

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

з дисципліни «Вища математика»
за темами : «Функція багатьох змінних» та
«Інтегральне числення функції однієї змінної»
для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання

Розрахунково-графічні завдання з дисципліни «Вища математика» за темами: «Функція багатьох змінних» та «Інтегральне числення функції однієї змінної» для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Т.І. Левицька, І.С. Пожуєва. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 66с.

Містить розрахунково-графічні завдання з курсу «Вища математика» за темами: «Функція багатьох змінних» та «Інтегральне числення функції однієї змінної» для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми навчання.

Експерт

спеціальності: М.Ю. Тягунова, доцент, к.т.н.

Рецензент:

О.В. Коротунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний

за випуск : Т.І. Левицька, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
факультету КНТ НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 2 від 10.09.2025

Затверджено на засіданні кафедри
«Математика» НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 1 від 28.08.2025

ЗМІСТ

| | |
|---|-----------|
| ВСТУП | 4 |
| ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ | 5 |
| Варіант 1..... | 5 |
| Варіант 2..... | 7 |
| Варіант 3..... | 9 |
| Варіант 4..... | 11 |
| Варіант 5..... | 13 |
| Варіант 6..... | 15 |
| Варіант 7..... | 17 |
| Варіант 8..... | 19 |
| Варіант 9..... | 21 |
| Варіант 10..... | 23 |
| Варіант 11..... | 25 |
| Варіант 12..... | 27 |
| Варіант 13..... | 29 |
| Варіант 14..... | 31 |
| Варіант 15..... | 33 |
| Варіант 16..... | 35 |
| Варіант 17..... | 37 |
| Варіант 18..... | 39 |
| Варіант 19..... | 41 |
| Варіант 20..... | 43 |
| Варіант 21..... | 45 |
| Варіант 22..... | 47 |
| Варіант 23..... | 49 |
| Варіант 24..... | 51 |
| Варіант 25..... | 53 |
| Варіант 26..... | 55 |
| Варіант 27..... | 57 |
| Варіант 28..... | 59 |
| Варіант 29..... | 61 |
| Варіант 30..... | 63 |
| ЛІТЕРАТУРА | 65 |
| ДОДАТОК А. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ | 66 |

ВСТУП

Розрахунково-графічні завдання складено у відповідності до програми з курсу "Вища математика" багатоступеневої підготовки фахівців і використовуються при проведенні занять зі студентами 1-го курсу факультету комп'ютерних наук і технологій НУ «Запорізька політехніка» в ході вивчення курсу.

Метою виконання розрахунково-графічних завдань є закріплення теоретичних знань по дисципліні «Вища математика» та придбання практичних навичок при розв'язанні задач, що відносяться до розділів: «Функція багатьох змінних» та «Інтегральне числення функції однієї змінної».

Приведено 30 варіантів індивідуальних завдань, складених з трьох частин: перше завдання містить задачі з функцією багатьох змінних, друге - невизначені інтеграли, третє – обчислення визначених інтегралів, невласних інтегралів та приклади застосування визначених інтегралів. Номер варіанту визначається за номером у списку в журналі обліку відвідування занять академічної групи.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ВАРІАНТ № 1

Завдання 1.

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \sqrt{y-x} + \sqrt{y+x}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(x^2 - e^{-y})$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$2x^2 + y - z - xy = e^z.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5$ у точці $M_0(-2; 1; 0)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos(xy^2)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 3x^2y + xy$ у точці $M(1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; 3)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 2y + 5$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(2 - \sqrt{x})^3}{x^2} dx.$

6. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 4x}}{\cos^2 4x} dx.$

7. $\int \frac{2x^2 + 2x + 20}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx.$

3. $\int \frac{2x-1}{x^2 - 6x + 8} dx.$

8. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}.$

4. $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4} dx.$

9. $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}.$

5. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

10. $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^4} dx;$ б) $\int_1^2 \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx;$ в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1},$ б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

ВАРІАНТ № 2**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin \frac{x}{y^2}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \cos(x - \sqrt{xy^3})$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$z = 2y + z^2 + 2xyz.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: 2x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 5$ у точці $M_0(1; 1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{x^3}{y^2 + x}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^2 + xy + y^2$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; 1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = \frac{1}{2}x^2 - xy$$

в замкненій області $D: y \leq 8, y \geq 2x^2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot 5^x - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx .$$

6.
$$\int \frac{x^3 - 4x + 5}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx .$$

2.
$$\int \sqrt{\sin 4x} \cos 4x dx .$$

7.
$$\int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx .$$

3.
$$\int \frac{5x + 8}{\sqrt{2x^2 + x + 5}} dx .$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} + 1)\sqrt{x}} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}} .$$

