

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та

КР (для студентів заочної форми навчання)

з вищої математики (скорочена форма навчання).

Розділи «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі».

Методичні вказівки до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділи «Елементи лінійної алгебри», «Елементи векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі» /Укл.: Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020 – 54 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Рецензент: Антоненко Н.М., к.ф.-м.н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 7 від 12.02.2020 р.

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 4 від 25.02.2020 р.

ЗМІСТ

1	Елементи лінійної алгебри	4
1.1	Загальні поняття	4
1.2	Методи розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)	9
2	Елементи векторної алгебри	18
3	Елементи аналітичної геометрії на площині	26
3.1	Пряма на площині	26
3.2	Лінії другого порядку	29
4	Елементи аналітичної геометрії у просторі	41
4.1	Площина у просторі	41
4.2	Пряма у просторі	43
4.3	Поверхні другого порядку	45
	Література	54

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Загальні поняття

Означення 1.1. Числовою матрицею A порядку $n \times m$ називається таблиця чисел, розташованих в рядках і стовпцях:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

де a_{ij} – елементи матриці A , які стоять на перетині i -го рядка та j -го стовпця, n – кількість рядків, m – кількість стовпців.

Якщо кількість рядків і стовпців однакова, то матрицю називають квадратною:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Для квадратної матриці існує поняття визначника. Визначник n -го порядку – число $\det A$, яке записується у вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Деякі **властивості визначників**:

а) визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями (транспонування);

б) якщо усі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;

в) спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника;

г) якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні або пропорційні, то визначник дорівнює нулю;

д) якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак;

е) визначник не зміниться, якщо до усіх елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Означення 1.2. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, утворений з даного шляхом викреслювання i -го рядка і j -го стовпця.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти M_{12} і M_{22} .

$$\text{Маємо } M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \text{ і } M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Означення 1.3. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$:
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ знайти A_{13} і A_{32} . Маємо

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \text{ і } A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Обчислення визначників.

1) Визначник 2-го порядку обчислюється за формулою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1.4)$$

2) Визначник 3-го порядку можна обчислити за правилом трикутників (сума добутків елементів за схемою):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} & a_{33} \\ a_{32} & a_{33} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.5)$$

або за правилом Саррюса (послідовно дописуємо перші два стовпці та знаходимо суму добутків елементів головної діагоналі та ще двох її паралельних і віднімаємо добутки елементів побічної діагоналі та ще двох її паралельних):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \quad (1.6)$$

3) Визначник n -го порядку обчислюється за формулою розкладання по i -му рядку:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.7)$$

(i – фіксований індекс рядка) або розкладання по j -му стовпцю:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.8)$$

(j – фіксований індекс стовпця).

Справедливо, що сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю. Наприклад,

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{2j} = 0.$$

Дії над матрицями.

Дві матриці A і B рівні ($A = B$), якщо вони одного порядку і їх відповідні елементи рівні.

Матриці одного порядку можна додавати і віднімати (дії з відповідними елементами матриць). **Наприклад**,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A можна множити на будь-яке число λ , відмінне від нуля (всі елементи матриці множаться на це число: $\lambda A = A\lambda$).

Матрицю A (порядку $n \times s$) можна множити на матрицю B (порядку $s \times m$), якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B : $C = A \cdot B$ (матриця C має порядок $n \times m$). Елементи матриці C обчислюються за формулою:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} \cdot b_{kj}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Операція множення у загальному випадку не комутативна: $A \cdot B \neq B \cdot A$. У теорії матриць операція ділення відсутня.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці дорівнюють одиниці, то її називають *одиничною*. Наприклад,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.4. Матрицю A^{-1} називають оберненою до квадратної матриці A , якщо виконується умова:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Обернена матриця A^{-1} існує, якщо $\det A \neq 0$. Вона обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, \quad (1.10)$$

де A^* – союзна (приєднана) матриця, яка складається з алгебраїчних доповнень елементів матриці A , при цьому виконано транспонування. Наприклад, обернена матриця A^{-1} до квадратної матриці A третього порядку має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

де $\Delta = \det A$, A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці A .

Обернену матрицю застосовують для розв'язування матричних рівнянь:

$$A \cdot X = B \text{ або } Y \cdot A = B, \quad (1.12)$$

де A , B – відомі матриці, X , Y – шукані матриці, при цьому $\det A \neq 0$. Розв'язком цих рівнянь відповідно є

$$X = A^{-1} \cdot B \text{ або } Y = B \cdot A^{-1}. \quad (1.13)$$

1.2 Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Розглянемо розв'язування СЛАР на прикладі системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.14)$$

де a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, а b_i – вільні члени ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$).

Якщо хоча б один з вільних членів b_i відмінний від нуля, систему називають *неоднорідною*, у противному випадку – *однорідною*.

Розглянемо розв'язування неоднорідної СЛАР за формулами Крамера, матричним методом та методом Гаусса.

1) **Формули Крамера** для розв'язування цієї системи (1.14):

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \quad (1.15)$$

де $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ – визначник системи (складається з

коефіцієнтів при невідомих), а Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 – визначники невідомих, отримані з визначника системи шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів при невідомому стовпцем вільних членів:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система має єдиний розв'язок, якщо $\Delta \neq 0$.

Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники невідомих Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 одночасно дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників невідомих Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 відмінний від нуля, то система розв'язків не має.

2) **Матричний метод** розв'язання СЛАР полягає в наступному: система записується у вигляді матричного рівняння: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, B – матриця-стовпець вільних членів, X – матриця-стовпець невідомих. Розв'язок системи знаходиться за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (1.16)$$

3) **Метод Гаусса** – метод послідовного виключення невідомих. Систему зводять до трикутного виду (прямий хід), а потім, починаючи з останнього рівняння системи, послідовно знаходять невідомі.

Зручно систему записати у вигляді розширеної матриці B (це матриця системи до якої приєднується стовпець вільних членів):

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right). \quad (1.17)$$

За допомогою елементарних перетворень над рядками цієї матриці (можна поміняти місцями два рядки; додати до елементів рядка відповідні елементи іншого рядка, помножені на один той самий множник, відмінний від нуля), її приводять до трикутного виду. Отриману матрицю записують у вигляді системи. З останнього рівняння системи знаходять невідому і послідовно піднімаючись по системі вгору, знаходять інші невідомі.

Означення 1.5. Рангом $r_A = \text{Rang } A$ матриці A називається найбільший порядок її мінора, відмінного від нуля.

Теорема 1.1 (Кронекера-Капеллі).

Для сумісності СЛАР необхідно і достатньо рівність рангів матриці системи і розширеної матриці: $r_A = r_B$.

Якщо $r_A = r_B$ і дорівнюють числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо $r_A = r_B$, але менше числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Розглянемо **однорідну** СЛАР на прикладі системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Однорідна СЛАР завжди сумісна (має розв'язок).

Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок – нульовий. У протилежному випадку – безліч розв'язків.

