формоизменения.

Для достижения поставленной цели необходимо сформулировать и решить следующие задачи:

- определить общие закономерности изменения напряженно-деформированного состояния среды с учетом влияния неоднородности пластического течения;
- поставить и определится со схемой решения замкнутой осесимметричной задачи теории пластичности;
- с использованием гармонических функций определить компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах;
- установить условия перехода от напряжений к скоростям деформаций;
- с учетом условия пластичности и условий перехода при помощи метода гармонических функций определить компоненты тензора скоростей деформаций;

- на базе полученных решений построить математическую модель пластической среды;

- найти и проанализировать аналитическое решение прикладной задачи теории пластичности в цилиндрических координатах.

Объект исследования – процесс пластического формоизменения в условиях осесимметричного неоднородного напряженно–деформированного состояния тел.

Предмет исследования – неоднородное напряженно-деформированное состояние тел в условиях осесимметричного нагружения.

Методы исследования. Теоретический анализ напряженно-деформированного состояния металла базировался на методе гармонических функций. Двухзонный и однозонный очаги деформации, граничные условия задачи исследовались экспериментальным путем осадки толстостенной кольцевой заготовки на прессе. Для оценки достоверности полученных результатов решения задачи сравнивались с экспериментальными и теоретическими данными других авторов.

Научная новизна полученных результатов:

1. В работе получил дальнейшее развитие метод гармонических функций для осесимметричного напряженно–деформированного состояния тел.

2. Впервые получено и решено обобщенное уравнение равновесия в цилиндрических координатах для определения касательных составляющих тензора напряжений при нагружении полых изделий.

3. Впервые, аналитическим путем, определены компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций для осесимметричной задачи с использованием гармонических функций, построена математическая модель пластической среды.

4. Впервые получено замкнутое решение осесимметричной задачи теории пластичности в аналитическом виде, с использованием метода гармонических функций.

5. Впервые получены аналитические выражения для определения напряжений при различных вариантах пластического формоизменения цилиндрических полых изделий в осевом направлении, с использованием метода гармонических функций.

Практическое значение полученных результатов. Работа имеет теоретико-прикладной характер. Разработана математическая модель определения параметров напряженно-деформированного состояния в цилиндрических координатах при неоднородном пластическом формоизменения. Полученное замкнутое решение осесимметричной задачи позволяет обобщить результаты решения в напряжениях и деформациях, обеспечить его достоверность в расчетах, учесть многофакторность процесса, получить оптимизированные соотношения технологических показателей. Полученные в работе результаты могут быть использованы при изготовлении заготовок типа колец для авиадвигателей в условиях АО «Мотор Сич» (акт внедрения от 17.04.2015г.).

Теоретические результаты исследования использованы в учебном процессе при чтении специальных курсов теории пластичности для студентов специальности «Оборудование и технологии пластического формирования конструкций машиностроения» (акт внедрения результатов НИР ЗНТУ от 15.10.2015г.).

Личный вклад соискателя. Все основные положения и результаты диссертационной работы получены соискателем самостоятельно и опубликованы в работах [1-18]. В научных трудах, опубликованных в соавторстве, по вопросам касающихся темы исследования, соискателю принадлежит: в работах [1, 2, 3, 4, 12] – постановка задачи теории пластичности, построении и решение обобщенного дифференциального

уравнения равновесия в цилиндрических координатах и разработка математической модели давления пластической среды в радиальном направлении при деформации полых цилиндрических тел в осевом направлении; в работах [5, 6, 7, 8, 13, 14] построение замкнутого решения осесимметричной плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах, определение влияния радиального подпора на изменение характера и величины напряженного состояния, а также определение граничных условий для решения плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах полуобратным методом; в работах [9, 10, 11, 15, 16, 17, 18] – были получены экспериментальные и теоретические данные при одностороннем течении металла в процессе осадки кольцевых деталей, а также анализ факторов влияющих на появление и распространение неоднородности пластической деформации. Соавтору профессору Чигиринскому В.В. принадлежит формирование направления исследования диссертационной работы.

Апробация результатов диссертации. Основные этапы и результаты исследований по теме диссертации докладывались и обсуждались на: ежегодных научно-практических конференциях преподавателей, ученых, аспирантов и студентов Запорожского национального технического университета «Тиждень науки» (Запорожье, 2012 - 2016); ежегодных научных семинарах кафедры «Обработка металлов давлением» Запорожского национального технического университета (Запорожье, 2011 - 2015); XI международной научно-технической конференции «Прогресивна техніка і технологія 2010» (Киев, май 2010); международной научно-технической конференции «Инновационные технологии обработки металлов давлением» (Москва, октябрь 2011); IX международной научно-технической конференции «Прогрессивные технологии жизненного цикла авиационных двигателей и энергетических установок» (Запорожье-Алушта, сентябрь 2012); II международной научно-технической конференции «Машини і

пластична деформація металів» (Запорозьє, ноябрь 2012); V международной научно-технической конференции «Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти» (Киев, май 2014); XV международной научно-технической конференции «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта» (Киев, июнь 2014); XVI International Scientific Conference New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering (Czestochowa, Poland, 26-29 мая 2015); III международной научно-технической конференции «Машини і пластична деформація металів» (Запорозьє, октябрь 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации отображены в 18 опубликованных работах: из них 7 статей опубликовано в специализированных изданиях МОН Украины, 3 статьи в зарубежных изданиях, 6 тезисов докладов на конференциях международного и национального уровня и 2 дополнительные публикации.

РАЗДЕЛ 1

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

1.1 Анализ осесимметричного напряженно-деформированного состояния металла при осевом нагружении полых тел вращения

Кольцевые заготовки получили широкое распространение в машиностроительном и металлургическом производстве. Они могут представлять как собственно изделие, так и полуфабрикат, который подвергается дальнейшей обработке: механической или объемной штамповке. Одной из операций, широко используемой в промышленности при формоизменении кольцевых заготовок, является осадка. Осадка представляет собой процесс, при котором увеличиваются размеры поперечного сечения заготовок за счет уменьшения ее высоты. При осадке заготовку устанавливают вертикально и деформируют вдоль оси. В сочетании с последующими операциями осадка может быть использована для получения различных деталей с односторонними и двусторонними выступами.

Все процессы пластического формоизменения металлов характеризуются сложным напряженно-деформированным состоянием. Это проявляется в неоднородности распределения деформации по объему, различном формоизменении в зоне контакта и внутри обрабатываемого металла.

Определение напряженного состояния тела при пластической деформации для различных способов пластического формоизменения является фундаментальной задачей теории пластичности и упругости. Осадка толстостенных колец в осевом направлении используется для получения

изделий различного назначения: бандажей, матриц, колец и т.д. Осадка в контейнерах и на оправках используется для получения точных размеров внутреннего и наружного диаметров. В порошковой металлургии, в условиях неоднородного всестороннего сжатия, получают цилиндрические изделия в условиях внешнего и внутреннего подпорков. Таким образом, исследование напряженного состояния заготовки при осевой пластической деформации толстостенных полых цилиндрических заготовок является актуальной задачей.

В работах [19]-[32] рассмотрены вопросы по изучению осесимметричного напряженно- деформированного состояния в деталях типа кольца при пластическом формоизменении. Так, в ряде работ [20]-[22] автор описывает методику определения полей напряжений и деформаций в очаге деформации, технологической силы и работы деформирования, а также уточнения размеров длины заготовки с учетом влияния упрочнения, нормальной анизотропии, трения, угла конусности инструмента и изменения толщины заготовки в процессе формоизменения трубной заготовки при ее раздаче и обжиме.

Исследование напряженно-деформированного состояния тел приведено в работах [19], [23]-[32]. Определено распределение в объеме тела интенсивности деформации сдвига, интенсивности скорости деформации сдвига в зависимости от условий пластического формоизменения, коэффициента контактного трения и фактора формы. Напряжения рассчитывались в соответствии с теорией пластического течения и деформационной теорией. При этом определение напряженно-деформированного состояния сопровождалось широким применением упрощений и допущений. Использование метода этапного деформирования сопряжено с большой погрешностью в определении величины сопротивления деформации сдвига - « k », при обжатиях свыше 70%. Применялось

упрощение решения допущением, в соответствии с которым, перемещение и деформация зависят только лишь от одной координаты.

При расчете напряженного состояния деформируемого металла производилась замена его свойств на свойства жидкости, что, по мнению автора [19], является достаточно грубым приближением. Пренебрежение упругими деформациями и переход к модели жесткопластического тела делают невозможным точный расчет напряженного и деформированного состояний тела. Вследствие этого возникает необходимость применения верхней и нижней оценки силы деформирования.

В работе [32] рассмотрен вопрос о наличии и распространении зоны прилипания при осадке полых цилиндрических заготовок, что является одним из показателей неоднородности напряженно-деформированного состояния. Может наблюдаться различное распространение зоны прилипания, которое будет зависеть от размеров осаживаемой заготовки, а также от условий проведения опыта, величины высотной деформации, коэффициента трения и т. п. Для наиболее часто встречающихся в заводской практике условий осадки полых цилиндрических заготовок, при которых отношение диаметра к высоте в конечный момент достаточно велико, зона прилипания может иметь крайне малую протяженность и практически скольжение распространяется на всю поверхность контакта, что, естественно, приводит к некоторому увеличению удельного давления течения.

Изучение пластического течения при осадке полых заготовок представлено в ряде работ [33]-[44]. Рассмотрено применение полученных теоретических результатов для определения технологических параметров процесса пластического формоизменения и определения формы боковой поверхности заготовки при осадке. Представлено решение осесимметричной задачи теории пластичности и критический анализ предыдущих решений связанный с упрощением постановки задачи и применением ряда допущений.

Технология и способы производства цилиндрических полых изделий представлены в работах [45]-[66], где показано, что пластическое формоизменение может быть реализовано как в горячем, так и в холодном состоянии металла по следующим технологическим схемам:

- штамповка с прошивкой;
- штамповка с прошивкой и последующая раскатка на раскаточных машинах или экспандирование (раздача) на разжимных секционных оправках;
- вырубка с пробивкой;
- раздача кольцевых заготовок на двух конических оправках с пазами и выступами при их движении на встречу друг к другу;
- гибка и стыковая сварка пруткового материала с последующей подчеканкой в штампе [57];
- методом редуцирования [63];
- методами выдавливания: прямого, обратного и поперечного [45], [46], [64], [65];
- способом гидропрессования [66];
- способом изотермической штамповки [50];
- прессованием труб (раздача, обжим) [47], [48], [54];
- винтовая прокатка труб [55];
- способом совмещенного прессования [51]-[53], [60];
- осадка деталей типа кольца [59], [62];
- осадка с формованием наружных утолщений [58].

Определение силовых и кинематических параметров осадки толстостенных полых цилиндрических заготовок рассмотрены в работах [67]-[75]. Показано влияние ряда технологических факторов (высоты заготовки, коэффициента трения) [67], [72], [74]; влияние зон скольжения, торможения и прилипания [69], [75] на изменение величины усилия

деформирования, а также, сопоставлены результаты теоретического и экспериментального определения усилия.

В работах [68], [73] сопоставляются энергетические затраты при осадке и обратном выдавливании с кручением и без кручения пуансона. В результате экспериментального исследования было установлено, что работа сил трения и общая работа при осадке с кручением больше, чем при осадке без кручения. При осадке как низких, так и высоких образцов, кручение не приводит к положительному энергетическому эффекту, хотя дополнительные затраты на кручение, особенно для низких образцов, незначительны.

Математическое моделирование процесса осадки представлено в работах [76]-[82]. Анализ расширенной задачи осадки кольца и математическая модель предложены в [77]. Выделены три схемы осадки кольца (свободная осадка кольца; осадка с ограничением внутреннего диаметра; осадка с ограничением внешнего диаметра), позволяющие рационально использовать энергетические и материальные ресурсы, а также получать детали без брака.

Разработанная в [78] математическая модель позволяет проводить анализ распределений нормальных контактных и касательных напряжений и осевых усилий в зависимости от относительных обжатий изделий и хода инструмента.

Модель пластической среды, предложенная в работе [79], учитывает возможность деформирования удлиненной цилиндрической заготовки в соответствующей технологической оснастке без искривления, при этом, поддерживающие элементы в штампе должны оказывать силовое воздействие на эту заготовку соответственно функциональным зависимостям.

Моделирование пластической среды с применением программных продуктов Deform-3D, ABAQUS SE и др. представлены в работах [76], [80]-[82]. Авторами проведен анализ напряженно-деформированного состояния

методом конечных элементов, а также определены зоны опасных сечений. Показано влияние высоты осаживаемой заготовки на образование дефектов внутри отверстия связанных с неоднородным пластическим течением. Так, при уменьшении высоты заготовки, проявление дефектов возрастает.

Влияние технологических параметров процесса осадки на характер распределения напряжений и деформаций в заготовке исследовано в работах [83]-[88]. Качество готовой продукции, полученной методами пластического формоизменения, во многом зависит от величины неоднородности деформирования. В свою очередь, на распределение неоднородности деформации влияет ряд технологических факторов: влияние контактного трения [83], [88]; силовой режим процесса деформирования, отношение диаметра к высоте, степень деформации исходной заготовки по высоте [84], [85]; скоростные параметры (статическое либо динамическое нагружение) [86], наличие боковых подпирющих усилий [87].

Таким образом, при создании новых математических моделей по определению напряженно-деформированного состояния металла при пластическом формоизменении необходимо учитывать неоднородность пластической деформации и ряд технологических факторов влияющих на ее распределение (коэффициент контактного трения, фактор формы, степень деформации и т.д.).

1.2 Анализ влияния неоднородной пластической деформации на силовые и кинематические параметры

В научной литературе широко представлены теоретические и экспериментальные исследования напряженного состояния металла при разных схемах объемного течения. Каждому фактору формы очага

деформации l/h (где, l – длина очага деформации, h – высота очага деформации) соответствует определенная схема формоизменения внутри очага деформации. Каждой схеме пластического формоизменения соответствует определенный характер распределения и величина контактных напряжений [89]. Неравномерность пластической деформации определяется значительными сдвигами и касательными напряжениями.

На рис. 1.1 показаны экспериментальные данные распределения контактных нормальных p_z и касательных τ_x напряжений при прокатке.

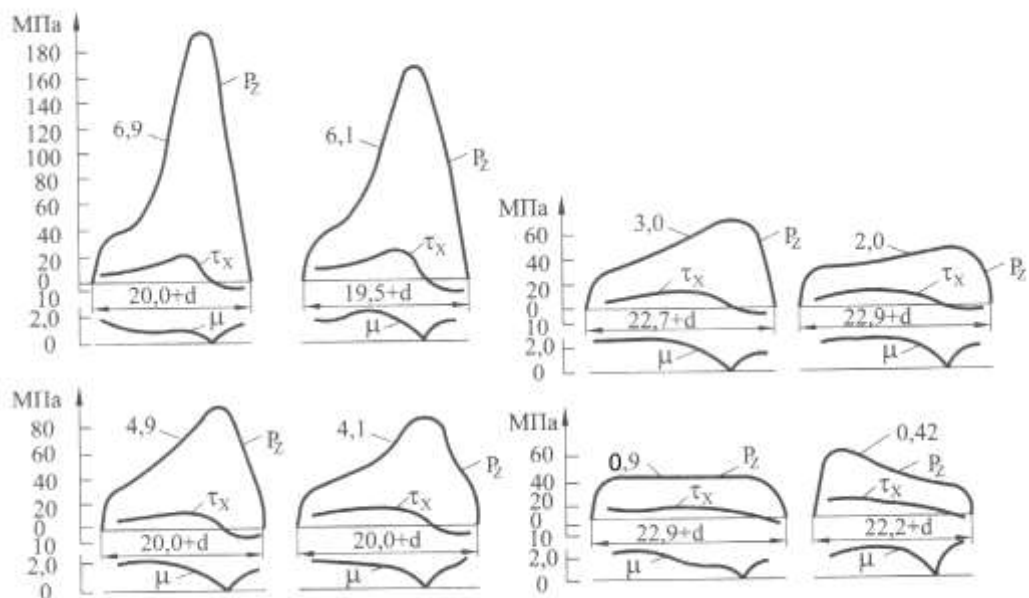


Рисунок 1.1 - Распределение контактных напряжений по данным А.П. Чекмарева и П.Л. Клименко [89].

Максимуму нормальных напряжений соответствует примерно нулевое значение касательных. Кроме того, величина и характер распределения зависят от фактора формы l_d/h_{cp} (где l_d – длина очага деформации, h_{cp} – средняя высота). Фактор формы является характеристикой «объемности» очага деформации, тех или иных схем напряженно- деформированного состояния, которые реализуются во всей зоне пластического течения. При разных параметрах l_d/h_{cp} (6,9; 6,1; 4,9; 4,1; 3,0; 2,0; 0,9; 0,42) величина максимального

значения p_z уменьшается со 190 МПа до 40...60 МПа. Меняется характер распределения напряжений, при больших значениях l_d/h_{cp} пик эпюры находится вблизи плоскости выхода металла из очага деформации, при малых - распределение напряжений либо равномерное по длине, либо пик эпюры смещается к плоскости входа металла в очаг деформации. Через фактор формы наглядно показано влияния силового контактного и объемного формоизменения пластической среды.

В работе [90] приведены экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния в производственных условиях горячейковки. Деформирование стальных заготовок, нагретых до ковочной температуры, производилось в бойках с углом выреза $\alpha = 90, 100, 110, 120$ и 130° при относительных подачах $l/d_0=0,5; 0,7$, с величиной обжатий $\Delta = 7,9; 13,2$ и $21,5\%$, в широком диапазоне различных условийковки на гидравлическом прессе, оснащенный манипулятором и нагревательным устройством. Расчет показал, что значения главных компонентов деформации при идентичных условияхковки лабораторных и производственных заготовок совпадают (рис. 1.2).

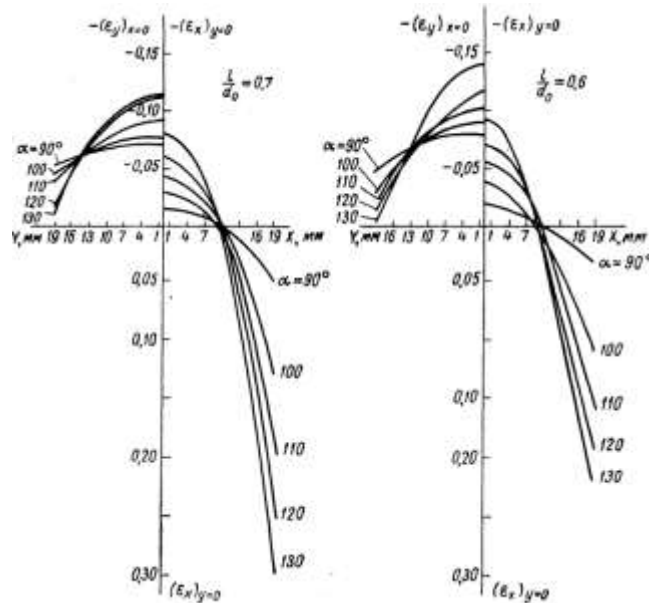


Рисунок 1.2 - Графики распределения главных компонентов деформации вдоль вертикальной и горизонтальной осей заготовки [90].

Для оценки степени неравномерности деформации в плоскостях XZ и YZ для каждой заготовки введен критерий – градиенты неравномерности Q_x и Q_y . По данным расчета численных значений градиентов неравномерности деформации построены графики зависимости градиентов от величины обжатий и относительных подач для различных углов выреза ромбических бойков – рис.1.3.

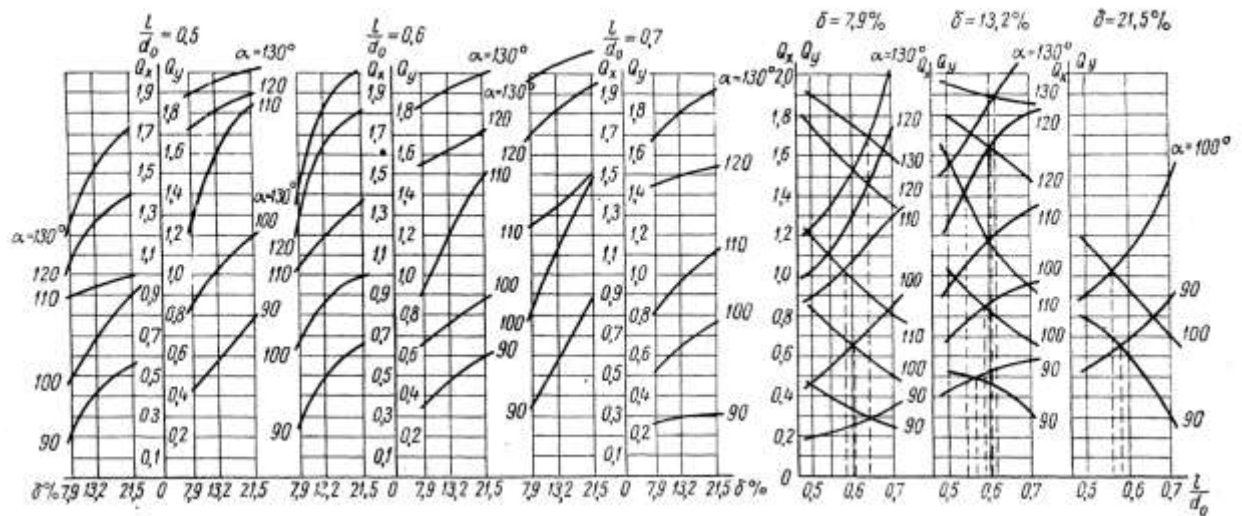


Рисунок 1.3 – Зависимость градиентов неравномерности главных компонентов деформации от параметров ковки [90].

Функциональная связь напряжений и деформаций устанавливалась при некоторых ограничениях условий протекания процесса. Применение деформационной теории пластичности при анализе неоднородности напряженного состояния тела, претерпевающего конечное пластическое формоизменение, в общем случае оказывается невозможным. Тем не менее, для некоторых частиц деформируемого тела, отличающихся монотонным характером протекания процесса формоизменения, была сделана попытка установить параметры напряженного состояния по известным значениям компонентов деформации.

При симметричном нагружении металла на шероховатых бойках разным факторам формы соответствует определенное объемное течение

металла. Наблюдается крайняя неравномерность пластической деформации в зоне пластического течения. Проявлением этой неравномерности является «ковочный крест», который расположен в диагональных зонах геометрического очага деформации при симметричном нагружении. Это подтверждается экспериментальными исследованиями деформированного состояния металла при осадке. Искажение наружного контура соответствует неоднородность деформаций внутренних зон и элементов осаживаемой заготовки. При этом можно различать три зоны (рис. 1.4) [91]. Зона I – зона «задержанной» или «затрудненной» деформации, прилегает к торцам заготовки и деформируется незначительно, что объясняется влиянием сил трения на контактных поверхностях. Зона II – зона интенсивных деформаций как в осевом, так и радиальных направлениях. Интенсивность деформации зоны III занимает промежуточное положение между двумя первыми.

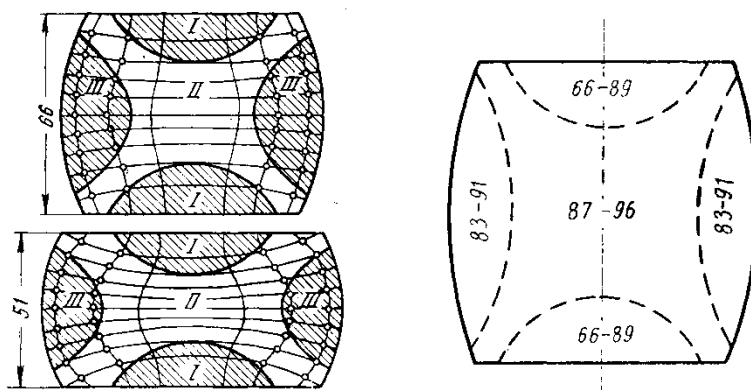
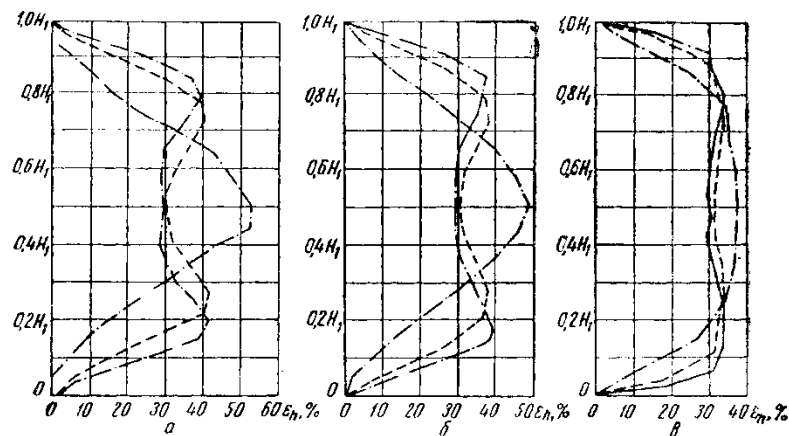


Рисунок 1.4 – Зонаобразование и распределение твердости при осаживании [91].

По мере увеличения степени осадки или при осадке образцов с большими отношениями d/h зона III резко уменьшается, а зоны I и II практически сливаются и деформация охватывает объем этих обеих зон при резко выраженном объемном напряженном состоянии в связи со

сближением контактных поверхностей. Равномерность деформации повышается, а бочкообразность снижается. Кроме того на рис 1.4 показано распределение твердости (НВ) по зонам осаженного образца из алюминиевого сплава. Так, наибольшую твердость имеет металл в зоне II, наименьшую - в зоне I. Зона III занимает промежуточное значение.

Как видно, форма боковой поверхности и различный характер распределения деформаций в объеме поковок зависит от отношения H_0/D_0 (фактора формы). Кривые распределения обжатия по высоте осаженной заготовки для различных поверхностей при $r=\text{const}$ приведены на рис. 1.5 [92].



а – по оси, $H_0/D_0=3,5$; б – $1/3R$ от оси, $H_0/D_0=2,5$; в – $2/3R$ от оси, $H_0/D_0=1,0$.

Рисунок 1.5 – Распределение высотной деформации осаженных заготовок [92].

Распределение высотной деформации имеет неравномерный характер. При разном факторе формы меняется величина и характер распределения высотной деформации. Кроме того, имеет место неравномерность деформации в различных сечениях осаживаемых образцов. Таким образом, учесть влияние различных размерных характеристик осаживаемых образцов,

возможно лишь при анализе напряженно- деформированного состояния во всем объеме очага деформирования.

На рис. 1.6 представлены экспериментальные данные по распределению деформаций при прокатке полос с соотношением $l/h=1,29$ на контактной поверхности и внутри очага деформации [92].



1 – посередине полосы контактной поверхности; 2 – у края ширины контактной поверхности; 3 – посередине ширины и толщины; 4 – у края ширины и посередине толщины.

Рисунок 1.6 – Кривые нарастающих коэффициентов вытяжки для элементарных полосок [92].

Как видно из графика (см. рис. 1.6), на кривых 1 и 2 существует прямолинейный участок между плоскостью входа и выхода металла из валков, так называемый участок прилипания, в котором отсутствуют вытяжка и уширение, а следовательно, отсутствует и высотная деформация в некоторой толщине контактной поверхности. Таким образом, как и для процесса осадки, при прокатке существует область затрудненной деформации, в которой практически отсутствует пластическая деформация металла. Кроме того, на рис. 1.6 наглядно показано различие распространения деформаций на контакте и в объеме очага деформирования.

По утверждению авторов [93], распределение напряжений и деформаций имеют неравномерный характер во всем объеме

деформируемого тела. Так, касательные напряжения имеют максимальную величину на контактных поверхностях заготовки и обращаются в нуль в средней плоскости. Поэтому деформации элементов торцовых поверхностей должны быть меньше деформаций в поперечных сечениях, удаленных от торцов, что и наблюдается в действительности.

В случае цилиндрической заготовки поперечные сечения при отсутствии анизотропии трения сохраняют круговую форму, а меридиональные получают бочкообразную. Степень и характер бочкообразности зависят от величины коэффициента трения. Чем больше последний, тем сильнее торможение точек, расположенных на торцах, и тем больше при равных прочих условиях разница между диаметрами торцов осаженой заготовки и диаметрами других ее сечений. При этом у низких заготовок ($d_0/h_0 > 1$) сечение посередине образующей получает максимальный диаметр, т. е. заготовка сразу приобретает бочкообразную форму, причем степень бочкообразности уменьшается с увеличением отношения d_0/h_0 .

При осадке высоких заготовок ($d_0/h_0 < 0,5$) явление значительно усложняется. Как показал еще Ф. Ридель (1913 г.), образец с $d_0/h_0 = 0,35$ при малой степени осадки принимает форму как бы двух бочек у торцов, соединенных цилиндрической частью (рис. 1.7, а).

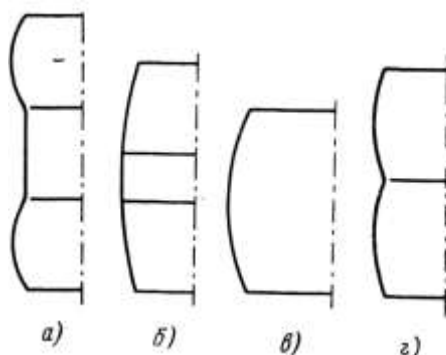


Рисунок 1.7 – Бочкообразование при осадке цилиндрических образцов [93].

При дальнейшей осадке диаметр цилиндрической части растет и заготовка получает форму цилиндра, к которому примыкают концы в виде усеченных конусов с меньшим основанием у торцов (рис. 1.7, б). При еще большей деформации, порядка 40...50% [94], диаметр среднего сечения растет более интенсивно и заготовка принимает бочкообразную форму (рис. 1.7, в). При больших отношениях d/h , но меньших $1/2$, можно получить «двойную бочку» (рис. 1.7, г), которая при дальнейшей осадке за счет более интенсивного увеличения среднего диаметра переходит в одинарную с максимальным диаметром посередине заготовки. Таким образом, показано влияние фактора формы и граничных условий на контакте (коэффициент трения), на распределение деформаций во всем объеме очага осаживаемой заготовки.

В работе [94] введен в рассмотрение параметр неравномерности деформации $Q = \frac{V_0}{V}$, где V_0 - объем металла в «бочке» осаживаемого образца, V - объем металла в заготовке. Чем больше Q , тем больше неравномерность пластической деформации по высоте сечения. На рис. 1.8 показано, что с увеличением высоты заготовки показатель неравномерности достигает максимального значения $Q = 23.7\%$, $d/h = 0.5$ и с увеличением обжатия резко уменьшается, принимает минимальное значение $Q = 6.1\%$ при $d/h = 12$.

Такая же тенденция имеет место и для заготовок средней и малой высоты. При этом пик максимальных значений смещается в сторону увеличения фактора формы d/h . Подробный анализ работы [94] показывает, что при осадке высоких заготовок неравномерность пластической деформации на контакте минимальна (зона прилипания), а по высоте максимальна во всех сечениях.

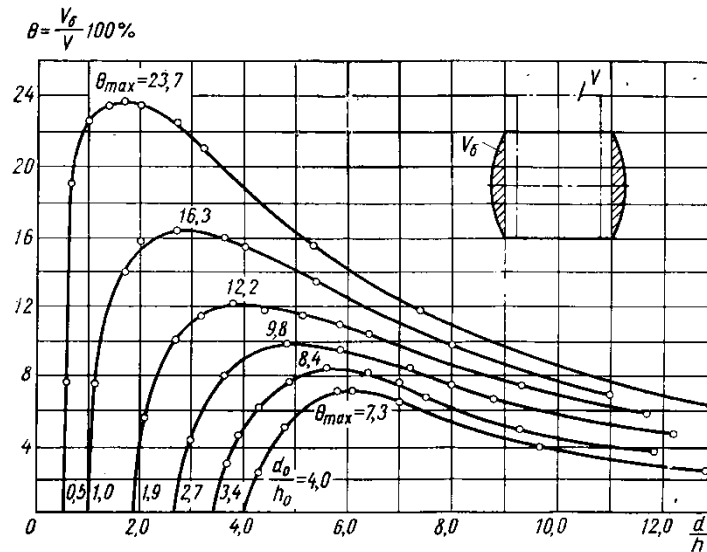


Рисунок 1.8 - Диаграмма зависимости относительного объема бочкообразования от фактора формы [94].

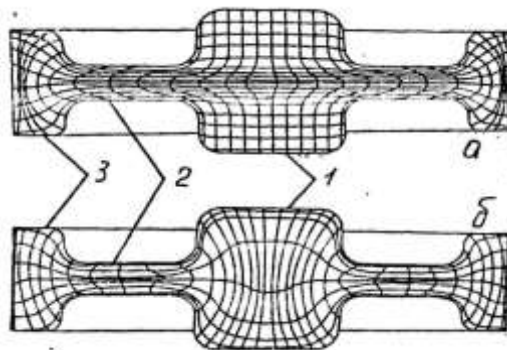
По мнению автора [95] неравномерное течения металла является результатом большей или меньше сосредоточенности пластической деформации в различных местах его объема. Автор классифицирует разделение неравномерности на физическую и геометрическую. Последняя представляет собой только изменение формы объекта деформации относительно той формы, которая была бы при деформации в идеализированных условиях при отсутствии искусственной неравномерности. Физическая неравномерность деформации охватывает наибольшее число проявлений неравномерности и относится ко всем ее разновидностям, имеющим физическое происхождение. Эта разновидность неравномерности деформации, в свою очередь, может быть подразделена на следующие:

- неравномерность, вызванная граничными условиями деформации (наличие или отсутствие на поверхности металла контакта с инструментом и характер контактного трения: сухое, жидкостное, покоя, движения, изотропное, анизотропное и т. д.);

- неравномерность, вызванная кинетическими условиями деформации (наличие зависимости перемещений частиц металла от их координат; возможность превышения скорости деформации над скоростью ее распространения; превышение скорости упрочнения металла над скоростью разупрочнения при горячей деформации);

- неравномерность, вызванная термическими условиями деформации, приводящими к неравномерности температурных полей (непрогрев металла; преимущественное охлаждение его поверхностных слоев; сосредоточенный тепловой эффект в местах локализации пластической деформации). Структурная неравномерность относится и к физической неравномерности деформации, но выделена в отдельную разновидность. Наложение и суммирование различных разновидностей неравномерности создает общую картину неравномерного течения металла, названную технологической неравномерностью.

Приведем пример неравномерности, вызванной кинетическими условиями деформации при изготовлении сложных деталей. Как показывает автор [90], [96] при штамповке детали из высокой заготовки (рис.1.9, а) в первую очередь начинается деформация ступицы и слои металла, расположенные в центральной зоне, перемещаются в направлении от ступицы через диск к ободу.



а- 2,0...2,5; б- 1,0; 1 – ступица; 2 – диск; 3 – обод.

Рис. 1.9 - Характер течения металла при штамповке из заготовки деталей типа шестерни с H_0/D_0 [96].

При этом в ступице происходит основная высотная деформация заготовки с упрочнением металла в центральной зоне. Кроме того, в процессе заполнения полости 1 и наличии радиального течения металла, заготовка будет дополнительно деформироваться в вертикальной плоскости на участке 2 диска и, следовательно, получать дополнительное упрочнение.

При использовании низкой заготовки (см. рис 1.9, б) в первую очередь деформации подвергается область металла, расположенная в диске и течение слоев металла будет направленно от оси диска к ступице и ободу. В этих условиях деформации максимальное обжатие будет иметь место на участке 2. Однако по мере продвижения штампа деформируемый металл в диске затекает в обод и ступицу и получает дополнительное упрочнение. Результаты расчетов, для принятых параметров деформации, представлены в табл. 1.1, из которой следует, что среднее напряжение течения металла, коэффициент напряженного состояния, среднее нормальное контактное напряжение и сила при деформации низкой заготовки оказалось несколько больше, чем при деформации высокой заготовки.

Таблица 1.1 - Результаты расчетов деформации детали типа шестерня.

$m=H_0/D_0=2,5$	$m=H_0/D_0=0,8$
$\varepsilon_1=0,52; \varepsilon_2=0,95;$	$\varepsilon_1=0,128; \varepsilon_2=0,89;$
$U_1=27,3 \text{ с}^{-1}; U_2=50 \text{ с}^{-1};$	$U_1=9,6 \text{ с}^{-1}; U_2=67 \text{ с}^{-1};$
$\sigma_{T1}=40,9 \text{ Н/мм}^2; \sigma_{T2}=52,9 \text{ Н/мм}^2;$	$\sigma_{T0}=31,85 \text{ Н/мм}^2; \sigma_{T1}=\sigma_{T2}=\sigma_{T3}=52 \text{ Н/мм}^2;$
$n_\sigma=4,38;$	$n_\sigma=4,48;$
$p_{cp}=4,38 \cdot 40,9=179 \text{ Н/мм}^2;$	$p_{cp}=4,48 \cdot 52=250 \text{ Н/мм}^2;$
$P=179 \cdot 0,947=169 \text{ кН.}$	$P=250 \cdot 0,947=237 \text{ кН.}$

Показано влияние кинематики неоднородного течения металла на силовые параметры процесса. Это свидетельствует, что неравномерность пластической деформации при любой преграде физического и

геометрического происхождения, должна учитываться при анализе деформированного и напряженного состояния обобщенными параметрами процесса в объеме очага деформации.

Одним из основных факторов, вызывающим неоднородность в процессе обработки давлением, является трение на контактных поверхностях между деформируемым металлом и инструментом [97]. Контактное трение, по существу, формирует очаг деформации, что уже само по себе обуславливает неравномерное распределение деформаций по объему деформируемого тела.

В работах [92], [98] показано влияние контактного трения при прессовании. Признаком неравномерности деформации является появление сдвигов в объеме очага деформации и следовательно значительных касательных напряжений. На рис. 1.10 показана кинематика течения металла при выдавливании с разными коэффициентами трения на контакте.

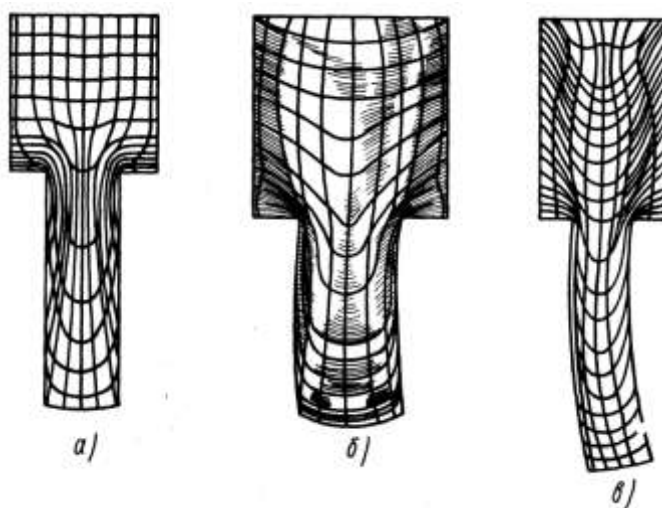


Рисунок 1.10 – Схема течения металла при выдавливании [92].

Как показывают опыты на образцах с нанесенной координатной сеткой, если коэффициент контактного трения относительно невелик, а пластические свойства однородны по всему объему металла, то металл проталкивается пуансоном по приемнику и в нем практически не образуется очаг

пластической деформации. Координатная сетка остается почти не искаженной (см. рис. 1.10, а).

При увеличении контактного трения, а также при некоторой неоднородности пластических свойств металла наблюдается ясно выраженная пластическая деформация, причем слои металла, расположенные в осевой части приемника, текут более интенсивно по сравнению со слоями, примыкающими к его стенкам, что ясно видно по искажению координатной сетки (см. рис. 1.10, б). Наконец, при больших коэффициентах трения и значительной неоднородности пластических свойств металла в центральной и периферийной зонах, например в результате охлаждения последних за счет отвода тепла стенками приемника, наблюдается резкое развитие пластической деформации металла по всему объему приемника при значительной неравномерности ее. Металл в зонах, примыкающих к поверхности приемника, иногда течет в направлении, обратном движению пуансона, а затем меняет направление своего движения, питая центральную зону, где движение частиц металла совпадает с направлением движения пуансона. Искажения координатной сетки для такого случая представлены на рис. 1.10, в.

В работе [99] представлен анализ влияния частичного усиления упругим ребром криволинейного отверстия на напряженно-деформированное состояние пластины при ее цилиндрическом изгибе. Увеличение жесткости усиливающих ребер приводит к существенному уменьшению кольцевых и крутящих моментов, а также увеличению нормальных и касательных моментов на участке усилия.

