

УДК 517.9

Онуфрієнко В.М.¹, Антоненко Н.М.², Засовенко А.В.³, Фасоляк А.В.²

¹ д-р фіз.-мат. наук, проф. НУ «Запорізька політехніка»

² канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

³ канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНТЕГРАЛЬНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДІРІХЛЕ-ДІРІХЛЕ, ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА, НЕЙМАНА- НЕЙМАНА

Для моделювання поля у фрактально структурованому метаматеріалі спираємось на висновки теорії, що базується на рівняннях Максвелла (Бернуллі) у дробових диферінтегралах з відомими наближеннями, що дають можливість моделювати розв'язки хвильового рівняння в α -характеристиках [1].

Дивергентні процеси у фрактальному середовищі призводять до все більшої дисперсності середовища, а конвергентні - до ущільнення об'єктів. Ці відомі визначення дозволяють моделювати оператор збіжності на фізико-геометричних фрактальних множинах векторів $\vec{P}(P_x, P_y, P_z)$ у вигляді

$$(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha \vec{P}(P_x, P_y, P_z) = (-1)^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha P_x}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha P_y}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial^\alpha P_z}{\partial z^\alpha} \right) \quad (1)$$

Розглянута нами модель елементарного фракталу «джерело-стік» [2] (поняття «стік» (приймає випромінювання), на відміну від «джерела» (випромінює поле), і «джерело-стік» (приймає, та випромінює поле)) використовується нами для постановки і побудови чисельного алгоритму розв'язування задачі Штурма-Ліувілля на власні функції і числа оператора Гельмгольца для об'єднання/перетину двох областей. На умовних лівій і правій точках доменних областей формуємо фрактальне покриття у вигляді, що узагальнює у диференціальній формі відомі граничні умови Діріхле-Діріхле, Діріхле-Неймана та Неймана-Неймана у термінах α – характеристик.

Побудуємо стоко-джерельну функцію Гріна $G^{(\alpha)}(x, x') = D_x^\alpha G(x, x')$ для скалярного рівняння Гельмгольца $(u^{(\alpha)}(x))'' + k^2 u^{(\alpha)}(x) = 0$, ($k \neq 0$) за відомою класичною схемою, але в термінах α – характеристик $u^{(\alpha)}(x) = D_x^\alpha u(x)$ шуканих власних функцій з граничними умовами $u^{(\alpha_1)}(x_1) = 0$; $u^{(\alpha_2)}(x_2) = 0$ на відрізку $x_1 \leq x \leq x_2$. У такій постановці виникає можливість розгляду задачі з граничними умовами Діріхле-Діріхле (скейлінгові показники порядку похідних: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$), Діріхле-Неймана ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$ або $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$) та Неймана-Неймана ($\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$).

Для умов типу Діріхле-Діріхле доменної області у вигляді відрізка $0 \leq x \leq l$ маємо функцію Гріна

$$G^{(\alpha)}(x, x') = D_x^\alpha G(x, x') = \begin{cases} \frac{\sin k(x' - l) \sin kl}{k \sin k}, & 0 \leq x \leq x'; \\ \frac{\sin k(x') \sin k(x - l)}{k \sin k}, & x' \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2)$$

Для двох виділених доменних областей (відрізків $0 \leq x \leq b$, $a \leq x \leq l$, $a < b$), що об'єднанням/перетином утворюють область $0 \leq x \leq l$, застосовуємо другу формулу Гріна та визначаємо розв'язки $u_k(x)$ в k -х доменних областях через граничні значення на межах S_k :

$$u_k(x) = \int_{S_k} u_k(x, x'|_{S_k}) dG_k(x, x') \equiv L_k(u_k, dG_k) \quad (3)$$

Через диференціально-інтегральні оператори $L_k(u_k, dG_k)$, які зв'язують поля в доменних областях 1 та 2, отримуємо систему диференціально-інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u_1^{(\alpha_1)} &= L_{1,2} \left(u_2^{(\alpha_2)} d^{(\alpha_1)} G_1 \right) \\ u_2^{(\alpha_2)} &= -L_{2,1} \left(u_1^{(\alpha_1)} d^{(\alpha_2)} G_2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

звідки і визначаються власні функції та числа як окремих складових доменів, так і усієї області, що є їх об'єднанням/добутком.

Очевидно, можливе узагальнення підходу для послідовних, паралельних, та послідовно-паралельних комбінацій доменних областей для покриття складної границі області визначення поля.

Результати моделювання для нефрактальних границь областей збігаються з відомими даними [2].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Онуфрієнко В. М. Потенціали фрактальних зарядів і струмів у штучному середовищі / В. М. Онуфрієнко // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2004. – №1(1). – С. 18–21.
2. Онуфрієнко В. М. Диференціальна модель фрактального хвилеводного трансформатора / В. М. Онуфрієнко, І. М. Килимник, Т. І. Слюсарова, І. І. Зіненко // Grail of Science. – 2024. – (36). – С. 282–286. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.16.02.2024.046>.