Нехай для системи (1.18) $\det A = 0$, а мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Тоді система зводиться до двох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими, наприклад:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Розв'язок цієї системи знаходиться за формулами:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t, \quad t \in R. \quad (1.20)$$

Якщо визначник системи (1.18) $\det A = 0$ і всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим будь-яких значень, отримаємо відповідне їм значення третього невідомого.

Задача 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A . Результат перевірити, знайшовши добуток $A^{-1} \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) Обчислимо $\det A$, розкладаючи його по елементам першого рядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - (-1)) -$$

$$-1 \cdot (4 - 1) + 1 \cdot (-2 - (-1)) = -5 \neq 0.$$

Обернена матриця існує. Знайдемо її за формулою (1.10).

б) Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елемента матриці

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

в) Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень, транспонуючи їх:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

д) Останню матрицю помножимо на $\frac{1}{\det A}$, тобто на $\left(-\frac{1}{5}\right)$ і отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати матричне рівняння:

$$Y \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо матричне рівняння $Y \cdot A = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\det A = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$. Обернена матриця A^{-1} існує

і розв'язок рівняння за формулою (1.13) буде $Y = B \cdot A^{-1}$. Знайдемо A^{-1} . Алгебраїчні доповнення до елементів матриці A :

$$A_{11} = 3, A_{21} = -1, A_{12} = -2, A_{22} = -5.$$

Запишемо обернену матрицю A^{-1} : $A^{-1} = \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\begin{aligned} B \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3+2 & -1+5 \\ 6+6 & -2+15 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розв'язати неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами: а) за формулами Крамера, б) матричним методом, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Знайдемо розв'язок заданої системи за формулами Крамера.

Знайдемо визначники Δ , Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 . Обчислимо їх за правилом трикутників:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 + 2 + 2 + 1 = 6 \neq 0.$$

Послідовно замінюючи в Δ перший, другий і третій стовпець стовпцем вільних членів, знайдемо:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 2 + 6 = 6,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 6 + 4 = -6,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 4 + 6 = 12.$$

Розв'язок системи за формулами (1.15):

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

б) Знайдемо розв'язок заданої системи матричним методом.

Нехай A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Систему можна записати матричним рівнянням: $A \cdot X = B$.

Розв'язок системи $X = A^{-1} \cdot B$. $\Delta = \det A = 6$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A за формулою (1.10).

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2, \\
 A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2, \\
 A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1, \\
 A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4.
 \end{aligned}$$

Обернена матриця: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Розв'язок системи

знаходимо за формулою (1.16).

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 + 0 + 0 \\ 6 - 12 + 0 \\ 0 + 12 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

де $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

в) Знайдемо розв'язок заданої системи методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю B системи, приєднавши до матриці системи A стовпець вільних членів, і приведемо її до трикутного вигляду.

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \\
 &\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Знак $\approx$ означає перехід від однієї матриці до наступної за допомогою елементарних перетворень. Таких переходів отримали 3 (вони пронумеровані). Перший перехід: 1-й рядок залишаємо без змін, додаємо до 2-го рядка 1-й рядок, помножений на (-2) , до 3-го рядка додаємо 1-й рядок, помножений на (-1) . Другий перехід: скорочуємо 3-й рядок на (-2) і міняємо місцями 2-й і 3-й рядки. Третій перехід: рядки 1-й і 2-й залишаємо без зміни, а до 3-го рядка даємо 2-й рядок, помножений на 4. Мета перетворень – отримати матрицю трикутного виду. Останню матрицю записуємо у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_3 = 6. \end{cases}$$

З 3-го рівняння маємо $x_3 = 2$, з 2-го рівняння – $x_2 = -1$, з 1-го рівняння – $x_1 = 1$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Задача 4. Знайти розв'язок систем лінійних однорідних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. а) знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

тому система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

б) знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже система має безліч розв'язків. Так як $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \neq 0$,

то розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Для знаходження розв'язку системи застосуємо формули (1.20):

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot t = (20 - 3) \cdot t = 17t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = (-1 - 15) \cdot t = -16t,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = (-9 - 4) \cdot t = -13t, \quad t \in R.$$

Відповідь: $x_1 = 17t$, $x_2 = -16t$, $x_3 = -13t$, $t \in R$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Означення 2.1. Вектором $\overline{AB}$ називається напрямлений відрізок з початком у точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінцем у точці $B(x_2, y_2, z_2)$.

Вектор $\overline{AB}$ можна позначити $\bar{a}$. Якщо задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати вектора $\overline{AB}$ визначаються за формулою

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2.1)$$

Вектори $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ можна додавати і віднімати: $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

Вектор $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ можна множити на число $\lambda \neq 0$:

$$\lambda \bar{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

У загальному випадку для векторів $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ та довільних сталих чисел α_1 і α_2 справедливо:

$$\alpha_1 \bar{a} \pm \alpha_2 \bar{b} = (\alpha_1 x_1 \pm \alpha_2 x_2; \alpha_1 y_1 \pm \alpha_2 y_2; \alpha_1 z_1 \pm \alpha_2 z_2), \quad (2.2)$$

Означення 2.2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або паралельних прямих.

Координати колінеарних векторів пропорційні:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (2.3)$$

Для колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справедливо: $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, де число $\lambda \neq 0$. Якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$. Якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Означення 2.3. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або паралельних площинах.

Означення 2.4. Вектори $\vec{a}_i$ ($i = \overline{1, n}$) називаються лінійно залежними, якщо існують числа α_i ($i = \overline{1, n}$) серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що справедлива рівність $\sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot \vec{a}_i) = 0$.

Якщо три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні, то вони утворюють базис і будь-який вектор $\vec{d}$ може бути розкладений по цьому базису:

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}, \quad (2.4)$$

де m, n, p – деякі числа, одночасно не рівні нулю.

Вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ може бути розкладений по базису одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, які відповідно належать вісям Ox , Oy , Oz декартової системи координат у просторі: $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$.

Означення 2.5. Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке визначається формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (2.5)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Інше позначення скалярного добуту – $(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами, то скалярний добуток знаходиться за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad (2.6)$$

де $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Якщо $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$. Якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$ умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (2.7)$$

Довжина вектора $\vec{a}$ обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2}. \quad (2.8)$$

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2.9)$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}. \quad (2.10)$$

Робота сили $\vec{F}$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з початку в кінець вектора $\vec{S}$ визначається формулою:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (2.11)$$

Означення 2.6. Векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє умовам:

- а) довжина вектора $\vec{c}$ обчислюється за формулою:
 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
 б) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
 в) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Інше позначення векторного добуту – $[\vec{a}, \vec{b}]$. Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами, то векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Площа трикутника ABC , для якого задані координати вершин: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|. \quad (2.13)$$

Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A , відносно точки B , визначається векторним добутком:

$$\vec{m}_B \vec{F} = \overline{BA} \times \vec{F} = \vec{F} \times \overline{AB}. \quad (2.14)$$

Означення 2.7. Мішаним добутком $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задані координатами, то

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (2.15)$$

де $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$.