Возможность использования температурной неравномерности для получения местного эффекта показано в работе [100]. Так, при ковке крупных слитков поверхность специально подстуживают на воздухе, тем самым повышая напряжение текучести поверхностных слоев. Тогда при

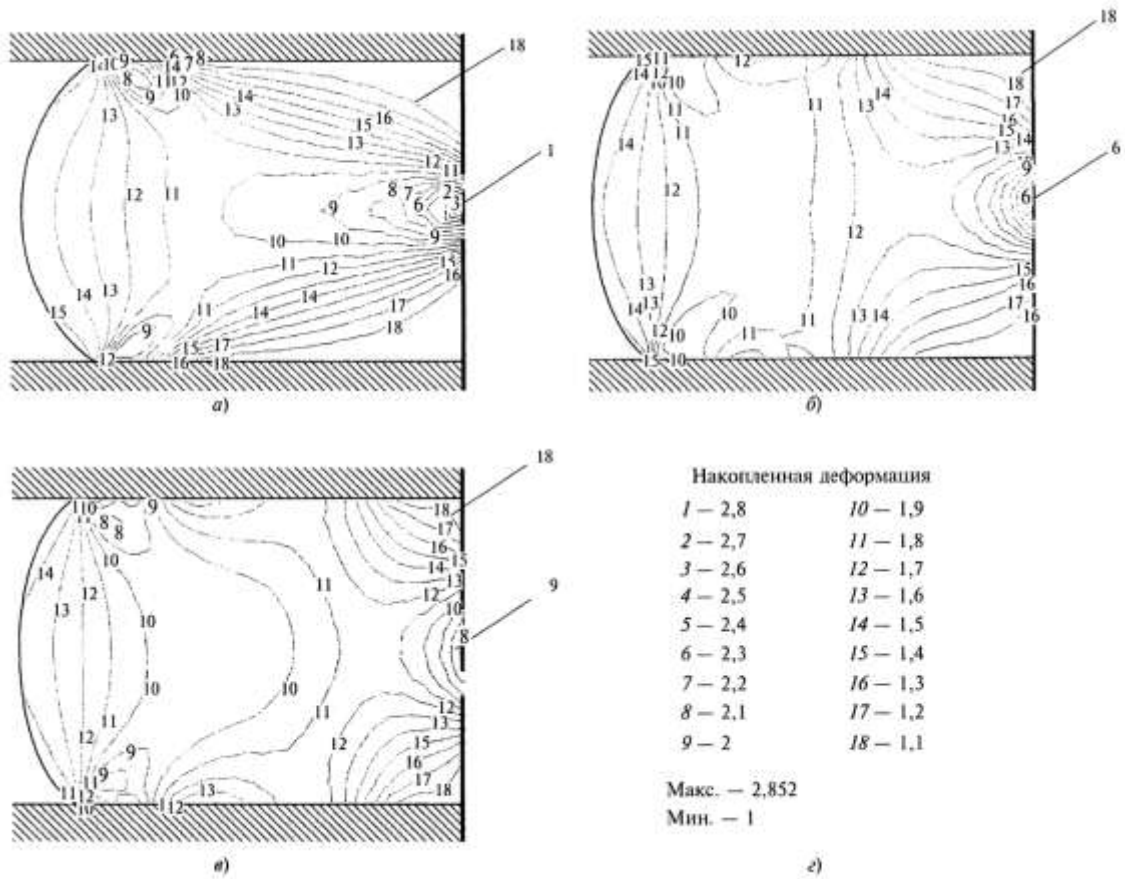
ковке более активно деформируются внутренние слои металла, что приводит к лучшей проковке металла в осевой зоне слитка.

Влияние скорости деформации и температуры на напряженно-деформированное состояние материала применительно к теории микротвердости рассматривается в работе [101]. Из полученных результатов следует, что представленный вариант микродеформации дает удовлетворительное описание экспериментальных данных по сравнению с моделью [102] при меньшем количестве постоянных материала.

Влияние технологических параметров на неоднородность пластической деформации показана в работе [103]. В настоящей работе исследовано деформированное состояние, зонообразование и тепловые поля в заготовках при осадке по традиционной и новой технологиям. Исследование выполнено с помощью конечно-элементной системы *QForm 2D v 2.2.03*. Результаты моделирования представлен на рис. 1.11 в виде дискретных полей накопленных деформаций.

Вблизи торцов заготовки наблюдаются массивные зоны затрудненной деформации, ограниченные линиями со значением 1,7. У боковой поверхности расположена зона с промежуточными деформациями, равными 1,8. Остальная область заготовки - зона интенсивной деформации, в которой наибольшая величина накопленной деформации достигает 2,8. Таким образом, уровень деформаций различается почти в 1,6 раза.

Уменьшить зоны затрудненной деформации можно, применяя выпуклые, например конические или конические с плоской площадкой при вершине, бойки. При деформировании заготовки сначала выпуклыми, а затем плоскими бойками зоны затрудненной деформации уменьшились в 2 раза и более (см. рис. 1.11, б, в).



a - после осадки плоскими бойками; *б* - после комбинированной осадки выпуклыми бойками с $d_{п.п} = 250$ мм и плоскими бойками; *в* - после комбинированной осадки выпуклыми бойками с $d_{п.п} = 140$ мм и плоскими бойками; *г* — шкала накопленной деформации.

Рисунок 1.11 - Поля накопленных деформаций в заготовках [103].

Из данного параграфа видно, что в реальных процессах пластического течения присутствует неравномерность напряженно-деформированного состояния, связанная с неоднородностью пластического формоизменения. Процессы, протекающие во всем очаге деформации учитываются контактными напряжениями, и наоборот, условия на контакте оказывают влияние на характеристики формоизменения в объеме. Таким образом, эти два взаимосвязанных процесса должны быть учтены при разработке модели пластического формоизменения, технологии получения изделий, с точки зрения качества продукции и энергозатрат. Учет влияния неоднородности

пластического формоизменения на напряженно- деформированное состояние позволяет учесть многокомпонентность этого процесса, получить более совершенные модели.

Из выше изложенного следует, что учесть неравномерность деформации является возможным только при решении плоской или пространственной задачи теории пластичности, т.к. в данном случае возможно рассматривать деформацию не только на контакте, но и в каждой точке очага деформации.

1.3 Методы решения задач теории пластичности

В предыдущем параграфе показано, что неоднородность напряженно – деформированного состояния развивается не только на контакте, но и в объеме очага деформации.

При этом одним из вариантов достоверности полученного решения является сопоставление полей напряжений и деформаций при пластическом формоизменении. Это подтверждается анализом литературных данных предыдущего подраздела. Действительно, при деформации средних и малых по высоте заготовок имеет место максимальная неравномерность контактных напряжений пластического течения (см. рис. 1.1), в последнем случае, за счет присутствия зон скольжения и затрудненной деформации (см. рис. 1.4; 1.6). При этом по высоте очага деформации напряжения и деформации имеют максимальную неравномерность. При деформации высоких заготовок наблюдается обратная тенденция для напряжений и деформаций. Контактные напряжения изменяются по длине очага деформации незначительно (см. рис.1.1), при максимальных значениях l/h . Контактные деформации не изменяются из-за присутствия зоны прилипания, которая является

основанием распространения заторможенной деформации в объеме. По высоте, напротив, эти изменения максимальные.

Из приведенного сопоставления видно, что должна теоретически решаться замкнутая задача теории пластичности, в напряжениях и деформациях, т.е. должно иметь место полное решение задачи теории пластичности. На практике задачи решаются либо в напряжениях, либо в деформациях. Замкнутые задачи либо не рассматриваются, либо их решения ограничивается постановочной частью или имеют место значительные допущения.

Решение плоской и пространственной задачи теории пластичности в значительной степени усложняется, что естественно приводит к стремлению ее упрощения. Одним из основных моментов является замена пространственной задачи на плоскую, а плоской на одномерную. Вторым упрощающим моментом является то, что система уравнений теории пластичности решается не в замкнутом виде (напряжения, деформации, скорости деформации), а отдельно для напряженного и деформированного состояния металла. Как правило, решение в напряжениях не учитывает согласования с решениями в деформациях. И наоборот, деформации не согласовываются с полями напряжений. Решение замкнутых задач теории пластичности связан с большими математическими и вычислительными трудностями. Многие решения в теории пластичности, в частности, прикладной, ограничиваются рассмотрением либо напряженного, либо деформированного состояний. Если замкнутые решения и имеют место в литературе, то полученные зависимости по полям напряжений и деформаций не сопоставляются, не приводятся в соответствие.

Представляет интерес анализ методов решения задач теории пластичности с точки зрения замкнутости, т.е. когда задача теории пластичности решается как в напряжениях и деформациях одновременно.

1.3.1 Метод линий скольжения

Закон парности касательных напряжений определяет равенство касательных напряжений с одинаковыми индексами. Для плоского деформированного состояния они образуют два семейства кривых, траектории максимальных касательных напряжений, которые определяют процесс пластического формоизменения.

Для плоскодеформированного состояния имеет место следующая система уравнений теории пластичности [100]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - k \sin 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma + k \sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\varphi,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где, σ_x , σ_y , τ_{xy} - нормальные и касательные напряжения соответственно, k - сопротивление пластическому сдвигу, φ - угол поворота линий скольжения.

Подставляя (1.1) в уравнения равновесия $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$,

после интегрирования получим

$$\sigma - 2k\varphi = 0, \quad \sigma + 2k\varphi = 0.\tag{1.2}$$

Выражения (1.2) дают связь между гидростатическим давлением и сеткой линий скольжения и называются интегралами уравнений пластичности или уравнениями Генки.

Рассматривая перемещение вдоль линии скольжения можно получить соотношения между скоростями вида

$$dv_1 - v_2 d\varphi = 0, \quad dv_2 + v_1 d\varphi = 0, \quad (1.3)$$

где, v_1 - перемещение частицы, v_2 - скорость перемещения (течения).

Уравнения (1.3) называются уравнениями Гейрингера. Они позволяют проверить правильность построения сетки линий скольжения, обосновать для выбранной сетки граничные условия и т.д.

Сопоставляя выражения (1.2) и (1.3) просматривается соответствие между напряженным и деформированным состоянием, зависящих от положения линий скольжения φ .

Решение задачи с использованием метода линий скольжения можно было бы считать замкнутым, если было известно их положение в деформированном пространстве.

1.3.2 Энергетические методы решения задач теории пластичности

К энергетическим относятся следующие методы решения задач: баланса работ, вариационные, конечных элементов, граничных элементов, верхней и нижней оценки усилия и т.д.

В работе [104] представлен метод решения задачи пластичности базирующийся на энергетических и вариационных уравнениях. Рассматривается деформируемое тело объемом V ограниченное поверхностью S , на которой действуют поверхностные силы X_n, Y_n, Z_n .

Частицы поверхности имеют скорости перемещений v_x, v_y, v_z . Тогда мощность внешних сил для малых деформаций равна

$$N = \int_S (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS. \quad (1.4)$$

Используя уравнения равновесия для элементарного тетраэдра и преобразуя поверхностный интеграл в объемный по формуле Остроградского-Гаусса, можно найти:

$$N = \int_V \left[v_x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \dots + \sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] dV. \quad (1.5)$$

Так как компоненты тензора напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия без массовых и инерционных сил, получаем справедливое для любой сплошной среды тождественное соотношение:

$$\begin{aligned} \int_S (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS &= \int_V (\sigma_x \xi_x + \sigma_y \xi_y + \dots + \tau_{zx} \eta_{zx}) dV \\ \int_S (X_n u_x + Y_n u_y + Z_n u_z) dS &= \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если использовать уравнения теории пластической деформации, из этих выражений вытекают равенства, которые являются обобщением на случай пластического течения теоремы Клапейрона для упругой деформации [105]:

$$\begin{aligned} \int_S (X_n v_x + Y_n v_y + Z_n v_z) dS &= \int_V TH dV \\ \int_S (X_n u_x + Y_n u_y + Z_n u_z) dS &= \int_V \Pi dV, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где T, Γ, H - интенсивности соответственно касательных напряжений, деформаций сдвига, скоростей деформаций сдвига.

Согласно началу возможных перемещений (Лагранжа), сумма работ всех сил (внешних и внутренних) на возможных перемещениях около состояния равновесия равна нулю

$$\int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV - \int_S (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS = 0. \quad (1.8)$$

Из этого уравнения следует, что в некоторых местах поверхности S в силу кинематических ограничений вариации перемещений могут быть равны нулю.

Выразив напряжения в последнем уравнении через деформации, вариационное уравнение принципа возможных изменений деформированного состояния примет вид

$$\begin{aligned} \int_V g_1(\Gamma) \Gamma \delta \Gamma dV - \int_S (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS &= 0 \\ \int_V g_1(H) H \delta H dV - \int_S (X_n \delta v_x + Y_n \delta v_y + Z_n \delta v_z) dS &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Вариационные уравнения для пластических сред были сформулированы Л.М. Качановым [105] и А.А. Ильюшиным [106]. Вариационный принцип возможных изменений деформированного состояния для теории пластичности Мизеса рассматривал А.А. Марков [107].

Вариационные уравнения (1.9) принципа возможных изменений деформированного состояния являются энергетической формулировкой условия равновесия. При удовлетворении статических условий задачи варьирование производилось по деформированному состоянию. При этом

учитывалось условие несжимаемости, геометрические соотношения. Однако не были учтены кинематические условия задачи. Принцип возможных перемещений базируется на статических условиях задачи и не эквивалентен в полной мере всей системе уравнений теории пластичности. Поле напряжений не является действительным, и соответствует нижней оценке т.к. дает значение мощности меньше действительного. Не удовлетворяет минимуму функционала при варьировании по напряженному состоянию.

В силу равенства мощности вариации внешних сил и вариации внутренних сопротивлений на действительных скоростях получено следующее уравнение:

$$\int_V (\xi_x \delta\sigma_x + \xi_y \delta\sigma_y + \dots + \eta_{zx} \delta\tau_{zx}) dV - \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS = 0. \quad (1.10)$$

В этом уравнении имеется в виду, что на некоторой части поверхности внешние силы могут быть заданы и их вариации равны нулю. Выразив скорости деформации через напряжения, вариационное уравнение принципа возможных изменений напряженного состояния примет вид

$$\int_V g_2(\Gamma) \Gamma \delta\Gamma dV - \int_S (v_x \delta X_n + v_y \delta Y_n + v_z \delta Z_n) dS = 0$$

$$\int_V g_2(\Gamma) \Gamma \delta\Gamma dV - \int_S (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS = 0. \quad (1.11)$$

Данные вариационные уравнения свидетельствуют об экстремуме (минимуме) некоторых функционалов, которые Л.М. Качанов называет дополнительным рассеянием и дополнительной работой. Действительному напряженному состоянию соответствуют напряжения, для которых выполняются условия совместности деформаций, следовательно, последние

уравнения являются энергетической формулировкой условия неразрывности деформаций [108].

Стационарное состояние функционала (минимум) в классе статически возможных напряжений эквивалентно решению задачи интегрирования дифференциальных уравнений для теории пластичности. В этом случае статически возможное поле напряжений будет действительным, но поле скоростей действительным не будет.

Предложенный подход также не отвечает замкнутому решению задач теории пластичности, т.к. не удовлетворены в полной степени кинематические условия задачи. Варьирование функционала производится по напряженному состоянию, без учета варьирования деформированного состояния.

Представляет интерес решение, которое в должной степени удовлетворяет полной системе уравнений теории пластичности. Считается, что решение системы дифференциальных уравнений теории пластичности отвечает действительному напряженно-деформированному состоянию [109]. В данной работе доказано, что решение системы дифференциальных уравнений теории пластичности, при соответствующих граничных условиях эквивалентно решению вариационного уравнения на стационарность функционала принципа виртуальных скоростей и напряжений.

Следует еще раз подчеркнуть, что действительное напряженно-деформированное состояние среды определяется не принципом виртуальных скоростей, принципом виртуальных напряжений в отдельности, а совместным принципом виртуальных скоростей и напряжений. В самом деле, в первом случае имеем действительное поле скоростей, но виртуальное поле напряжений, во втором, действительное поле напряжений, но виртуальное поле скоростей.

Согласно работе [109] вариация функционала (главная линейная часть) имеет вид:

$$\int_V [T(H)\delta H + H(T)\delta T + \sigma(\xi)\delta\xi + \xi(\sigma)\delta\sigma + \rho(w_i - g_i)\delta v_i] dV - \int_{S_f} f_i^* \delta v_i dS - \int_{S_v} v_i^* \delta f_i dS - \int_{S_s} [v_i^* \delta f_i - v_{S_i}(f) \delta f_{\bar{\alpha}} - f_{\bar{\alpha}}(v) \delta v_{S_i}] dS = 0. \quad (1.12)$$

Принципиальным является то, что варьирование производится в последнем функционале, как по деформациям, так и по напряжениям. Если вынести знак вариации, то

$$\delta \left\{ \int_V \left[\int_0^H T(\eta) d\eta + \int_0^T H(\tau) d\tau + \int_0^\xi \sigma(\alpha) d\alpha + \int_0^\sigma \xi(\beta) d\beta + \rho(w_i - g_i) v_i \right] dV - \int_{S_f} f_i^* v_i dS - \int_{S_v} f_i v_i^* dS - \int_{S_s} \left[f_i v_i^* - \int_0^{f_{\bar{\alpha}}} v_{S_i}(f) df - \int_0^{v_{S_i}} f_{\bar{\alpha}}(v) dv \right] dS \right\} = 0. \quad (1.13)$$

Варьируемые величины отмечены штрихами. Последнее уравнение является вариационным принципом виртуальных скоростей и напряжений, содержание фигурной скобки является функционалом этого принципа [109].

Аналогичные подходы представлены в работе [110]. Автор показал, для того, чтобы кинематическое поле скоростей и статически возможное поле напряжений было действительным необходимо и достаточно, чтобы для любых виртуальных скоростей и напряжений выполнялось уравнение:

$$\iint_{S_\sigma} \bar{\sigma}^n \delta \bar{v} dS + \iint_{S_v} \delta \bar{\sigma}^n \bar{v}^* dS = \iiint_D [3(\sigma_0 \delta \xi_0 + \delta \sigma_0 \xi_0) + (T\delta H + \delta T H)] dV. \quad (1.14)$$

Мощности внешних и внутренних сил равны на возможных скоростях и напряжениях. Варьирование происходит по деформированному и напряженному состоянию, как и в работе [109]. Если используется условие несжимаемости, тогда

$$\iint_{S_\sigma} \bar{\sigma}^n \delta \bar{v} dS + \iint_{S_v} \delta \bar{\sigma}^n \bar{v} dS = \iiint_D [(T\delta H + \delta TH)] dV. \quad (1.15)$$

Подразумевается, что определены поля напряжений и деформаций. Эти поля находятся в соответствии друг с другом, через физические уравнения связи, удовлетворены граничные условия по напряжениям и деформациям. Следовательно, решение является замкнутым в соответствии с полной постановкой задачи (количество уравнений соответствует количеству неизвестных).

К недостаткам такого подхода следует отнести, во многих случаях, непреодолимые математические трудности решения и значительные объемы вычислительных операций.

1.3.3 Метод решения уравнений равновесия и условия пластичности

Одним из решений плоской задачи теории пластичности только в напряжениях является решение Прандтля [111]. Схема решения следующая. Выводится обобщенное дифференциальное уравнение равновесия, где разрешающей функцией является касательное напряжение τ_{xy} . После подстановки значения в уравнения равновесия, находятся нормальные напряжения σ_x и σ_y .

Как показывает анализ литературных данных, в теории пластичности существуют решения обобщенного уравнения равновесия [98], [111], [112]:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (1.16)$$

В работе [111] представлено упрощенное решение уравнения (1.16), когда касательное напряжение принималось функцией только одной координаты y , а сопротивление пластическому сдвигу величиной постоянной, тогда $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} = 0$. В этом случае: $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0$. Решение имеет вид :

$$\tau_{xy} = C_1 + C_2 \cdot y.$$

Подставляя значение произвольных функций, имеем выражения для определения нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{2\tau_k}{h} \cdot x + 2 \cdot \sqrt{k^2 - \frac{4\tau_k^2}{h^2} \cdot y^2} + C; \quad \sigma_y = -\frac{2\tau_k}{h} x + C; \quad \tau_{xy} = \frac{2 \cdot \tau_k}{h} \cdot y. \quad (1.17)$$

Смирнов решал однородные гиперболические уравнения в частных производных второго порядка методом разделения переменных [98]. При этом пренебрегалось влиянием касательного напряжения находящегося под радикалом (1.16). С физической точки зрения это упрощение исключало из рассмотрения неоднородность пластической деформации. Не позволяет реально описать зоны перехода на контакте смежных участков. В этом случае смешанная вторая производная равна нулю, т.к. она берется от постоянной величины. Дифференциальное уравнение принимает вид (1.18). Его решение дано в работе [113]. Смирнов адаптировал его к механике деформированного твердого тела [98] (1.7 – 1.8).

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0. \quad (1.18)$$

Предполагалось, что искомая функция τ_{xy} представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , а вторая от y

$$\tau_{xy} = \Phi(x)\varphi(y) = \Phi_\varphi. \quad (1.19)$$

Выражения для Φ и φ имеют следующий вид

$$\Phi = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}; \quad \varphi = Ae^{my} + Be^{-my}. \quad (1.20)$$

Подставляя выражения (1.20) в уравнение (1.19) получим

$$\tau_{xy} = (c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx})(Ae^{my} + Be^{-my}). \quad (1.21)$$

С учетом выражения для τ_{xy} после интегрирования находятся нормальные напряжения (1.22)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx})(Ae^{my} - Be^{-my}) + f(x) \\ \sigma_x &= -(c_1 e^{mx} - c_2 e^{-mx})(Ae^{my} - Be^{-my}) + f_1(y). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Такой подход позволил перейти от решения линейной задачи к плоской. Однако, упрощение условия пластичности не позволяет учесть влияние касательных напряжений на процессы пластического формоизменения.

Аналитическое решение задачи с помощью сплайнов представлено исследованиями [112]. Процесс пластического формоизменения разбивался на отдельные участки, в пределах которых, отношение τ_{xy}/k принимается постоянным. При такой постановке упрощалась правая часть уравнения (1.16).

Анализ литературных данных показал, что упрощение решений за счет касательных напряжений, фактически исключает возможность учесть неоднородность пластического течения, ограничивает возможности реальной

оценки напряженно–деформированного состояния пластической среды. Это не позволяет в дальнейшем развивать метод.

1.3.4 Метод гармонических функций

В работах [114]-[121] предложено аналитическое решение плоской задачи теории пластичности. Используются начальные подходы Прандтля для определения касательных напряжений τ_{xy} , уравнения (1.16). В этом случае отсутствовали ограничения предыдущих авторов [98], [111]. Так как дифференциальное уравнение (1.16) нелинейное, использовалась линеаризация за счет введения в рассмотрение тригонометрической подстановки. В предложенном решении [114]-[121] автору пришлось перейти от модели жестко пластической среды к модели упрочняющейся. Особенностью такой среды является ее зависимость от пространственного фактора, что определило сопротивление деформации сдвигу k , как переменную зависящую от координат очага деформации. Такой подход оправдал себя как для напряжений, так и для деформаций. Наложённые на искомые функции ограничения показали, что они определяются уравнениями Лапласа и являются гармоническими. Это одна из особенностей решения, которая получила широкое распространение в теории упругости, но не пластичности. Следующей особенностью решения является то, что замкнутое решение позволяет описать поля напряжений и деформаций одинаковыми блоками координатных функций.

Постановка задачи теории пластичности включает в себя шесть уравнений (два дифференциальных уравнения равновесия, условие пластичности Мизеса, физическое уравнение связи напряжений и скоростей

деформаций, условие несжимаемости и уравнение неразрывности скоростей деформаций)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot \kappa^2, \\ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F, \quad \xi_x + \xi_y = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Граничные условия заданы в напряжениях и деформациях:

$$\begin{aligned} \tau_n = -k \cdot \sin[A\Phi - 2 \cdot \alpha], \\ \dot{\gamma}_n = \beta \cdot \sin[B\Phi - 2 \cdot \alpha]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = H_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi \\ \sigma_x = C_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C \\ \sigma_y = -C_\sigma \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C \end{aligned} \quad (1.25)$$

при $\theta'_x = -A\Phi_y$, $\theta'_y = A\Phi_x$, $\theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$,

а компоненты тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned} \xi_x = -\xi_y = \beta \cdot \cos B\Phi = H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \cos B\Phi, \\ \gamma_{xy} = 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \sin B\Phi, \end{aligned} \quad (1.26)$$

при $\theta''_x = -B\Phi_y$, $\theta''_y = B\Phi_x$, $\theta''_{xx} + \theta''_{yy} = 0$, $B\Phi_{xx} + B\Phi_{yy} = 0$,

где $A\Phi$ - неизвестная координатная гармоническая функция для напряженного состояния; $B\Phi$ - неизвестная координатная гармоническая функция для деформированного состояния; θ' - вложенная координатная

гармоническая функция; C_σ - функция координат, определяемая граничными и очевидными условиями; β - коэффициент, учитывающий влияние главного напряжения, α - угол на контактной поверхности определяемый геометрией, и являющейся в общем случае величиной переменной.

Компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций определяются одинаковыми гармоническими функциями координат θ и Φ . Таким образом, было получено решение замкнутой задачи теории пластичности и установлена связь, в аналитическом виде, между полями напряжений и полями скоростей деформаций.

Решение дано в декартовой системе координат x, y . Его затруднительно использовать при изучении напряженно–деформированного состояния тел вращения где используются цилиндрические координаты.

1.4 Выводы

На основании проведенного обзора литературы можно сделать следующие выводы:

1. В реальных процессах обработки материалов всегда присутствует неоднородность пластического течения, характеризуемая одинаковыми технологическими параметрами, как для напряженного, так и деформируемого состояний.

2. В литературе, известны подходы, постановки и решения замкнутой задачи теории пластичности, учитывающие как статические условия задачи, так и кинематические.

3. Экспериментальные данные показывают, что имеет место соответствие напряжений и деформаций с позиции неравномерности

пластического формоизменения. Максимальная неравномерность напряжений и деформаций наблюдается в тонкой заготовке по длине очага деформации, минимальная по высоте; минимальная неравномерность - в толстой по длине очага деформации и максимальная по высоте.

4. Неравномерность пластической деформации определяется значительными сдвигами и касательными напряжениями.

5. Соответствие напряженного и деформированного состояний при пластической обработке вызывает необходимость показать и исследовать аналогичное соответствие в теоретических разработках.

6. Метод гармонических функций в теории пластичности позволяет учесть влияния неоднородности пластического формоизменения на силовые и кинематические параметры процесса, ставить и решать задачи в замкнутом виде.

7. Замкнутое решение задачи теории пластичности методом гармонических функций, для случаев деформационной обработки пустотелых изделий цилиндрической формы в условиях осесимметричного нагружения, отсутствует, что не позволяет получить достоверный результат при деформационной обработке.

РАЗДЕЛ 2

МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ПОЛЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Исследование пластического формоизменения полых тел вращения представляет собой значительный практический интерес. Это обусловлено тем, что данные изделия широко распространены в конструкциях энергетических, транспортных и технологических машин.

При проектировании новых технологий изготовления полых тел вращения методами пластической деформации необходимо знать напряженно-деформированное состояние обрабатываемой заготовки. При этом решение данной задачи имеет большую практическую значимость, если она позволит определить напряжения и деформации в заготовках с учетом неравномерности пластического формоизменения, что в итоге даст возможность более эффективно назначать энергосиловые и кинематические параметры пластической обработки заготовок.

Многие экспериментальные исследования процесса осадки полых цилиндрических деталей имеют прикладной производственный характер для разработки технологического процесса осадки конкретного изделия, однако не приводятся обобщения и влияния различных технологических параметров условия реализации операции. Исследования теоретического характера основаны на ряде существенных допущений, сводящих анализ процесса к ряду упрощенных схем, которые не позволяют оценить реальное неоднородное напряженно-деформированное состояние материала в процессе нагружения.

Собственно говоря, это и обуславливает актуальность дальнейших теоретических и практических исследований, для получения научно-

обоснованных методик проектирования, которые учитывали бы комплекс технологических параметров влияющих на силовые и кинематические характеристики протекания процесса, с целью увеличения надежности и достоверности результата моделирования процесса пластического формоизменения.

Исследованием формоизменения полых тел вращения в теории пластичности и упругости занимались многие известные ученые, а именно: Колмагоров В.А., Соколовский В.В., Унксов Е.П., Малинин Н.Н., Тарновский И.Я., Сторожев М.В., Попов Е.А., Качанов Л.М., Ильюшин А.А., Надаи А. [91], [92], [100], [105], [109], [122]-[131] и многие другие.

Методы исследования, которыми они пользовались, условно можно разделить на численные и аналитические.

К численным методам можно отнести следующие: проекционные и сеточные методы, метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод упругих решений, метод гидродинамических приближений, метод дополнительных напряжений.

К аналитическим методам относят: метод сопротивления материалов пластическим деформациям, метод верхней оценки, визиопластический метод, метод баланса работ и другие.

Наряду с численными методами, аналитические методы решения задач теории пластичности имеют ряд неоспоримых преимуществ, такие как:

- доступность модели, что позволяет использовать ее в любых условиях;

- быстроедействие математической модели, что на современном этапе является одним из определяющих факторов при решении задач оперативного управления реальными процессами пластического формоизменения (прокатка, ковка).

Однако, решение задач теории пластичности аналитическим путем приводят к ряду математических, часто непреодолимых трудностей, в связи с этим, задачу стремятся упростить, и решение производят с рядом допущений.

Задачу решают только в напряжениях или только в деформациях. Замкнутого решения, когда задача решается и в напряжениях и в деформациях не встречается.

При этом, поля напряжений и деформаций не согласовываются, хотя во многих случаях, это имеет принципиальное значение, т.к. такое согласование позволит определить реальную модель пластической среды, следовательно учесть достаточно большое количество факторов влияющих на процесс пластического формоизменения.

Учесть выше изложенные недостатки при решении задач теории пластичности в аналитическом виде возможно с применением метода гармонических функций, который позволяет получить замкнутое аналитическое решение для плоской задачи в элементарных функциях.

2.1 Метод теоретического исследования напряженно-деформированного состояния тел с использованием гармонических функций

Как было показано выше, представляет интерес решение замкнутой задачи теории пластичности в аналитическом виде. Это позволит расширить возможности расчета и для конкретной марки стали определить напряженное состояние металла не только в относительных, но и в абсолютных величинах, в каждой точке очага деформации.

Такие решения могут быть реализованы при использовании метода гармонических функций. Особенностью данного решения является то, что аналитическое решение удалось замкнуть для плоской задачи, в условиях

неоднородного пластического течения. Постановка задачи рассмотрена в разделе 1 выражениями (1.23)-(1.24).

В постановке задачи записана система уравнений теории пластичности в декартовых координатах. Имеем два дифференциальных уравнения равновесия; условие пластичности Мизеса для плоской задачи; физические уравнения связи напряжений и скоростей деформаций; условие несжимаемости; уравнение неразрывности скоростей деформаций которые заменяют геометрические соотношения.

Граничные условия заданы в напряжениях и деформациях [122], [127], [136]. Они задают тригонометрический характер распределения контактных напряжений на наклонной площадке. Первые три уравнения системы (1.23) можно привести к обобщенному уравнению равновесия вида (1.5) [92], [111], [122], [123], [126], [127], [137].

Для принятия тригонометрического характера распределения контактных напряжений вида (1.24) существуют физические и математические предпосылки. На рис. 1.1 представлены экспериментальные исследования контактных напряжений при прокатке [89], [92], которые определяют тригонометрический характер распределения.

Результат теоретических исследований реальных контактных напряжений представлен на рис. 2.1 [89]. Для этого очаг деформации по длине разбивается на отдельные зоны, в пределах каждой используется соответствующий закон трения. В начале и конце очага деформации закон Амонтона, в средней части – закон Зибеля, а на переходном участке принят линейный закон.

Если соединить кривые непрерывной линией на составной эпюре касательных и нормальных напряжений, то получим часть кривой напоминающую синусоиду и косинусоиду, распределение фактически носит тригонометрический характер.

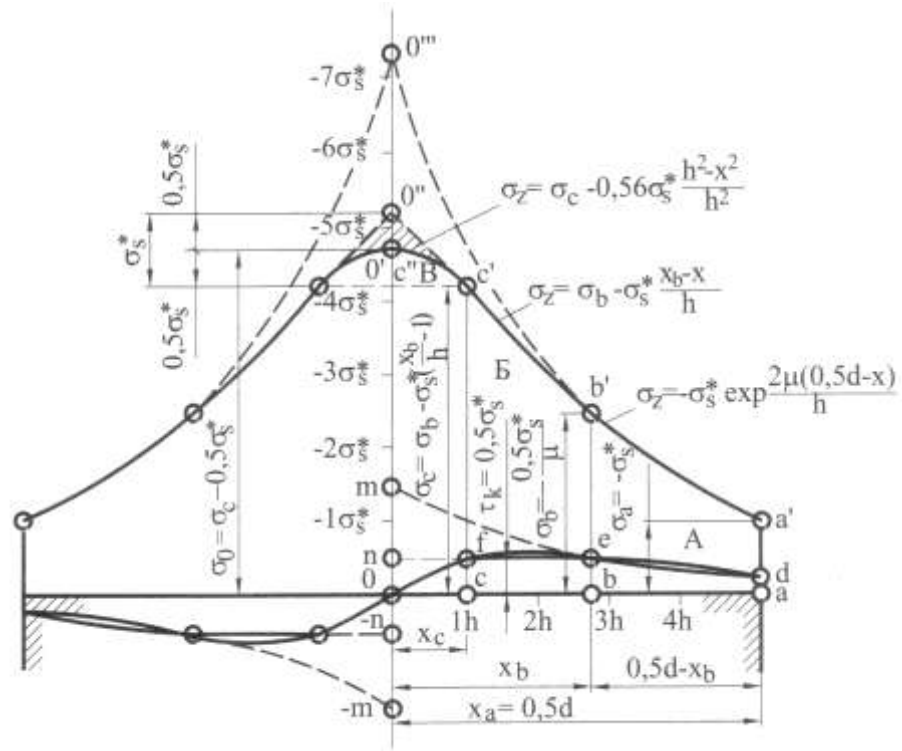


Рисунок 2.1 – Распределение контактных напряжений [93].

Математической предпосылкой является возможность линеаризации нелинейного уравнения (1.16), функцией вида [114]-[121]

$$\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi. \quad (2.1)$$

При подстановке (2.1) в (1.16) избавляемся от радикала. Касательные напряжения τ_{xy} и k связаны тригонометрической зависимостью (2.1) в каждой точке очага деформации. Также принимается, что контактное касательное напряжение τ_n отличается от компоненты тензора напряжений τ_{xy} только геометрическим параметром α , который не является элементом решения задачи. Представляет интерес возможность решения уравнения (1.16) в аналитическом виде.

Сопротивление пластической деформации рассматривается как переменная величина и является функцией координат очага деформации

[114]-[121], [127]. Для линейного уравнения (2.1) используется фундаментальная подстановка в следующем виде:

$$k = H_{\sigma} \cdot \exp \theta', \quad (2.2)$$

где H_{σ} - функция координат, определяющая напряженное состояние среды; θ' - неизвестная функция координат, зависит от распределения сопротивления пластической деформации на сдвиг в зоне формоизменения.

При решении задачи значение k используется как переменная математическая величина, зависящая от координат очага деформации. Над ней можно производить математические операции, включая дифференцирование и интегрирование.

С точки зрения свойств деформированной среды, это среда упрочняющаяся, реагирующая на температуру, деформацию, скорость деформации, химический состав и пространственный фактор очага деформации.

Подставляя (2.1) и (2.2) в обобщенное уравнение равновесия (1.16), имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{I}_{\sigma} \cdot \left[\theta'_{\delta\delta} + (\theta'_x + A\Phi_y)^2 - \theta'_{yy} - (\theta'_y - A\Phi_x)^2 \right] + (H_{\sigma})_{xx} + \right. \\ & + 2 \cdot (\dot{I}_{\sigma})_{\delta} \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - (H_{\sigma})_{yy} - 2 \cdot (H_{\sigma})_y \cdot (\theta'_y - A\Phi_x) \left. \right\} \cdot \text{Sin}A\Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_{\sigma} \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) \cdot (\theta'_x + A\Phi_y) - 2 \cdot (H_{\sigma})_y \cdot (A\Phi_y + \theta'_x) + \right. \\ & \left. + 2 \cdot (H_{\sigma})_x \cdot (A\Phi_x - \theta'_y) + H_{\sigma} \cdot (A\Phi_{xx} - A\Phi_{yy}) \right\} \cdot \text{Cos}A\Phi = \\ & = -2 \cdot H_{\sigma} \cdot A\Phi_{xy} \cdot \text{Sin}A\Phi + \left[2 \cdot (H_{\sigma})_{xy} + 2 \cdot H_{\sigma} \cdot \theta'_{xy} \right] \cdot \text{Cos}A\Phi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Операторы в фигурных скобках при тригонометрических функциях содержат одинаковые выражения $(\theta'_x + A\Phi_y)$ и $(\theta'_y - A\Phi_x)$. Приравнивая эти выражения нулю, получаем соотношения Коши-Римана

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x. \quad (2.4)$$

Определяя вторые производные от функций θ'_x и θ'_y , получим соотношения

$$\theta''_{xx} = -A\Phi_{yx}, \quad \theta''_{yy} = A\Phi_{xy}, \quad \theta''_{xy} = A\Phi_{yy} = -A\Phi_{xx}. \quad (2.5)$$

Действительно, подставляя (2.4) и (2.5) в (2.3), имеем упрощения:

$$\begin{aligned} (H_\sigma)_{xx} - (H_\sigma)_{yy} &= 0, \\ (H_\sigma)_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если значение $H_\sigma = C_\sigma$, т. е. равно постоянной величине, уравнение (2.3) превращается в тождество. Если нет, то решение для функции H_σ определяется дифференциальными уравнениями (2.6).

Последнее выражение превращает систему (2.6) в тождество при $C'_\sigma = C''_\sigma$ [138], т.е.

$$H_\sigma = C'_\sigma(x^2 + C'_{\sigma 2} \cdot x + C'_{\sigma 3}) + C'_\sigma(y^2 + C''_{\sigma 2} \cdot y + C''_{\sigma 3}) + C_\sigma. \quad (2.7)$$

При равенстве $C'_\sigma = 0$, переменная $H_\sigma = C_\sigma$. Функции θ' и АФ определены решением задачи и связаны соотношениями (2.4), которые

показывают их принадлежность к определенному классу функций. Они являются гармоническими и удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е.

$$\theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0, \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0. \quad (2.8)$$

Неизвестные зависимости θ' и $A\Phi$ определены уравнениями (2.8) и соотношениями (2.4).

Решением обобщенного уравнения равновесия (1.16) является функциональная зависимость вида:

$$\tau_{xy} = H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi, \quad (2.9)$$

$$\text{при } \theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x, \quad \theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0, \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0.$$

Подставляя (2.9) в уравнения равновесия системы (1.23), после дифференцирования и интегрирования, получим нормальные составляющие тензора напряжений при упрощении $H_{\sigma} = C_{\sigma}$ [138]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(y) + C, \\ \sigma_y &= -C_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + \sigma_0 + f(x) + C. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя компоненты тензора напряжений (2.10) в уравнения связи записанных в системе (1.23), получим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \pm \operatorname{ctg} A\Phi, \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = \pm \operatorname{ctg} B\Phi. \quad (2.11)$$

С учетом того, что $\xi_x = -\xi_y$, имеем связь сдвиговых и линейных скоростей деформаций

$$\gamma_{xy} = \pm 2 \cdot \operatorname{tg} \mathbf{B}\Phi \cdot \xi_x \quad \text{или} \quad \gamma_{xy} = \mp 2 \cdot \operatorname{tg} \mathbf{B}\Phi \cdot \xi_y. \quad (2.12)$$

Таким образом, уравнение совместности скоростей деформаций принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y \partial x} \xi_x \cdot \operatorname{tg} \mathbf{B}\Phi. \quad (2.13)$$

В данном уравнении присутствует только одна неизвестная функция ξ_x . Дифференциальные уравнения (1.16) и (2.13) относятся к одному классу уравнений. Это свидетельствует о соответствии математических моделей напряженного и деформированного состояний деформируемого тела, что в свою очередь, позволяет применять одинаковые подходы как при решении задачи в напряжениях, так и в скоростях деформаций. Для компонентов тензора скоростей деформаций можно записать

$$\begin{aligned} \xi_x = -\xi_y &= \beta \cdot \operatorname{Cos} \mathbf{B}\Phi = H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \operatorname{Cos} \mathbf{B}\Phi, \\ \gamma_{xy} &= 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \operatorname{Sin} \mathbf{B}\Phi, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где H_ξ - функция координат, определяющая деформированное состояние среды; θ'' - неизвестная функция координат, определяющая распределение интенсивности скоростей сдвига в зоне формоизменения.