Умова компланарності трьох векторів:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0. \quad (2.16)$$

Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Об'єм піраміди, побудованої на цих векторах, обчислюється за формулою:

$$V_{npr} = \pm \frac{1}{6} (\vec{a} \vec{b} \vec{c}). \quad (2.17)$$

Знак вибираємо таким чином, щоб об'єм був додатним.

Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Якщо $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку.

Задача 5. Перевірити колінеарність векторів $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (-2; -1; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$:

$$\vec{c} = 3(-1; 3; 2) - (-2; -1; 4) = (-5; 10; 2), \quad \vec{d} = (-1; 3; 2) + 2(-2; -1; 4) = (-3; 1; 10).$$

Перевіримо умову колінеарності векторів за формулою (2.3):

$$-\frac{5}{3} \neq \frac{10}{1} \neq \frac{2}{10}.$$

Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ не колінеарні, так як їх координати не пропорційні.

Відповідь: Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ не колінеарні.

Задача 6. Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$. Знайти: а) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ; б) площу грані $A_1A_2A_3$; в) проєкцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$; г) довжину висоти піраміди, проведену з вершини A_4 ; д) визначити, яку трійку утворюють вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів, на яких побудована піраміда, за формулою (2.1): $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1; 3; 3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (3; 1; -4)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (-12; 10; -5)$.

а) Косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 знаходимо за формулою (2.9):

$$\begin{aligned} \cos\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_4}\right) &= \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{(-1)(-12) + 3 \cdot 10 + 3(-5)}{\sqrt{1+9+9} \cdot \sqrt{144+100+25}} = \\ &= \frac{27}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{269}}. \text{ Маємо } \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_4} = \arccos\left(\frac{27}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{269}}\right). \end{aligned}$$

б) Грань $A_1A_2A_3$ – це трикутник. Його площу знайдемо за формулою (2.13): $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|$.

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15\bar{i} + 5\bar{j} - 10\bar{k}.$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \sqrt{(-15)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ (кв.од.)}$$

в) Проєкцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ обчислюємо за формулою (2.10):

$$np_{\overrightarrow{A_1A_4}} \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_4}|} = \frac{3(-12) + 1 \cdot 10 + (-4) \cdot (-5)}{\sqrt{144+100+25}} = \frac{-6}{\sqrt{269}}.$$

г) Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ обчислюємо за формулою (2.17).

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -12 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 280.$$

$$V_{nip} = \pm \left(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \right) = \frac{1}{6} \cdot 280 = \frac{280}{6} = \frac{140}{3} \text{ (куб.од.)}$$

Для знаходження довжини H висоти піраміди застосовуємо формулу:

$$V_{nip} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{nip}}{S_{осн}}.$$

$$\text{Тоді } S_{осн} = S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{350}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ кв.од. і } V_{nip} = \frac{140}{3} \text{ куб.од.}$$

Підставимо $S_{осн}$ і V_{nip} в формулу для обчислення висоти:

$$H = \frac{3 \cdot 140 / 3}{5\sqrt{14} / 2} = \frac{280}{5\sqrt{14}} = \frac{56}{\sqrt{14}} = 4\sqrt{14} \text{ (лін.од.)}.$$

д) Так як мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 280 > 0$, то вектори утворюють праву трійку.

$$\text{Відповідь: а) } \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_4} = \arccos \left(\frac{27}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{269}} \right);$$

$$\text{б) } S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ кв.од.};$$

$$\text{в) } \overrightarrow{A_1A_4} = \frac{-6}{\sqrt{269}};$$

$$\text{г) } H = 4\sqrt{14} \text{ лін.од.};$$

$$\text{д) вектори } \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3} \text{ і } \overrightarrow{A_1A_4} \text{ утворюють праву трійку.}$$

Задача 7. З'ясувати: а) при якому значенні α вектор $\vec{a} = (3; -2; \alpha)$ перпендикулярний вектору $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$; б) при якому значенні

β вектор $\bar{b}$ колінеарний вектору $\bar{c} = (2; \beta; -3)$.

Розв'язання. Запишемо вектор $\bar{b}$ в координатній формі:
 $\bar{b} = (-4; 2; 6)$.

а) Якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$, то за формулою (2.7) маємо $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів за формулою (2.6):
 $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 + \alpha \cdot 6 = -16 + 6\alpha$. Тоді

$$-16 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

б) Якщо вектори $\bar{b}$ і $\bar{c}$ колінеарні, то за формулою (2.3) матимемо
 $\frac{-4}{2} = \frac{2}{\beta} = \frac{6}{-3}$. Тоді $\frac{2}{\beta} = -2$. Звідки $-2\beta = 2$, а $\beta = -1$.

Відповідь: а) $\bar{a} \perp \bar{b}$ при $\alpha = \frac{8}{3}$; б) $\bar{b} \parallel \bar{c}$ при $\beta = -1$.

Задача 8. З'ясувати, чи належать чотири точки: $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; -3)$ і $D(2; 1; 3)$ одній площині.

Розв'язання. Якщо точки A, B, C, D лежать в одній площині, то вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, побудовані на них, належать цій площині, отже, будуть компланарні (2.16). Перевіримо це. Знайдемо координати цих векторів: $\overline{AB} = (3; -1; 6)$, $\overline{AC} = (-2; 0; -2)$, $\overline{AD} = (1; -1; 4)$. Їх мішаний добуток

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарні, тому точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Відповідь: точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Задача 9. Задані сила $\bar{F} = (5; -1; 2)$ та дві точки $A(3; -1; 1)$ і $B(0; 2; -2)$. Знайти: а) роботу сили $\bar{F}$, необхідну для переміщення тіла

із точки A в точку B ; б) момент сили $\vec{F}$ відносно точки B , якщо сила прикладена в точці A .

Розв'язання.

а) Робота A сили $\vec{F}$ визначається за формулою (2.11), як скалярний добуток сили $\vec{F}$ на вектор переміщення $\vec{S} = \vec{AB}$. Знайдемо координати вектора $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (0 - 3; 2 - (-1); -2 - 1) = (-3; 3; -3)$$

$$\text{Тоді } A = \vec{F} \cdot \vec{S} = (5; -1; 2) \cdot (-3; 3; -3) = -15 - 3 - 6 = -24.$$

б) Момент $\vec{m}_B \vec{F}$ сили $\vec{F}$ відносно точки B , якщо сила прикладена в точці A визначається за формулою (2.14), як векторний добуток сили $\vec{F}$ на плече $\vec{AB}$. Знайдемо $\vec{AB} = (-3, 3, -3)$. Тоді $\vec{m}_B \vec{F} = \vec{F} \times \vec{AB}$.

$$\vec{m}_B \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 9\vec{j} - 12\vec{k}.$$

Відповідь: а) $A = -24$ од.роботи; б) $\vec{m}_B \vec{F} = 3\vec{i} - 9\vec{j} - 12\vec{k}$.