Подставляя зависимости (2.14) в дифференциальное уравнение (2.13), получим:

$$\begin{aligned} &\{H_\xi \cdot [-\theta''_{xx} - (\theta''_x + \mathbf{B}\Phi_y)^2 + \theta''_{yy} + (\theta''_y - \mathbf{B}\Phi_x)^2] - (H_\xi)_{xx} - 2 \cdot \\ &\cdot (H_\xi)_x \cdot (\theta''_x + \mathbf{B}\Phi_y) + (H_\xi)_{yy} + 2 \cdot (H_\xi)_y \cdot (\theta''_y - \mathbf{B}\Phi_x)\} \cdot \operatorname{Cos} \mathbf{B}\Phi + \\ &\{2 \cdot H_\xi \cdot (\mathbf{B}\Phi_x - \theta''_y) \cdot (\theta''_x + \mathbf{B}\Phi_y) - 2 \cdot (H_\xi)_y \cdot (\mathbf{B}\Phi_y + \theta''_x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot (H_\xi)_x \cdot (ВФ_x - \theta_y'') + H_\xi \cdot (ВФ_{xx} - ВФ_{yy}') \cdot \sin ВФ = \\
& = 2 \cdot H_\xi \cdot ВФ_{xy} \cdot \cos ВФ + [2 \cdot (H_\xi)_{xy} + 2 \cdot H_\xi \cdot \theta_{xy}''] \cdot \sin ВФ.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В данном уравнении проведены такие же упрощения, как и в (2.3). Операторы при тригонометрических функциях содержат одинаковые выражения $(\theta_x'' + ВФ_y')$ и $(\theta_y'' - ВФ_x')$. Принимая их равными нулю, упрощаем (2.15) и получаем соотношения Коши-Римана между неизвестными функциями, т.е. $\theta_x'' = -ВФ_y'$, $\theta_y'' = ВФ_x'$.

Определяя вторые производные для функции θ_x'' получим

$$\theta_{xx}'' = -ВФ_{yx}', \theta_{yy}'' = ВФ_{xy}', \theta_{xy}'' = ВФ_{yy}' = -ВФ_{xx}'. \tag{2.16}$$

Упрощения (2.15) приведет к дифференциальным уравнениям вида:
 $(H_\xi)_{xx} - (H_\xi)_{yy} = 0$, $(H_\xi)_{xy} = 0$.

Выражение $H_\xi = C_\xi'(x^2 + C_{\xi 2}' \cdot x + C_{\xi 3}') + C_\xi'(y^2 + C_{\xi 2}'' \cdot y + C_{\xi 3}'') + C_\xi$, удовлетворяет приведенной выше системе уравнений при равенстве $C_\xi' = 0$. Тогда $H_\xi = C_\xi$.

Функции θ'' и ВФ имеют ограничения (2.4), определяющие их класс. Они, как и функции θ' , АФ, удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е.

$$\theta_{xx}'' + \theta_{yy}'' = 0, ВФ_{xx} + ВФ_{yy} = 0. \tag{2.17}$$

Последние уравнения позволяют определить вид функций для деформированного состояния среды.

Таким образом, компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}
\xi_x &= -\xi_y = \beta \cdot \cos ВФ = H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \cos ВФ, \\
\gamma_{xy} &= 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \sin ВФ,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

при $\theta_x'' = -\nabla\Phi_y$, $\theta_y'' = \nabla\Phi_x$, $\theta_{xx}'' + \theta_{yy}'' = 0$, $\nabla\Phi_{xx} + \nabla\Phi_{yy} = 0$.

Компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций определяются одинаковыми гармоническими функциями координат θ и Φ .

Таким образом, в работах [114]-[121] было получено решение замкнутой задачи теории пластичности в аналитическом виде и установлена связь между полями напряжений и полями скоростей деформаций.

Представленные решения удовлетворяют системе уравнений для плоской задачи теории пластичности. Математически показано, что такое решение существует.

Для оценки полученного результата по выражениям (2.9) и (2.10) были подсчитаны компоненты тензора напряжений на контакте. На рис. 2.2 и 2.3 представлены распределения нормальных и касательных напряжений на контакте образца при различных значениях фактора формы $\frac{l}{h}$ и коэффициента трения f , которые были ранее выбраны, как определяющие при изучении неоднородности напряженно – деформированного состояния металла.

Анализируя приведенные графики можно сделать вывод о том, что с увеличением коэффициента трения и фактора формы контактные касательные и нормальные напряжения так же растут кроме того, возрастает и неравномерность распределения напряжений по длине очага деформации, что подтверждает ранее приведенные результаты.

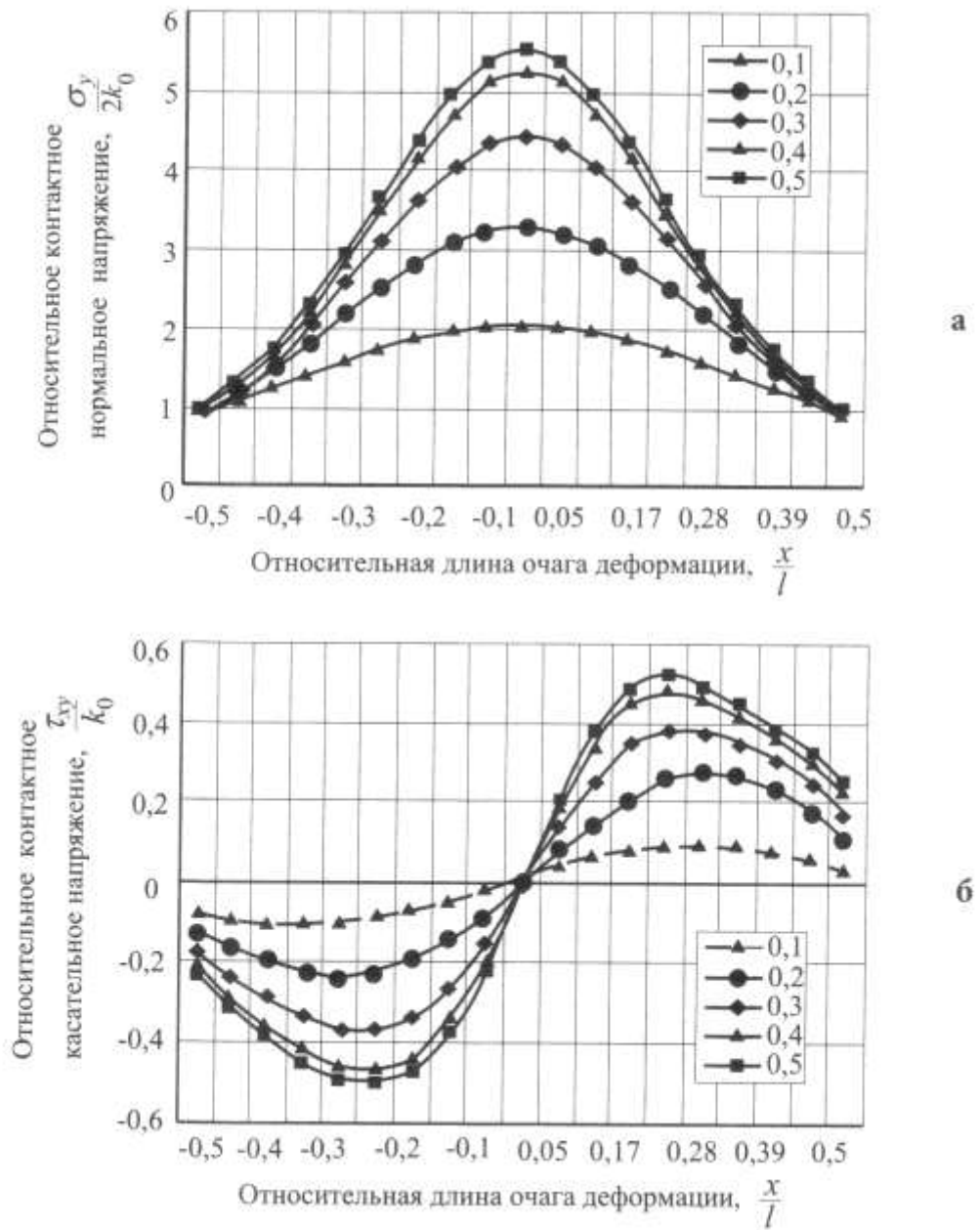


Рисунок 2.2 – Распределение нормальных (а) и касательных (б) напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $\frac{l}{h} = 8$, $f = 0,1 \dots 0,5$ [145].

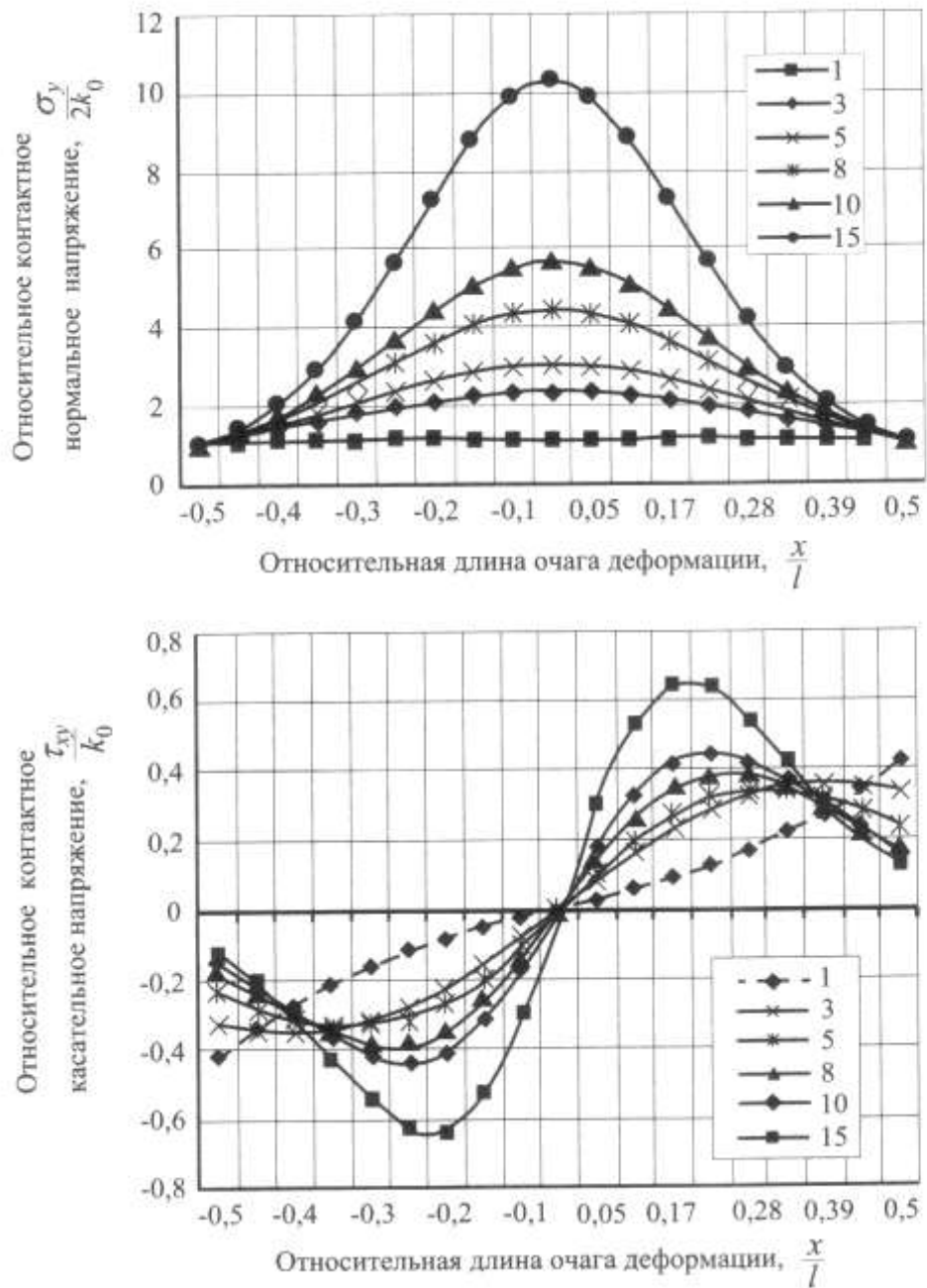


Рисунок 2.3 – Распределение нормальных (а) и касательных (б) напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $f=0,3$, $\frac{l}{h}=1...15$ [145].

Место максимального значения нормальных напряжений соответствует переходу через ноль касательных напряжений. Можно утверждать о правомерности выбора предложенных математической и физической модели

процесса пластического формоизменения, а также использовании гармонических функций при описании полей напряжений. Гармонические функции нашли широкое распространение в задачах теории упругости, а предложенная математическая модель (2.9), (2.10) применяется в теории пластичности, которую можно использовать при расчетах напряженно - деформированного состояния металла различных процессов пластического формоизменения, изменяя граничные условия.

Полученные выше распределения контактных напряжений описываются едиными аналитическими зависимостями. При этом, нет необходимости разбивать очаг деформации на зоны с разными законами контактного трения, как это показано на рис. 1.1.

В итоге следует отметить, что представленные результаты качественно и количественно отражают общие закономерности распределения полей напряжений по всему очагу деформации, однако не характерными являются выпадения кривых при соотношениях $\frac{l}{h} = 15$.

Предложенная задача может быть решена и в скоростях деформаций. При этом поля напряжений и деформаций имеют одинаковые координатные функции, которые позволяют связать силовые и деформационные параметры процессы пластического формоизменения.

2.2 Метод экспериментального исследования течения металла при симметричном осевом нагружении полых тел вращения

В практике проведения экспериментальных исследований по изучению пластической деформации металла широко распространены геометрические методы. В основу этих методов положено измерение геометрических

размеров элементов тела до и после деформации [132]. Существуют следующие виды геометрических методов: координатная сетка, слоистые модели, муар, зеркально - оптический и т.д. Их различие состоит в способах нанесения меток, регистрации первичных экспериментальных данных, особенностями математической обработки и интерпретации полученной информации.

Наиболее известными из геометрических методов экспериментального анализа деформаций является метод делительных, или координатных сеток. Суть этого метода состоит в том, что на исследуемую поверхность наносят систему точек, линий или каких – либо других меток, изменение взаимного расположения и конфигурации которых позволяет определить перемещения, деформации, скорости и т.п. Наибольшее распространение получили сетки, состоящие из взаимно перпендикулярных систем параллельных линий с равным шагом, что связано с достаточно простотой их получения и обработкой первичных экспериментальных данных. Метод делительных сеток дает дискретную информацию, база его задается расстоянием между соседними линиями – шагом сетки. В результате измерений можно определить некоторые средние значения перемещений и деформаций, поэтому для увеличения чувствительности метода желательно уменьшить шаг сетки.

Еще одним методом исследования процессов обработки металлов давлением является метод муаровых полос, который отличается наглядностью, сравнительной простотой и точностью. Суть метода состоит в том, что при наложении двух систем достаточно плотных линий образуются картины квазиинтерференционных полос, которые характеризуют несовпадение в шаге и (или) направлении этих линий. В отличие от метода координатных сеток здесь происходит качественное изменение формы первичной информации: вместо дискретных значений измеряемых величин имеются их непрерывные поля [133]-[135].

Непосредственно для экспериментального исследования течения металла при симметричном осевом нагружении полых тел вращения представленного в данной работе был выбран метод делительных сеток.

Для подтверждения достоверности полученных теоретических результатов был поставлен и проведен лабораторный эксперимент по изучению течения металла при осевом деформировании полый осесимметричной конструкции. В качестве материала образцов применялся технический свинец, так как данный материал является легко деформируемым при нормальных условиях, и в некоторой степени ведет себя подобно многим конструкционным сталям при их горячей пластической обработке.

Образцы с размерами наружного и внутреннего диаметра 100 мм и 50 мм соответственно и высотой 25 мм отливались поштучно в металлическую форму повторяющую контур образцов и позволяющую сделать припуск под механическую обработку (рис. 2.4).



Рисунок 2.4. – Форма для отливки образцов.

Таким образом, заготовка под испытуемый образец получалась с размерами наружного и внутреннего диаметра 105 мм и 45 мм соответственно и высотой 28 мм. Механическая обработка по снятию припуска производилась на токарно–винторезном станке модели 1А62.

Для нанесения делительной сетки на радиальной поверхности, от образца в осевом направлении вырезался сегмент. Вырезание сегмента производилось пилой маятникового типа с толщиной пропила 1 мм. Зачистка поверхности для нанесение сетки производилась на универсальном лабораторном шлифовальном станке с зерном шлифовальной бумаги 40 и 150 ед. (рис. 2.5).



Рисунок 2.5 – Вырезанный и зачищенный сегмент образца.

Нанесение делительной сетки с размерами 1x1 мм происходило при помощи эталонной разметочной пластины с шагом выступов вершин 1 мм, методом отпечатывания вершин на поверхности сегмента (рис. 2.6).



Рисунок 2.6 – Эталонная разметочная пластина.

Размеченный сегмент при помощи сплава Вуда, спаивался с основной частью образца, после чего производилась окончательная механическая обработка образца в сборе (рис. 2.7, 2.8).



Рисунок 2.7 – Сегмент с нанесенной делительной сеткой.



Рисунок. 2.8 – Образец в сборе.

Деформация образцов производилась при помощи экспериментальной пресс-формы на лабораторном гидравлическом прессе усилием 100 тс. Эксперимент состоял из шести этапов:

1. Свободная деформация образца между плоскими параллельными шероховатыми плитами в осевом направлении.
2. Деформация образца в осевом направлении с полным ограничением течения металла по наружному диаметру.
3. Деформация образца в осевом направлении с полным ограничением течения металла по внутреннему диаметру.
4. Деформация образца в осевом направлении с частичным ограничением течения металла по наружному диаметру.
5. Деформация образца в осевом направлении с частичным ограничением течения металла по внутреннему диаметру.

6. Деформация образца в осевом направлении с частичным ограничением течения металла и по наружному и по внутреннему диаметрам.

Результаты эксперимента были использованы для определения граничных условий пластического формоизменения и приведены в последующих главах диссертационной работы.

2.3 Метод конечных элементов

Метод конечных элементов получил широкое распространение при решении прикладных задач теории пластичности и упругости. Идея МКЭ заключается в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой величины в конечном числе точек рассматриваемых элементов.

При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

- область определения исследуемой величины разбивается на конечное число элементов, имеющих общие узловые точки и в совокупности аппроксимирующих форму области;

- в рассматриваемой области фиксируются узлы;

- используя значения исследуемой непрерывной величины в узловых точках и аппроксимирующую функцию, определяются значения величины внутри области.

Аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Полином, связанный с данным элементом, называется функцией элемента.

Таким образом, при использовании МКЭ решение краевой задачи для заданной области ищется в виде набора функций, определённых на конечных элементах [139].

Наилучшая в своей области программа, основанная на методе конечных элементов, это программа ANSYS/LS-DYNA. Программа предназначена для расчетов быстротекущих и динамических процессов в задачах физики и процессов, имеющих значительную нелинейность, и идеально подходит для решения задач теории пластичности, поскольку течение пластической деформации обладает большой нелинейностью и быстротечны.

ANSYS/LS-DYNA позволяет моделировать практически все процессы пластического формоизменения. При этом в отличие от теоретических расчетов, где есть существенные ограничения по размерам и форме заготовки, здесь практически нет ограничений по размерам и формам заготовок. Связано это с тем, что при построении конечно-элементной модели происходит разбиение заготовки любой сложности на элементарные ячейки (треугольники, четырехугольники, пирамиды и др.). Таким образом, значительно расширяя области применения этой программы

Моделирование процессов пластического формоизменения в программе ANSYS/LS-DYNA позволяет определить все необходимые параметры: напряженно-деформированное состояние заготовки и инструмента в любой точке и в любой момент времени, а также энергетические параметры процесса, величины усилий и моментов, нормальных и касательных сил, контактные параметры процесса и много другое, что необходимо при разработке оптимального технологического процесса и для глубокого анализа и понимания процессов, происходящих в заготовке при пластическом течении материала [140].

Пакет ANSYS/LS-DYNA объединяет в себе расчетный модуль LS-DYNA со средствами подготовки исходных данных и обработки результатов в пакете ANSYS. Соответственно, не выходя из сессии ANSYS, можно создавать конечно-элементную модель в препроцессоре ANSYS, получать решение по явной схеме интегрирования, используя LS-DYNA, и просматривать результаты с помощью стандартных постпроцессоров ANSYS.

2.4 Выводы

1. Неравномерность напряженно–деформированного состояния металла на практике определяется одинаковыми технологическими параметрами, что свидетельствует об их соответствии. Этому соответствию, в теоретическом плане, показана замкнутая постановка и решение задачи теории пластичности, которая может быть реализована с помощью метода гармонических функций.

2. Исследования состояния металла в условиях неравномерной деформации позволяют определить характер течения пластической среды в двухзонном и однозонном очаге деформации, определится с граничными условиями на контакте.

3. Метод делительных сеток позволяет качественно и количественно оценить влияние технологических параметров процесса на неравномерность пластического формоизменения в очаге деформации.

4. Изложенный метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций предусматривает решение прикладных задач в декартовых координатах. Для решения осесимметричной задачи теории пластичности в цилиндрических координатах данный метод не

был разработан. Представляет научный интерес разработки нового подхода решения осесимметричной задачи теории пластичности в замкнутом виде с учетом неравномерности пластического формоизменения методом гармонических функций.

5. Разработана методика экспериментального исследования течения металла при симметричном осевом нагружении полых тел вращения.

РАЗДЕЛ 3

ПОСТАНОВКА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Ранее было показано, что для правильной оценки напряженно-деформированного состояния обрабатываемого металла, необходимо в полной мере учитывать неоднородность пластического течения (которая проявляется в сдвигах и касательных напряжениях) в объеме очага деформации, что предполагает решение плоской или пространственной задачи теории пластичности. Метод гармонических функций позволяет решать плоскую задачу аналитическим образом в декартовых координатах. Однако решение осесимметричной задачи методом гармонических функций отсутствует, что не позволяет дать реальную оценку напряженно-деформированного состояния тел вращения с точки зрения неоднородности пластического течения среды.

Учитывая возможность решения замкнутых прикладных задач теории пластичности методом гармонических функций в декартовых координатах, возникает необходимость разработки математического аппарата по решению осесимметричной задачи в цилиндрических координатах, который позволил бы определять реальное напряженно-деформированное состояние металла в каждой точке очага деформации для полых тел вращения.

3.1 Производство толстостенных тел вращения, их практическое применение

В обзоре литературных источников были рассмотрены различные способы получения полых цилиндрических изделий типа кольца. Одной из

операций пластического формоизменения при изготовлении и последующей обработки данных изделий является осадка.

Как промежуточную операцию осадку применяют в следующих случаях:

- для получения поковок с большими поперечными размерами из заготовок меньшего поперечного сечения (поковки фланцев, шестерен, дисков);

- как предварительную операцию перед прошивкой для выравнивания торцов и увеличения диаметра при изготовлении полых поковок, например, поковок типа колец, барабанов, муфт;

- как предварительную операция перед протяжкой для наибольшего разрушения литой дендритной структуры и уменьшения неравномерности свойств в поперечном и продольном направлениях;

- для повышения укова, если площадь наибольшего поперечного сечения выбранного слитка не обеспечивает требуемого укова;

- вместе с протяжкой для деталей типа шестерен, дисков, и др.;

- для повышения механических характеристик в тангенциальном и радиальном направлениях в поковках типа шестерен и др.;

- вместе с протяжкой для равномерного распределения и измельчения карбидов в сталях карбидного класса (быстрорежущие, высокохромистые), что повышает износостойкость.

Операция осадки может быть выполнена одним из следующих способов:

- между плоскими плитами (рис. 3.1);

- между плоской и кольцевой плитами (рис 3.2 а);

- между двумя кольцевыми плитами (рис. 3.2 б);

- осадка на оправке (рис. 3.3);

- осадка в контейнере (рис.3.4)

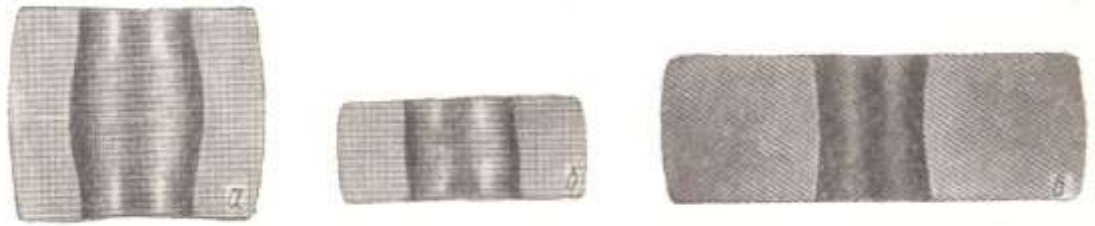


Рисунок 3.1 – Осадка между плоскими шероховатыми плитами.

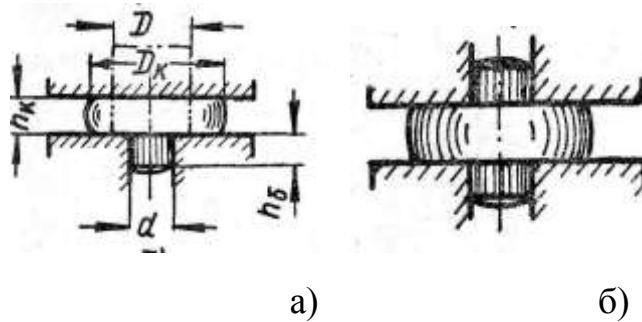


Рисунок 3.2 – Осадка между плоской и кольцевой плитами (а), между двумя кольцевыми плитами (б).

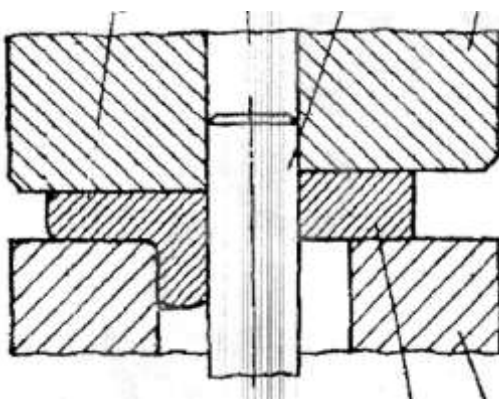


Рисунок 3.3 – осадка на оправке.

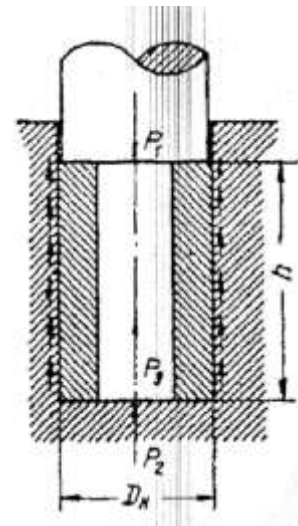


Рисунок 3.4 - осадка в контейнере.

Кроме того, процесс может реализовываться как со свободным истечением материала в радиальном направлении (см. рис. 3.1, 3.2), так и с

ограничением формоизменения внутреннего или наружного диаметра с применением подпора на боковых стенках (см. рис. 3.3, 3.4).

Как отдельная операция, осадка в контейнере либо на оправке, позволяет стабилизировать высотные размеры заготовки, наружный и внутренний диаметры соответственно. Это происходит за счет полного или частичного ограничения течения металла в радиальном направлении. При этом появляется такой эффект, как одностороннее течение металла.

На рис. 3.1 представлены экспериментальные данные [91] по свободной осадке кольцевых заготовок между двумя плоскими шероховатыми плитами. При этом показано влияние фактора формы (соотношение длины и высоты очага деформации) на характер течения металла. При очень тонкой стенке ($l/h < 0,3$) появляется продольный изгиб стенки в сторону наружной поверхности (см. рис. 3.1, а). При осадке заготовок с толстой стенкой ($l/h > 0,5$) происходит образование одинарной бочки как на наружной, так и на внутренней поверхностях заготовки (см. рис. 3.1, в). При этом по мере обжатия заготовки наружный диаметр ее увеличивается, внутренний уменьшается и отверстие закрывается.

Таким образом, полые тела вращения получили широкое распространение во всех отраслях машиностроительного производства. Наиболее часто встречающейся технологической операцией при производстве данных изделий является осадка. Следовательно, решение осесимметричной задачи теории пластичности является актуальной задачей как в научном, так и производственном отношениях. На рис. 3.5 представлены некоторые виды практического применения полых цилиндрических деталей и заготовок.



а) поковки со сквозными отверстиями и полостями для изготовления толстостенных колец, бандажей, шестерен, фланцев; б) заготовки колец цилиндрических и конических подшипников качения; в) ролики; г) опорные кольца; д) бандажи и колеса железнодорожного состава; е) поковки для колец авиационных двигателей.

Рис. 3.5 - Назначение кольцевых деталей и заготовок.

3.2 Постановка замкнутой осесимметричной задачи теории пластичности

Как показывает выше проведенный анализ, все процессы пластического формоизменения металла характеризуются сложным, неоднородным напряженно–деформированным состоянием. Неоднородность пластического формоизменения влияет как на силовые, так и на кинематические параметры процесса. Следовательно, для получения достоверной математической модели пластического формоизменения необходимо решить замкнутую задачу теории пластичности, при помощи которой будут не только рассчитаны поля напряжений и деформаций, но и определены условия, по которым эти поля должны быть согласованы между собой. Такое согласование является одним из приоритетов при нахождении действительного решения задачи теории пластичности.

Анализ литературы показывает, что деформированное и напряженное состояние во многом определяется независимо друг от друга и задача носит ограниченный характер. Есть сопоставления полей напряжений и деформированного состояния. Для устранения этого недостатка необходимо решить замкнутую задачу теории пластичности, т.е. в постановке задачи должны быть уравнения, характеризующие не только напряженное, но и деформированное состояние.

Рассматривается тело в виде полого цилиндра находящегося под нагрузкой в осевом направлении. Необходимо исследовать и оценить распределения напряжений, деформаций и перемещений в зоне формоизменения. Следует руководствоваться некоторыми отправными данными, позволяющими получить решение конкретной задачи таким образом, чтобы решение было единственным. В этом случае должна быть

предложена математическая модель процесса, начальные, очевидные и граничные условия.

Рассмотрим систему уравнений теории пластичности для осесимметричной задачи [1], [125], [127].

Постановка задачи включает в себя:

- дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0; \quad (3.1)$$

- условие пластичности Мизеса:

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2; \quad (3.2)$$

- физическое уравнение связи напряжений и скоростей деформаций:

$$\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \frac{\xi_\rho - \xi_z}{\dot{\gamma}_{\rho z}}; \quad (3.3)$$

- условие несжимаемости:

$$\xi_\rho + \xi_z = 0; \quad (3.4)$$

- уравнение неразрывности скоростей деформаций:

$$\frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{\rho z}}{\partial z \partial \rho}. \quad (3.5)$$

Граничные условия задаются в напряжениях и деформациях, с учетом тригонометрического характера распределения напряжений и сдвиговых деформаций на контакте, т.е.

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha); \quad (3.6)$$

$$\dot{\gamma}_n = \beta \cdot \sin(B\Phi - 2\alpha),$$

где σ, τ - нормальное и касательное напряжение; τ_n - контактное касательное напряжение; $\dot{\gamma}_n$ - сдвиговая скорость деформации на контакте; α - угол наклона площадки; k - сопротивление пластическому сдвигу; A - постоянная величина, характеризующая тригонометрическую функцию для напряженного состояния пластической среды; Φ - гармоническая функция, зависящая от координат очага деформации и являющаяся неизвестным аргументом тригонометрической функции.

В постановке задачи записана система уравнений теории пластичности для осесимметричной плоской задачи в цилиндрических координатах учитывающая как статические, так и кинематические параметры.

3.3 Построение обобщенных дифференциальных уравнений осесимметричной задачи в цилиндрических координатах

В литературе известны разные варианты обобщенных уравнений равновесия, в зависимости от того в какой системе координат такое уравнение представлено.

В декартовых координатах при решении плоской задачи теории пластичности такое уравнение получено Прандтлем Л. [111] и Максименко О.П. [112] в виде:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2} \quad (3.7)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, неоднородное, гиперболического типа. Его особенностью является нелинейность.

В полярных координатах это уравнение имеет вид [98]:

$$\rho^2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi^2} + 3 \cdot \rho \cdot \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \left(\rho \cdot k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{\rho\varphi}}{k} \right)^2} \right) \quad (3.8)$$

Решение данного неоднородного уравнения приведено в работах [98], [142]. В работах [143], [144] при рассмотрении осадки сплошного тела вращения получено обобщенное уравнение равновесия следующего вида:

$$\frac{\partial^2 (\rho \tau_{z\rho})}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 (\rho \tau_{z\rho})}{\partial z^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \cdot \left(\rho \cdot k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{z\rho}}{k} \right)^2} \right) \quad (3.9)$$

Каждое из уравнений (3.7)-(3.9) применяется для решения той или иной прикладной задачи.

В соответствии с методом гармонических функций, для цилиндрических координат, применительно к толстостенным полым изделиям, построим дифференциальное уравнение для определения касательного напряжения (обобщенное уравнение равновесия).

Уравнение равновесия (3.1) после дифференцирования и преобразований с учетом условия пластичности можно привести к виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_\rho}{\partial \rho \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} \right) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{z\rho}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{z\rho}}{\rho} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

После вычитания получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \tau_{z\rho}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (\sigma_z - \sigma_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{z\rho}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Учитывая, что для плоской задачи, в направлении оси θ деформация отсутствует, получим:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho - \sigma_\theta &= \sigma_\rho - \frac{\sigma_\rho + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2} \\ \frac{\partial^2 \tau_{z\rho}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (\sigma_z - \sigma_\rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{z\rho}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\rho} \right) &= 0\end{aligned}\quad (3.12)$$

Подставляя в (3.12) из условия пластичности (3.2) разность нормальных напряжений, получено обобщенное дифференциальное уравнение равновесия в цилиндрических координатах, которое связывает касательное напряжение и сопротивление пластической деформации сдвига в виде [6]:

$$\frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left(\pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{\rho z}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\pm \frac{1}{\rho} \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа в котором разрешающей функцией является касательное напряжение $\tau_{\rho z}$. Аналитическое решение данного уравнения позволяет найти функциональную зависимость касательного напряжения от координат очага деформации и при подстановке в уравнение равновесия, определить нормальные составляющие тензора напряжений.

Уравнение (3.13) получено впервые и будет использовано для изучения напряженного состояния при осадке полых тел вращения. Соотношения (3.3)-(3.5) будут использованы при решении деформационной задачи.

3.4 Выводы

1. Соответствие напряженного и деформированного состояния в условиях неравномерного пластического течения может быть показано постановкой и решением замкнутой задачи теории пластичности, т.е. учет в решении статических и кинематических условий задачи.

2. В литературе известны подходы, в которых используется дифференциальное уравнение в частных производных (обобщенные уравнения равновесия) для определения касательных напряжений.

3. Для осесимметричной задачи теории пластичности впервые получено обобщенное неоднородное уравнение равновесия в частных производных, второго порядка, гиперболического типа в цилиндрических координатах применительно к телам вращения с центральным отверстием.

4. Основные результаты раздела, которые определяют научную новизну диссертационной работы опубликованы в [1], [6].

РАЗДЕЛ 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Как было показано выше, полноценный учет неоднородности пластического течения на параметры напряженного и деформированного состояния возможен в теории тогда, когда с минимальными ограничениями определены сдвиговые и касательные напряжения.

В теории пластичности существуют решения обобщенных дифференциальных уравнений равновесия вида (1.5). Однако эти решения носят ограниченный характер. В работе [98] автор пренебрегал влиянием касательного напряжения, стоящего под радикалом, таким образом, правая часть дифференциального уравнения приравнивалась к нулю, что в свою очередь приводило к решению плоской задачи. В работе [111] касательное напряжение принималось функцией только одной координаты, а сопротивление пластическому сдвигу - величиной постоянной, что приводило к значительному упрощению исходного дифференциального уравнения.

Представляет научный интерес получить решение дифференциального уравнения равновесия (3.13) в аналитическом виде без упрощений, а именно в том виде, в котором оно представлено, что позволило бы учесть основные факторы неоднородности пластического формоизменения.

4.1 Аналитическое решение обобщенного уравнения равновесия. Определение нормальных и касательных напряжений

Рассмотрим обобщенное дифференциальное уравнение (3.13), которое определяет функциональную зависимость касательного напряжения от координат очага деформации, т.е. поле касательных напряжений. Вид предложенного дифференциального уравнения (3.13) отличается от соответствующего уравнения равновесия в декартовых координатах (3.7) большей сложностью. Однако подходы к его аналитическому решению остаются прежними.

Удовлетворяя граничное условие в напряжениях (3.6) вводим в рассмотрение новую переменную:

$$\tau_{\rho z} = k \cdot \sin A\Phi, \quad (4.1)$$

где, A - постоянный коэффициент, Φ - неизвестная функция координат ρ, z .

Как показывает анализ работ [114]-[121], решение невозможно без дополнительных условий, принятых в виде допущений. Основополагающей является зависимость сопротивления пластической деформации k от координат очага деформации. Принимаем, что $k \neq const$, $k = f(\rho, z)$.

С учетом (4.1) в обобщенное уравнение равновесия (3.13) подставим производные:

$$\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (k \cdot \sin A\Phi) = k_{,\rho} \sin A\Phi + k A\Phi_{,\rho} \cdot \cos A\Phi;$$

$$\frac{\partial^2 (k \sin A\Phi)}{\partial \rho^2} = k_{,\rho\rho} \cdot \sin A\Phi + k_{,\rho} A\Phi_{,\rho} \cdot \cos A\Phi + k_{,\rho} A\Phi_{,\rho} \cdot \cos A\Phi + k_{,\rho} A\Phi_{,\rho\rho} \cdot \cos A\Phi -$$

$$- k A\Phi_{,\rho} A\Phi_{,\rho} \cdot \sin A\Phi$$

$$\frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (k \cdot \sin A\Phi) = k_z \sin A\Phi + k A\Phi_z \cdot \cos A\Phi;$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{z\rho}}{\partial z^2} = k_{zz} \cdot \sin A\Phi + 2k_z A\Phi_z \cdot \cos A\Phi + k A\Phi_{zz} \cdot \cos A\Phi - k A\Phi_z^2 \cdot \sin A\Phi. \quad (4.2)$$

Преобразуем скобки (радикал):

$$\sqrt{k^2 - k^2 \cdot \sin^2 A\Phi} = \sqrt{k^2(1 - \sin^2 A\Phi)} = \pm k \cdot \cos A\Phi. \quad (4.3)$$

С учетом последнего:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (2k \cdot \cos A\Phi) = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (k \cdot \cos A\Phi)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (k \cdot \cos A\Phi) = k_z \cdot \cos A\Phi - k A\Phi_z \cdot \sin A\Phi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} (k \cdot \cos A\Phi) = k_{z\rho} \cdot \cos A\Phi - k_z A\Phi_\rho \cdot \sin A\Phi - k_\rho A\Phi_z \cdot \sin A\Phi - k A\Phi_{z\rho} \cdot \sin A\Phi -$$

$$- k A\Phi_z A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} k \cdot \cos A\Phi \right) = \frac{1}{\rho} \cdot k_z \cdot \cos A\Phi - \frac{1}{\rho} k \cdot A\Phi_z \cdot \sin A\Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{z\rho}}{\rho} \right) = \frac{(\tau_{z\rho})_\rho \cdot \rho - \tau_{z\rho} \cdot 1}{\rho^2} = \frac{(k \cdot \sin A\Phi)_\rho \cdot \rho - k \cdot \sin A\Phi}{\rho^2} =$$

$$= \frac{(k_\rho \cdot \sin A\Phi + k \cdot A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi) \cdot \rho - k \cdot \sin A\Phi}{\rho^2} \quad (4.4)$$

Подставляя производные (4.4) в (3.13), получим:

$$k_{\rho\rho} \cdot \sin A\Phi + 2k_{\rho\rho} A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi + k \cdot A\Phi_{\rho\rho} \cdot \cos A\Phi - k \cdot A\Phi_\rho^2 \cdot \sin A\Phi -$$

$$- k_{zz} \cdot \sin A\Phi - 2k_z A\Phi_z \cdot \cos A\Phi - k A\Phi_{zz} \cdot \cos A\Phi + k A\Phi_z^2 \cdot \sin A\Phi -$$

$$- 2[k_{z\rho} \cdot \cos A\Phi - k_z A\Phi_\rho \cdot \sin A\Phi - k_\rho A\Phi_z \cdot \sin A\Phi - k A\Phi_{z\rho} \cdot \sin A\Phi -$$

$$- k \cdot A\Phi_z \cdot A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi] + \frac{1}{\rho} k_\rho \cdot \sin A\Phi + \frac{1}{\rho} k A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi - \frac{1}{\rho^2} k \cdot \sin A\Phi -$$

$$- \frac{1}{\rho} k_z \cdot \cos A\Phi + \frac{1}{\rho} k \cdot A\Phi_z \cdot \sin A\Phi = 0 \quad (4.5)$$

После преобразования:

$$\begin{aligned} & \left[k_{\rho\rho} - kA\Phi_{\rho}^2 - k_{zz} + kA\Phi_z^2 + 2k_z A\Phi_{\rho} + 2k_{\rho} A\Phi_z + 2kA\Phi_{z\rho} + \frac{1}{\rho} k_{\rho} - \frac{1}{\rho^2} k_{\rho} + \frac{1}{\rho} kA\Phi_z \right] \cdot \sin A\Phi + \\ & + \left[2k_{\rho} A\Phi_{\rho} + kA\Phi_{\rho\rho} - 2k_z A\Phi_z - kA\Phi_{zz} - 2k_{z\rho} + 2kA\Phi_z \cdot A\Phi_{\rho} + \frac{1}{\rho} kA\Phi_{\rho} - \frac{1}{\rho} k_z \right] \cdot \cos A\Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используем фундаментальную подстановку, принимая при этом сопротивление деформаций сдвигу величиной переменной:

$$k = H_{\sigma} \exp \theta, \quad (4.7)$$

где, H_{σ} функция от координат ρ, z ; θ - показатель экспоненты, как функция, которая зависит от тех же координат и подлежит определению, k_{ρ} - частная производная от сопротивления деформации по координате ρ ; k_z - частная производная от сопротивления деформации по координате z ; $k_{\rho\rho}$ и k_{zz} - вторая частная производная от сопротивления деформации по соответствующим координатам.

Это подстановка позволяет линеаризовать обобщенное уравнение равновесия избавившись от радикала. Такая связь удовлетворяет граничные условия.

Согласно критериев Тихонова А.Н. и Самарского А.А. [113], фундаментальной подстановкой пользуются тогда, когда дифференциальное уравнение в частных производных линейно относительно своих производных и функций. Отличительной особенностью подстановки (4.7) является то, что показатель $\exp \theta$ не является известной функцией.

При решении задачи значение k используется как математическая характеристика, влияющая на конечный результат. Над ней можно производить математические операции, включая дифференцирование и

интегрирование. С точки зрения свойств деформируемой среды – это среда упрочняющаяся, реагирующая на температуру, деформацию, скорость деформации и химический состав материала.

Возьмем производные по координатам от k :

$$\begin{aligned} \kappa_\rho &= (H_\sigma)_\rho \cdot \exp \theta + H_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \theta_\rho \\ \kappa_{\rho\rho} &= (H_\sigma)_{\rho\rho} \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_\rho \cdot \theta_\rho \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_\rho \cdot \theta_\rho \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_\rho \cdot \theta_\rho^2 \cdot \exp \theta + (H_\sigma) \cdot \exp \theta \cdot \theta_{\rho\rho} \\ \kappa_z &= (H_\sigma)_z \cdot \exp \theta + H_\sigma \cdot \exp \theta \cdot \theta_z \\ \kappa_{zz} &= (H_\sigma)_{zz} \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_z \cdot \theta_z \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_z \cdot \theta_z \cdot \exp \theta + (H_\sigma) \cdot \theta_{zz} \cdot \exp \theta + (H_\sigma) \cdot \theta_z^2 \cdot \exp \theta \\ \kappa_{z\rho} &= (H_\sigma)_{z\rho} \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_z \cdot \theta_\rho \cdot \exp \theta + (H_\sigma)_\rho \cdot \theta_z \cdot \exp \theta + (H_\sigma) \cdot \theta_{z\rho} \cdot \exp \theta + (H_\sigma) \cdot \theta_z \cdot \theta_\rho \cdot \exp \theta \quad (4.8) \end{aligned}$$

В результате подстановки произведений функций (4.1), (4.7) в (3.13) после преобразований и упрощений получим обобщенное уравнение равновесия в виде:

$$\begin{aligned} &\{(H_\sigma)_{\rho\rho} - (H_\sigma)_{zz} + 2(H_\sigma)_\rho(\theta_\rho + A\Phi_z) + (H_\sigma)_\rho \frac{1}{\rho} - 2(H_\sigma)_z(\theta_z - A\Phi_\rho)\} + \\ &+ H_\sigma \left[(\theta_{\rho\rho} - \theta_{zz}) + (\theta_\rho + A\Phi_z)^2 - (\theta_z - A\Phi_\rho)^2 + \frac{1}{\rho}(\theta_\rho + A\Phi_z) + 2A\Phi_{\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \right] \cdot \sin A\Phi + \\ &+ \{2(H_\sigma)_\rho(A\Phi_\rho - \theta_z) - 2(H_\sigma)_z(A\Phi_z - \theta_\rho) - (H_\sigma)_z \frac{1}{\rho} + H_\sigma[2(A\Phi_\rho - \theta_z) \cdot \\ &\cdot \left(\theta_\rho + A\Phi_z + \frac{1}{2\rho} \right) + A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - 2\theta_{\rho z}] - 2(H_\sigma)_{\rho z}\} \cdot \cos A\Phi = 0. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Данное уравнение сгруппировано так, что появились операторы при синусах и косинусах: $(\theta_\rho + A\Phi_z)$, $(\theta_z - A\Phi_\rho)$. В этих выражениях сгруппированы производные от неизвестных функций. При этом появляется нелинейность определенная этими выражениями. Для упрощения решения, необходимо избавиться от нелинейности приравнивая указанные скобки нулю:

$$\theta_\rho = -A\Phi_z; \theta_z = A\Phi_\rho; \theta_\rho + A\Phi_z = 0; \theta_z - A\Phi_\rho = 0. \quad (4.10)$$

В результате, исходное дифференциальное уравнение (4.9) с учетом (4.10) приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \left[(H_\sigma)_{\rho\rho} - (H_\sigma)_{zz} + \frac{1}{\rho}(H_\sigma)_\rho + H_\sigma \left(\theta_{\rho\rho} - \theta_{zz} + 2A\Phi_{\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] \cdot \sin A\Phi + \\ & + \left[H_\sigma (A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - 2\theta_{\rho z}) - \frac{1}{\rho}(H_\sigma)_z - 2(H_\sigma)_{\rho z} \right] \cdot \cos A\Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Определяя вторые производные от функций θ_ρ , θ_z , $A\Phi_\rho$, $A\Phi_z$, получим соотношения: $\theta_{\rho\rho} - \theta_{zz} + 2A\Phi_{\rho z} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - 2\theta_{\rho z} = 0$, при условии существования вторых производных: $\theta_{\rho\rho} = -A\Phi_{z\rho}$, $\theta_{zz} = A\Phi_{\rho z}$, $A\Phi_{zz} = -\theta_{\rho z}$, $A\Phi_{\rho\rho} = \theta_{z\rho}$ и упрощений получим следующее выражение:

$$\left[(H_\sigma)_{\rho\rho} - (H_\sigma)_{zz} + \frac{1}{\rho}(H_\sigma)_\rho - H_\sigma \frac{1}{\rho^2} \right] \cdot \sin A\Phi + \left[-\frac{1}{\rho}(H_\sigma)_z - 2(H_\sigma)_{\rho z} \right] \cdot \cos A\Phi = 0. \quad (4.12)$$

Решением уравнения (4.12) является функция H_σ :

$$H_\sigma = \frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \quad (4.13)$$

С учетом соотношений Коши-Римана можно показать, что функции θ и $A\Phi$ удовлетворяют уравнениям Лапласа и являются гармоническими: $\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0$.

В последнем случае появляется определенность с неизвестными функциями, так как известны дифференциальные уравнения, которые их определяют.

Касательное напряжение, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.13) имеет вид:

$$\tau_{\rho z} = \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1 \rho \right) \exp \theta \cdot \sin A\Phi \quad (4.14)$$

при этом на функции θ и $A\Phi$ наложены следующие ограничения: $\theta_\rho = -A\Phi_z$; $\theta_z = A\Phi_\rho$; $\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0$.

Из уравнения равновесия (3.1) с учетом найденного касательного напряжения (4.14), определим нормальные составляющие тензора напряжений σ_ρ, σ_z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot \sin A\Phi \right] &= \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \theta_z \cdot \exp \theta \cdot \sin A\Phi + \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot A\Phi_z \cdot \cos A\Phi \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot \sin A\Phi \right] &= \left(C_1 + \left(-\frac{C_2}{\rho^2} \right) \right) \exp \theta \cdot \sin A\Phi + \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \theta_\rho \exp \theta \cdot \sin A\Phi + \\ &+ \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ограничим осесимметричную задачу еще плоским решением:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{\sigma_z + \sigma_\rho}{2} \rightarrow \sigma_\rho - \sigma_\theta &= \sigma_\rho - \frac{\sigma_z + \sigma_\rho}{2} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2} \\ \sigma_\rho - \sigma_z &= 2H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi \\ \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{\rho} &= \frac{H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi}{\rho} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Следовательно, первое уравнение равновесия системы (3.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \theta_z \exp \theta \cdot \sin A\Phi + \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot A\Phi_z \cdot \cos A\Phi + \\ + \frac{1}{\rho} \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Разделим переменные:

$$\partial \sigma_\rho = \left[-H_\sigma \theta_z \exp \theta \cdot \sin A\Phi - H_\sigma \exp \theta A\Phi_z \cdot \cos A\Phi - \frac{1}{\rho} H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi \right] d\rho \quad (4.18)$$

Обозначим:

$$I_1 = \int H_\sigma \theta_z \exp \theta \cdot \sin A\Phi d\rho; \quad I_2 = \int H_\sigma \exp \theta A\Phi_z \cdot \cos A\Phi d\rho \quad (4.19)$$

при $\theta_z = A\Phi_\rho$; $\theta_\rho = -A\Phi_z$.

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + I_1 + I_2 + \frac{1}{\rho} H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi = 0 \quad (4.20)$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} dV &= A\Phi_\rho \cdot \sin A\Phi d\rho \rightarrow V = -\cos A\Phi \\ U &= H_\sigma \cdot \exp \theta \rightarrow dU = \left[(H_\sigma)_\rho \cdot \exp \theta + H_\sigma \cdot \theta_\rho \cdot \exp \theta \right] d\rho \\ I_1 &= -H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - \int (-\cos A\Phi) \left[(H_\sigma)_\rho \exp \theta + H_\sigma \theta_\rho \exp \theta \right] d\rho = \\ &= -H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \int (H_\sigma)_\rho \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho + \int H_\sigma A\Phi_z \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho \\ \sigma_\rho &= H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - \int (H_\sigma)_\rho \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho + I_2 - I_2 - \\ &\quad - \int \frac{1}{\rho} H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho + f(z) + C \end{aligned}$$

$$(H_\sigma)_\rho = \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho} \right)_\rho = C_1 + \left(-\frac{C_2}{\rho^2} \right) = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2}$$

$$\frac{1}{\rho} H_\sigma = \frac{C_1 \rho}{\rho} + \frac{C_2}{\rho^2} = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} \quad (4.21)$$

Запишем интегралы:

$$-\int \left[\left(C_1 - \frac{C_2}{\rho^2} \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi + \left(C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi \right] d\rho = -\int 2C_1 \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho \quad (4.22)$$

Обозначим:

$$I'_1 = \int 2C_1 \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho ; \sigma_0 = -2H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi + 2I'_1 \quad (4.23)$$

Следовательно: $\sigma_\rho = H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2I'_1 + \sigma_0 + f(z) + C$.

Аналогичным образом интегрируем второе уравнение равновесия системы (3.1). В результате некоторых преобразований находим:

$$\sigma_z = -\int (H_\sigma)_\rho \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz - \int H_\sigma \theta_\rho \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz - \int H_\sigma \exp \theta A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi dz -$$

$$-\int \frac{1}{\rho} H_\sigma \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz + f(\rho) \quad (4.24)$$

Обозначим:

$$I_1 = \int H_\sigma \theta_\rho \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz ; I_2 = \int H_\sigma \theta_z \exp \theta \cdot \cos A\Phi dz \quad (4.25)$$

при $\theta_z = A\Phi_\rho ; \theta_\rho = -A\Phi_z$.

$$dV = -A\Phi_z \cdot \sin A\Phi dz \rightarrow V = \cos A\Phi$$

$$U = H_\sigma \cdot \exp \theta \rightarrow dU = H_\sigma \cdot \theta_z \cdot \exp \theta dz$$

$$I_1 = H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - \int \cos A\Phi H_\sigma \theta_z \exp \theta dz$$

$$I_1 - I_2 = H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - \int H_\sigma \theta_z \exp \theta \cdot \cos A\Phi dz - \int H_\sigma \theta_z \exp \theta \cdot \cos A\Phi dz \quad (4.26)$$

Тогда:

$$\sigma_z = -\int (H_\sigma)_\rho \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz - H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - \int \frac{1}{\rho} H_\sigma \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz \quad (4.27)$$

Объединим интегралы:

$$\int \exp \theta \cdot \sin A\Phi \left(C_1 - \frac{C_2}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho^2} \right) dz = 2 \int C_1 \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz$$

$$\sigma_z = -H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2 \int C_1 \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz + f(\rho) \quad (4.28)$$

Тогда

$$\sigma_\rho = H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \int \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho + \sigma_0 + f(z)$$

$$\sigma_z = -H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \int \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz + \sigma_0 + f(\rho) \quad (4.29)$$

Обозначим:

$$I_1' = \int \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho,$$

$$I_2' = \int \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz \quad (4.30)$$

Можно показать, что $I_1' = I_2'$. Равенство интегралов определяется особенностями гармонических функций. Принимаем, что $\sigma_0 = -2H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi + 2C_1 I_1'$

Тогда, в конечном итоге выражения для определения нормальных напряжений (4.29) можно упростить и записать в виде [1]-[4]:

$$\sigma_\rho = -H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi + f(z) \quad (4.31)$$

$$\sigma_z = -3H_\sigma \exp \theta \cdot \cos A\Phi + f(\rho) \quad (4.32)$$

при $\theta_\rho = -A\Phi_z$; $\theta_z = A\Phi_\rho$; $\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0$

4.2 Определение полей скоростей деформаций

Зная компоненты тензора напряжений, через уравнение связи, можно связать компоненты тензора скоростей деформаций. Схема решения задачи следующая.

Подставляя компоненты тензора напряжений в уравнения связи(3.3), в общем случае получим

$$\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \pm ctg A\Phi; \quad \frac{\dot{\xi}_\rho - \dot{\xi}_z}{\dot{\gamma}_{\rho z}} = \pm ctg B\Phi \quad (4.33)$$

Через уравнение связи, функция Φ переходит с поля напряжений в поле скоростей деформаций. При такой постановке вопроса, удаётся устанавливать связь между линейными скоростями деформаций и сдвиговыми.

С учетом того, что $\xi_\rho = -\xi_z$, имеем

$$\dot{\gamma}_{\rho z} = \pm 2 \cdot tg B\Phi \cdot \dot{\xi}_\rho \quad \text{или} \quad \dot{\gamma}_{\rho z} = \mp 2 \cdot tg B\Phi \cdot \dot{\xi}_z. \quad (4.34)$$

Последние выражения позволяют устанавливать связь между линейными скоростями деформаций и сдвиговыми. Уравнение совместности скоростей деформаций (3.5), с учетом (3.3) и (3.4), принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial \rho^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \xi_\rho \cdot \operatorname{tg} \text{ВФ} \quad (4.35)$$

В этом уравнении разрешающей функцией является линейная скорость ξ_ρ .

Дифференциальное уравнение (4.35) относится к такому же виду как и уравнение (3.13). Из этого следует, что те подходы которые были использованы при решении дифференциального уравнения равновесия (3.13), используются и при решении уравнения неразрывности скоростей деформаций (4.35).

Вводятся в рассмотрение неизвестные функции θ' и ВФ, как и для напряжений:

$$\begin{aligned} \xi_\rho &= -\xi_z = \beta \cdot \operatorname{Cos} \text{ВФ} = H_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \operatorname{Cos} \text{ВФ}; \\ \dot{\gamma}_{\rho z} &= 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta' \cdot \operatorname{Sin} \text{ВФ}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где H_ξ - функция координат, определяющая деформированное состояние среды.

Подставляя зависимости (4.36) в дифференциальное уравнение (4.35), получим [6]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{I}_\xi \cdot \left[-\theta'_{\rho\rho} - (\theta'_\rho + \text{ВФ}'_z)^2 + \theta'_{zz} + (\theta'_z - \text{ВФ}'_\rho)^2 \right] - (H_\xi)_{\rho\rho} - \right. \\ & - 2 \cdot (\dot{I}_\xi)_\rho \cdot (\theta'_\rho + \text{ВФ}'_z) + (H_\xi)_{zz} + 2 \cdot (H_\xi)_z \cdot (\theta'_z - \text{ВФ}'_\rho) \left. \right\} \cdot \cos \text{ВФ} + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_\xi \cdot (\text{ВФ}'_\rho - \theta'_z) \cdot (\theta'_\rho + \text{ВФ}'_z) - 2 \cdot (H_\xi)_z \cdot (\text{ВФ}'_z + \theta'_\rho) + \right. \\ & \left. + 2 \cdot (H_\xi)_\rho \cdot (\text{ВФ}'_\rho - \theta'_z) + H_\xi \cdot (\text{ВФ}'_{\rho\rho} - \text{ВФ}'_{zz}) \right\} \cdot \sin \text{ВФ} = \\ & = 2 \cdot H_\xi \cdot \text{ВФ}'_{\rho z} \cdot \cos \text{ВФ} + \left[2 \cdot (H_\xi)_{\rho z} + 2 \cdot H_\xi \cdot \theta'_{\rho z} \right] \cdot \sin \text{ВФ}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Как и в случае (4.9), имеют место упрощения. Операторы при тригонометрических функциях содержат одинаковые выражения $(\theta'_\rho + \text{ВФ}'_z)$ и $(\theta'_z - \text{ВФ}'_\rho)$. Принимая их равными нулю, получаем соотношения Коши – Римана между неизвестными функциями, т.е.

$$\theta'_\rho + \text{ВФ}'_z = 0, \quad \theta'_z - \text{ВФ}'_\rho = 0 \quad \text{или} \quad \theta'_\rho = -\text{ВФ}'_z, \quad \theta'_z = \text{ВФ}'_\rho. \quad (4.38)$$

Тогда дифференциальное уравнение (4.37) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \{H_\xi \cdot [-\theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz}] - (H_\xi)_{\rho\rho} + (H_\xi)_{zz}\} \cdot \cos \text{ВФ} + \{H_\xi \cdot (\text{ВФ}'_{\rho\rho} - \text{ВФ}'_{zz})\} \cdot \sin \text{ВФ} = \\ & = 2H_\xi \cdot \text{ВФ}'_{\rho z} \cdot \cos \text{ВФ} + [2 \cdot (H_\xi)_{\rho z} + 2 \cdot H_\xi \cdot \theta'_{\rho z}] \cdot \sin \text{ВФ} \end{aligned} \quad (4.39)$$

или

$$[H_\xi (-\theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz} - 2\text{ВФ}'_{\rho z}) - (H_\xi)_{\rho\rho} + (H_\xi)_{zz}] \cdot \cos \text{ВФ} + [H_\xi (\text{ВФ}'_{\rho\rho} - \text{ВФ}'_{zz} - 2\theta'_{\rho z})] \cdot \sin \text{ВФ} = 0$$

Определяя вторые производные от функций $\theta'_\rho, \theta'_z, \text{ВФ}'_\rho, \text{ВФ}'_z$ находим:

$$\begin{aligned} & \theta'_{\rho\rho} = -\text{ВФ}'_{z\rho}, \quad \theta'_{zz} = \text{ВФ}'_{\rho z} : \theta'_{\rho z} = \text{ВФ}'_{zz} = -\text{ВФ}'_{\rho\rho}; \quad -\theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz} - 2\text{ВФ}'_{\rho z} = 0 \\ & \text{ВФ}'_{\rho\rho} - \text{ВФ}'_{zz} - 2\theta'_{\rho z} = 0; \quad \theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz} = 0, \quad \text{ВФ}'_{\rho\rho} + \text{ВФ}'_{zz} = 0; \quad -(H_\xi)_{\rho\rho} + (H_\xi)_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

После окончательных преобразований получаем дифференциальное уравнение вида:

$$H_\xi = C'_\xi(\rho^2 + C'_{\xi 2} \cdot \rho + C'_{\xi 3}) + C'_\xi(z^2 + C''_{\xi 2} \cdot z + C''_{\xi 3}) + C_\xi \quad (4.41)$$

При его решении, компоненты тензора скоростей деформаций принимают вид:

$$\xi_{\rho} = H_{\xi} \cdot \exp \theta' \cdot \cos \Phi \quad (4.42)$$

$$\xi_z = -H_{\xi} \cdot \exp \theta' \cdot \cos \Phi \quad (4.43)$$

$$\dot{\gamma}_{\rho z} = 2 \cdot H_{\xi} \cdot \exp \theta' \cdot \sin \Phi \quad (4.44)$$

где, ξ_{ρ} и ξ_z - линейные составляющие тензора скоростей деформаций по соответствующим координатам, $\dot{\gamma}_{\rho z}$ - сдвиговые составляющие тензора скоростей деформаций.

Тогда, решение деформационной задачи при выполнении ограничений на функции $\theta'_{\rho} = -\Phi_z$, $\theta'_z = \Phi_{\rho}$, $\theta'_{\rho\rho} + \theta'_{zz} = 0$; $\Phi_{\rho\rho} + \Phi_{zz} = 0$ имеет вид (4.24)-(4.44).

Замкнутое решение плоской осесимметричной задачи теории пластичности указывает на то, что поля напряжений и скоростей деформаций могут быть описаны одинаковыми координатными гармоническими функциями Φ и θ .

4.3 Математическая модель пластической среды в условиях осесимметричного напряженного состояния

При проектировании новых технологических процессов изготовления деталей методом пластической деформации необходимо знать зависимость сопротивления пластической деформации от обобщенных кинематических параметров очага деформации, т.е. от скорости деформации ξ , степени деформации ε и температуры T . Таким образом, необходимо знать математическую модель пластической среды. Данная модель будет

использоваться для определения напряженного состояния в каждой точке очага деформации с учетом выше указанных характеристик.

На основании замкнутого решения плоской задачи теории пластичности в аналитическом виде для упрочняющейся среды [145], появляется возможность построить математическую модель пластической среды.

Сформулируем новую постановку задачи для осесимметричного напряженно- деформированного состояния в цилиндрических координатах:

- дифференциальные уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0; \quad (4.45)$$

- условие пластичности:

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2; \quad (4.46)$$

- физические уравнения связи напряжений, скоростей деформаций и деформаций:

$$\frac{\sigma_{\rho} - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \frac{\xi_{\rho} - \xi_z}{\dot{\gamma}_{\rho z}} = F_1; \quad \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \frac{\varepsilon_{\rho} - \varepsilon_z}{\gamma_{\rho z}} = F_2; \quad (4.47)$$

- условия несжимаемости для скоростей деформаций и деформаций:

$$\xi_{\rho} + \xi_z = 0; \quad \varepsilon_{\rho} + \varepsilon_z = 0; \quad (4.48)$$

- уравнения неразрывности скоростей деформаций и деформаций:

$$\frac{\partial^2 \xi_{\rho}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_{\rho z}}{\partial z \partial \rho}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{\rho}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{\rho z}}{\partial z \partial \rho}; \quad (4.49)$$

- уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (4.50)$$

Постановка данной задачи соответствует постановке задачи для замкнутого решения осесимметричной задачи теории пластичности и отличается большей сложностью, а именно, добавлено физические уравнения

связи напряжений и деформаций, условия несжимаемости для деформаций, уравнение неразрывности деформаций и уравнение теплопроводности.

Предполагаемая модель пластической среды имеет вид:

$$T_i = \chi(H_i)^{m_1} \cdot (\Gamma_i)^{m_2} \cdot (T)^{m_3}. \quad (4.51)$$

Данная модель применяется для описания реальной упрочняющейся среды [146].

Запишем граничные условия для напряжений:

$$\tau_n = -T_i \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha); \quad T_i = k; \quad \gamma_n = \sin(B\Phi - 2\alpha) \quad (4.52)$$

Все интенсивности и температура принимаются зависимыми от координат очага деформации: $H_i = H_i(\rho, z)$, $\Gamma_i = \Gamma_i(\rho, z)$,

Для получения модели (4.51) рассмотрим три уравнения второго порядка в частных производных, неоднородных, гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left(\pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{\rho z}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\pm \frac{1}{\rho} \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) = 0 \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \xi_\rho}{\partial \rho^2} = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \xi_\rho \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_\rho}{\partial \rho^2} = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \cdot \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_\rho \quad (4.55)$$

Необходимо принять связь между касательными напряжениями и сопротивлением пластической деформации сдвига для удовлетворения граничным условиям в следующем виде: $\tau_{\rho z} = k \sin A\Phi$.

Для сложной пластической среды задача решается с учетом того, что имеет место сложная зависимость от координат $k = f(H_i, \Gamma_i, T, \rho, z)$. При этом $k = H_\sigma \cdot \exp \theta$, где $\theta = f(H_i, \Gamma_i, T, \rho, z)$.

Возьмем частные производные от сложной функции и после подстановки в (4.53) получим:

$$\begin{aligned}
& \{ (H_\sigma)_{\rho\rho} - (H_\sigma)_{zz} + 2(H_\sigma)_\rho [(\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) + A\Phi_z] + (H_\sigma)_\rho \cdot \frac{1}{\rho} - \\
& - 2(H_\sigma)_z \cdot [(\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z) - A\Phi_\rho] + H_\sigma \{ (\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) - \\
& - (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z) \}_z + [(\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) + A\Phi_z]^2 - \quad (4.56) \\
& - [(\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z) - A\Phi_\rho]^2 + \frac{1}{\rho} [(\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) + A\Phi_z] + \\
& + 2A\Phi_{\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \} \cdot \sin A\Phi + \{ 2(H_\sigma)_\rho \cdot [A\Phi_\rho - (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z)] - 2(H_\sigma)_z \times \\
& \times [A\Phi_z + (\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho)] - (H_\sigma)_z \frac{1}{\rho} + H_\sigma \{ 2[A\Phi_\rho - (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z)] \times \\
& \times \left[(\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) + A\Phi_z + \frac{1}{2\rho} \right] + A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - \\
& - 2(\theta_{HH} \cdot H_\rho \cdot H_z + \theta_H \cdot H_{\rho z} + \theta_{\Gamma\Gamma} \cdot \Gamma_\rho \cdot \Gamma_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_{\rho z} + \theta_H \cdot T_\rho \cdot T_z + \theta_t \cdot T_{\rho z}) \} - 2(H_\sigma)_{\rho z} \} \cdot \cos A\Phi = 0
\end{aligned}$$

Как и для более простой пластической среды существует возможность упорядочить нелинейные члены уравнения. Появились суммы и разности квадратов соответствующих производных в операторах, стоящих перед тригонометрическими функциями. Если избавиться от нелинейности, т.е. выражения, стоящие в квадратных скобках принять равными нулю, уравнение (4.56) упростится. Запишем

$$\begin{aligned}
\theta_\rho &= (\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho) = -A\Phi_z \\
\theta_z &= (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z) = A\Phi_\rho
\end{aligned} \quad (4.57)$$

Тогда (4.56) упростится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left\{ (H_\sigma)_{\rho\rho} - (H_\sigma)_{zz} + 2(H_\sigma)_\rho + (H_\sigma)_\rho \cdot \frac{1}{\rho} - 2(H_\sigma)_z + H_\sigma \left\{ (\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho)_\rho - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z)_z + \frac{1}{\rho} + 2A\Phi_{\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \right\} \right\} \cdot \sin A\Phi + \\ & + \left\{ 2(H_\sigma)_\rho - 2(H_\sigma)_z - (H_\sigma)_z \frac{1}{\rho} + H_\sigma \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2\rho} + A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - \right. \right. \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\left. \left. - 2(\theta_{HH} \cdot H_\rho \cdot H_z + \theta_H \cdot H_{\rho z} + \theta_{\Gamma\Gamma} \cdot \Gamma_\rho \cdot \Gamma_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_{\rho z} + \theta_{tt} \cdot T_\rho \cdot T_z + \theta_t \cdot T_{\rho z}) \right\} - 2(H_\sigma)_{\rho z} \right\} \cdot \cos A\Phi = 0$$

Определяя вторые производные от функций θ_ρ , θ_z , $\dot{A}\hat{O}_\rho$, $\dot{A}\hat{O}_z$ можно записать:

$$\begin{aligned} \theta_{\rho\rho} &= (\theta_H \cdot H_\rho + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_\rho + \theta_t \cdot T_\rho)_\rho = -A\Phi_{z\rho} \\ \theta_{zz} &= (\theta_H \cdot H_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_z + \theta_t \cdot T_z)_z = A\Phi_{\rho z} \\ A\Phi_{zz} &= -(\theta_{HH} \cdot H_\rho \cdot H_z + \theta_H \cdot H_{\rho z} + \theta_{\Gamma\Gamma} \cdot \Gamma_\rho \cdot \Gamma_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_{\rho z} + \theta_{tt} \cdot T_\rho \cdot T_z + \theta_t \cdot T_{\rho z}) = -\theta_{\rho z} \\ A\Phi_{\rho\rho} &= (\theta_{HH} \cdot H_\rho \cdot H_z + \theta_H \cdot H_{\rho z} + \theta_{\Gamma\Gamma} \cdot \Gamma_\rho \cdot \Gamma_z + \theta_\Gamma \cdot \Gamma_{\rho z} + \theta_{tt} \cdot T_\rho \cdot T_z + \theta_t \cdot T_{\rho z}) = -\theta_{z\rho} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Смешанные производные равны нулю, тогда:

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \theta_H \cdot dH_i; \quad d\theta_2 = \theta_\Gamma \cdot d\Gamma_i; \quad d\theta_3 = \theta_t \cdot dT \\ d\theta &= d\theta_1 + d\theta_2 + d\theta_3; \quad \theta_1 = \theta(H_i); \quad \theta_2 = \theta(\Gamma_i); \quad \theta_3 = \theta(T). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Из выше изложенного видно, что показатели экспоненты определяются как сумма трех функций, учитывающих влияние скорости деформации, степени деформации и температуры, т.е.: $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$.

Как показывает дальнейший анализ, поля напряжений, деформаций, скоростей деформаций и температур в своих математических выкладках

могут иметь одинаковые координатные функции, в нашем случае θ . Это позволяет записать следующее:

$$\begin{aligned}\theta &= -A\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = -(A_1\theta + A_2\theta + A_3\theta); \\ \theta_1 &= -A_1\theta; \theta_2 = -A_2\theta; \theta_3 = -A_3\theta.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Отсюда $A = A_1 + A_2 + A_3$, где A_1, A_2, A_3 - постоянные коэффициенты, учитывающие влияние скорости деформации, степени деформации и температуры.

Таким образом, выражения для определения сопротивления пластической деформации сдвига и составляющие тензора напряжений (4.7), (4.14), (4.31), (4.32) примут следующий вид:

$$k = H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta); \quad (4.62)$$

$$\tau_{\rho z} = H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta) \cdot \sin A\Phi; \quad (4.63)$$

$$\sigma_\rho = H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta) \cdot \cos A\Phi + C; \quad (4.64)$$

$$\sigma_z = 3H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta) \cdot \cos A\Phi + C; \quad (4.65)$$

$$\text{при } \theta_\rho = (\theta_1)_\rho + (\theta_2)_\rho + (\theta_3)_\rho = -A\Phi_z, \quad \theta_z = (\theta_1)_z + (\theta_2)_z + (\theta_3)_z = A\Phi_\rho.$$

Рассмотрим деформационную задачу. Воспользуемся уравнением связи для плоской задачи (4.47):

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} &= \operatorname{ctg} A\Phi; \quad \frac{\xi_\rho - \xi_z}{\dot{\gamma}_{\rho z}} = \operatorname{ctg} B_1\Phi; \quad \operatorname{ctg} A\Phi = \operatorname{ctg} B_1\Phi = F_1; \\ \frac{\varepsilon_\rho - \varepsilon_z}{\gamma_{\rho z}} &= \operatorname{ctg} B_2\Phi; \quad \operatorname{ctg} A\Phi = \operatorname{ctg} B_2\Phi = F_2\end{aligned}\quad (4.66)$$

Из этого следует, что гармоническая функция Φ переходит из поля напряженного состояния в поле деформированного состояния, тем самым определяя их соответствие. С учетом уравнений несжимаемости (4.48) выражения для определения сдвиговых составляющих тензора деформаций и тензора скоростей деформаций запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{\rho z} &= 2 \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \xi_{\rho} = 2 \cdot \xi_{\rho} \cdot \operatorname{tg} B_1 \Phi; \\ \gamma_{\rho z} &= 2 \cdot \frac{1}{F_2} \cdot \varepsilon_{\rho} = 2 \cdot \varepsilon_{\rho} \cdot \operatorname{tg} B_2 \Phi.\end{aligned}\quad (4.67)$$

Можно показать, что

$$\xi_{\rho} = -\xi_z = H_{\xi} \cdot \exp \theta_1' \cdot \cos B_1 \Phi; \quad \varepsilon_{\rho} = -\varepsilon_z = H_{\varepsilon} \cdot \exp \theta_2' \cdot \cos B_2 \Phi \quad (4.68)$$

Подставляя последние соотношения, значения для $\dot{\gamma}_{\rho z}$ и $\gamma_{\rho z}$ в уравнение неразрывности скоростей деформаций и деформаций (4.47) или (4.54), (4.55) получим уравнение неразрывности для скоростей деформаций:

$$\begin{aligned}& \left\{ H_{\xi} \cdot \left[-\theta_{1\rho\rho}' - (\theta_{1\rho}' + B_1 \Phi_z)^2 + \theta_{1zz}' + (\theta_{1z}' - B_1 \Phi_{\rho})^2 \right] - (H_{\xi})_{\rho\rho} - \right. \\ & - 2(H_{\xi})_{\rho} \cdot (\theta_{1\rho}' + B_1 \Phi_z) + (H_{\xi})_{zz} + 2 \cdot (H_{\xi})_z \cdot (\theta_{1z}' - B_1 \Phi_{\rho}) \left. \right\} \cdot \cos B_1 \Phi + \\ & + \left\{ 2 \cdot H_{\xi} \cdot (B_1 \Phi_{\rho} - \theta_{1z}') \cdot (\theta_{1\rho}' + B_1 \Phi_z) - 2(H_{\xi})_z \cdot (B_1 \Phi_z + \theta_{1\rho}') + \right. \\ & \left. + 2(H_{\xi})_{\rho} \cdot (B_1 \Phi_{\rho} - \theta_{1z}') + H_{\xi} \cdot (B_1 \Phi_{\rho\rho} - B_1 \Phi_{zz}) \right\} \cdot \sin B_1 \Phi = \\ & = 2H_{\xi} \cdot B_1 \Phi_{\rho z} \cdot \cos B_1 \Phi + \left[2 \cdot (H_{\xi})_{\rho z} + 2 \cdot H_{\xi} \cdot \theta_{1\rho z}' \right] \cdot \sin B_1 \Phi,\end{aligned}\quad (4.69)$$

и для деформаций:

$$\begin{aligned}
& \left\{ H_\varepsilon \cdot \left[-\theta'_{2\rho\rho} - (\theta'_{2\rho} + B_2\Phi_z)^2 + \theta'_{2zz} + (\theta'_{2z} - B_2\Phi_\rho)^2 \right] - (H_\varepsilon)_{\rho\rho} - \right. \\
& - 2(H_\varepsilon)_\rho \cdot (\theta'_{2\rho} + B_2\Phi_z) + (H_\varepsilon)_{zz} + 2 \cdot (H_\varepsilon)_z \cdot (\theta'_{2z} - B_2\Phi_\rho) \left. \right\} \cdot \cos B_2\Phi + \\
& + \left\{ 2 \cdot H_\varepsilon \cdot (B_2\Phi_\rho - \theta'_{2z}) \cdot (\theta'_{2\rho} + B_2\Phi_z) - 2(H_\varepsilon)_z \cdot (B_2\Phi_z + \theta'_{2\rho}) + \right. \\
& \left. + 2(H_\varepsilon)_\rho \cdot (B_2\Phi_\rho - \theta'_{2z}) + H_\varepsilon \cdot (B_2\Phi_{\rho\rho} - B_2\Phi_{zz}) \right\} \cdot \sin B_2\Phi = \\
& = 2H_\varepsilon \cdot B_2\Phi_{\rho z} \cdot \cos B_2\Phi + \left[2 \cdot (H_\varepsilon)_{\rho z} + 2 \cdot H_\varepsilon \cdot \theta'_{2\rho z} \right] \cdot \sin B_2\Phi.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Уравнения (4.69), (4.70) формально напоминают (4.56). Появляются аналогичные скобки в операторах при тригонометрических функций, что позволяет получить тождества для функций ξ_ρ и ε_ρ в уравнениях неразрывности при выполнении следующих условий: $(\theta'_1)_\rho = -B_1\Phi_z$; $(\theta'_1)_z = -B_1\Phi_\rho$; $(\theta'_2)_\rho = -B_2\Phi_z$; $(\theta'_2)_z = -B_2\Phi_\rho$. Эти дифференциальные соотношения представляют собой соотношения Коши – Римана, но уже для деформированного состояния среды, а указанные функции являются гармоническими.

Таким образом, выражения для определения скоростей деформаций и деформаций принимают следующий вид:

$$\xi_\rho = -\xi_z = H_\xi \cdot \exp \theta'_1 \cdot \cos B_1\Phi = H_\xi \cdot \exp(-B_1\theta) \cdot \cos B_1\Phi; \tag{4.71}$$

$$\dot{\gamma}_{\rho z} = 2H_\xi \cdot \exp \theta'_1 \cdot \sin B_1\Phi = 2H_\xi \cdot \exp(-B_1\theta) \cdot \sin B_1\Phi; \tag{4.72}$$

$$H_i = 2H_\xi \cdot \exp \theta'_1 = 2H_\xi \cdot \exp(-B_1\theta); \tag{4.73}$$

$$\varepsilon_\rho = -\varepsilon_z = H_\varepsilon \cdot \exp \theta'_2 \cdot \cos B_2\Phi = H_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta) \cdot \cos B_2\Phi; \tag{4.74}$$

$$\gamma_{\rho z} = 2H_\varepsilon \cdot \exp \theta'_2 \cdot \sin B_2\Phi = 2H_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta) \cdot \sin B_2\Phi; \tag{4.75}$$

$$\Gamma_i = 2H_\varepsilon \cdot \exp \theta'_2 = 2H_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta); \tag{4.76}$$

при $(\theta'_1)_z = -B_1\Phi_\rho$; $(\theta'_1)_\rho = -B_1\Phi_z$; $(\theta'_2)_z = -B_2\Phi_\rho$; $(\theta'_2)_\rho = -B_2\Phi_z$; где H_i - интенсивность сдвига скоростей деформаций; Γ_i - интенсивность деформации сдвига.

Анализируя выражения (4.71)-(4.76) и (4.62)-(4.65), можно сделать вывод о том, что в данных выражениях присутствуют функции от координат θ и Φ . Указанные функции позволяют согласовать поля напряжений, поля скоростей деформаций и поля деформаций.

Рассмотрим температурную задачу. Решение данной задачи также может определяться исходя из указанных выше параметрических зависимостей.

Запишем дифференциальное уравнение для стационарного температурного поля:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.77)$$

Его решение определяется в следующем виде:

$$T = \exp(\theta'_3) \cdot (H'_T \cdot \sin B_3\Phi + H''_T \cdot \cos B_3\Phi); \quad (4.78)$$

$$T = T_\beta \left(\sin B_3\Phi + \frac{H''_T}{H'_T} \cdot \cos B_3\Phi \right);$$

где $T_\beta = H'_T \cdot \exp(\theta'_3)$, при $(\theta'_3)_\rho = -B_3\Phi_z$; $(\theta'_3)_z = B_3\Phi_\rho$.