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо *декартову прямокутну систему координат* на площині. Точки в цій системі визначаються двома координатами: x – абсциса та y – ордината: $A(x, y)$. Відстань між двома точками $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ визначається за формулою:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \quad (3.1)$$

Якщо точка $C(x_c, y_c)$ належить відрізку AB і ділить відрізок у відношенні λ , а саме $AC : CB = \lambda$, то координати її визначаються формулами:

$$x_c = \frac{x_0 + \lambda \cdot x_1}{1 + \lambda} \text{ і } y_c = \frac{y_0 + \lambda \cdot y_1}{1 + \lambda}. \quad (3.2)$$

Якщо $\lambda = 1$, то $x_c = \frac{x_0 + x_1}{2}$ і $y_c = \frac{y_0 + y_1}{2}$.

3.1 Пряма на площині

Способи задання прямої.

Пряма L може бути задана такими рівняннями:

а) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = k \cdot x + b, \quad (3.3)$$

де k – кутовий коефіцієнт, $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – кут, який пряма утворює з додатнім напрямком вісі Ox , а b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy ;

б) загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.4)$$

звідки $k = -\frac{A}{B}$;

в) рівняння прямої, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, визначається формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad (3.5)$$

г) якщо дві точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ належать прямій, то її рівняння

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}; \quad (3.6)$$

д) рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.7)$$

де a , b – відрізки, які пряма відтинає відповідно на осях Ox , Oy , враховуючи їх знаки.

е) нормальне рівняння прямої:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (3.8)$$

де p – довжина нормалі, опущеної з точки O на пряму, α – кут, який нормаль утворює з віссю Ox .

є) рівняння пучка прямих:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (3.9)$$

де λ – деяка стала величина.

Пучок прямих – це сукупність усіх прямих, що проходять через точку перетину двох заданих прямих: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Кут φ між прямими L_1 і L_2 , які задані рівняннями $L_1: y = k_1x + b_1$ і $L_2: y = k_2x + b_2$, визначається формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (3.10)$$

де через k_1 позначають коефіцієнт прямої, яку повертають проти руху стрілки годинника на кут φ до збігу з другою прямою.

$$\text{Умова паралельності прямих } L_1 \text{ і } L_2: k_1 = k_2. \quad (3.11)$$

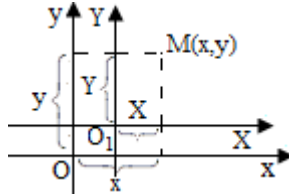
$$\text{Умова перпендикулярності прямих } L_1 \text{ і } L_2: k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (3.12)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L , заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.13)$$

При розв'язуванні багатьох задач аналітичної геометрії на площині поряд з декартовою прямокутною системою координат розглядають інші. При цьому змінюються не тільки координати точок, а і рівняння їх ліній. Розглянемо два перетворення декартової прямокутної системи координат: паралельне перенесення осей координат і поворот осей координат на деякий кут.

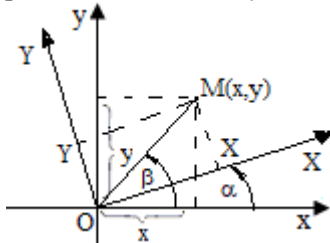
Паралельне перенесення осей координат в точку $O_1(x_0, y_0)$



В системі xOy маємо точку $M(x; y)$, а в системі XO_1Y її координати $M(X; Y)$. Зв'язок між “старими” і “новими” координатами визначається за формулами:

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Поворот осей координат на деякий кут α



В системі xOy маємо точку $M(x; y)$, а в системі XOY її координати $M(X; Y)$. Зв'язок між “старими” і “новими” координатами визначається за формулами:

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha \end{cases} \text{ і } \begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.15)$$

3.2 Лінії другого порядку

До ліній другого порядку належать наступні: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (3.16)$$

Якщо $C \neq 0$, то крива задана в декартовій прямокутній системі координат з поворотом осей координат на деякий кут.

Якщо $D \neq 0$ і $E \neq 0$ або один із них, то крива задана в декартовій прямокутній системі координат з паралельним перенесенням осей координат.

За виглядом загального рівняння кривої другого порядку можна встановити її назву:

- 1) $A = B \Rightarrow$ коло або уявне коло;
- 2) $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases} \Rightarrow$ еліпс або уявний еліпс;
- 3) $\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases} \Rightarrow$ гіпербола;
- 4) $\begin{cases} A \neq 0 \\ B = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ парабола.

Розглянемо лінії другого порядку в декартовій прямокутній системі координат з паралельним перенесенням осей координат (з точки $O(0,0)$ в точку $O_1(x_0, y_0)$):

- а) коло з центром у точці $O_1(x_0, y_0)$ та радіусом R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2; \quad (3.17)$$

- б) еліпс з центром у точці $O_1(x_0, y_0)$ і півосями a та b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1 - \text{уявний еліпс} \right), \quad \text{ексцентриситет еліпса}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad a > b;$$

в) *гіпербола* з центром у точці $O_1(x_0, y_0)$ і півосями a та b :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1, \quad (3.19)$$

рівняння асимптот: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a} (x - x_0)$, ексцентриситет гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a};$$

г) *парабола* з вершиною в точці $O_1(x_0, y_0)$ визначається формулою:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0) \quad (3.20)$$

або

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad (3.21)$$

з віссю симетрії $y = y_0$ або $x = x_0$, де p – параметр.

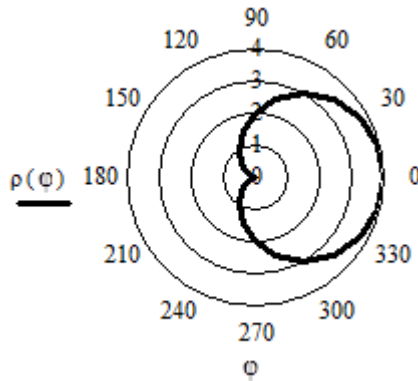
Крім декартової прямокутної системи координат буває зручно використовувати *полярну систему координат*.

Полярна система координат задається променем, який називають *нульовим променем*, або **полярною віссю**. Точка, з якої виходить цей промінь, називається *початком координат*, або **полюсом**. Будь-яка точка M на площині визначається двома полярними координатами: радіальною і кутовою. *Радіальна координата* називається *полярним радіусом* (зазвичай позначається ρ) і відповідає відстані від точки до початку координат. *Кутова координата* також називається *полярним кутом* (зазвичай позначається φ) і дорівнює куту, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для того, щоб потрапити в цю точку. Точка M із полярними координатами ρ і φ

позначається так: $M(\rho, \varphi)$. Рівняння лінії в полярній системі координат має вигляд $F(\rho, \varphi) = 0$. Зазвичай вважають, що полярні координати ρ і φ змінюються в таких межах: $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Проте іноді доводиться розглядати кути, більші за 2π , а також від'ємні кути, тобто кути, відлічувані від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Наприклад, побудуємо криву $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$. Крива має назву *кардіоида*. Побудуємо її, обчисливши значення ρ для $0 \leq \varphi < \pi$. Складемо таблицю.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\cos \varphi$	1	0,924	0,707	0,383	0	-0,383	-0,707	-0,924	-1
ρ	4	3,848	3,414	2,766	2	1,234	0,586	0,152	0



Враховуючи, що $\cos \varphi$ парна функція, тобто $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, крива буде симетрична відносно полярної осі ($\varphi = 0$ або вісь Ox).

Наприклад, побудуємо криву $\rho = \sin 2\varphi$.

Криві з рівняннями $\rho = a \sin k \varphi$ та $\rho = a \cos k \varphi$, де $k - \text{const} \neq 0$ – це так звані *пелюсткові рози*. Якщо k – парне число, то *роза* має $2k$ *пелюсток*, а якщо k – непарне число, то *роза* має k *пелюсток*. Задана *роза* має чотири *пелюстка*. Знайдемо їх вершини.

$$\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

або

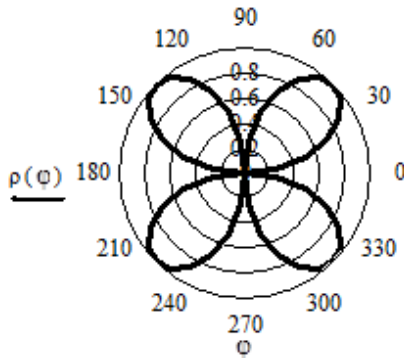
$$\sin 2\varphi = -1 \Rightarrow 2\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пелюстки закриваються, якщо $\rho = 0$. Маємо

$$\sin 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{тобто } n=0 \Rightarrow \varphi=0; \quad n=1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}; \quad n=2 \Rightarrow \varphi=\pi; \quad n=-1 \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{2};$$

$n=-2 \Rightarrow \varphi=-\pi$. Тоді



Іноді доводиться одночасно користуватися декартовими і полярними координатами на площині. Розглянемо випадок, коли полярна вісь збігається з віссю абсцис декартової системи і, отже, полюс збігається з початком координат декартової системи.

Тоді перехід від декартової системи координат до полярної системи координат здійснюється за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi \quad \text{і} \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (3.22)$$

а перехід від полярної системи координат до декартової системи координат здійснюється за формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ та } \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ і } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.23)$$

Буває зручно для побудови кривої, що задана рівнянням у декартовій прямокутній системі координат, подати рівнянням у полярній системі координат.

Наприклад, побудувати криву, задану рівнянням у декартовій системі координат, перейшовши до полярної системи координат:

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{x^2 + y^2}$. Матимемо

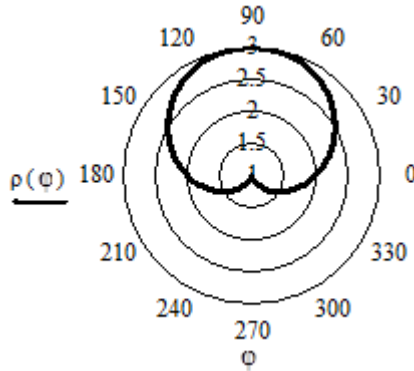
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Враховуючи, що $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, отримаємо

рівняння кривої у полярній системі координат $\rho = 2 + \sin \varphi$. Ця крива відноситься до равликів Паскаля. Побудуємо її по точках. Складемо таблицю.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	1	$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	1,5	2	2,5	$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	3

Враховуючи, що $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$, маємо симетрію кривої відносно $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (вісь Oy).

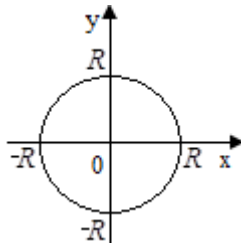


При розв'язанні багатьох прикладних задач зручно використовувати так звані *параметричні рівняння* лінії, тобто, рівняння, в яких координати точок лінії задаються у вигляді функцій від деякої змінної величини t (параметра). Для таких ліній рівняння має вигляд:
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

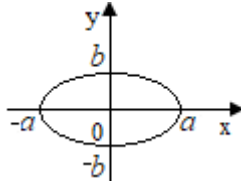
Якщо в параметричних рівняннях виключити параметр t , то отримаємо звичайне рівняння лінії: $F(x, y) = 0$.

Деякі криві, що задані параметрично:

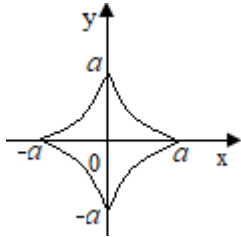
- 1) коло з центром $O(0,0)$ і радіусом R :
$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases}$$



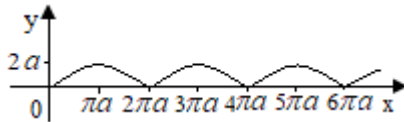
- 2) еліпс з центром $O(0,0)$ і півсями a та b :
$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$$



3) астроїда:
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

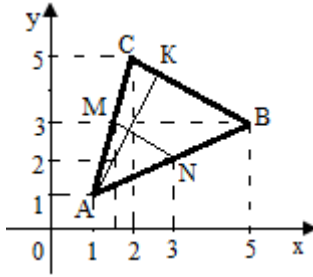


4) циклоїда:
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



Задача 10. Задано вершини трикутника ABC : $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(2;5)$. Знайти: а) довжину та рівняння сторони BC , б) довжину та рівняння висоти, проведеної з вершини A , в) рівняння прямої, проведеної через точку A паралельно стороні BC , г) рівняння середньої лінії, яка з'єднує сторони AB і AC , д) внутрішній кут при вершині B . Зробити рисунок трикутника в системі координат.

Розв'язання. Зробимо рисунок:



а) Рівняння BC (3.6): $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x-5}{2-5} = \frac{y-3}{5-3},$
 $(x-5) \cdot 2 = (y-3) \cdot (-3) \Rightarrow 2x + 3y - 19 = 0 \text{ (} BC \text{)}.$

Довжину BC знайдемо за формулою (3.1)

$$d = \sqrt{(2-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

б) Висота AK і сторона BC перпендикулярні, тому з формули

(3.12): $k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}}.$ З рівняння BC маємо $k_{BC} = -\frac{2}{3},$ тоді $k_{AK} = \frac{3}{2}.$

Для прямої AK відомі координати точки A і кутовий коефіцієнт. Рівняння AK (3.5):

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0.$$

Довжина висоти – це відстань від точки $A(1;1)$ до прямої BC (3.13):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 19|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} \approx 3,8.$$

в) Пряма L , яка проходить через точку A , паралельна стороні BC . Їх кутові коефіцієнти рівні (3.11): $k_L = k_{BC} = -\frac{2}{3}.$ Отримаємо її рівняння (3.5):

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 3 = 2x + 2.$$

$$2x + 3y - 5 = 0 \text{ (} L \text{)}.$$

г) Середня лінія MN проходить через середини сторін AB і AC . Нехай це точки N і M відповідно. Знайдемо їх координати за формулами (3.2) при $\lambda=1$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3;$$

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3; \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Рівняння середньої лінії MN (3.6):

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{y - 3}{2 - 3} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{3}{2}(y - 3) \Rightarrow x + \frac{3}{2}y - 6 = 0.$$

$$2x + 3y - 12 = 0 \text{ (MN)}.$$

Рівняння MN можна було отримати, враховуючи, що MN паралельна BC . Тоді $k_{MN} = k_{BC} = -\frac{2}{3}$. Знаючи координати точки M або N , застосовуємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.5).