Покажем, что (4.78) удовлетворяет уравнению Лапласа. Подставив (4.78) в уравнение теплопроводности (4.77), после преобразований и упрощений получим:

$$\begin{aligned}
& \{ (\theta'_3)_{\rho\rho} + [(\theta'_3)_\rho + B_3\Phi_z] \cdot [(\theta'_3)_\rho - B_3\Phi_z] + (\theta'_3)_{zz} + [(\theta'_3)_z + B_3\Phi_\rho] \cdot [(\theta'_3)_z - B_3\Phi_\rho] \} \times \\
& \times (H'_T \cdot \sin B_3\Phi + H''_T \cdot \cos B_3\Phi) + [2 \cdot (\theta'_3)_\rho + B_3\Phi_\rho + B_3\Phi_{\rho\rho} + 2(\theta'_3)_z \cdot B_3\Phi_z + \Phi_{zz}] \times \\
& \times (H'_T \cdot \cos B_3\Phi - H''_T \cdot \sin B_3\Phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Как и в уравнениях неразрывности для скоростей деформаций и деформаций (4.69), (4.70), а также уравнении для определения компонентов тензора напряжений (4.56), в выражении (4.79) появляются аналогичные выражения в скобках. Выражения в скобках являются следствием преобразований нелинейных операторов, стоящих при тригонометрических функциях. Если указанные выражения приравнять нулю, то (4.79) превратится в тождество. Покажем это. Скобки после дифференцирования примут следующий вид: $(\theta'_3)_{\rho\rho} = -B_3\Phi_{z\rho}$; $(\theta'_3)_{zz} = -B_3\Phi_{\rho z}$; $B_3\Phi_{\rho\rho} = (\theta'_3)_{z\rho}$; $B_3\Phi_{zz} = (\theta'_3)_{\rho z}$.

Убеждаемся, что при подстановки последних соотношений в выражение (4.79), получим тождество. Выражения в скобках соответствуют соотношением Коши – Римана. Таким образом, можно сделать вывод, что ранее вводимые в рассмотрение функции являются гармоническими. Следовательно, в зависимостях для температур присутствуют те же переменные, что и для напряжений и деформаций.

Используя соотношения (4.62), (4.73), (4.76) и (4.78) для определения сопротивления пластической деформации сдвига, получены выражения для определения интенсивности скоростей деформаций сдвига, интенсивности деформации сдвига и температуры [17]:

$$k = H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta);$$

$$H_i = 2H_\xi \cdot \exp \theta'_1 = 2H_\xi \cdot \exp(-B_1\theta);$$

$$\Gamma_i = 2H_\varepsilon \cdot \exp \theta'_2 = 2H_\varepsilon \cdot \exp(-B_2\theta);$$

$$T_\beta = H'_T \cdot \exp(\theta'_3) = H'_T \cdot \exp(-B_3\theta) \quad (4.80)$$

В приведенных выражениях в значениях θ'_1 , θ'_2 , θ'_3 содержатся одинаковые функции θ . Определим данную зависимость:

$$\exp(-\theta) = \left(\frac{H_i}{2H_\xi}\right)^{\frac{1}{B_1}} = \left(\frac{\Gamma_i}{2H_\varepsilon}\right)^{\frac{1}{B_2}} = \left(\frac{T_\beta}{H'_T}\right)^{\frac{1}{B_3}}. \quad (4.81)$$

Представим сопротивление пластической деформации в следующем виде: $k = H_\sigma \cdot \exp(-A_1\theta) \cdot \exp(-A_2\theta) \cdot \exp(-A_3\theta) \cdot \exp(-A_4\theta) \cdot \exp(-A_5\theta)$, или $k = H_\sigma \cdot \exp \theta = H_\sigma \cdot \exp(-A\theta)$;

$$\text{где } \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = -A\theta = -(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) \cdot \theta.$$

При подстановке соотношения $k = T_i$ в выражение для сопротивления деформации (4.80), имеем:

$$k = H'_\sigma (2 \cdot H_{\sigma_1} \cdot H_\xi)^{m_1} \cdot (2 \cdot H_{\sigma_2} \cdot H_\varepsilon)^{m_2} \cdot (H_{\sigma_3} \cdot H'_T)^{m_3} \times \\ \times (H_i)^{m_4} \cdot (\Gamma_i)^{m_5} \cdot (T_\beta)^{m_6} \cdot \exp \theta_4 \cdot \exp \theta_5 \quad (4.82)$$

$$\text{здесь } m_1 = \frac{A_1}{B_1}; m_2 = \frac{A_2}{B_2}; m_3 = \frac{A_3}{B_3}.$$

С учетом вышеизложенного, модель сложной пластической среды примет следующий вид:

$$T_i = \chi (H_i)^{m_1} \cdot (\Gamma_i)^{m_2} \cdot (T)^{m_3} \cdot \exp \theta_4 \cdot \exp \theta_5 \quad (4.83)$$

Значения интенсивности сдвига скоростей деформаций H_i , интенсивности деформации сдвига Γ_i и температуры среды T входящие в выражение (4.83) являются переменными величинами и определяются для

каждой точки очага деформации. Согласно данным Андреюка Л.В., Тюленева Г.П. [146], существуют аналогичные модели полученные на основании экспериментальных исследований в условиях однородного напряженного и деформированного состояний. Данная модель позволяет определить предел текучести σ_T для шестидесяти шести марок стали в зависимости от таких параметров пластического деформирования как: скорости деформации U , степени деформации ε и температуры T_0 . Модель пластической среды Андреюка, Тюленева имеет вид:

$$\sigma_T = S \cdot \sigma_0 \cdot U^a \cdot (10 \cdot \varepsilon)^b \cdot \left(\frac{T_0}{1000} \right)^c. \quad (4.84)$$

Используя (4.83) и выражение (4.84) как своеобразное граничное условие, можно получить распределение предела текучести по объему очага деформации в зависимости от распределения скорости деформации, степени деформации и температуры

4.4 Выводы

1. Получено замкнутое аналитическое решение осесимметричной задачи теории пластичности методом гармонических функций:

- решено, с учетом принятых допущений, нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных гиперболического типа;

- получены аналитические зависимости для определения компонентов тензора напряжений (4.14), (4.31), (4.32);

- показано, что дифференциальные уравнения для определения касательных напряжений и скоростей деформаций сдвига относятся к одинаковому типу уравнений и их решения принадлежат к одному классу функций;

- получены аналитические зависимости для определения компонентов тензора скоростей деформаций (4.42)-(4.44), которые позволяют вести расчет неоднородного напряженно–деформированного состояния металла не только на контакте, но и в каждой точке очага деформации.

2. Построена математическая модель пластической упрочняющейся среды (4.83), учитывающая значения интенсивности сдвига скоростей деформаций, интенсивности деформации сдвига и температуры.

3. Научные результаты, определяющие новизну опубликованы в работах [2]-[4], [17].

РАЗДЕЛ 5
РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ПОЛЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В предыдущем разделе было получено замкнутое аналитическое решение осесимметричной задачи теории пластичности. Особенностью данного решения является возможность определения компонентов тензора напряжений и тензора скоростей деформаций не только на контакте, но и в каждой точке очага деформации с учетом основных факторов влияющих на неравномерность пластического формоизменения.

Представляют практический интерес решения прикладных задач теории пластичности для осесимметричной плоской задачи в аналитическом виде. Как показывает анализ литературных данных, одной из прикладных задач может быть определение напряженно–деформированного состояния толстостенной полый цилиндрической детали при ее пластическом формоизменении в осевом направлении. В разделе 3 приведен анализ пластического формоизменения изделий типа кольца в осевом направлении без ограничения течения металла в радиальном направлении (осадка между плоскими шероховатыми плитами), а так же, с частичным или полным ограничением течения металла в радиальном направлении. При этом изменяется схема пластического течения металла, распространение неоднородности в объеме, происходит изменение очага деформирования с двухзонного на однозонный.

Рассмотрим решение прикладной задачи пластичности в аналитическом виде для разнообразных вариантов пластического формоизменения цилиндрических полых изделий в осевом направлении.

5.1 Определение компонентов тензора напряжений при осевом нагружении полых цилиндрических заготовок. Двухзонный очаг деформирования

Рассмотрим пластическое деформирование толстостенной круглой полой заготовки в осевом направлении. Схема осадки представлена рисунком 5.1.

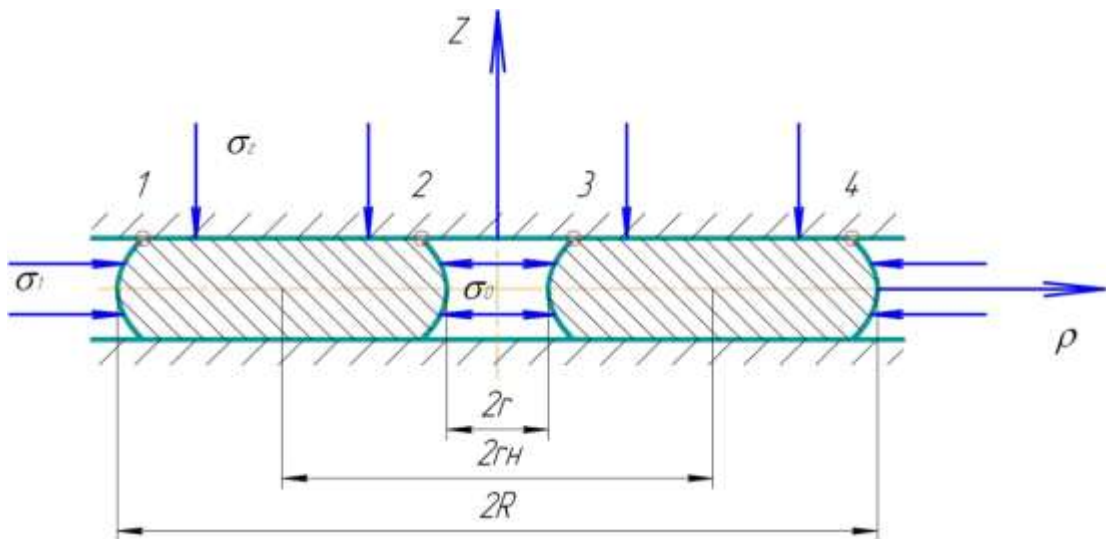


Рисунок 5.1 – Схема пластического деформирования толстостенной полой цилиндрической детали.

Согласно экспериментальным данным, при осадке детали типа кольца между двумя плоскими плитами, имеет место двухзонный очаг деформации, т.е. стенка течет в обе стороны относительно нейтральной оси. При этом внутренний диаметр уменьшается, а наружный – увеличивается. Поэтому значение функции $A\Phi$, с учетом уравнений Лапласа $\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0$ имеет вид:

$$A\Phi = AA_1 \cdot z + AA_6 \cdot z \cdot \rho \quad (5.1)$$

После некоторых преобразований получим:

$$A\Phi = AA_6 \cdot z \left(\frac{AA_1}{AA_6} + \rho \right) = -AA_6 \cdot z \cdot (\rho - r_n) \quad (5.2)$$

где, r_n - радиус нейтрального сечения, в котором происходит раздел течения металла в противоположные стороны.

Из соотношений Коши – Римана $\theta_\rho = -A\Phi_z$; $\theta_z = A\Phi_\rho$, определяем θ :

$$\begin{aligned} A\Phi_\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} [-AA_6 \cdot z(\rho - r_n)] = -AA_6 \cdot z \\ A\Phi_z &= \frac{\partial}{\partial z} [-AA_6 \cdot z(\rho - r_n)] = -AA_6(\rho - r_n) \\ \theta'_\rho &= AA_6(\rho - r_n); \theta''_z = -AA_6 \cdot z \\ \theta' &= AA_6 \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n + f(z) \\ \theta'' &= -AA_6 \frac{z^2}{2} + f(\rho) \\ AA_6 \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n + f(z) &= -AA_6 \frac{z^2}{2} + f(\rho) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для дальнейших расчетов необходимо принять:

$$f(z) = -AA_6 \frac{z^2}{2}; f(\rho) = AA_6 \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n \quad (5.4)$$

Тогда

$$\theta = AA_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n - AA_6 \frac{z^2}{2} \quad (5.5)$$

где, A_6 - постоянная величина, которая задается условиями трения на контакте.

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся граничными условиями:

При $\rho = r$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta'_0$:

$$\theta'_0 = AA_6 \cdot \frac{r^2}{2} - AA_6 \cdot r \cdot r_n - \frac{1}{2} AA_6 \frac{h^2}{4} \quad (5.6)$$

При $\rho = R$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta'_1$:

$$\theta'_1 = AA_6 \cdot \frac{R^2}{2} - AA_6 \cdot R \cdot r_n - \frac{1}{2} AA_6 \frac{h^2}{4} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \theta_0 = \theta - \theta'_0 &= AA_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n - AA_6 \frac{z^2}{2} - AA_6 \cdot \frac{r^2}{2} + AA_6 \cdot r \cdot r_n + \frac{1}{2} AA_6 \frac{h^2}{4} = \\ &= AA_6 \left[\frac{1}{2} (\rho^2 - r^2) + r_n (-\rho + r) + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right] = \\ &= -AA_6 \left[r_n (\rho - r) - \frac{1}{2} (\rho^2 - r^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = \theta - \theta'_1 &= AA_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot \rho \cdot r_n - AA_6 \frac{z^2}{2} - AA_6 \cdot \frac{R^2}{2} + AA_6 \cdot R \cdot r_n + \frac{1}{2} AA_6 \frac{h^2}{4} = \\ &= AA_6 \left[\frac{1}{2} (\rho^2 - R^2) + r_n (\rho - R) + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right] = \\ &= -AA_6 \left[r_n (\rho - R) - \frac{1}{2} (\rho^2 - R^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для решения задачи необходимо определить постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом граничных условий. Задаем следующие граничные условия:

При $\rho = r$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta_0$, $A\Phi = A\Phi_0$, $\sigma_\rho - \sigma_z = 2k_0 - \sigma_0$;

$$2k_0 - \sigma_0 = 2 \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0 = 2k_0 \xi_0; \quad \xi_0 = 1 - \frac{\sigma_0}{2k_0}. \quad (5.10)$$

При $\rho = R$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta_1$, $A\Phi = A\Phi_1$, $\sigma_\rho - \sigma_z = 2k_1 - \sigma_1$;

$$2k_1 - \sigma_1 = 2 \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) \exp \theta_1 \cdot \cos A\Phi_1 = 2k_1 \xi_1; \quad \xi_1 = 1 - \frac{\sigma_1}{2k_1}. \quad (5.11)$$

Исходя из (5.10), (5.11) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2k_0 \xi_0 &= 2 \left(C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \right) \cdot \exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0; \\ 2k_1 \xi_1 &= 2 \left(C_1 \cdot R + \frac{C_2}{R} \right) \cdot \exp \theta_1 \cdot \cos A\Phi_1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из системы уравнений (5.12) найдем C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} - r \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} \right]; \\ C_2 &= \frac{R \cdot r}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} - r \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Решая уравнение Лапласа определяем функции $A\Phi_0$ и $A\Phi_1$:

$$-A\Phi_0 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}(r - r_n); \quad A\Phi_1 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}(R - r_n). \quad (5.14)$$

Подставляя определенные постоянные интегрирования (5.13) в аналитические зависимости для определения компонентов тензора

напряжений (4.14), (4.31), (4.32) можно записать выражения для определения нормальных и касательных напряжений следующего вида [1]-[2]:

$$\sigma_{\rho} = \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0 \quad (5.15)$$

$$\sigma_z = -3 \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0 \quad (5.16)$$

$$\tau_{\rho z} = \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin A\Phi \quad (5.17)$$

где ξ_0 и ξ_1 - коэффициенты бокового подпора, учитывающие воздействие инструмента на внутреннюю и наружную боковую поверхность деформируемого образца.

Данные выражения определяют напряжения не только на контакте, но и в каждой точке очага деформации.

Для анализа выражений (5.15)-(5.17), определяющих нормальные и касательные составляющие тензора напряжений, были построены графики распределения напряжений на контакте по длине очага деформации в зависимости от таких технологических факторов как коэффициент трения и фактор формы (отношение толщины стенки полого цилиндра к его высоте) без учета воздействия инструмента на внутреннюю и наружную боковую поверхность деформируемого тела, т.е. $\xi_0 = \xi_1 = 1$ (рис. 5.2 – 5.3).

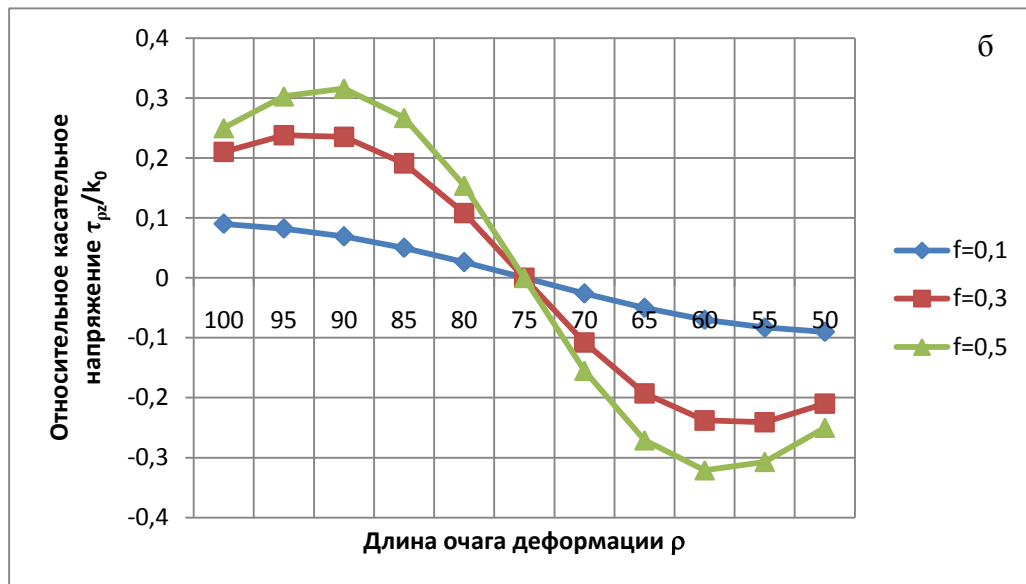
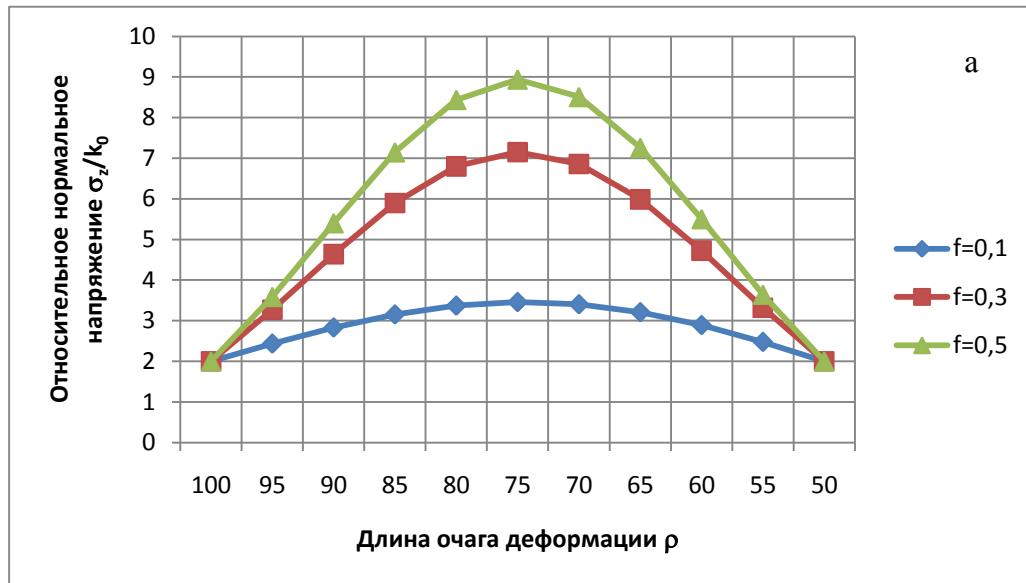


Рисунок 5.2 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения на контакте при факторе формы $l/h=5$, в зависимости от коэффициента трения.

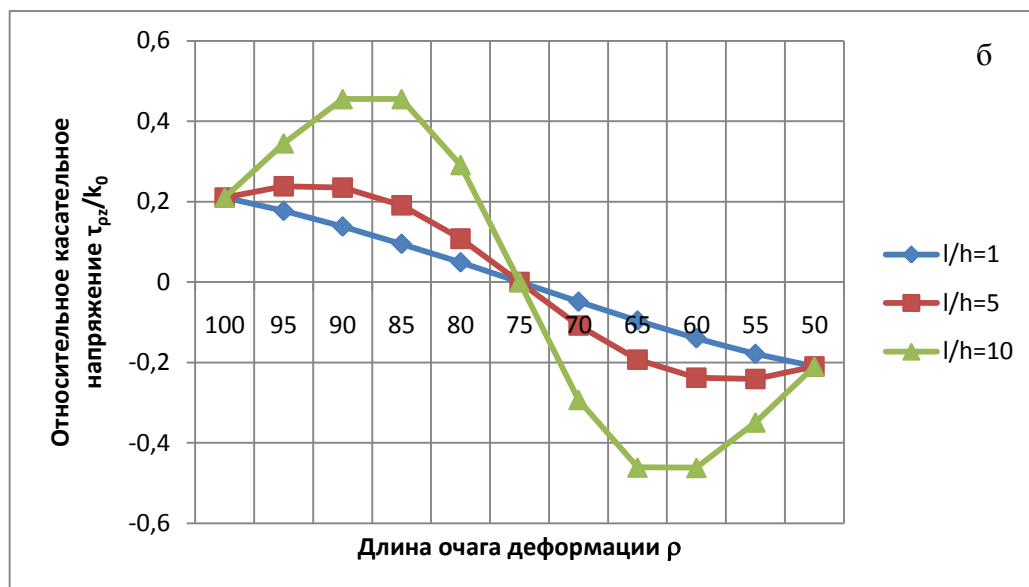
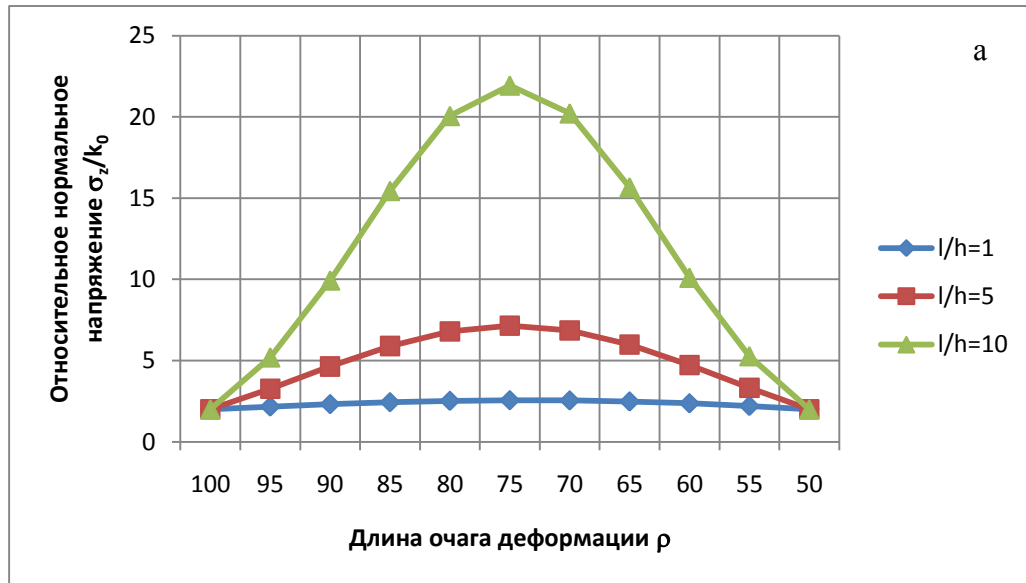


Рисунок 5.3 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения на контакте при коэффициенте трения $f=0,3$, в зависимости от фактора формы.

Выражения (5.15)-(5.17) определяют напряжения не только на контакте но и в каждой точке очага деформации. Приведем графики распределения относительного нормального и касательного напряжения в промежуточном горизонтальном сечении (рис. 5.4 – 5.5):

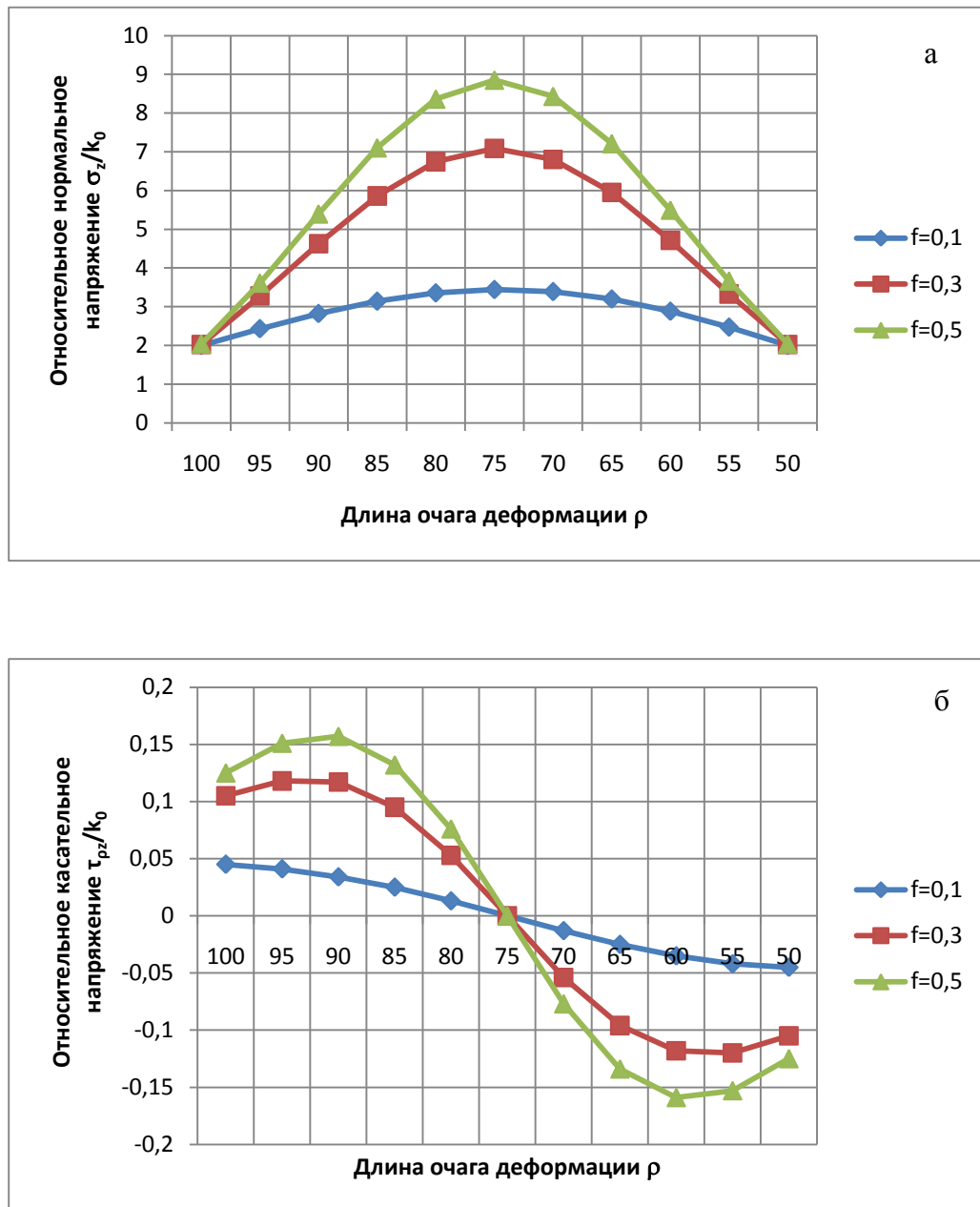


Рисунок 5.4 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения в промежуточном горизонтальном сечении при факторе формы $l/h=5$, в зависимости от коэффициента трения.

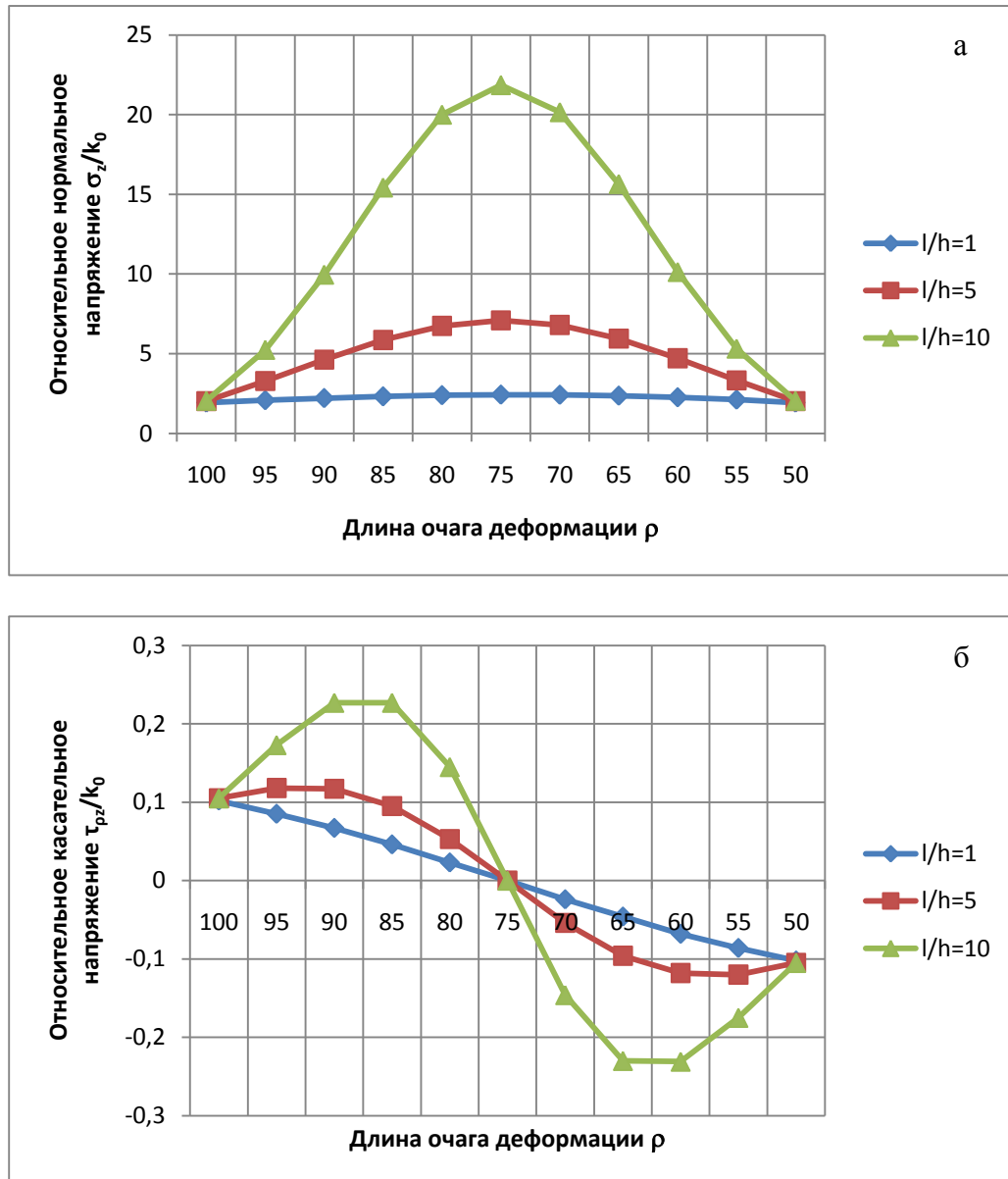


Рисунок 5.5 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения в промежуточном горизонтальном сечении при коэффициенте трения $f=0,3$, в зависимости от фактора формы.

Сопоставляя графики распределения нормальных и касательных напряжений на контакте (см. рис. 5.2 – 5.3) и внутри очага деформирования в промежуточном горизонтальном сечении (см. рис. 5.4 – 5.5) можно сделать вывод о том, что значение нормальных составляющих тензора напряжений практически не изменяются в обоих случаях. Однако, происходит изменение касательных напряжений (в два раза) при переходе от рассмотрения

напряжений на контакте к напряжениям внутри очага деформирования. Данные графики еще раз подтверждают наличие неравномерности пластического течения металла по объему очага деформирования. Приведем графики распределения относительного нормального и касательного напряжения в промежуточном вертикальном сечении (рис. 5.6– 5.7):

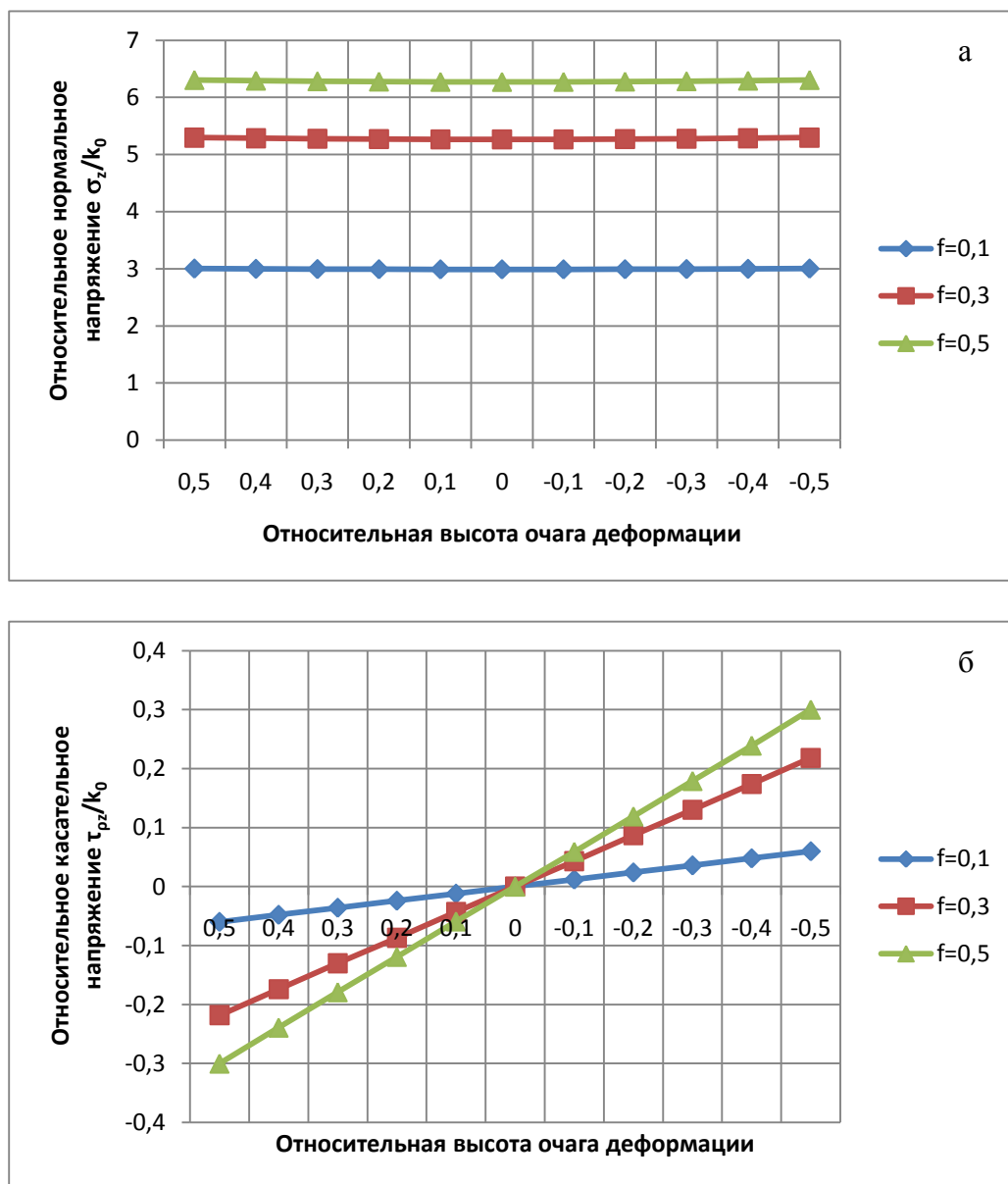


Рисунок 5.6 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения в промежуточном вертикальном сечении при факторе формы $l/h=5$, в зависимости от коэффициента трения.

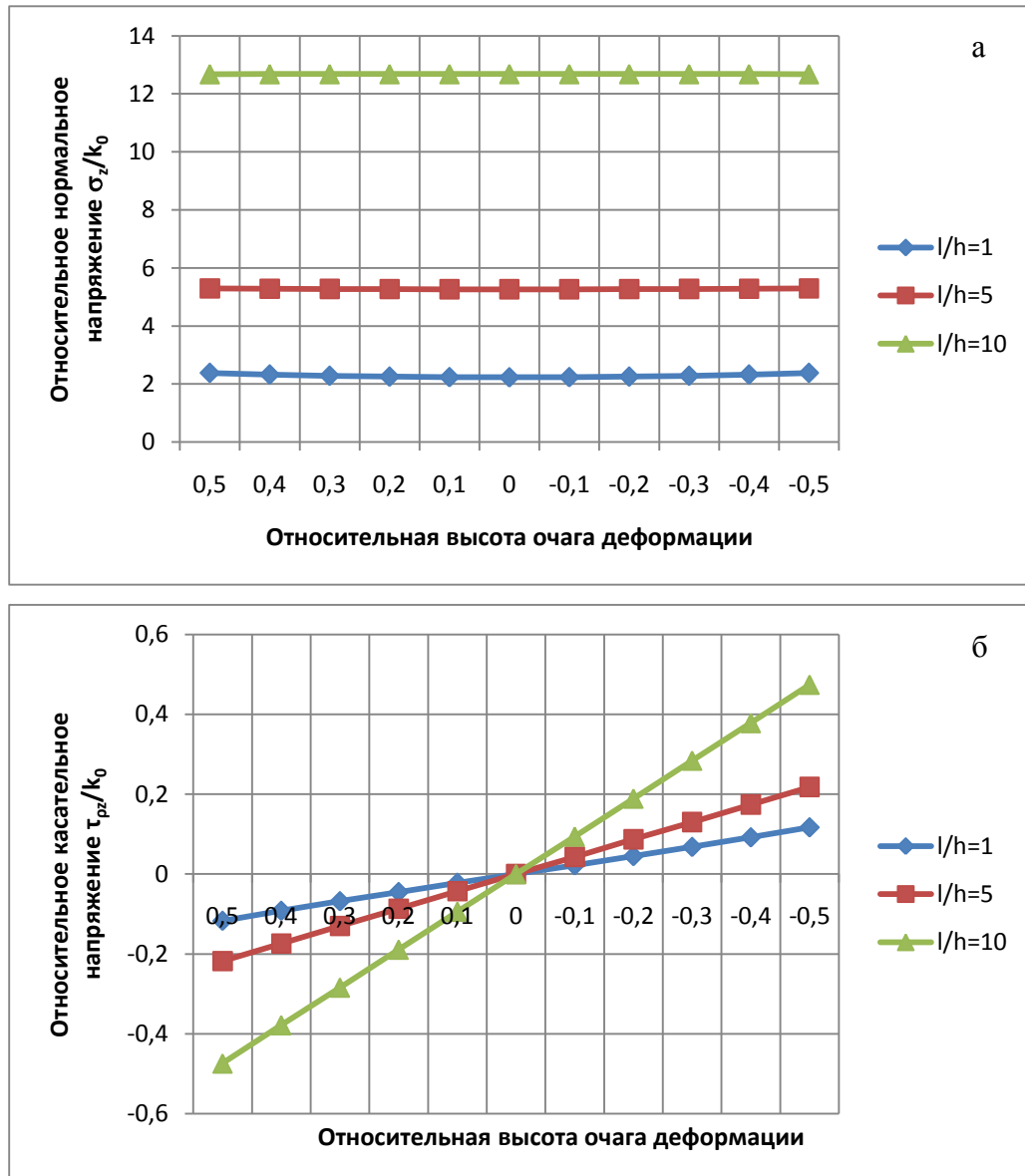


Рисунок 5.7 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения в промежуточном вертикальном сечении при коэффициенте трения $f=0,3$, в зависимости от фактора формы.

Анализируя приведенные графики, можно сделать вывод о том, что эпюры напряжений качественно и количественно совпадают с данными Сторожева М.В., Попова Е.А. [93], Соколовского В.В. [125]. Однако, особенностью представленного решения является то, что касательное напряжение в нейтральном сечении на контакте переходит через ноль, что отсутствует в решениях указанных авторов, где обозначен разрыв согласно

Амонтону и Зибелю. Кроме того существует возможность определения напряженного состояния не только на контакте, но и в середине очага деформации. Используя выражения (5.15)-(5.17) можно определить влияние на контактное давление и напряжение в зоне формоизменения, внутреннего и наружного давления в осаживаемом цилиндрическом пустотелом образце. Это влияние представлено на (рис. 5.8-5.9), [3]-[4].