д) Щоб утворити кут B , треба пряму BC повернути проти стрілки годинника до збігу з прямою AB . Рівняння прямої BC $2x + 3y - 19 = 0$, тому $k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{3}$. Рівняння AB (3.6): $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-1}{3-1}$
 $\Rightarrow (x-1) \cdot 2 = 4(y-1) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, тому $k_2 = k_{AB} = \frac{1}{2}$. За формулою (3.10) матимемо

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{4}, \quad \angle B = \operatorname{arctg} \left(\frac{7}{4} \right).$$

Відповідь: а) $2x + 3y - 19 = 0$ (BC), $|BC| = \sqrt{13}$;

б) $3x - 2y - 1 = 0$ (AK), $|AK| \approx 3,8$;

в) $2x + 3y - 5 = 0$ (L);

г) $2x + 3y - 12 = 0$ (MN);

$$\text{д) } \angle B = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{4}\right).$$

Задача 11. Рівняння кривих привести до канонічного виду та побудувати їх:

а) $9x^2 - 25y^2 - 36x - 50y - 214 = 0$ – рівняння гіперболи.

Розв'язання: Методом доповнення до повного квадрата виділяємо повний квадрат по змінних x і y :

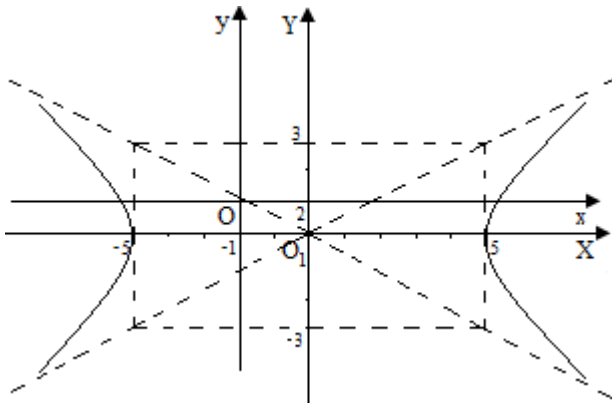
$$\begin{aligned} 9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 25(y^2 + 2y + 1 - 1) &= 214, \\ 9((x-2)^2 - 4) - 25((y+1)^2 - 1) &= 214 \Rightarrow 9(x-2)^2 - 25(y+1)^2 = 225, \\ \frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X = x - 2$; $Y = y + 1$ з новим центром в точці $O_1(2; -1)$. Рівняння має

вигляд: $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$.

Рівняння асимптот у «новій» системі координат: $Y = \pm \frac{b}{a} X$, де

$a = 5$, $b = 3$: $Y = \pm \frac{3}{5} X$. Зробимо рисунок:



б) $25x^2 + 100x + 9y^2 - 18y = 116$ – рівняння еліпса.

Розв'язання. Виділяємо повний квадрат по змінних x і y :

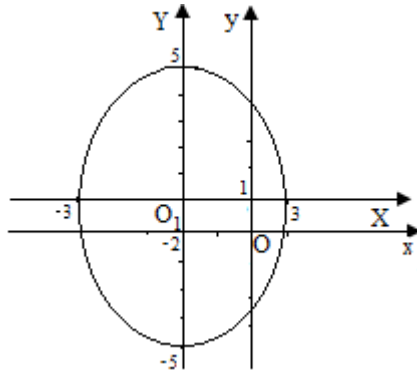
$$25(x^2 + 4x + 4 - 4) + 9(y^2 - 2y + 1 - 1) = 116 \Rightarrow$$

$$25(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 225,$$

$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{25} = 1.$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X = x + 2$; $Y = y + 1$ з новим центром в точці $O_1(-2; 1)$. Рівняння має

вигляд: $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{25} = 1$. Зробимо рисунок:



в) $y^2 + 4y = x$ – рівняння параболи.

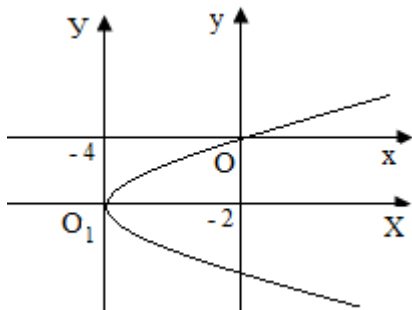
Розв'язання. Виділяємо повний квадрат по змінній y :

$$(y^2 + 4y + 4 - 4) = x \Rightarrow (y + 2)^2 = x + 4.$$

Виконаємо паралельне перенесення осей координат $X = x + 4$; $Y = y + 2$ з новим центром в точці $O_1(-4; -2)$. Рівняння

має вигляд: $Y^2 = X$.

Зробимо рисунок:



Відповідь: а) гіпербола $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$;

б) еліпс $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$;

в) парабола $(y+2)^2 = x+4$.

4. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

Розглянемо декартову прямокутну систему координат у просторі. Точки в цій системі визначаються трьома координатами: x – абсциса, y – ордината та z – апліката: $M(x, y, z)$. Довжина відрізка у просторі та поділ відрізка в заданому відношенні визначаються аналогічними формулами, як і для прямої на площині з урахуванням аплікати.

4.1 Площина у просторі

Площина у просторі характеризується нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, який перпендикулярний площині.

Способи задання площини.

Площина у просторі задається рівняннями:

а) рівняння площини з заданим нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ і точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка їй належить, визначається:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \quad (4.1)$$

б) загальне рівняння площини з заданим вектором $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$Ax + By + Cz + D = 0; \quad (4.2)$$

в) рівняння площини, якій належать три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, визначається формулою:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0; \quad (4.3)$$

г) рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (4.4)$$

де a, b, c – відрізки, які площина відтинає відповідно на осях Ox , Oy , Oz , враховуючи їх знаки;

д) нормальне рівняння площини:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (4.5)$$

де p – довжина нормалі, опущеної з точки O на площину, α, β, γ – кути, які нормаль утворює з осями Ox , Oy , Oz .

е) рівняння пучка площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (4.6)$$

де λ – деяка стала величина.

Означення 4.1. Пучком площин називається сукупність усіх площин, що проходять через пряму перетину двох заданих площин:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кут φ між двома площинами $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ визначається формулою:

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}. \quad (4.7)$$

Умова паралельності площин p_1 і p_2 :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.8)$$

Умова перпендикулярності площин p_1 і p_2 :

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (4.9)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.10)$$

4.2 Пряма у просторі

Способи задання прямої у просторі.

Пряма у просторі характеризується напрямним вектором $\vec{S} = (l, m, n)$, який паралельний прямій. Пряма у просторі задається рівняннями:

а) канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}; \quad (4.11)$$

де точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій;

б) параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0, \\ y = m \cdot t + y_0, \\ z = n \cdot t + z_0; \end{cases} \quad (4.12)$$

в) рівняння прямої, якій належать дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$, визначається формулою:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}; \quad (4.13)$$

г) пряма, як перетин двох площин $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, визначається формулою:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Косинус кута α між двома прямими з напрямними векторами $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ визначається формулою:

$$\cos \alpha = \pm \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4.15)$$

Умова паралельності двох прямих:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.16)$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (4.17)$$

Синус кута φ між прямою $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ з напрямним вектором $\vec{S}=(l, m, n)$ і площиною $p: Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\vec{n}=(A, B, C)$ визначається формулою:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{S} \cdot \vec{n}|}{|\vec{S}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|lA + mB + nC|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.18)$$

Умова паралельності прямої L і площини p :

$$l \cdot A + m \cdot B + n \cdot C = 0. \quad (4.19)$$

Умова перпендикулярності прямої L і площини p :

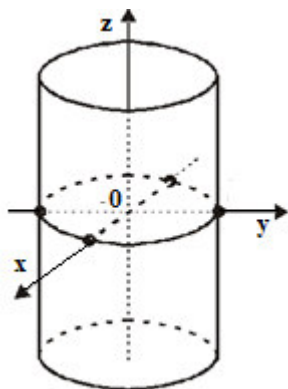
$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \quad (4.20)$$

4.3 Поверхні другого порядку.

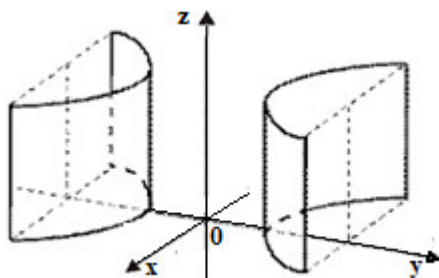
Означення 4.2. Циліндричною поверхнею називається поверхня, що утворюється як результат руху прямої лінії (твірної), яка перетинає задану криву (напряму циліндра), залишаючись паралельною сталому вектору.

Назва циліндричної поверхні утворюється з назви напрямної циліндра. Розглянемо їх.

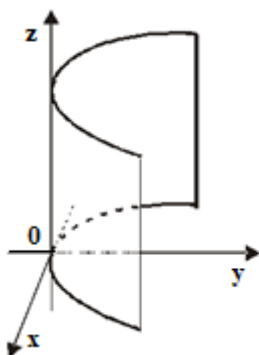
$$\text{Еліптичний циліндр } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x^2 + y^2 = R^2 \text{ — круговий}). \quad (4.21)$$



Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (4.22)



Параболічний циліндр $y^2 = 2px$. (4.23)

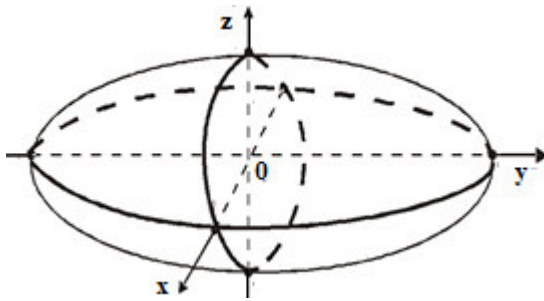


Означення 4.3. Поверхнею обертання називають поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої L .

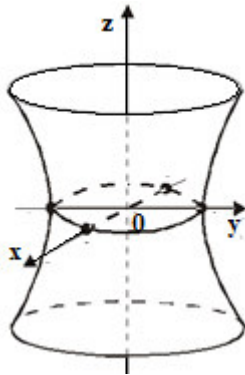
Розглянемо канонічні рівняння деяких з них:

Еліпсоїд
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.24)$$

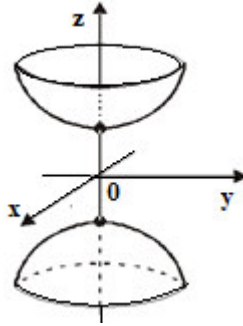
де числа a, b, c називаються *півосями* еліпсоїда. Якщо $a = b = c$, маємо *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з центром у початку координат.



Однопорожнинний гіперболоїд
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.25)$$

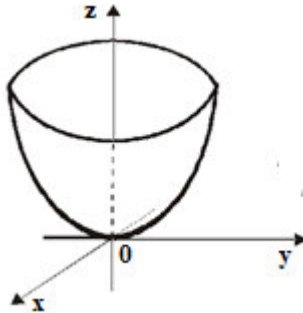


Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$ (4.26)

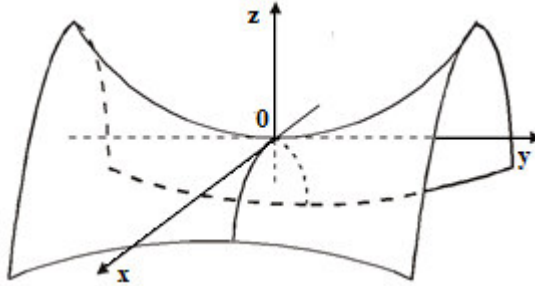


Обидва гіперболоїди є симетричними відносно координатних площин, а початок координат (точка O) є їх *центром* симетрії. Числа a, b, c називаються *півосями* гіперболоїда.

Еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$ (4.27)

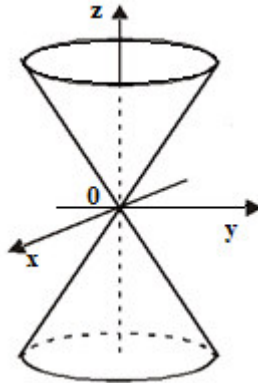


Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$ (4.28)



Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (4.29)$$



Задача 12. Дано чотири точки: $A(-1; -2; 0)$, $B(0; -4; 3)$, $C(1; 0; 1)$ і $D(-1; 1; 0)$. Треба:

- 1) знайти рівняння площини ABC у загальному вигляді;
- 2) записати рівняння площини ABC у «відрізках»;
- 3) знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно прямій AB ;
- 4) скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно прямій AB ;
- 5) скласти рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині ABC ;

6) скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині ABC ;

7) знайти відстань d від точки D до площини ABC ;

8) знайти координати точки P , яка є проекцією точки D на площину ABC ;

9) знайти косинус кута α між прямими AB і CD ;

10) знайти синус кута φ між прямою CD і площиною ABC .

Розв'язання. 1) Складемо рівняння площини ABC , яка проходить через три точки A, B, C за формулою (4.3):

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - (-2) & z - 0 \\ 0 - (-1) & -4 - (-2) & 3 - 0 \\ 1 - (-1) & 0 - (-2) & 1 - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник по елементах першого рядка. Матимемо:

$$(x+1) \cdot (-8) - (y+2) \cdot (-5) + z \cdot (6) = 0.$$

Рівняння ABC : $-8x + 5y + 6z + 2 = 0 \Rightarrow 8x - 5y - 6z - 2 = 0$.