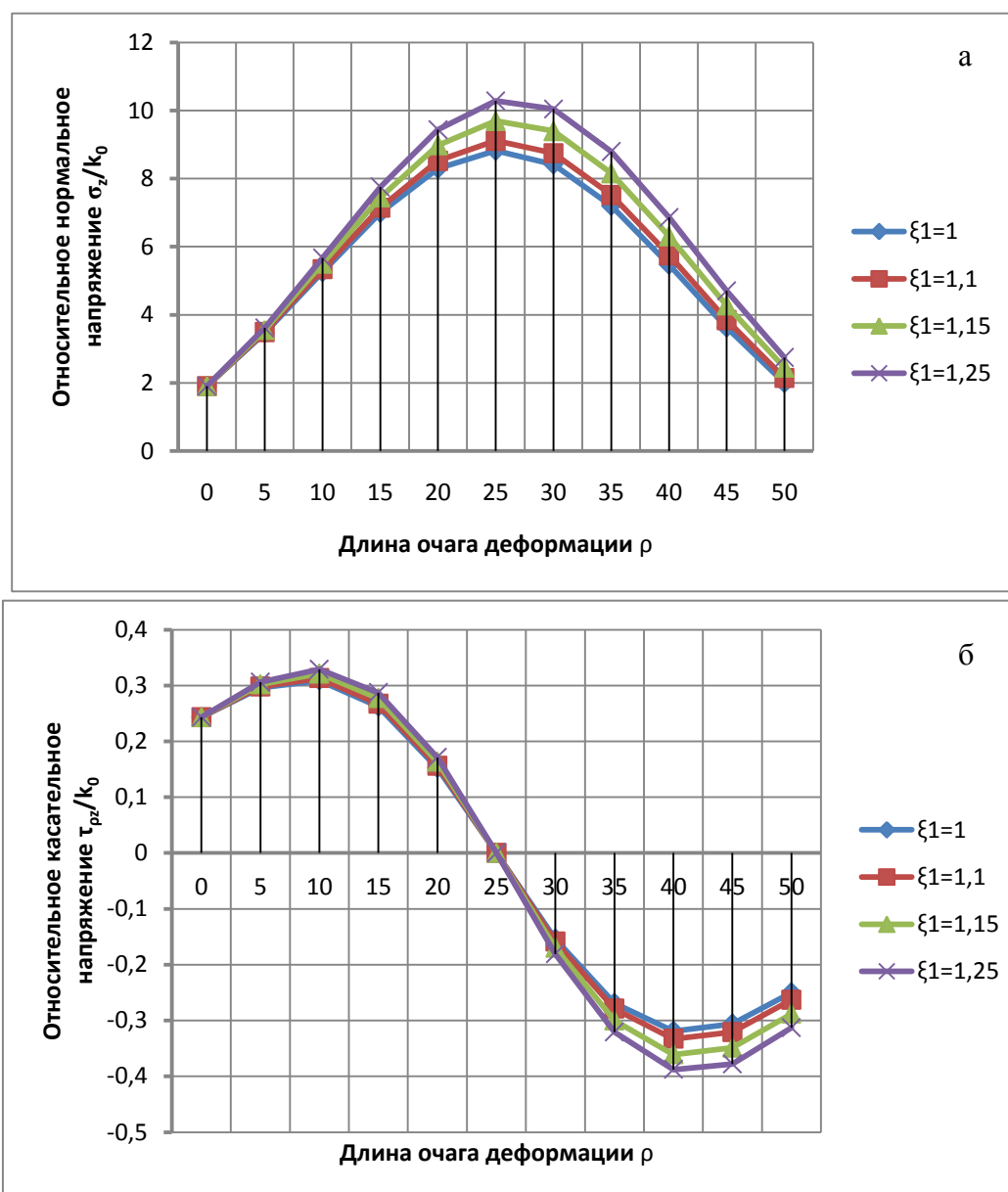


Рисунок 5.8 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения при факторе формы $l/h = 5$; коэффициенте трения $f=0,5$; $\xi_1=1 \dots 1,25$; $\xi_0=1$.

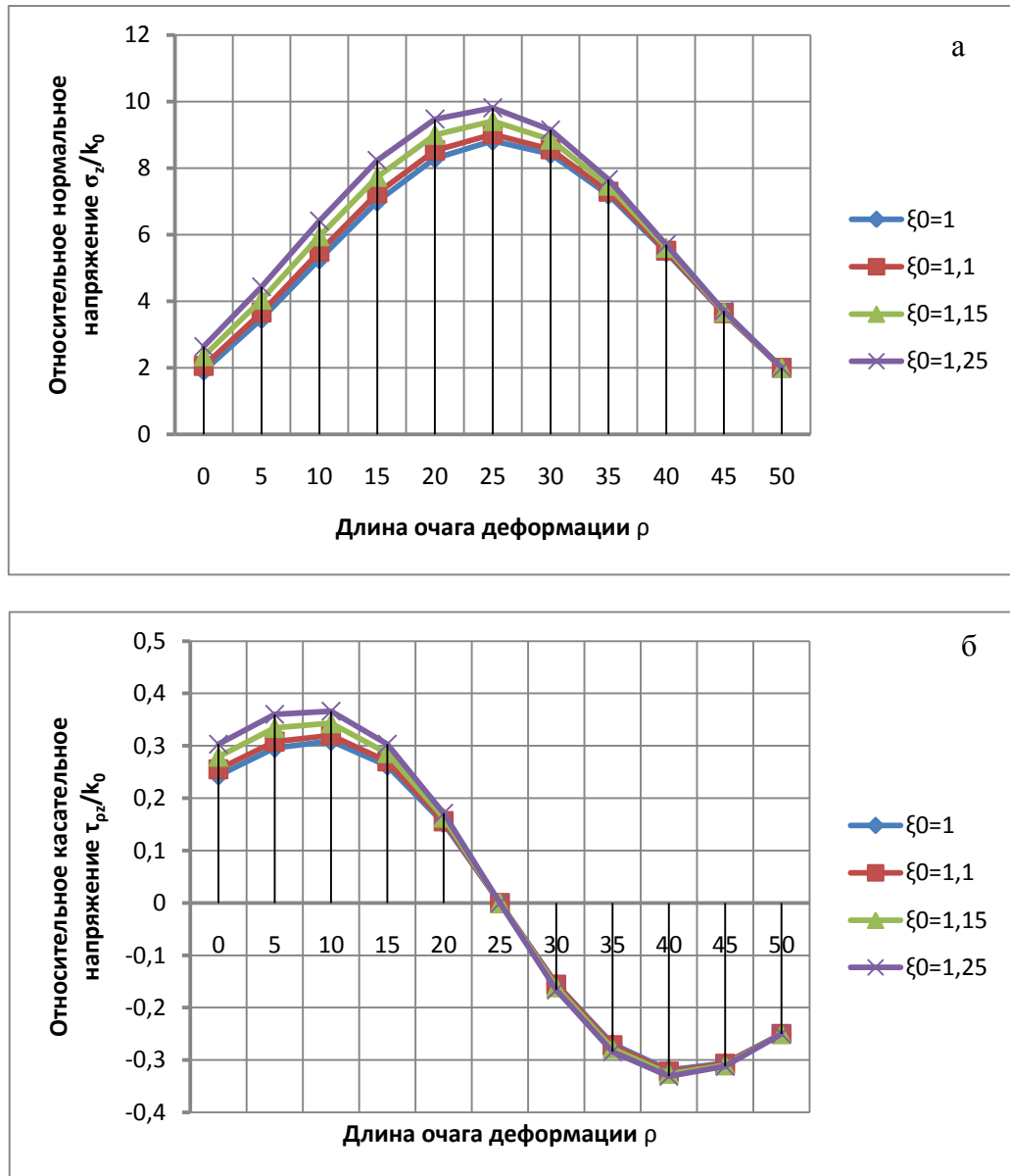


Рисунок 5.9 - Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения при факторе формы $l/h = 5$; коэффициенте трения $f=0,5$; $\xi_1=1$; $\xi_0=1 \dots 1,25$.

Из этих графиков (рис. 5.8-5.9) видно, что на величину и характер распределения нормальных и касательных напряжений, кроме коэффициента трения и фактора формы, также влияет значение бокового внутреннего и наружного подпора ξ_1 и ξ_0 . Под коэффициентом бокового подпора следует понимать воздействие инструмента на внутреннюю и внешнюю поверхность

осаживаемого образца, либо же воздействие сопрягающихся элементов конструкции детали при сложной объемной деформации.

5.2 Определение положения нейтрального сечения при двустороннем течении металла

Согласно данным Тарновского И.Я., при осадке толстостенной полой заготовки при отсутствии смазки на торцевых поверхностях, происходит двустороннее течение металла (рис. 5.10) [92]. Таким образом происходит одновременное увеличение радиуса наружной боковой поверхности и уменьшение радиуса внутренней боковой поверхности.

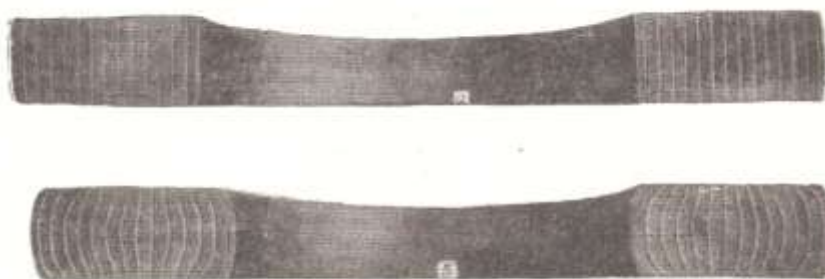


Рисунок 5.10 - Схема течения металла при осадке кольца со смазкой и в условиях сухого трения [92].

Граница разделения течения металла внутрь и наружу является цилиндрической поверхностью, которая называется нейтральной поверхностью, а ее радиус - нейтральным радиусом. Зная положение нейтральной поверхности можно определить размеры полой заготовки при осадке без учета бочкообразования (рис.5.11).



Рисунок 5.11 - Схема деформации полый толстостенной заготовки[92].

Как показано выше, известными факторами, влияющими на процесс пластического течения металла и расположения нейтральной поверхности, являются соотношение длины и высоты очага деформации l/h , т.е. фактора формы и коэффициента трения в месте контакта заготовки с инструментом, а также рассматривается дополнительный фактор, коэффициент внутреннего и наружного подпора.

Представляет интерес изучение влияния радиального внешнего подпора на характер распределения напряжений по объему очага деформации.

Радиальное воздействие имеет место при осадке колец, бандажей в контейнерах с целью получения заданных размеров по диаметру; осадке порошкового материала в жестких матрицах для получения полого цилиндрического изделия на заключительных стадиях процесса. При осадке поковок сложной цилиндрической формы, где действие одного элемента на смежный представляется, как внешнее воздействие.

На рис. 5.10, 5.11 показано течение металла при осадке кольца при отсутствии радиального воздействия.

Рассмотрим напряженное состояние при внешнем воздействии радиальных нагрузок при осадке полых цилиндрических изделий.

Влияние внешнего воздействия в выражениях (5.15)-(5.17) учитывается коэффициентами бокового подпора ξ_1 и ξ_0 при этом $\xi_0 = 1 + \frac{\sigma_0}{\beta\sigma_T}$, $\xi_1 = 1 + \frac{\sigma_1}{\beta\sigma_T}$,

где, σ_1 и σ_0 - радиальные подпирющие напряжения приложенные к трубе со стороны внутреннего и наружного диаметров (см. рис. 5.1).

Из вышеизложенного следует, что решение для напряжений (5.15)-(5.17) имеет место тогда, когда выполняются следующие условия для функций θ и $A\Phi$:

$$\begin{aligned}\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} &= 0; \theta_{\rho} = -A\Phi_z; \\ A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} &= 0; \theta_z = A\Phi_{\rho}\end{aligned}\quad (5.18)$$

Выполняя условия (5.18), т.е. решая уравнения Лапласа имеем:

$$\begin{aligned}A\Phi &= AA_1 z + AA_6 \cdot \rho \cdot z = -AA_6 \cdot z \cdot (\rho - r_n); \\ \theta &= AA_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot r_n \cdot \rho - AA_6 \cdot \frac{z^2}{2}\end{aligned}\quad (5.19)$$

где r_n - радиус нейтрального сечения.

Используя граничные условия (5.10), (5.11) получим значения AA_6 :

$$AA_6 = 2 \frac{A\Phi_0}{h(r_n - r)} \quad (5.20)$$

В выражении (5.17) для касательных напряжений можно определить положение нейтрального радиуса r_n . Подставляя граничные условия (5.10), (5.11) для точек 1,2,3,4 (см. рис.5.1) имеем:

$$\tau_{k1} = k_1 \cdot \psi_1 = \frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 (R^2 - r^2)}{R(R^2 - r^2) \cos A\Phi_1} \sin A\Phi_1; \quad \tau_{k0} = k_0 \cdot \psi_0 = -\frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 (r^2 - R^2)}{r(R^2 - r^2) \cos A\Phi_0} \sin A\Phi_0;$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = \xi_1 \operatorname{tg} A\Phi_1 \text{ или } \operatorname{tg} A\Phi_1 = \frac{\psi_1}{\xi_1}; \quad A\Phi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\psi_1}{\xi_1}, \text{ где: } \psi_1 = f(1-f) \\ \psi_0 = \xi_0 \operatorname{tg} A\Phi_0 \text{ или } \operatorname{tg} A\Phi_0 = \frac{\psi_0}{\xi_0}; \quad A\Phi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\psi_0}{\xi_0}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Фиксируя функцию $A\Phi$ в точках 1,2,3,4 (см. рис.5.1), получаем:

$$A\Phi_1 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}(R - r_n); \quad -A\Phi_0 = -AA_6 \cdot \frac{h}{2}(r - r_n). \quad (5.22)$$

После преобразования из (5.22) получим выражение для определения нейтрального радиуса r_n [7]:

$$r_n = \frac{A\Phi_0 \cdot R + A\Phi_1 \cdot r}{A\Phi_1 + A\Phi_0}. \quad (5.23)$$

В соответствии с выводом: $A\Phi_0 \approx \frac{\psi_0}{\xi_0}$; $A\Phi_1 \approx \frac{\psi_1}{\xi_1}$, и подставляя в (5.23),

окончательно имеем:

$$r_n = \frac{\psi_0 \cdot \xi_1 \cdot R + \psi_1 \cdot \xi_0 \cdot r}{\psi_1 \cdot \xi_0 + \psi_0 \cdot \xi_1}. \quad (5.24)$$

Нейтральный радиус r_n определяется не только значениями наружного и внутреннего диаметров, но и величинами подпоров ξ_1 и ξ_0 , контактным трением на наружной и внутренней боковых поверхностях ψ_1 и ψ_0 .

При $\psi_0 = \psi_1$ формула (5.23) принимает вид:

$$r_n = \frac{\xi_1 \cdot R + \xi_0 \cdot r}{\xi_0 + \xi_1} \quad (5.25)$$

И при $\xi_0 = \xi_1$ значение нейтрального радиуса будет равно:

$$r_n = \frac{R+r}{2} = R_{cp} \quad (5.26)$$

где R_{cp} - средний радиус заготовки.

Выражения (5.15)-(5.17) показывают, что в общем случае, распределение напряжений носит асимметричный характер. Это наглядно представлено на рис. 5.12 при факторе формы $l/h=1$ и коэффициенте трения равном 0,1;0,3;0,5.

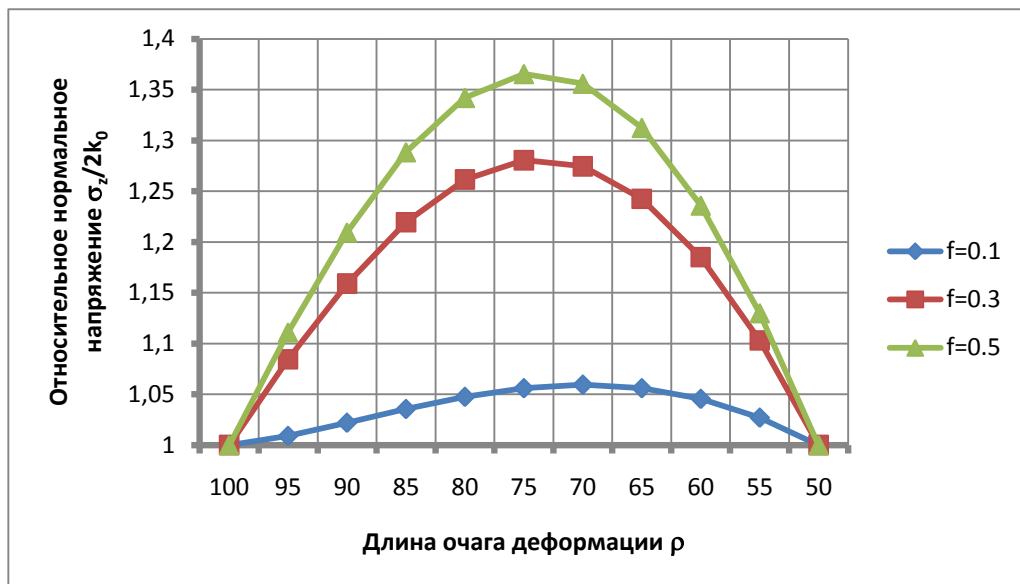


Рисунок 5.12 - Распределение относительного нормального напряжения при факторе формы $S/h=1$; коэффициенте трения $f=0,1; 0,3; 0,5$.

Пик эпюры смещается в сторону меньшего диаметра при коэффициенте трения 0,1, а при коэффициентах трения 0,3 и 0,5 пик эпюры смещается в сторону среднего радиуса. С увеличением фактора формы и коэффициента трения максимальные нормальные напряжения и зона перехода касательных напряжений смещается к среднему радиусу R_{cp} .

Рассмотрим влияние внешнего радиального подпора ξ_1 и ξ_0 на величину и смещение нейтрального радиуса r_n .

На рис. 5.13 показана зависимость относительной величины нейтрального радиуса от относительного подпора полученного на основании выражения (5.25).

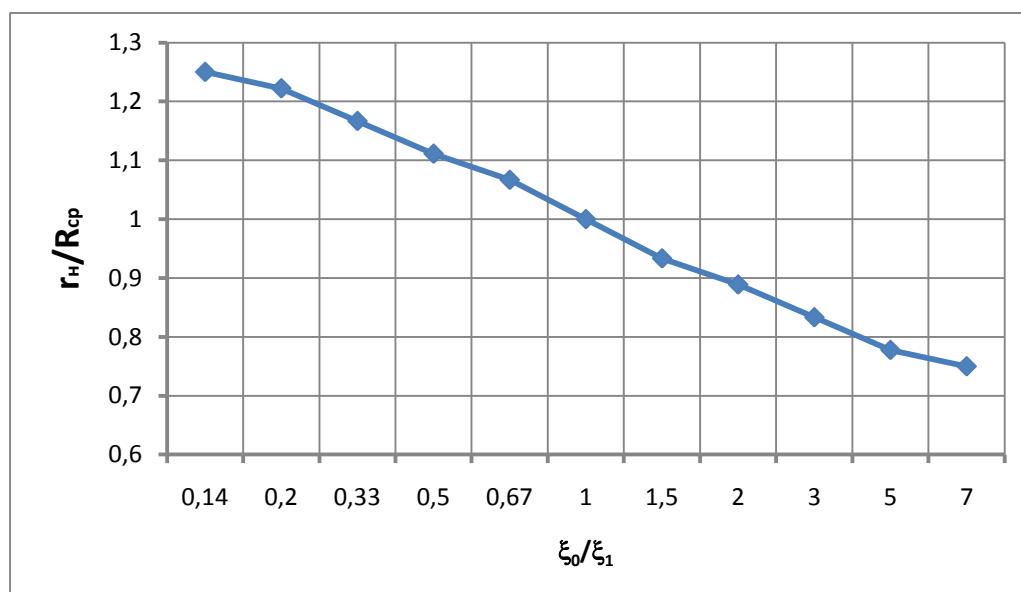


Рисунок 5.13 - Изменение относительного нейтрального радиуса в зависимости от соотношения ξ_0/ξ_1 .

При заданных значениях с увеличением внутреннего подпора $\xi_0/\xi_1 > 1$ нейтральный радиус уменьшается и смещается в направлении внутреннего радиуса, увеличивая зону течения металла в направлении внешней боковой поверхности. С увеличением внешнего подпора, $\xi_0/\xi_1 < 1$, изменение положения нейтрального радиуса изменяется противоположным образом.

Влияние внешнего радиального подпора ξ_1 и ξ_0 , на контактные напряжения представлены на рис. 5.14 - 5.15.

Распределение и величина контактных напряжений определяется нейтральным радиусом r_n , внешним подпором ξ_1 , ξ_0 , фактором формы l/h и коэффициентом трения f . Значение r_n входит в выражения компонентов тензора напряжений (5.15)-(5.17). С изменением r_n изменяются значения,

входящие в квадратные скобки указанных формул, и аргументы тригонометрических функций. Определяющим значением здесь является тригонометрическая функция, линейно зависящая от нейтрального радиуса. Переход касательного напряжения через ноль определяет положение нейтрального радиуса на осаживаемой стенке полого цилиндра. Нормальное напряжение в этой зоне принимает максимальное значение.

На рис.5.14 показано распределение контактных напряжений в зависимости от радиального подпора ξ_1 со стороны внешнего диаметра. С увеличением подпора увеличивается значение нормального напряжения со стороны внешнего диаметра с постепенным затуханием к противоположной стороне. Характер распределения контактных касательных напряжений другой. Следовало бы ожидать расслоения кривых и для касательных напряжений, в области данной точки, как это имеет место в работе [5]. Однако, разделение точек на графике практически не заметно. Объясняется это тем, что с увеличением ξ_1 значение в квадратной скобке в выражении (5.17) также увеличивается, однако значение тригонометрической функции в данной точке резко уменьшается и конечный результат для разных значений ξ_1 мало отличается друг от друга.

Для симметричного нагружения $\xi_0 = \xi_1 = 1$, кривая нормальных напряжений практически симметрична, а кривая касательных проходит через ноль в зоне среднего радиуса. Распределение напряжений изменяется с увеличением ξ_1 . Пик эпюры контактных нормальных напряжений смещается в сторону внешнего диаметра, точка перехода касательных напряжений также смещается в этом же направлении. Форма кривой касательных напряжений в зонах противоположных знаков разная. При смещении зоны перехода к большему диаметру кривая напряжений в данной зоне уменьшает свою кривизну. На участке большей длины обозначается пик кривой,

который вслед за зоной перехода постепенно смещается в сторону внешней зоны.

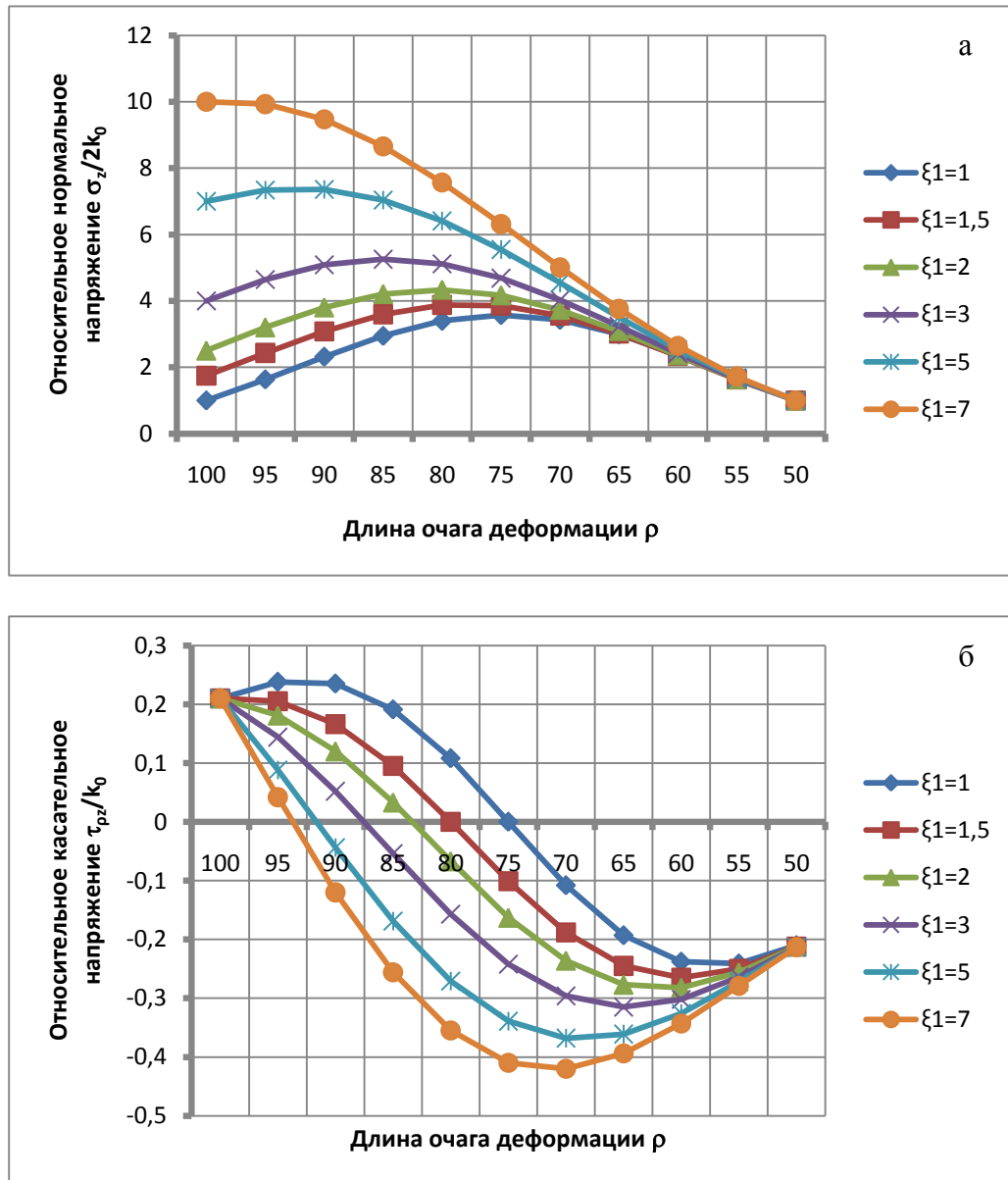


Рисунок 5.14 – Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения при факторе формы $l/h=5$; коэффициенте трения $f=0,3$; в зависимости от радиального подпора со стороны внешнего диаметра $\xi_1 = 1...7$; $\xi_0 = 1$.

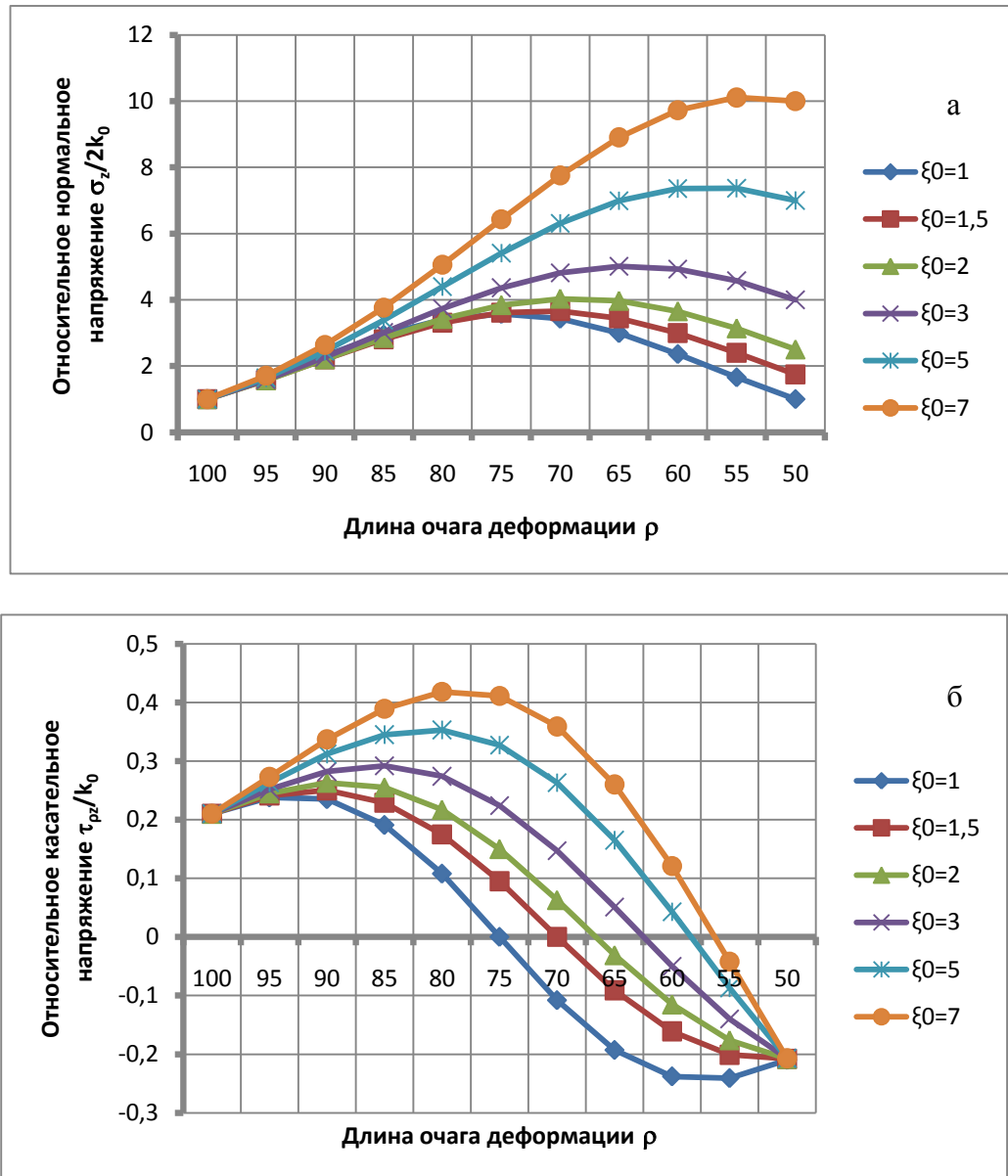


Рисунок 5.15 – Распределение относительного нормального (а) и касательного (б) напряжения при факторе формы $l/h=5$; коэффициенте трения $f=0,3$; в зависимости от радиального подпора со стороны внутреннего диаметра $\xi_1 = 1$; $\xi_0 = 1...7$.

Аналогичный характер распределения кривых наблюдается при действии подпора ξ_0 со стороны внутреннего диаметра, рис. 5.15. Увеличение и смещение касается другой зоны пластического течения, в которой касательные напряжения изменили знак.

В итоге следует отметить, что предложенные решения позволяют качественно и количественно изменить напряженное состояние деформируемого полого цилиндрического тела с учетом основных параметров процесса, включая влияние внешнего подпора. Изменяя подпор, изменяется и распределение контактных напряжений и напряжений всего очага деформации.

Наиболее существенное влияние на распределение контактных нормальных и касательных напряжений по длине очага деформации оказывает коэффициент внутреннего и наружного подпора. Так, при увеличении внутреннего подпора и отсутствии наружного, течение металла происходит во внешнюю сторону, тем самым смещая положения нейтрального радиуса в сторону меньшего диаметра, при этом, нормальные напряжения переходят от симметричной к асимметричной эпюре. Та же самая тенденция для наружного подпора.

Для оценки полученного теоретического результата был поставлен и проведен лабораторный эксперимент по изучению влияния внешнего воздействия инструмента на боковую поверхность осаживаемого образца, смещения радиуса нейтральной поверхности, а также течения металла для двухзонного и однозонного очага деформаций. Подготовка к проведению лабораторного эксперимента представлена в разделе 2 (рис. 2.4 – 2.8). Результаты эксперимента представлены рисунками 5.16 – 5.19.



Рисунок 5.16 – Свободная осадка между двумя плоскими шероховатыми плитами.

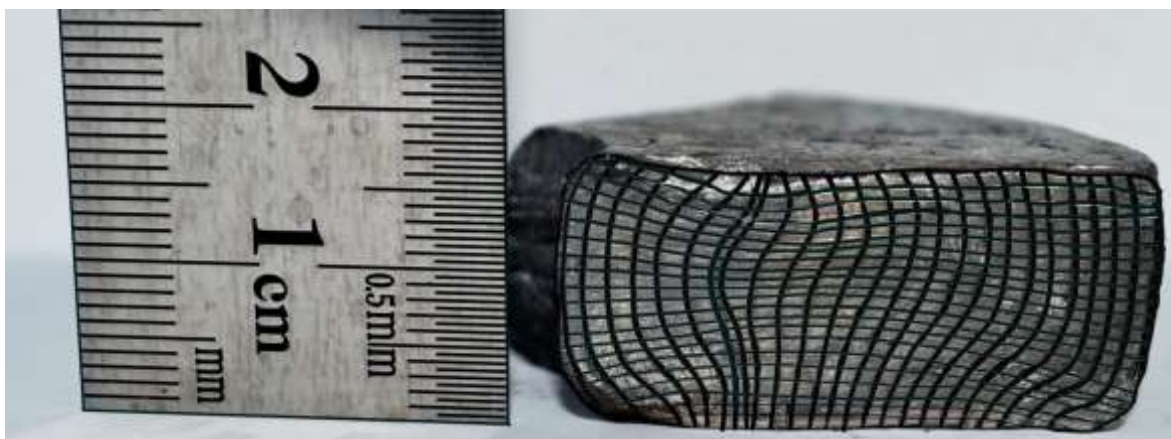


Рисунок 5.17 – Осадка с частичным ограничением течения металла по внутренней боковой поверхности.

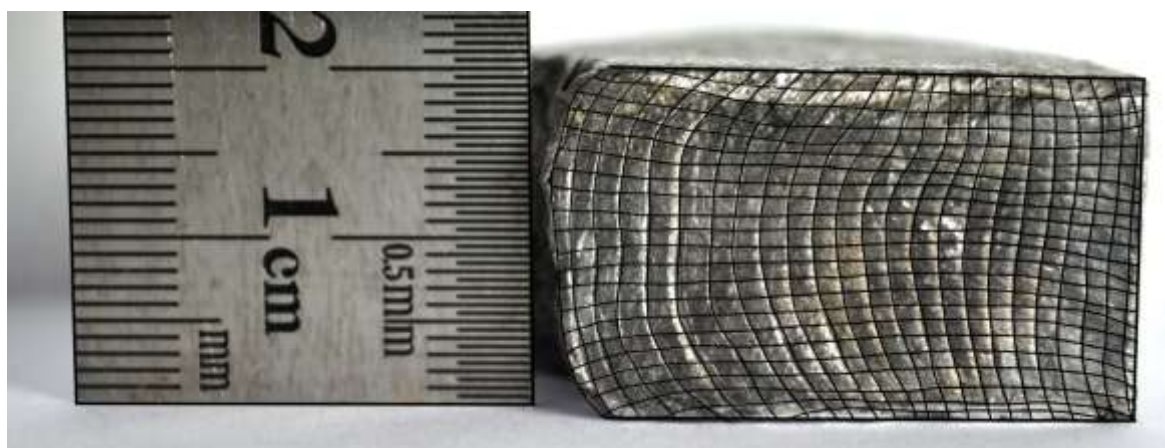


Рисунок 5.18 – Осадка с полным ограничением течения металла по внутренней боковой поверхности.



Рисунок 5.19 - Осадка с полным ограничением течения металла по наружной боковой поверхности.

Таким образом, при свободной осадке между двумя шероховатыми плитами (рис. 5.16) имеет место двухзонный очаг деформации, когда стенки полого цилиндрического изделия растекаются относительно радиуса нейтрального сечения, тем самым увеличивая наружный диаметр и уменьшая внутренний.

При частичном ограничении течения со стороны внутренней боковой поверхности (рис. 5.17) происходит смещение нейтрального радиуса в сторону меньшего диаметра. При полном ограничении течения металла со стороны внутренней или наружной боковой поверхности (рис. 5.18 – 5.19) происходит смещение нейтрального радиуса на внутренний и наружный диаметр соответственно.

В итоге следует отметить, что перемещение нейтрального сечения в зависимости от бокового подпора показано как теоретически, так и экспериментально.

5.3 Анализ одностороннего течения металла при осевом нагружении толстостенных тел вращения

Проведенные экспериментальные исследования и исследования других авторов [91], [95] показывают, что при осадке полых толстостенных тел вращения имеет место как двухзонный так и однозонный очаг деформирования. Однозонное течение металла применяется на практике для вышеуказанных тел при калибровочных операциях, когда необходимо стабилизировать внутренний или наружный диаметр. К таким операциям можно отнести осадку в контейнере либо на оправке, в зависимости от того, какой из диаметров необходимо калибровать.

Для определения напряженного остояния при одностороннем течении металла схема решения задачи несколько меняется. Для нахождения нормальных и касательных составляющих тензора напряжений из выражений (4.14), (4.31), (4.32) необходимо определить постоянную интегрирования C .

Рассматривается одностороннее течение металла $C_1 = C_2 = C$ [9], тогда:

$$\sigma_\rho - \sigma_z = 2C \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi \quad (5.27)$$

Определяем C при $\rho = r, z = \frac{h}{2}, \sigma_\rho - \sigma_z = 2k_0, \theta = \theta_0, A\Phi = A\Phi_0$

$$C = \frac{k_0 \cdot r}{(1 + r^2) \exp \theta_0 \cdot \cos A\Phi_0} \quad (5.28)$$

Подставим C в (4.14), (4.31), (4.32):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= -k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 + r^2} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \cos A\Phi + f(z) \\ \sigma_z &= -3k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 + r^2} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \cos A\Phi + f(\rho) \\ \tau_{\rho z} &= k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 + r^2} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \sin A\Phi \end{aligned} \quad (5.29)$$

Определяем функцию $f(z)$ при следующих граничных условиях:

$$\rho = r; \theta = \theta(z); A\Phi = A\Phi(z); \sigma_\rho = 0:$$

$$0 = -k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp[\theta(z) - \theta_0] \cdot \cos A\Phi(z) + f(z) \quad (5.30)$$

Отсюда находим:

$$f(z) = k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp[\theta(z) - \theta_0] \cdot \cos A\Phi(z) \quad (5.31)$$

Подставляя (5.31) в соответствующее выражение системы (5.29), имеем

$$\sigma_\rho = -k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \left\{ \frac{r}{\rho} \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 + r^2} \exp(\theta - \theta_0) \cdot \cos A\Phi - \exp[\theta(z) - \theta_0] \cdot \cos A\Phi(z) \right\}$$

$$A\Phi = (AA'_6 + AA''_6) \cdot (\rho - r_n) \cdot z;$$

$$AA'_6 = 2 \frac{A\Phi_0}{(R-r) \cdot h}; \quad AA''_6 = 2 \frac{A\Phi_1}{(R-r) \cdot h}.$$

$$\theta - \theta_0 = (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left[-\left(\frac{\rho^2}{2} - \rho \cdot r_n \right) + \left(\frac{r^2}{2} - r \cdot r_n \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]$$

$$\theta(z) - \theta_0 = -(AA'_6 + AA''_6) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$A\Phi(z) = (AA'_6 + AA''_6) \cdot (r - r_n) \cdot z \quad (5.32)$$

Для правильного выбора граничных условий и определения постоянных интегрирования вернемся к результатам проведенного лабораторного эксперимента по изучению течения металла при осадке кольцевой заготовки с разной степенью ограничения радиального перемещения (рис. 5.16-5.19).

Из снимков видно, что нейтральное сечение, относительно которого металл растекается в противоположные стороны, смещается в радиальном направлении. Там где находится нейтральное сечение, нормальные напряжения σ_ρ и σ_z достигают максимального значения. Можно предположить, что в нейтральном сечении возникают максимальные радиальные напряжения подпора обеспечивающие одностороннее течение

металла на всем протяжении. Если течение ограничено внешним подпором, нейтральное сечение определяется положением $r_n = R$, что обеспечивает максимальные радиальные напряжения подпора.

Из рис. 5.16-5.19 видно, что нейтральное сечение смещается в ту или иную сторону в радиальном направлении в зависимости от того с какой стороны имеет место частичное или полное ограничение течения металла. На рис. 5.16-5.17 показано смещение нейтрального сечения в сторону ограничения течения металла со стороны внутреннего диаметра. На рис. 5.18-5.19 показано полное ограничение течения металла в радиальном направлении со стороны внутреннего и со стороны наружного диаметра соответственно.

В первом случае, при полном ограничении течения металла в радиальном направлении, нейтральное сечение, т.е. сечение которого металл перемещается в одну сторону, расположено на внутреннем радиусе $r_n = r$, во втором – на наружном $r_n = R$.

Пусть $r_n = R$, тогда:

$$\theta - \theta_0 = (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left[-\left(\frac{\rho^2}{2} - \rho \cdot R \right) + \left(\frac{r^2}{2} - r \cdot R \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]$$

$$A\Phi = (AA'_6 + AA''_6) \cdot (\rho - R) \cdot z \quad (5.33)$$

Используем следующие граничные условия:

$$\rho = r, z = \frac{h}{2}, A\Phi = A\Phi_0$$

$$\rho = R, z = \frac{h}{2}, A\Phi = A\Phi_1.$$

$$A\Phi_0 = (AA'_6 + AA''_6)(r - R) \frac{h}{2} = 0$$

$$A\Phi_1 = (AA'_6 + AA''_6)(R - R) \frac{h}{2} = 0 \quad (5.34)$$

Отсюда $AA''_6 = 0$

Находим разности:

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= AA'_6 \cdot \left[\frac{1}{2}(r^2 - \rho^2) + R(\rho - r) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right] \\ A\Phi &= AA'_6 \cdot (\rho - R) \cdot z \\ AA'_6 &= 2 \frac{A\Phi_0}{(R - r) \cdot h}; \quad A\Phi_0 = f(1 - f) \\ \theta(z) - \theta_0 &= -AA'_6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad A\Phi(z) = AA'_6 \cdot (r - R) \cdot z\end{aligned}\quad (5.35)$$

Окончательно, выражение для определения напряжений при одностороннем течении металла примет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= -k_0 \frac{1}{\cos A\Phi_0} \left\{ \frac{r}{\rho} \cdot \frac{1 + \rho^2}{1 + r^2} \cdot \exp AA'_6 \left[\frac{1}{2}(r^2 - \rho^2) + R(\rho - r) - \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right] \cdot \cos AA'_6 (\rho - R) \cdot z - \right. \\ &\quad \left. - \exp AA'_6 \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \cdot \cos AA'_6 (r - R) \cdot z \right\}\end{aligned}\quad (5.36)$$

Используя выражение (5.36) были подсчитаны относительные контактные нормальные и касательные напряжения по длине очага деформации при одностороннем течении металла в зависимости от фактора формы l/h и коэффициента трения f (рис.5.20-5.23).

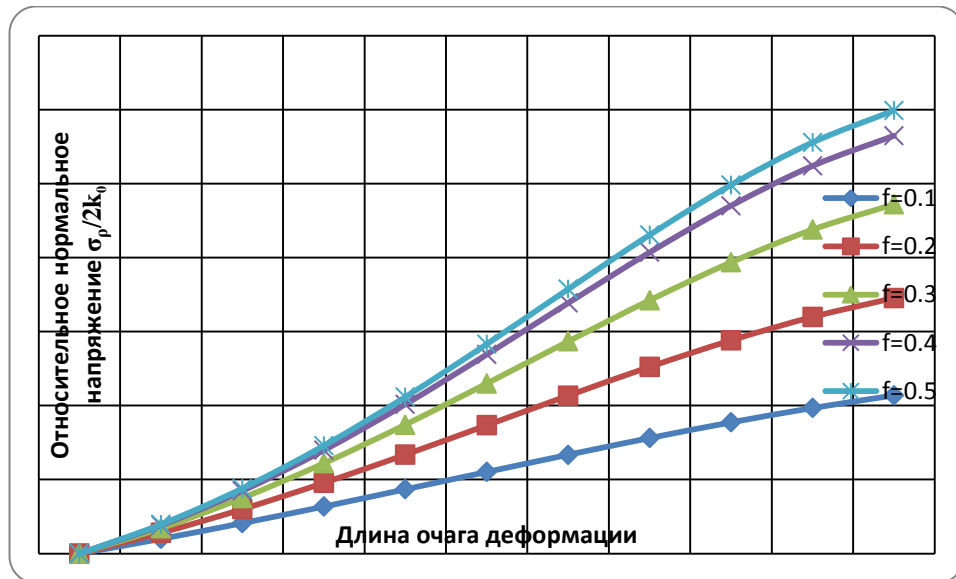


Рисунок 5.20 – Распределение нормальных напряжений при факторе формы $l/h=5$ и коэффициентах трения $f=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$.

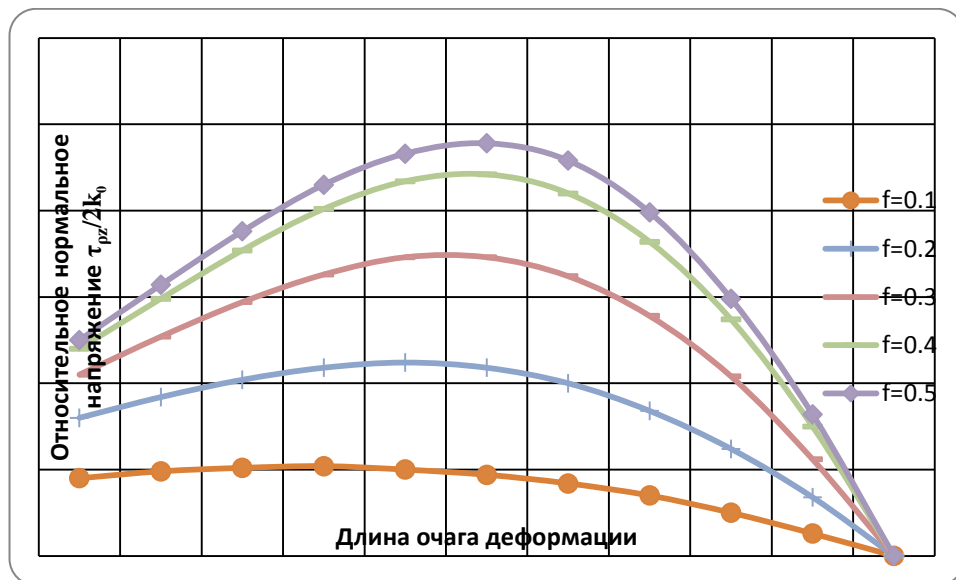


Рисунок 5.21 – Распределение касательных напряжений при факторе формы $l/h=5$ и коэффициентах трения $f=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$.

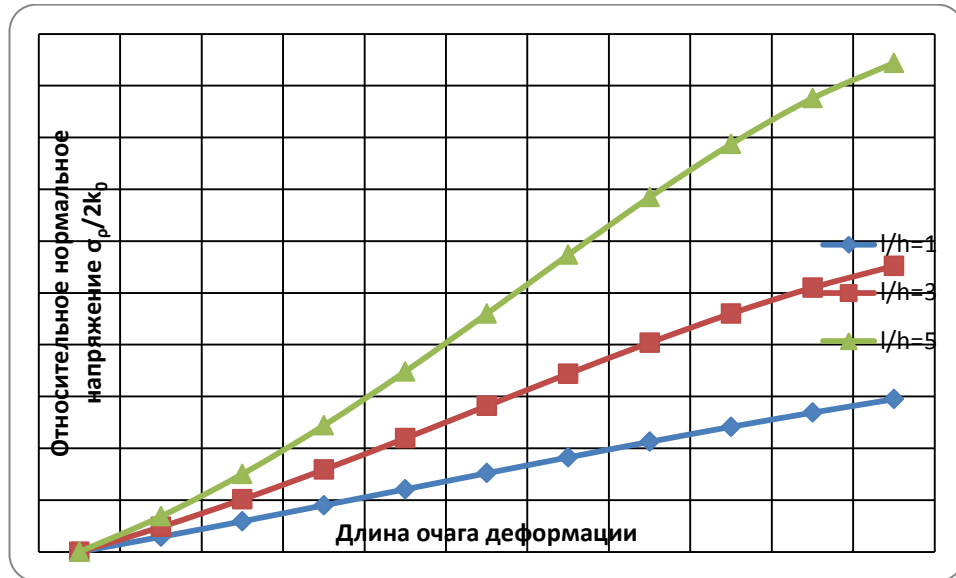


Рисунок 5.22 – Распределение нормальных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторах формы $l/h= 1; 3; 5$.

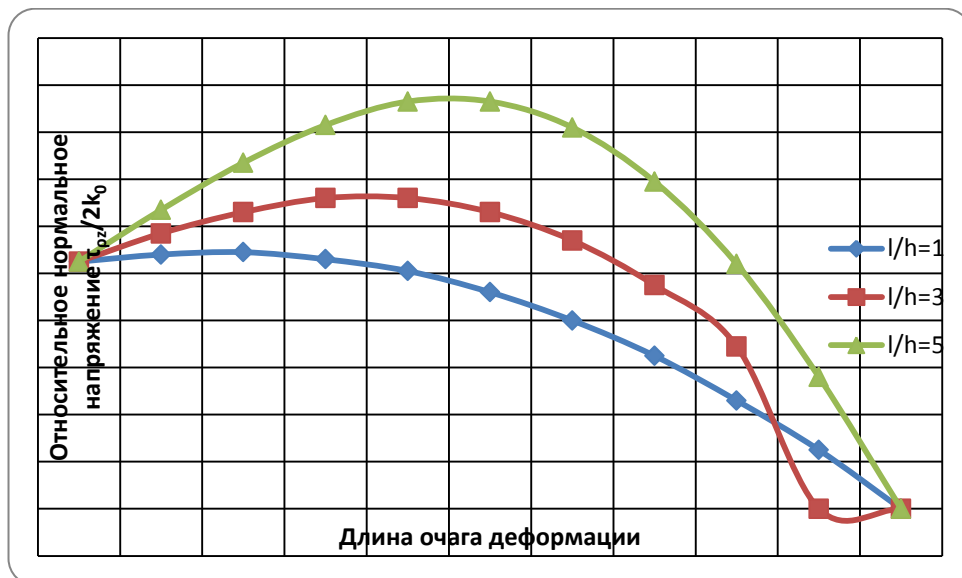


Рисунок 5.23 – Распределение касательных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторах формы $l/h= 1; 3; 5$.

Анализируя выше приведенные графики, можно сделать вывод о том, что с увеличением фактора формы и коэффициента трения увеличивается значение относительных контактных напряжений, что имеет место в реальных процессах при симметричном нагружении. Кроме того, показанный

характер распределения напряжений свидетельствует об одностороннем течении металла в осаживаемой заготовке, максимальному значению нормальных напряжений соответствует нулевое значение касательных напряжений.

5.4 Граничные условия при решении плоской задачи теории пластичности в цилиндрических координатах полуобратным методом

При аналитическом решении задач механики деформированного тела возникает необходимость определения постоянных или функций интегрирования, которые появляются в результате решения дифференциальных уравнений. Определяются они из граничных условий. Однако в прикладной теории пластичности граничные условия также неизвестны. Используют либо экспериментальные данные [93], либо задаваясь законом контактного трения – данные полученные теоретически [141]. Такой метод решения задач механики деформированного твердого тела называют полуобратным. В работах [1]-[8] предложен метод решения плоской осесимметричной задачи теории пластичности с использованием гармонических функций.

Постановка задачи представлена в разделе 3 выражениями (3.1)-(3.6).

Решение системы уравнений (3.1- 3.5) с использованием граничных условий (3.6) приведено в работах [1]-[8]:

$$\sigma_{\rho} = - \left[\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi,$$

$$\sigma_z = -3 \left[\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi,$$

$$\tau_{z\rho} = \left[\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \cdot \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin A\Phi, \quad (5.37)$$

при $\theta_\rho = -A\Phi_z$; $\theta_z = A\Phi_\rho$; $\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0$; $A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0$.

Рассмотрим решение задачи в напряжениях. Используя соотношения (5.18) можно получить для симметричного нагружения

$$A\Phi = (AA'_6 + AA''_6)(\rho - r_n) \cdot z$$

$$\theta = (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \rho \cdot r_n \right) + (AA'_6 + AA''_6) \cdot \frac{z^2}{2} \quad (5.38)$$

Запишем выражение для определения напряжения σ_z [10]:

$$\sigma_z = -3 \frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \left[\frac{r}{\rho} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_0) + \frac{R}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \cos A\Phi + K_0 \quad (5.39)$$

Максимальные значения $\theta - \theta_i$ определяются из формул:

$$\theta - \theta_0 = (AA'_6 + AA''_6) \frac{1}{8} (R - r)^2$$

$$\theta - \theta_1 = (AA'_6 + AA''_6) \frac{1}{8} (R - r)^2 \quad (5.40)$$

при $\rho = \frac{R+r}{2}$, $r_n = \frac{R+r}{2}$.

Тогда

$$\sigma_{z \max} = -3 \frac{K_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{8} 2AA_6 (R - r)^2 \right] \frac{2}{(R^2 - r^2)(R + r)}.$$

$$\cdot \left\{ r \left[\frac{4R^2 - R^2 - 2Rr - r^2}{4} \right] + R \left[\frac{R^2 + 2Rr + r^2 - 4r^2}{4} \right] \right\} + K_0 \quad (5.41)$$

В относительных величинах:

$$\frac{\sigma_{z \max}}{2K_0} = -\frac{3}{2} \frac{1}{\cos \Lambda \Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{4} \Lambda \Lambda_6 (R-r)^2 \right] \frac{1}{2(R^2 - r^2)(R+r)} [R^3 - r^3 + 5Rr(R-r)] + \frac{1}{2} \quad (5.42)$$

Ориентировочно среднее контактное удельное давление:

$$\frac{P_{cp}}{\sigma_T} = \frac{\sigma_{z \max}}{4K_0} = -\frac{3}{4} \frac{1}{\cos \Lambda \Phi_0} \cdot \exp \left[\frac{1}{4} \Lambda \Lambda_6 (R-r)^2 \right] \frac{1}{2(R^2 - r^2)(R+r)} [R^3 - r^3 + 5Rr(R-r)] + \frac{1}{4} \quad (5.43)$$

Для численного подсчета напряжений необходимо знать постоянную $\Lambda \Lambda_6$. В работах [93], [141] (рис. 5.24 – 5.25) показана графическая зависимость среднего коэффициента подпора от фактора формы l/h и коэффициента трения.

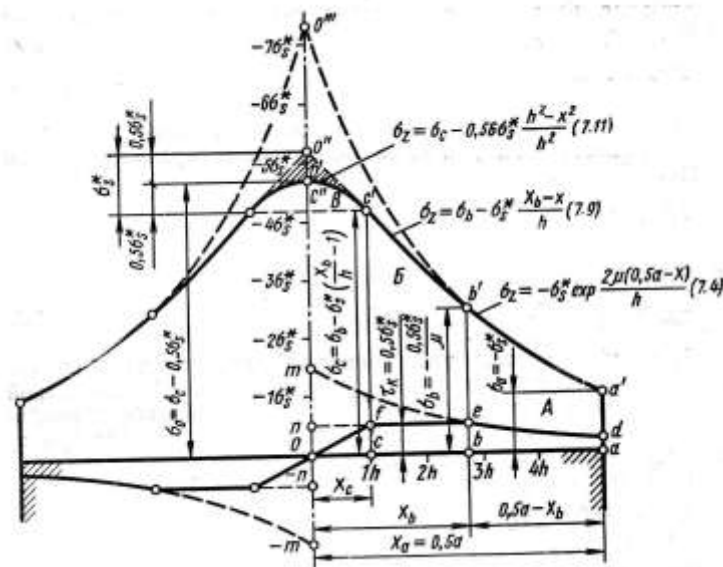


Рисунок 5.24 – Составная эпюра нормальных и касательных напряжений [93].

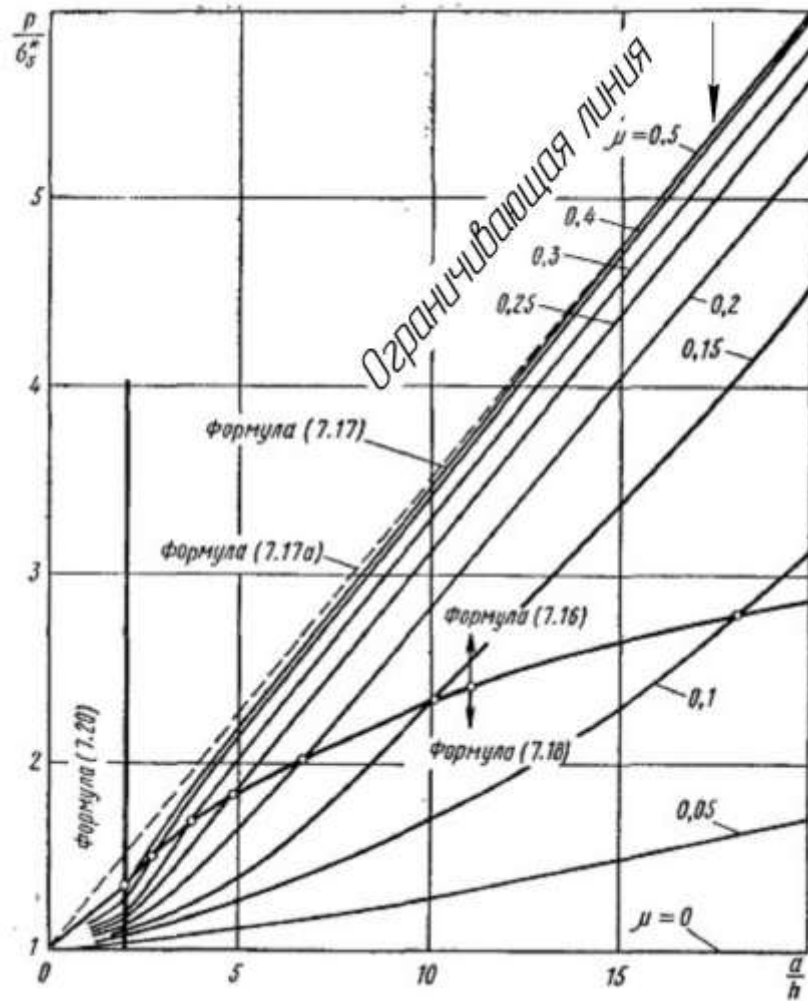


Рисунок 5.25 – Относительные средние контактные напряжения [93].

Очаг деформации разбивается на несколько зон, каждая из которых привязывает тот или иной закон трения.

Составная эпюра нормальных и касательных напряжений представлена на (см. рис.5.24). В начале и конце очага деформации принимается закон трения Амонтона, в средней части – закон Зибеля, и искусственно принятый переходной участок.

Для этой сложной эпюры были подсчитаны относительные средние контактные напряжения представленные на (см. рис. 5.25) Ограничивающая кривая может быть описана следующим выражением:

$$\frac{p_{cp}}{\sigma_T} = 0,25 \frac{l}{h} + 1 \quad (5.44)$$

где p_{cp} - среднее контактное напряжение, σ_T - предел текучести, $\frac{p_{cp}}{\sigma_T}$ - средний коэффициент подпора.

Если коэффициент трения не превышает 0,5 тогда можно записать

$$\frac{p_{cp}}{\sigma_T} = f(1-f) \frac{l}{h} + 1 \quad (5.45)$$

Вот эти данные рассматриваются как граничные условия нашей задачи.

Приравнивая (5.43) и (5.45), находим:

$$f(1-f) \frac{l}{h} + 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2 \cos A\Phi_0 (R^2 - r^2)(R+r)} \cdot \exp \left[\frac{1}{4} AA_6 (R-r)^2 \right] \cdot \left[(R^3 - r^3) + 5Rr(R-r) \right] - \frac{1}{4} \quad (5.46)$$

Логарифмируя (5.46) и после некоторых преобразований, получим:

$$AA_6 = \frac{4}{(R-r)^2} \cdot \ln \frac{\left[(R^3 - r^3) + Rr(R-r) \right] \cdot \frac{4}{3} \left[f(1-f) \cdot \frac{l}{h} + 1,25 \right] \cdot 2 \cos A\Phi_0}{(R^3 - r^3) + 5Rr(R-r)} \quad (5.47)$$

Используя выражения (5.39) и (5.47) были подсчитаны относительные контактные напряжения $\frac{\sigma_z}{2k_0}$ и $\frac{\tau_{pz}}{k_0}$ по длине очага деформации в зависимости от фактора формы l/h и коэффициента трения f (рис.5.26 - 5.27).

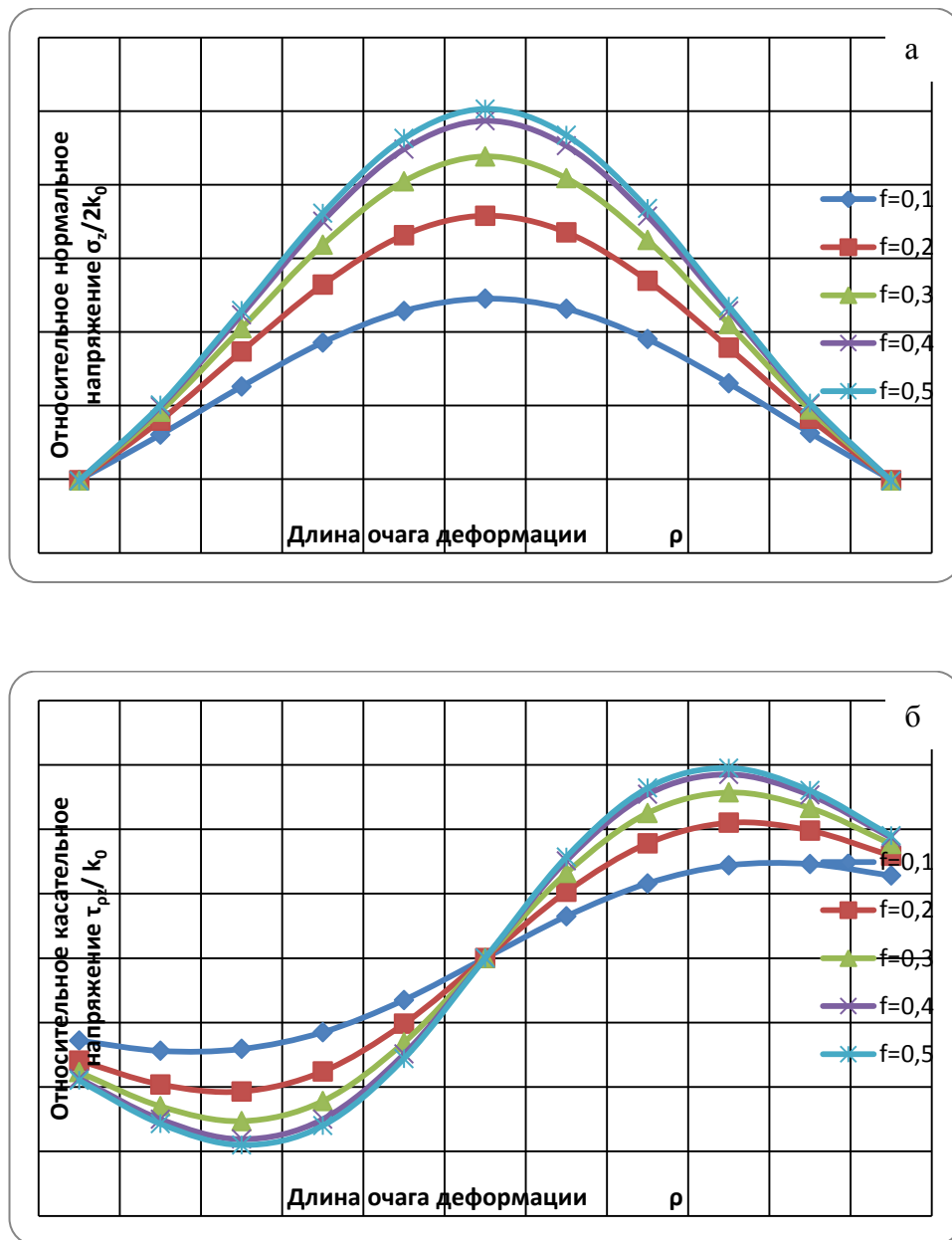


Рисунок 5.26 – Распределение нормальных (а) и касательных (б) контактных напряжений при факторе формы $l/h=8$ и коэффициенте трения $f=0,1;0,2;0,3;0,4;0,5$.

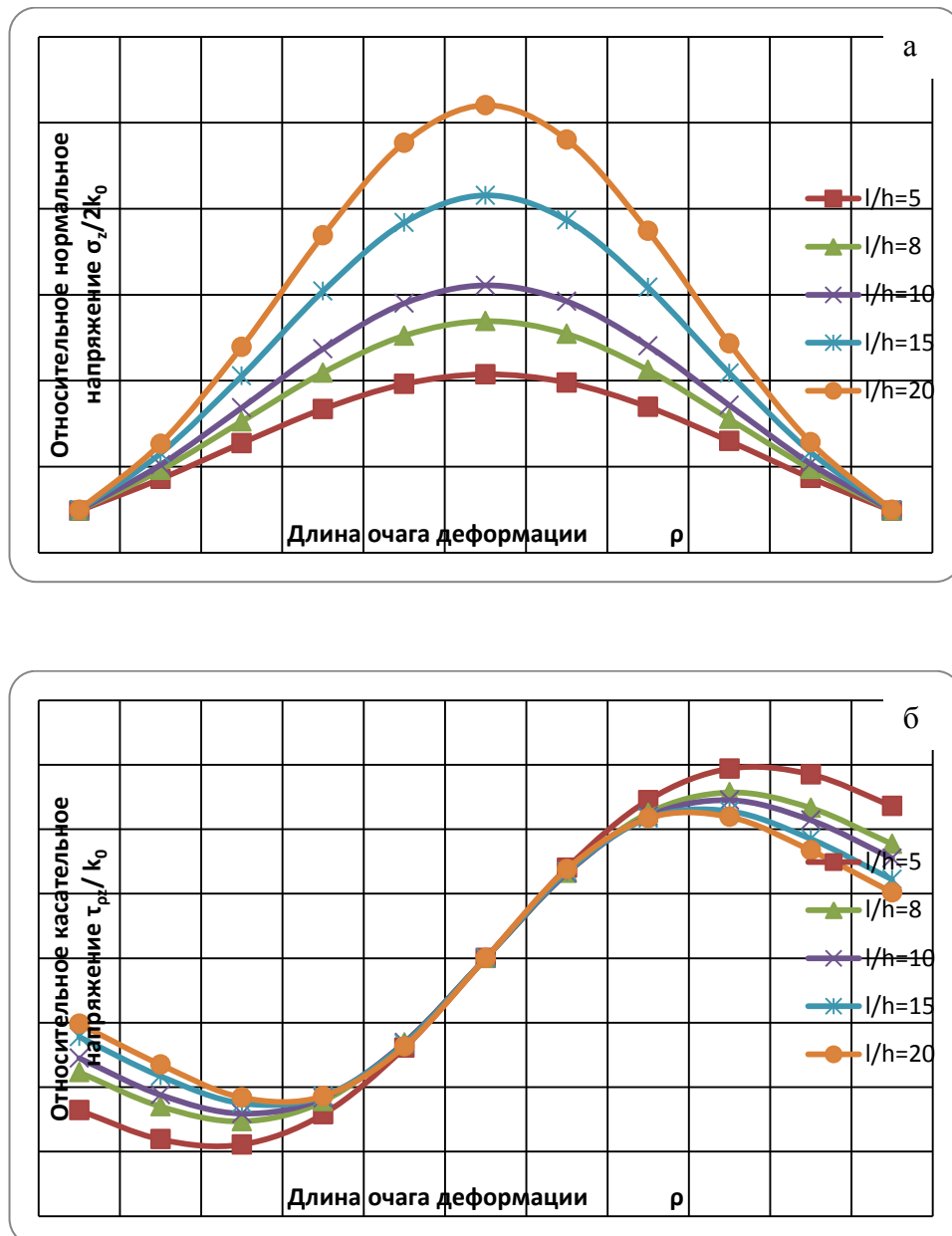


Рисунок 5.27 – Распределение нормальных (а) и касательных (б) контактных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторе формы $l/h=5,8,10,15,20$.

Анализируя выше приведенные графики, можно сделать вывод о том, что с увеличением фактора формы и коэффициента трения увеличивается значение относительных контактных напряжений, что имеет место в реальных процессах при симметричном нагружении. Контактные напряжения качественно и количественно соответствуют общепринятым

положениям механики деформированного тела. Эпюры нормальных напряжений соответствуют результатам работ [93], [141].

Для подтверждения достоверности результатов полученных методом гармонических функций, были сопоставлены значения относительных контактных напряжений (см. рис. 5.27) с известными данными по Сторожеву М.В., Попову Е.А. [93] (см. рис. 5.25). Результаты сопоставления представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 - Сопоставление значений относительных средних контактных напряжений при коэффициенте трения $f = 0,3$

l/h, (фактор формы)	P/σ_s , (относительное среднее контактное напряжение)		Разница сопоставляемых величин относительного среднего контактного напряжения	Относительная погрешность, %
	Сторожев М.В., Попов Е.А. [93]	Метод гармонических функций		
5	2,1	2,05	0,05	2,4
10	3,31	3,2	0,11	3,55
15	4,57	4,32	0,25	5,47
20	5,72	5,4	0,32	5,6

Как видно из табл. 5.1 при сопоставлении экспериментальных значений средних нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения равным 0,3 полученных в работе [93] и наших теоретических значений, относительная погрешность не превышает 6 %, что является хорошим показателем.

В нашем случае напряжение во всем очаге деформации описывается единой формулой, в случае указанных авторов, это реализуется при разных законах трения с разбивкой на три зоны, включая зону перехода.

Комбинированная эпюра касательных напряжений напоминает синусоиду, а комбинированная эпюра нормальных напряжений экспоненциальную тригонометрическую зависимость которая получена нами.

В итоге следует отметить, что полученные величины и характер распределения относительных контактных нормальных и касательных напряжений в зависимости от таких параметров пластической деформации как коэффициент контактного трения и фактора формы, соответствуют общепринятым положениям механики деформированного твердого тела.

Задаваясь известными граничными условиями для линейной задачи, была решена прикладная плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах. Результаты работы [93], в данном случае, используются в виде граничных условий для определения постоянных в гармонических функциях, что позволяет определить область допустимых значений предложенного решения.

5.5 Сравнительный анализ полученных результатов с МКЭ в программе ANSYS

Для подтверждения достоверности полученных теоретических результатов было проведено сопоставление относительных средних контактных нормальных напряжений (см. рис. 5.27), с данными полученными методом конечных элементов в программе ANSYS.

Инструментом для решения поставленных задач принят расчетный комплекс ANSYS, работающий на одном из численных методов – методе конечных элементов. Используя передовые решения ANSYS, можно

моделировать любой тип геометрии, или задач. Обеспечиваются производительность, глубокое исследование проблемы в кратчайшие сроки.

Качественное создание математической модели объекта исследования (точность исполнения геометрии, реальные свойства используемого материала, закрепление модели, приложение всевозможных нагрузок) гарантирует большую точность полученных результатов.

Расчетный комплекс ANSYS зарекомендовал себя как надежный, экономически выгодный инструмент во всех отраслях машиностроения и металлургии. ANSYS может заменять аналитические решения и практические испытания реализацией на математических моделях физических процессов. Описание метода конечных элементов и непосредственно самого программного продукта ANSYS/LS-DYNA представлено в разделе 2.

Создана конечно-элементная модель исследуемого образца. Материал конструкции - сталь, $E=200$ ГПа, $\mu=0,3$, $\rho=7800$ кг/м³. Конечно-элементная модель представлена на рисунке 5.28.

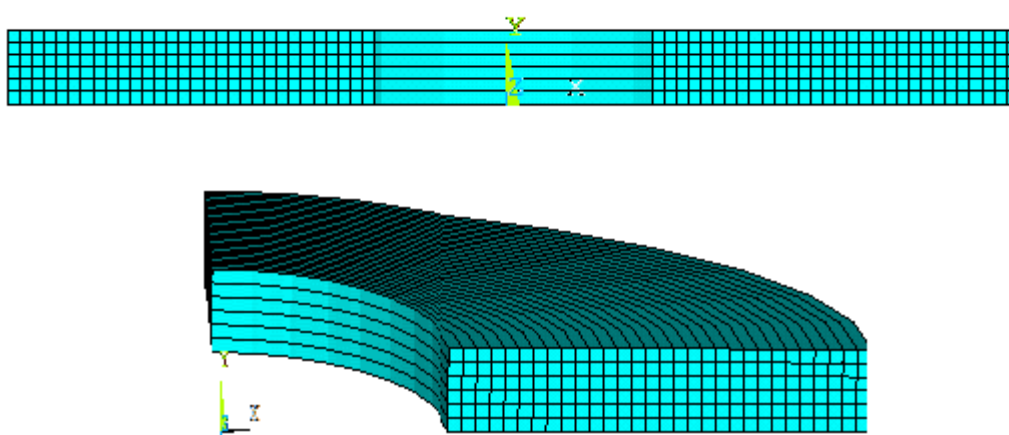


Рисунок 5.28 - Конечно-элементная модель.

Результаты моделирования пластического формоизменения толстостенного полого цилиндра в осевом направлении при различных факторах формы представлены на рисунках 5.29 – 5.32.

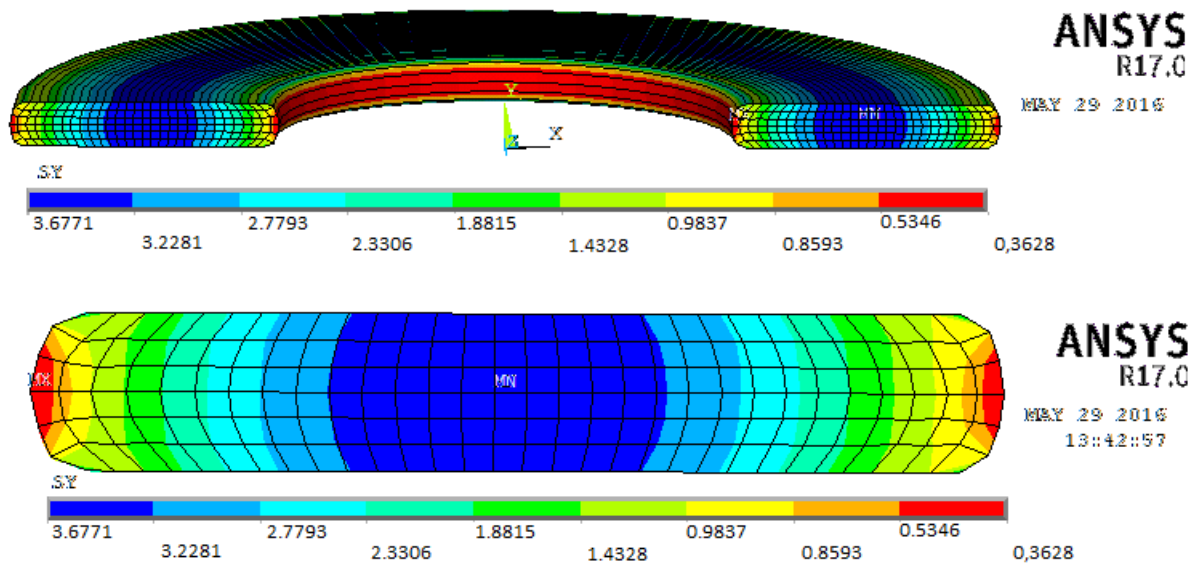


Рисунок 5.29 - Распределение нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторе формы $l/h=5$.

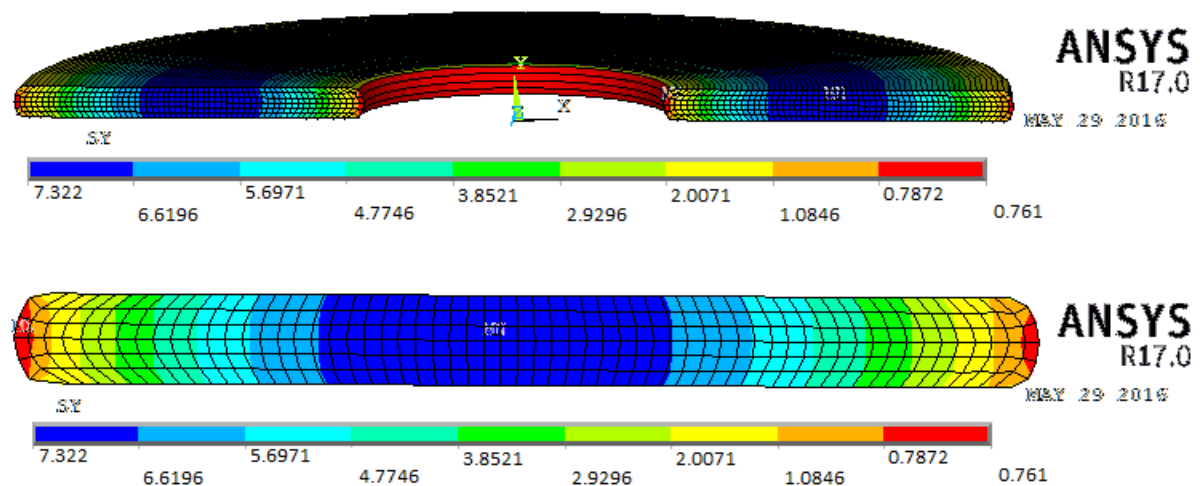


Рисунок 5.30 - Распределение нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторе формы $l/h=10$.

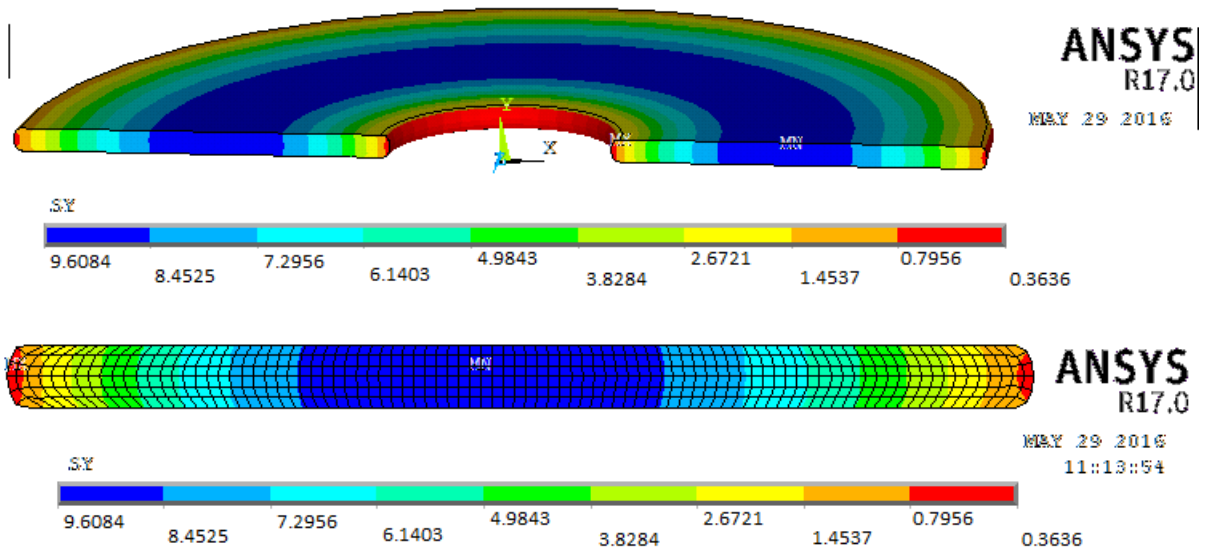


Рисунок 5.31 - Распределение нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторе формы $l/h=15$.

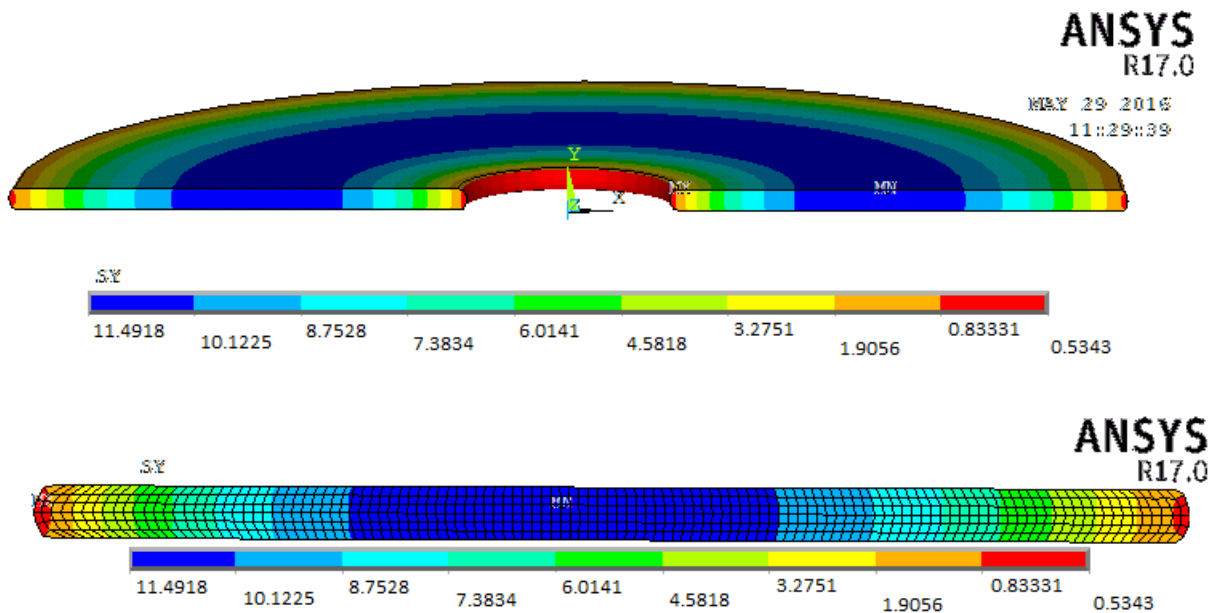


Рисунок 5.32 - Распределение нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения $f=0,3$ и факторе формы $l/h=20$.