2) Рівняння площини ABC ($8x - 5y - 6z = 2$) запишемо у «відрізках» за формулою (4.4):

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{-\frac{2}{5}} + \frac{z}{-\frac{1}{3}} = 1.$$

3) Знайдемо вектор $\overline{AB} = (1; -2; 3)$. Він і є напрямним вектором прямої AB . Шукана пряма, яка проходить через точку $C(1; 0; 1)$, і пряма AB паралельні. Тому з умови паралельності прямих (4.16) матимемо, що напрямний вектор шуканої прямої – це $\overline{S} = (1; -2; 3)$, а її рівняння:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

4) Шукана площина і пряма AB перпендикулярні. Вектор нормалі $\overline{n}$ шуканої площини і напрямний вектор $\overline{S} = (1; -2; 3)$ прямої AB колінеарні: $\overline{n} \parallel \overline{S}$. З умови перпендикулярності прямої і площини (4.20) матимемо $\overline{n} = (1; -2; 3)$. За формулою (4.1) рівняння шуканої площини, яка проходить через точку $C(1; 0; 1)$,

$$1 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-0) + 3 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

5) Нормальний вектор площини ABC $\vec{n} = (8; -5; -6)$. Шукана площина і площина ABC паралельні. З умови паралельності площин (4.8) матимемо, що їх нормальні вектори колінеарні. Нормальний вектор шуканої площини є $(8; -5; -6)$. За формулою (4.1) рівняння шуканої площини, яка проходить через точку $D(-1; 1; 0)$,

$$8 \cdot (x+1) - 5 \cdot (y-1) - 6 \cdot (z-0) = 0 \Rightarrow 8x - 5y - 6z + 13 = 0.$$

6) Площина ABC і пряма, яка проходить через точку $D(-1; 1; 0)$, перпендикулярні. З умови їх перпендикулярності (4.9) напрямний вектор прямої є $(8; -5; -6)$. Канонічні рівняння прямої за формулою

$$(4.11) - \frac{x+1}{8} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{-6}, \text{ а її параметричні рівняння за формулою}$$

$$(4.12) - \begin{cases} x = 8t - 1, \\ y = -5t + 1, \\ z = -6t. \end{cases}$$

7) знайдемо відстань d від точки $D(-1; 1; 0)$ до площини ABC : $8x - 5y - 6z - 2 = 0$ знайдемо за формулою (4.10):

$$d = \frac{|8 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{8^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{125}} = \frac{15}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

8) Проекцією точки D на площину ABC є точка P перетину прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до площини ABC . Параметричні рівняння цієї прямої знайдені в п. 6). Для знаходження координат точки P розв'яжемо систему з рівняння

$$\text{площини і параметричних рівнянь прямої: } \begin{cases} 8x - 5y - 6z - 2 = 0, \\ x = 8t - 1, \\ y = -5t + 1, \\ z = -6t. \end{cases}$$

Підставимо x, y, z в рівняння площини і знайдемо значення t :

$$8 \cdot (8t - 1) - 5 \cdot (-5t + 1) - 6 \cdot (-6t) - 2 = 0 \Rightarrow 125t = 15,$$

$$t = \frac{15}{125} = \frac{3}{25} = 0,12.$$

Знайдене значення t підставимо в параметричні рівняння прямої.

Отримаємо координати шуканої точки P :

$$\begin{cases} x_P = 8 \cdot 0,12 - 1 = -0,04, \\ y_P = -5 \cdot 0,12 + 1 = 0,4, \Rightarrow P(-0,04; 0,4; -0,72). \\ z_P = -6 \cdot 0,12 = -0,72. \end{cases}$$

9) Знайдемо рівняння прямої CD за формулою (4.13):

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Косинус кута α між прямими AB і CD знайдемо за формулою (4.15). Напрямними векторами цих прямих є $\vec{S}_{AB} = (1; -2; 3)$ і $\vec{S}_{CD} = (-2; 1; -1)$. Тому

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{-7}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \\ &= \mp \frac{7}{2\sqrt{21}} = \mp \frac{\sqrt{21}}{6}. \end{aligned}$$

10) Синус кута φ між прямою CD і площиною ABC знайдемо за формулою (4.18). Напрямний вектор прямої CD – $\vec{S}_{CD} = (-2; 1; -1)$, а нормальний вектор площини ABC – $\vec{n} = (8; -5; -6)$. Тому

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|(-2) \cdot 8 + 1 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-6)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{6} \sqrt{125}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $8x - 5y - 6z - 2 = 0$; 2) $\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{-\frac{2}{5}} + \frac{z}{-\frac{1}{3}} = 1$;

3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$; 4) $x - 2y + 3z - 4 = 0$; 5) $8x - 5y - 6z + 13 = 0$;

$$6) \begin{cases} x = 8t - 1, \\ y = -5t + 1, \\ z = -6t; \end{cases} \quad 7) d = \frac{3}{5}\sqrt{5}; \quad 8) P(-0,04; 0,4; -0,72); \quad 9) \cos \alpha = \mp \frac{\sqrt{21}}{6};$$

$$10) \sin \varphi = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Задача 13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку

$$A(1; -2; 3) \text{ та пряму } L: \begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Пряма L задана як перетин двох площин. Через цю пряму можна провести безліч площин, які ми називаємо пучком площин. Запишемо рівняння пучка для наших площин (4.6):

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0.$$

За умовою задачі площина проходить через точку A . Підставимо координати точки в рівняння пучка і знайдемо λ .

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 3 - 3 + \lambda(1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1) = 0 \Rightarrow 8 + 2 \cdot \lambda = 0.$$

$$\lambda = -4.$$

Знайдене значення λ підставимо в рівняння пучка:

$$2x - 3y + z - 3 - 4(x + 3y + 2z + 1) = 0 \Rightarrow -2x - 12y - 7z - 7 = 0 \quad \text{або} \\ 2x + 12y + 7z + 7 = 0.$$

Відповідь: $2x + 12y + 7z + 7 = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – Изд-во: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 312с. — ISBN 978-5-9221-0691-7.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. — 288 с.
3. Вища математика: В 2 кн. Кн.1 Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К.: Либідь, 2010 р. – 592 с. – ISBN: 978-966-06-0572-5.
4. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн.1. Основні розділи / Призва Г.Й., Плахотник В.В Гординський Л.Д. та інш.; За ред. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 2003. – 400 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
6. Дубовик В.П. Вища математика: навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. - 200с., іл.
7. Каплан И.А.. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан. Харьков, 1967. –946 с.
8. Овчинников П.П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
9. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. Підручник/ Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, Х.П. Луник, Д.В. Уханська. – Львів: Видавництво "Бескид Біт", 2002. – 262 с.
10. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Кручковича Г.И. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.
11. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Учеб. пособие для втузов / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1993. – 480 с. – ISBN 5-02-01433-9.