Сопоставление результатов теоретического исследования и исследования методом конечных элементов в программе ANSYS представлено в таблице 5.2.

Таблица 5.2 - Сопоставление значений относительных средних контактных напряжений при коэффициенте трения $f = 0,3$

l/h, (фактор формы)	P/σ_s , (относительное среднее контактное напряжение)		Разница сопоставляемых величин относительного среднего контактного напряжения	Относительная погрешность, %
	МКЭ, ANSYS	Метод гармонических функций		
5	1,839	2,05	0,181	8,83
10	3,661	3,2	0,461	14,4
15	4,804	4,32	0,484	11,2
20	5,746	5,4	0,346	6,41

Как видно из табл. 5.2 при сопоставлении значений средних нормальных контактных напряжений при коэффициенте трения равным 0,3 полученных в результате моделирования процесса в программном продукте ANSYS и наших теоретических значений, относительная погрешность не превышает 15 %, что является хорошим показателем.

5.6 Выводы

1. В данном разделе на базе метода гармонических функций, рассмотрено решение некоторых прикладных осесимметричных задач теории пластичности. В частности, были определены нормальные и касательные составляющие компоненты тензора напряжений при пластическом формоизменении в осевом направлении полых цилиндрических изделий с двухзонным и однозонным очагом деформирования.

2. Построены характерные распределения нормальных и касательных напряжений на контакте и внутри очага деформации. Исследовано влияние технологических параметров (коэффициент трения, фактор формы, величина внутреннего и наружного подпорков) на величину и характер распределения нормальных и касательных напряжений, а так же, влияние на неоднородность пластического формоизменения.

3. Предложена методика определения положения нейтрального сечения при двухстороннем течении металла.

4. Основные результаты раздела, которые определяют научную новизну диссертационной работы опубликованы в [5], [7]-[10].

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа направлена на решение поставленной научно-технической задачи, связанной с разработкой математической модели процесса пластического формоизменения полых тел вращения в осевом направлении с учетом основных технологических факторов влияющих на неоднородность деформирования.

В работе получены следующие основные научные результаты:

1. Анализ литературных источников показал на широкое распространение полых цилиндрических изделий, типа колец, в машиностроительном и металлургическом производствах. При этом их изготовление методами пластического формообразования характеризуется сложным напряженно-деформированным состоянием, что проявляется в неоднородности распределения деформации и напряжений в объеме, различном формоизменении на контакте и в середине обрабатываемого металла. Основными факторами влияющими на неоднородность деформации является наличие и величина контактного трения; соотношение длины и высоты очага деформации; геометрия инструмента. При этом, процессы протекающие во всем очаге деформации учитываются контактными напряжениями, и наоборот, условия на контакте оказывают влияние на характеристики формоизменения в объеме. Таким образом, учесть неравномерность деформации является возможным только при решении плоской или пространственной задачи теории пластичности.

2. Неравномерность напряженно-деформированного состояния металла на практике определяется одинаковыми технологическими параметрами, что свидетельствует об их соответствии. Этому соответствию, в теоретическом плане, показана замкнутая постановка и решена на базе метода гармонических функций замкнутая осесимметричная задача теории

пластичности в аналитическом виде. Определены выражения по определению нормальных и касательных составляющих тензора напряжений а так же линейных и сдвиговых составляющих тензора скоростей деформации.

3. Предложена математическая модель упрочняющейся пластической среды в условиях осесимметричного напряженного состояния, которая позволяет учитывать как технологические параметры пластического формоизменения (коэффициент трения, фактор формы, внутренний и наружный подпор), так и кинематические параметры очага деформации (скорость деформации, степень деформации и температура).

4. Проведен анализ влияния выше упомянутых факторов на величину и характер распределения нормальных и касательных напряжений в очаге деформации цилиндрического полого тела под действием осевого нагружения.

5. Приведено решение прикладных задач теории пластичности по определению нормальных и касательных напряжений, как на контакте, так и в объеме деформируемой заготовки, при одно- и двухзонном течении металла. Полученные результаты по величине и характеру распределения напряжений качественно и количественно сопоставимы с общепринятыми положениями.

6. Для подтверждения полученных теоретических результатов, было проведено исследование методом конечных элементов на базе программного продукта ANSYS/LS-DYNA. Относительная погрешность сопоставимых величин относительного среднего контактного напряжения не превышает 15%.

7. Приведенные в диссертации методы определения напряженно-деформированного состояния цилиндрического полого тела могут быть использованы при проектировании новых и уточнении существующих

технологических процессов производства деталей типа колец, бандажей, матриц пресс форм.

8. Методика решения осесимметричной задачи теории пластичности при осадке полых цилиндрических изделий была апробирована на АО «Мотор Сич» для определения напряженно–деформированного состояния при пластическом формоизменении деталей типа колец авиадвигателей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах / В. В. Чигиринский, О. М. Силенко, С. А. Силенко [и др.] // Прогрессивные технологии пластической деформации: междунар. науч.–техн. конф., 21-26 сент. 2009 г. - М.: Дом МИСиС, 2009. - С. 345 – 351.
2. Чигиринський В. В. Рішення осесиметричної плоскої задачі теорії пластичності в напруженнях / В. В. Чигиринський, С. А. Силенко, А. Ю. Матюхін // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – ЗНТУ, 2010. – № 1. – С. 121 – 125.
3. Чигиринський В. В. Розробка математичної моделі радіального тиску пластичного середовища при осадці полых тіл обертання / В. В. Чигиринський, А. Ю. Матюхін, В. В. Падалка // Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – НТУ «КПІ», 2011. – С. 46 – 50.
4. Чигиринский В. В. Разработка математической модели радиального давления пластической среды при осадке полых тел вращения / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин, Л. А. Якубович // Инновационные технологии обработки металлов давлением : междунар. науч. – техн. конф., 18 – 20 окт. 2011 г. – М.: Дом МИСиС, 2011. – С. 455 – 462.
5. Чигиринский В. В. Исследование напряженного состояния при осадке тел вращения в условиях внешней радиальной нагрузки / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Вестник двигателестроения. – Запорожье, АО «Мотор Сич», 2012. – № 1. – С. 169 – 173.
6. Чигиринский В. В. Разработка математической модели осадки полых тел вращения в условиях неоднородного пластического течения / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Обработка материалов давлением: сб. науч. тр / ДонГМА. – Краматорск, 2012. – № 3. - С. 9-14.

7. Чигиринский В. В. Влияние радиальных нагрузок при осадке толстостенной трубы на изменение напряженного состояния металла / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Обработка материалов давлением: сб. науч. тр. / ДонГМА. - Краматорск, 2013. – № 1. - С.58-64.
8. Чигиринский В. В. Граничные условия при решении плоской задачи пластичности в цилиндрических координатах / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – Запорожье: ЗНТУ, 2014.- № 1. – С. 138 – 142.
9. Чигиринский В. В. Решение осесимметричной задачи в условиях одностороннего течения кольцевых заготовок при осадке / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин, С. М. Ечин // New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering: XVI International Scientific Conference, 26 – 29 may 2015 y. – Czestochowa, 2015. – P. 121 – 129.
10. Чигиринский В. В. Решение прикладных задач теории пластичности полуобратным методом / В. В. Чигиринский, А. Ю. Матюхин // Обработка материалов давлением : сб. науч. тр. / ДонГМА. – Краматорск, 2015. – № 2. – С. 51 – 55.
11. Исследование напряженного состояния толстостенной трубы в условиях всестороннего сжатия в радиальном и осевом направлениях / В.В. Чигиринский, В.И. Дубина, А.Ю. Матюхин [и др.] // Прогресивна техніка і технологія – 2010. Тези доповідей XI Міжнар. наук.-техн. конференції, 18-21 травня 2010 р. – Київ: НТУУ «КПІ».-2010. - С. 53-54.
12. Чигиринский В.В. Разработка математической модели радиального давления пластической среды при осадке полых тел вращения / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин, Л.А. Якубович // Инновационные технологии обработки металлов давлением. Тезисы докладов междунар. научн.-техн. конференции, 18-20 октября 2011 г.- Москва: НИТУ «МИСиС».-2011. - С. 99-100.

13. Чигиринский В.В. Математическая модель сложной среды в условиях осесимметричного напряженного и плоскодеформированного состояния / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин // Прогрессивные технологии жизненного цикла авиационных двигателей и энергетических установок. Тезисы докладов IX Междунар. научн.-техн. конференции, 24-29 сентября 2012 г. – Запорожье-Алушта: АО «Мотор-Сич». – 2012. – С. 171-172.
14. Чигиринский В.В. Влияние радиальных нагрузок при осадке толстостенной трубы на изменение напряженного состояния металла / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин // Машини і пластична деформація металів. Тези доповідей II Міжнар. наук.-техн. конференції, 19-22 листопада 2012 р. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2012. – С. 18-19.
15. Чигиринский В.В. Граничные условия при решении прикладных задач теории пластичности полуобратным методом / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин, А.А. Ленюк // Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів тиском і якості фахової освіти. Тези доповідей V Міжнар. наук.-техн. конференції, 19-23 травня 2014 р. – Київ: НТУУ «КПІ». – 2014. – С. 15-17.
16. Чигиринский В.В. Определение граничных условий при решении плоской задачи пластичности в цилиндрических координатах / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин // Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта. Тези доповідей XV Міжнар. наук.-техн. конференції, 23-27 червня 2014 р. – Київ: НТУУ «КПІ». – 2014. – С. 67.
17. Чигиринский В.В. Реальная математическая модель пластической среды в условиях осесимметричного напряженного состояния / В.В. Чигиринский, А.Ю. Матюхин // New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering: XVI International Scientific Conference, 26-29 мая 2015 г.: статья докл.- Czestochowa, 2015.- S. 129-134.

18. Матюхин А. Ю. Распределение неравномерности деформации в металле и факторы, влияющие на ее образование / А. Ю. Матюхин // Обработка материалов давлением : сб. науч. тр. / ДонГМА. – Краматорск, 2015. – № 2. – С. 254 – 258.
19. Коновалов А. В. Некоторые особенности моделирования напряженно-деформированного состояния в процессах ОМД / А. В. Коновалов // КШП ОМД. – 1998. – № 12. – С. 3 – 7.
20. Аверкиев А. Ю. Формоизменение трубной заготовки при раздаче и обжиге / А. Ю. Аверкиев // КШП ОМД. – 2000. – № 1. – С. 6 – 9.
21. Аверкиев А. Ю. Формоизменение трубной заготовки при раздаче и обжиге (продолжение) / А. Ю. Аверкиев // КШП ОМД. – 2000. – № 2. – С. 7 – 9.
22. Аверкиев А. Ю. Формоизменение трубной заготовки при раздаче и обжиге (часть 2) / А. Ю. Аверкиев // КШП ОМД. - 2000. - № 3. - С.7-11.
23. Каменицкий Б. И. Установка для исследования пластической деформации цилиндрических оболочек под действием жидкости высокого давления / Б. И. Каменицкий, В. В. Киселев // КШП ОМД. – 2005. – № 12. – С. 3 – 8.
24. Чельшев Н. А. Распространение пластической деформации в цилиндрических телах при осадке / Н. А. Чельшев // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1958. – № 2. – С. 122.
25. Швейкин В. В. К вопросу о распределении пластической деформации при осадке цилиндрических тел / В. В. Швейкин, С. И. Орлов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1958. – № 6. – С. 99.
26. Тарновский И. Я. Исследование течения металла при осадке в подкладных кольцах при помощи вариационных принципов / И. Я. Тарновский, О. А. Ганаго, Р. А. Вайсбурд // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1960. – № 5. – С. 55.

27. Дель Г. Д. Напряженно–деформированное состояние при осесимметричной осадке / Г. Д. Дель, В. А. Огородников // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1969. – № 8. – С. 90.
28. Ломсадзе Дж. М. Напряженно–деформированное состояние при поперечной осадке, ковке и прокатке цилиндрических заготовок / Дж. М. Ломсадзе // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1972. – № 5. – С. 70.
29. Алюшин Ю. А. Напряженное и деформированное состояние при осесимметричной осадке / Ю. А. Алюшин, Н. А. Чельшев, Г. П. Жигулев // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1973. – № 2. – С. 95.
30. Березовский Б. Н. Распределение деформации при осаживании шаровой и цилиндрической заготовок на плоских плитах / Б. Н. Березовский, В. Н. Перетяцько, Г. С. Котлов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1988. – № 6. – С. 63.
31. Исследование напряженно–деформированного состояния на свободной поверхности цилиндрического образца при осадке / В. К. Воронцов, С. А. Машеков, В. А. Петров [и др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1988. – № 5. – С. 55.
32. Шифрин М. Ю. О зоне прилипания при осадке полых цилиндрических заготовок / М. Ю. Шифрин // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1965. – № 9. – С. 129.
33. Воронцов А. Л. Пластическое течение при осадке полых заготовок / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. – 2007. – № 3. – С. 3 – 7.
34. Воронцов А. Л. Технологические расчеты осадки полых заготовок / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. – 2007. – № 2. – С. 7 – 15.
35. Воронцов А. Л. Определение формы боковой поверхности заготовки при осадке / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. – 2007. – № 3. – С. 7 – 16.

36. Воронцов А. Л. Осадка заготовки с разным расширением на верхнем и нижнем торцах / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2007. - № 4. - С. 3 - 12.
37. Воронцов А. Л. Теория осадки с кручением заготовки / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2007. - № 6. - С. 3 - 9.
38. Воронцов А. Л. Осадка малопластичных материалов в оболочках / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2007. - № 7. - С. 3 - 10.
39. Воронцов А. Л. Осадка малопластичных материалов в поясах / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2007. - № 8. - С. 3 - 8.
40. Воронцов А. Л. Осадка малопластичных материалов без обжатия оболочек / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2007. - № 9. - С. 3 - 7.
41. Воронцов А. Л. Определение силовых и геометрических параметров контурной осадки / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2008. - № 4. - С. 3-12.
42. Воронцов А. Л. Решение осесимметричной задачи теории пластичности при анализе процессов обработки металлов давлением / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2012. - № 3. - С. 3 - 12.
43. Воронцов А. Л. Решение осесимметричной задачи теории пластичности при анализе процессов обработки металлов давлением. Часть 2. Исследование осесимметричной осадки / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2012. - № 4. - С. 3 - 12.
44. Воронцов А. Л. Решение осесимметричной задачи теории пластичности при анализе процессов обработки металлов давлением. Часть 3. Анализ известных выводов формул для определения силовых параметров при осадке и волочении / А. Л. Воронцов // КШП ОМД. - 2012. - № 5. - С. 3-14.
45. Азимов М. Холодная объемная штамповка деталей гидроагрегатов из трубных заготовок / М. Азимов, В. Г. Горючев, М. Ф. Цидулько // КШП ОМД. - 1987. - № 11. - С. 31 - 33.
46. Артес А. Э. Совершенствование технологических процессов холодной объемной штамповки деталей из трубных заготовок / А. Э. Артес, Д. Г. Кобзианидзе // КШП ОМД. - 1989. - № 10. - С. 7 - 8.

47. Высокотемпературная термомеханическая обработка толстостенных труб в условиях горячего прессования / А. П. Башенко, Я. Б. Гуревич, А. Г. Суслов [и др.] // КШП ОМД. – 1994. – № 11. – С. 9 – 10.
48. Титов В. М. Раздача полых цилиндрических заготовок в условиях сверхпластичности / В. М. Титов // КШП ОМД. - 2000. - № 6. - С. 11-14.
49. Штамповка поковок типа плоских колец и фланцев / Д. А. Ильинич, В. Г. Кондратенко, А. Н. Щеглов [и др.] // КШП ОМД. – 1985. – № 4. – С. 6 – 7.
50. Чумаченко Е. Н. Модельное исследование изотермической штамповки кольцевых заготовок / Е. Н. Чумаченко, В. И. Скрылев, И. В. Логашина // КШП ОМД. – 1991. – № 10. – С. 7 – 10.
51. Способ штамповки кольцевых изделий и инструмент для его реализации / Г. Д. Григорьев, Б. Г. Каплунов, А. А. Фельде [и др.] // КШП ОМД. – 1991. – № 2. – С. 30 – 32.
52. Голенков В. А. Изготовление осесимметричных изделий валковой штамповки / В. А. Голенков, С. Ю. Радченко, О. В. Дорофеев // КШП ОМД. – 1995. – № 11. – С. 13 – 15.
53. Ершов В. И. Совмещенные процессы штамповки деталей из трубных заготовок / В. И. Ершов // КШП ОМД. – 2000. – № 6. – С. 21 – 22.
54. Акаро И. Л. Исследование операций обжима толстостенных труб в жестких матрицах / И. Л. Акаро, В. П. Троицкий // КШП ОМД. – 2000. – № 11. – С. 8 – 11.
55. Акаро И. Л. Развитие малоотходной штамповки поковок из толстостенных трубных заготовок / И. Л. Акаро // КШП ОМД. – 2001. – № 3. – С. 16 – 21.
56. Напалков А. В. Технология производства плоских шайб с увеличенной высотой методом холодной объемной штамповки / А. В. Напалков // КШП ОМД. – 2006. – № 10. – С. 27 – 29.

57. Раздача с осадкой кольцевых заготовок с использованием жидкого наполнителя / А. М. Шнейберг, Ф. П. Михаленко, А. С. Пудов [и др.] // КШП ОМД. – 2006. – № 3. – С. 12 – 19.
58. Семенова Л. П. Формообразование наружных утолщений на стенках трубчатых заготовок / Л. П. Семенова, А. А. Семенов, А. Н. Пасько // КШП ОМД. – 2010. – № 9. – С. 33 – 37.
59. Токарев А. Г. Производство заготовок бандажных колец турбогенераторов / А. Г. Токарев, Н. И. Ромашко // КШП ОМД. – 2011. – № 6. – С. 12 – 16.
60. Совмещенный технологический процесс изготовления переходников из трубчатых заготовок / Б. Н. Марьин, Н. П. Куриная, С. Б. Марьин [и др.] // КШП ОМД. – 2011. – № 6. – С. 16 – 18.
61. Напряженное состояние при осаживании шара и цилиндра на плоских плитах и в штампах / Б. Н. Березовский, В. Е. Логинов, В. Н. Перетягко [и др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1985. – № 10. – С. 63.
62. Березовский Б. Н. Деформированное состояние при осаживании шара и цилиндра на плоских плитах и в штампах / Б. Н. Березовский, В. Е. Логинов, Г. С. Котлов // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1985. – № 4. – С. 66.
63. Редуцирование особо толстостенных полых тел при больших углах подачи / И. Н. Потапов, П. И. Полухин, В. И. Шаманаев [и др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1974. – № 11. – С. 73.
64. Алиев И. С. Исследование процесса выдавливания полых деталей типа стакана / И. С. Алиев, Ф. Э. Азадов, В. В. Тихий // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1990. – № 12. – С. 32.
65. Курбанов Х. Определение напряженно – деформированного состояния металла при обратном выдавливании полых заготовок методом линий

- скольжения / Х. Курбанов, М. Ф. А. Фуад // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1991. – № 9. – С. 32.
66. Силовые усилия гидропрессования полых заготовок на подвижной оправке / В. З. Спусканюк, Я. Е. Бейгельзимер, И. А. Леонов [и др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1991. – № 9. – С. 50.
67. Васильковский В. П. Оценка величины усилий закрытой штамповки кольцевых заготовок на прессе двойного действия / В. П. Васильковский, А. Н. Леванов // КШП ОМД. -1987.-№ 5.-С. 12-14.
68. Приближенный расчет и экспериментальная проверка энергетических затрат при осадке и обратном выдавливании с кручением и без кручения пуансона / А. М. Шнейберг, Ф. П. Михаленко, О. С. Кошелев [и др.] // КШП ОМД. – 1999. – № 9. – С. 3 – 11.
69. Арчаков А. Т. Определение силовых и кинематических параметров процесса осадки с трением цилиндрического образца / А. Т. Арчаков // КШП ОМД. – 2003. – № 4. – С. 8 – 11.
70. Шнейберг А. М. Приближенный аналитический метод оценки силы деформирования при осадке цилиндрических образцов с кручением / А. М. Шнейберг, Ф. П. Михаленко // КШП ОМД. - 2007. - № 9. - С. 7-15.
71. Шнейберг А. М. Экспериментальное определение крутящего момента при осадке с осевым вращением деформирующего инструмента / А. М. Шнейберг, Ф. П. Михайленко, Д. А. Щербатов // КШП ОМД. – 2008. – № 9. – С. 3 – 10.
72. Кухарь В. Д. Влияние технологических параметров на силовые параметров на силовые параметры осадки кольцевых заготовок / В. Д. Кухарь, А. Н. Пасько, О. А. Ткач // КШП ОМД. – 2010. – № 9. – С. 9 – 12.

73. Шнейберг А. М. Энергетические затраты при осадке без кручения и с кручением / А. М. Шнейберг, Ф. П. Михайленко, Д. А. Щербатов // КШП ОМД. – 2010. – № 11. – С. 3 – 10.
74. Ефимов В. Н. Решение задачи об осадке цилиндрической заготовки / В. Н. Ефимов, Л. Н. Соколов, В. И. Баран // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1988. – № 3. – С. 62.
75. Об определении среднего значения коэффициента трения при осесимметричной осадке / Ю. Ф. Харченко, А. А. Динник, Н. М. Санько и [др.] // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1981. – № 2. – С. 72.
76. Пасько А. Н. Исследование процессов осадки кольцевых и цилиндрических заготовок в кольцевой матрице / А. Н. Пасько, О. А. Ткач, Л. П. Семёнова // КШП ОМД. – 2012. – № 12. – С.12 – 16.
77. Євстратов В. О. Аналіз розширеної задачі стискання кільця / В. О. Євстратов, В. О. Підгірна // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні : темат. зб. наук. пр. – Краматорськ, 2007. – С. 175-177.
78. Потапкин В. Ф. Конечно-элементное моделирование при осадке осесимметричных полых изделий в матрице / В. Ф. Потапкин, А. Ю. Коляда // Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції, присвяченої 100-річчю з дня народження С. З. Юдовича "Машини і пластична деформація металів", 20-23 листопада 2007 р. - Запоріжжя, 2007. - С. 35-36.
79. Хван Д. В. Пластическая осадка длинномерных заготовок в условиях немонотонного нагружения / Д. В. Хван, А. В. Токарев // Заготовительные производства в машиностроении. – 2012. - № 6. – С. 27 – 28.
80. Добрянюк Ю. В. Моделювання за допомогою програмного комплексу Deform – 3D напружено-деформованого стану на бічній поверхні

- циліндричного зразка під час торцевого стиснення / Ю. В. Добрянюк, Л. І. Алієва, В. М. Михалевич // *Обработка металлов давлением сб. науч. тр.* – Краматорск : ДГМА, 2010. – № 4 (25). – С. 3 – 10.
81. Михеенко Д. Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния металла при образовании механической связи методом конечных элементов / Д. Ю. Михеенко, А. А. Сатонин, В. В. Шевченко // *Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском у металургії і машинобудуванні : темат. зб. наук. пр.* – Краматорськ : ДДМА, 2007. – С. 505–508.
82. Вайсбурд Р. А. Исследование закономерностей оптимального трения при осадке кольцевой заготовки / Р. А. Вайсбурд, А. И. Липовецкий // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия.* – 1978. – № 9. – С. 103.
83. Марченков И. А. Влияние трения на деформированное состояние в очаге деформации при раздате трубчатых заготовок / И. А. Марченков, И. Н. Шубин // *КШП ОМД.* – 1999. – № 2. – С. 10 – 11.
84. Антонюк Ф. И. Точность холодной осадки цилиндрических заготовок / Ф. И. Антонюк, А. Г. Вяткин // *КШП ОМД.* – 2000. – № 10. – С. 16 – 20.
85. Влияние геометрических параметров заготовки на образование утяжины при осадке диска на плите с отверстием» / И. С. Алиев, О. Е. Марков, С. В. Янчук [и др.] // *Удосконалення процесів та обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні : зб. наук. пр.* – Краматорськ, 2007. – С. 188 – 191.
86. Веселова Н. С. О влиянии скоростного нагружения на деформированное состояние и структуру осаживаемых цилиндров / Н. С. Веселова // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия.* – 1970. – № 3. – С. 106.

87. Троицкий В. П. Применение пластичных прокладок при осадке заготовок / В. П. Троицкий, С. В. Пеньков, Ю. Н. Буленков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1990. – № 5. – С. 59.
88. Весницкий А. В. Влияние трения на параметры процесса плоского обратного выдавливания полых изделий и их оптимизация / А. В. Весницкий // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 1991. – № 5. – С. 42.
89. Клименко П. Л. Контактные напряжения при прокатке / П. Л. Клименко, В. Н. Данченко. – Днепропетровск : ПОРОГИ, 2007. – 285 с.
90. Смирнов-Аляев Г. А. Механические основы пластической обработки металлов / Смирнов–Аляев Г. А. – Л. : Машиностроение, 1968. – 271 с.
91. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением / Губкин С. И. – М.: Металлургиздат, 1947. – 532 с.
92. Теория обработки металлов давлением / [И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго и др.]. – М. : Металлургиздат, 1963. – 672 с.
93. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М. : Машиностроение, 1977. – 422 с.
94. Унксов Е. П. Пластическая деформация при ковке и штамповке / Унксов Е. П. – М. : Машгиз, 1939. – С. 193.
95. Охрименко Я. М. Неравномерность деформации при ковке / Я. М. Охрименко, В. А. Тюрин. – М. : Машиностроение, 1969. – 183 с.
96. Николаев В. А. Процессы обработки металлов давлением / Николаев В. А. – Запорожье : Акцент, 2014. – 187 с.
97. Исаченков Е. И. Контактное трение и смазки при обработке металлов давлением / Исаченков Е. И. – М. : Машиностроение, 1978. – 208 с.
98. Смирнов В. С. Теория прокатки / Смирнов В. С. – М. : Металлургия, 1967. – 460 с.

99. Сяський А. О. Напружений стан пластинки з частково підсиленням криволінійним контуром при її циліндричному згині / А. О. Сяський, В.В.Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 30-36.
100. Теорияковки и штамповки : учеб. пособие / под общ. ред Е. П. Унксов, А. Г. Овчинникова. – М. : Машиностроение, 1992. – 719 с.
101. Онищенко И. С. Разработка теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре / И. С. Онищенко, Ю. А. Черняков, В. П. Шнейдер // Восточно–Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – № 4/7 (76). – С. 4–9.
102. Chaboche, J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories / J. L. Chaboche // International Journal of Plasticity. - 2008. - Vol. 24, Issue 10. – P. 1642-1693. doi: 10.1016/j.ijplas.2008.03.009.
103. Тюрин В. А. Деформации и зонообразование в заготовках при производстве поковок колец / В. А. Тюрин, Д. В. Батяев // КШП ОМД. – 2012. – № 10. – С. 40 – 44.
104. Колмагоров В. Л. Напряжения, деформации, разрушения / Колмагоров В. Л. – М. : Металлургия, 1970. – 229 с.
105. Качанов Л. М. Основы механики разрушения / Качанов Л. М. // Прикладная математика и механика. – 1940. - Т. 4, вып. 3. - С. 37.
106. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластичного тела / А. А. Ильюшин // Ученые записки МГУ. Механика. – 1940 - Вып. 39. - С. 9.
107. Марков А. А. О вариационных принципах в теории пластичности / А. А. Марков // Прикладная математика и механика. – 1947. - Т. 11, вып. 3. - С. 339.
108. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 1. Теория упругости. – М. : АН СССР, 1951. – 468 с.
109. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением / Колмогоров В. Л. – М. : Металлургия, 1986. – 688 с.

110. Гун Г. Я. Теоретические основы обработки металлов давлением (теория пластичности) / Гун Г. Я. – М. : Metallurgiya, 1980. – 456 с.
111. Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht // Z. A. M. M. – 1923. - Bd. 3. H. 6. - S. 401 - 406.
112. Максименко О. П. Развитие теории смазочного действия и совершенствование процесса прокатки на ее основе : дис. ... доктора техн. наук : 05.03.05 / Максименко О. П. - Днепропетровск, 1992.- 564 с.
113. Тихонов А. Н. Уравнение математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
114. Чигиринский В. В. Исследования влияния пространственных параметров деформированного объема на сопротивление пластической деформации сдвига / В. В. Чигиринский // Теория и практика металлургии. – 1997. – № 3 – С. 31 – 32.
115. Чигиринский В. В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессу ОМД / В. В. Чигиринский // Труды научно-технической конференции «Теория и технология процессов пластической деформации – 96». – М. : МИМС, 1997. – С. 568 – 572.
116. Chigurinski V. V. The study of stressed and deformed metal state under condition of no uniform plastic medium flow / V. V. Chigurinski // Metalurgija. Zagreb. – 1999. – Vol. 38, br.1 – P. 31 – 37.
117. Чигиринский В. В. Аналитическое определение напряжений и скоростей деформации реального очага деформации применительно к процессам обработки металлов давлением : зб. наук. праць / В. В. Чигиринский // «Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій». – Днепропетровск : Навчальна книга, 1998. – Т.3. – С. 130 – 145.
118. Чигиринский В. В. Новый метод решения задач теории пластичности / В. В. Чигиринский // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. – 2008. – №1. – С. 57 – 62.

119. Чигиринский В. В. О новых подходах решения задач теории пластичности: сб. научных трудов / В. В. Чигиринский // Обработка металлов давлением. – Краматорск, 2009. – № 1(20). – С. 41 – 49.
120. Чигиринский В. В. Новое решение плоской задачи теории пластичности / В. В. Чигиринский // Научные труды ДонНТУ. Серия: Metallургия. – Вып.10 (141). – 2008. – С. 105 – 115.
121. Чигиринский В. В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В. В. Чигиринский // Известия вузов. Черная металлургия. – 2009. – № 5. – С. 11 – 16.
122. Безухов Н. И. Основные теории упругости, пластичности и ползучести / Безухов Н. И. – М. : Высшая школа, 1968. – 498 с.
123. Nadai A. Handbush der Phusik. Bd – 2. Berlin, 1928.
124. Тарновский И. Я. Продольная прокатка профилей переменного сечения / Тарновский И. Я., Смирнов В. К., Коцарь С. Л. – Свердловск : Metallургиздат, 1962. – 280 с.
125. Соколовский В. В. Теория пластичности / Соколовский В. В. – М. : Высшая школа, 1962. – 608 с.
126. Громов Н. П. Теория обработки металлов давлением / Громов Н. П. – М. : Metallургия, 1978. – 359 с.
127. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н. Н. – М. : Машиностроение, 1975. – 399 с.
128. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды / Ильюшин А. А. – М. : МГУ, 1990. – 310 с.
129. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
130. Шевченко Ю. Н. Численные методы решения прикладных задач / Шевченко Ю. Н. – К. : Наук. думка, 1986. – 242 с.
131. Амензаде Ю. А. Теория упругости / Амензаде Ю. А. – М. : Высш. школа, 1976. – 272 с.

132. Чиченев Н. А. Методы исследования процессов обработки металлов давлением (экспериментальная механика) / Чиченев Н. А., Кудрин А. Б., Полухин П. И. – М. : Металлургия, 1977. – 312 с.
133. Деформации и напряжения при обработке металлов давлением (применение методов муар и координатных сеток) / [П. И. Полухин, В. К. Воронцов, А. Б. Кудрин, Н. А. Чиченев]. – М. : Металлургия, 1974. – 336 с.
134. Ренне И. П. Экспериментальные методы исследования пластического формоизменения в процессах обработка металлов давлением с помощью делительной сетки / Ренне И. П. – Тула : НТО Машпром, 1970. – 164 с.
135. Смирнов–Аляев Г. А. Экспериментальные исследования в обработке металлов давлением / Г. А. Смирнов–Аляев, В. П. Чикидовский. – Л. : Машиностроение, 1972. – 360 с.
136. Целиков А. И. Теория прокатки / А. И. Целиков, А. И. Гришков. – М. : Металлургия, 1970. – 358 с.
137. Бровман М. Я. Применение теории пластичности в прокатке / Бровман М. Я. – М. : Металлургия, 1991. – 264 с.
138. Чигиринский В. В. Производство высокоэффективного металлопроката / Чигиринский В. В., Мазур В. Л., Леготкин Г. И. – Днепропетровск : Дніпро – ВАЛ, 2006. – 265 с.
139. Павленко І. В. Метод скінчених елементів в задачах опору матеріалів і лінійної пружності / І. В. Павленко. – Суми : СумДУ, 2006. - 147 с.
140. Илюшкин М. В. Моделирование процессов обработки металлов давлением в программе ANSYS/LS-DYNA (осадка цилиндрической заготовки) / М. В. Илюшкин. – Ульяновск : УлГУ. - 2012. - 91 с.
141. Унксов Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением / Унксов Е. П. – М. : Машгиз, 1955. – 279 с.

142. Чигиринский В. В. Развитие теории прокатки, разработка технологии и внедрение тонкостенных профилей сниженной металлоемкости в промышленность: дис. ... доктора техн. наук: 05.03.05/ Чигиринский Валерий Викторович. – Днепропетровск, 1999. – 332 с.
143. Разработка математической модели осадки тел вращения в условиях плоского деформированного состояния / В. В. Чигиринский, В. Д. Обдул, Е. А. Обдул [и др.] // Вестник национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Машиностроение. – 2010. – № 60. – С. 219 – 223.
144. Моделирование процесса осадки тел вращения в условиях плоского деформированного состояния / В. В. Чигиринский, В. Д. Обдул, Е. А. Обдул [и др.] // Кузнечно-штамповочное производство. – 2011. – № 10. – С. 27 – 30.
145. Чигиринский В. В. Производство тонкостенного проката специального назначения / [Чигиринский В. В., Кресанов Ю. С., Качан А. Я. и др.]. – Запорожье : ВАЛПИС, 2014. – 296 с.
146. Андреюк Л. В. Аналитическая зависимость сопротивления деформации сталей и сплавов от их химического состава /Л. В. Андреюк, Г. П. Тюленев // Сталь. – 1972. – № 9. – С. 825 – 828.

Приложение А

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор ЗНТУ

з наукової роботи

Ю.М. Внуков

2015 р.



ЗАТВЕРДЖУЮ

Технічний директор

АТ «Мотор Січ»

П.Д. Жеманок

2015 р.



АКТ

впровадження методики рішення
вісесиметричної задачі теорії пластичності
в умовах АТ «Мотор Січ»

Даний акт складено представниками АТ «Мотор Січ»: заступником технічного директора, начальником експериментально – дослідного комплексу ОКБ «Мотор Січ» Коцюбою В.Ю., начальником цеху № 20 Поковкою С.М. і представниками кафедри «Обробка металів тиском» Запорізького національного технічного університету (ЗНТУ): завідуючим кафедрою, д.т.н., проф. Чигиринським В.В., аспірантом Матюхіним А.Ю. про те, що в промислових умовах було апробовано методику рішення вісесиметричної задачі теорії пластичності при осаджуванні порожнистих циліндричних виробів, яка може бути застосована для визначення напружено – деформівного стану при впровадженні нових технологій пластичного деформування деталей типу кілець та проектуванні інструменту для його реалізації.

Важливим з наукової та практичної точки зору є те, що завдяки застосуванню нової методики розрахунку напружено – деформованого стану деталей вдалося врахувати основні фактори, які впливають на неоднорідність пластичного деформування.

В цілому, матеріали, представлені в дисертації Матюхіна А.Ю., можуть бути використані для удосконалення методики розрахунку процесу пластичної формозміни деталей типу кілець для авіаційних двигунів в умовах АТ «Мотор Січ»

Представники АТ «Мотор Січ»:

Заступник технічного директора,

начальник експериментально –

дослідного комплексу ОКБ «Мотор Січ»

Начальник цеха № 20

В.Ю. Коцюба

С.М. Поковка

Представники ЗНТУ:

Зав. кафедрою «Обробка

металів тиском» д.т.н., проф.

Аспірант

В.В.Чигиринський

А.Ю. Матюхін

Приложение Б



ЗАТВЕРДЖУЮ
проректор з НР ЗНТУ

Посада керівника / назва організації (підприємства)

Ю.М.Внуков

ПБ

р.

М.П.

АКТ

впровадження результатів НДР

« 15.10 » 2015 р.

м. Запоріжжя

Складено комісією у складі:

Голови зав. каф. ОМТ проф. Чигиринський В.В.

посада, ПБ

члени комісії доц. Білий Є.Т., доц. Обдул В.Д.

посада, ПБ

доц. Широкобоков В.В.

Комісія провела роботу по визначенню фактичного впровадження дисертаційної роботи Матюхіна А.Ю. «Моделювання процесу пластичної формозміни товстостінних порожнистих тіл обертання з використанням гармонійних функцій»

назва та № роботи

виконаної у ЗНТУ

та установила, що результати вказаної роботи впроваджені на каф. Обробка металів тиском ЗНТУ

Назва організації (підприємства), структурного підрозділу

Вид та об'єм впровадження: метод розрахунку напружено- деформованого стану товстостінної порожнистої циліндричної заготовки використаний при оновленні лекційного курсу з «Теорія пластичної деформації».

Досягненні технічні результати, їх рівень використовується для підвищення якості підготовки фахівців напряму 7.050502 «Інженерна механіка»

Річний економічний ефект від впровадження складає (тис. грн.) _____ -

Складено в 2 прим.: 1-й прим. В НДЧ ЗНТУ

2- прим. виконавцю

Голова комісії

Члени комісії

(Handwritten signatures of committee members)

В.В.Чигиринський
(П.І.Б.)

Є.Т. Білий
(П.І.Б.)

В.Д. Обдул
(П.І.Б.)

В.В. Широкобоков
(П.І.Б.)

(Handwritten signature)

Приложение В

Додаток 2 до розпорядження ЗНТУ
від 04 грудня 2015р. № 116

ЗАТВЕРДЖУЮ

проректор з НР ЗНТУ

підпис керівника назва організації (підприємства)

Внуков Ю.М.

ПІБ

17.12. 2015 р.

М.П.

АКТ

впровадження результатів НДР

« 11.12 » 2015 р.

м. Запоріжжя

Складено комісією у складі:

Голови Т.в.о. зав. каф. ОМТ доц. Широкобоков В.В.

посада, ПІБ

члени комісії доц. Шейко С.П., доц. Обдул В.Д., ст.викл. Матюхін А.Ю.

посада, ПІБ

Комісія провела роботу по визначенню фактичного впровадження науково-дослідної роботи Розробка технології виробництва та обладнання для виробів зниженої металоємності в умовах машинобудівного та

назва та № роботи

металургійних виробництв № 01512виконаної у ЗНТУ згідно (назва тематичного плану) кафедральної держбюджетної НДР на 2012 – 2015 рокита установила, що результати вказаної роботи впроваджені на каф. ОМТ ЗНТУ

Назва організації (підприємства), структурного підрозділу

Вид та об'єм впровадження розроблений метод розрахунку напружено-деформованого стану товстостінних порожнистих циліндричної виробів використаний при підготовці до захисту магістерської роботи студента спеціальності 8.05050203 «Обладнання та технології пластичного формування конструкцій машинобудування» Домбровського Я.Р. на тему: «Модельовання процесу штамповки поковок складної форми в умовах вісесиметричного напружено- деформованого стану».Досягненні технічні результати, їх рівень підвищення якості підготовки фахівців напрямку 8.050502 «Інженерна механіка»Річний економічний ефект від впровадження складає (тис. грн.) -Складено в 2 прим.: 1-й прим. В НДЧ ЗНТУ

2- прим. виконавцю,

Голова комісії

Члени комісії

підпис

підпис

підпис

підпис

Широкобоков В.В.

(П.І.Б.)

Шейко С.П.

(П.І.Б.)

Обдул В.Д.

(П.І.Б.)

Матюхін А.Ю.

(П.І.Б.)