9.
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx .$$

5.
$$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx .$$

10.
$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 \sin x + 2} dx ;$$
 б)
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} (2x + 5) \cos 2x dx ;$$
 в)
$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1} ;$$
 б)
$$\int_2^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10} .$$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} y = \ln x; \\ x = l; y = 0. \end{cases}$

ВАРІАНТ № 3**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \sqrt{x+y} + \ln(y^2 - x^2).$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = 5xy^2 + \ln(yx^2)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$2x + y + 3z^2 + 4 = xyz.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4y + 2z = 14$ у точці $M_0(2; 1; 3)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{\sin(2x+y)}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^3 - xy^2 + y^3$ у точці $M(2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(-3; 1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{dx}{(5x+7)^{10}}.$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$

5. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$

6. $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx.$

7. $\int \frac{2x^2 - 7x + 10}{(x-1)(x^3 - x^2 + 4x - 4)} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} dx.$

9. $\int \sqrt[3]{\cos^5 2x \sin^3 2x} dx.$

10. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^3 \sqrt{1+5x} dx;$ б) $\int_0^2 (2-x) e^{-2x} dx;$ в) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}};$ б) $\int_0^1 \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}} dx.$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} xy = 6; \\ y = 6 - x. \end{cases}$

ВАРІАНТ № 4**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \ln(5 - x - y) + \frac{x}{y}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arcsin \frac{y}{x^2 - 1}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно $\sqrt{x^2 + y^2} + z^3 - 3z = 10$.

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 9$ у точці $M_0(2; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \ln(2x^2 + 8y^2)$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(3;2)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1;1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в замкненій області $D: x - y + 1 \geq 0, x \leq 3, y \geq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{5\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

6. $\int \frac{5x}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$.

2. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}} dx$.

7. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$.

3. $\int \frac{5x}{3x^2 + 5x + 1} dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{4x - \sqrt[3]{x^2}}$.

4. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

9. $\int \sin^4 x \cos^6 x dx$.

5. $\int (3x-2) \cos 4x dx$.

10. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \right) dx$; б) $\int_2^5 \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}$.

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$; б) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$.

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями

$$\begin{cases} y = e^x; x = 0; \\ y = \sqrt{x}; x = 1 \end{cases}$$

ВАРІАНТ № 5**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \frac{x + y}{2x + x^2 - y^2}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = tg \frac{y^3}{2x}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 - y^2 + 3xy + 4x - y + 3$ у точці $M_0(0; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(x^2 - y^2)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 3x^2 + 2xy + 4y^2$ у точці $M(2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; 2)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2y - 3x^2 + 2y - 1$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 8$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int (\sqrt{x} + 2) \left(\sqrt[3]{x^2} + 3x - 4 \right) dx$.
2. $\int x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx$.
3. $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x - 2} dx$.
4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}$.
5. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$.
6. $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx$.
7. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + x^2} dx$.
8. $\int \frac{x - 1}{x\sqrt{x - 2}} dx$.
9. $\int \sqrt[5]{\sin^3 x \cos^3 x} dx$.
10. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

- а) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$; б) $\int_0^{\pi/6} (4x - 2) \sin 2x dx$; в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$.

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

- а) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x}$.

3. Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена лінією $\rho = 2 + \cos \varphi$.

ВАРІАНТ № 6**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \ln(xy) - \frac{x}{y-2}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arcsin(4x - y^3)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$3x^2 - y^2 - z^2 - xy = e^z.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: 2y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3x = -11$ у точці $M_0(-2; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = xe^{\frac{y}{x}}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$ у точці $M(2; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -3)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 3)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 10 + 2xy - x^2$$

в замкненій області $D: 0 \leq y \leq 4 - x^2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{\sqrt[7]{x} - 6x^2 e^x + 2x}{x^2} dx .$$

6.
$$\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{(x^2 - x)(x - 1)} dx .$$

2.
$$\int \frac{e^{2 \arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx .$$

7.
$$\int \frac{2x^5 - 2x^3 - x^2}{1 - x^4} dx .$$

3.
$$\int \frac{x - 1}{\sqrt{3x^2 - 9x + 6}} dx .$$

8.
$$\int \frac{1 + x}{x + \sqrt{x}} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2}} .$$

9.
$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx .$$

5.
$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x + 1}} dx .$$

10.
$$\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x} .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_2^5 \frac{e^{\sqrt{x-1}} dx}{\sqrt{x-1}} ;$$

б)
$$\int_3^6 (3x - 4) e^{2x} dx ;$$

в)
$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}} .$$

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}} ;$$

б)
$$\int_e^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}} .$$

3. Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена лінією $\rho = 4 \cos 3\varphi$.

ВАРІАНТ № 7**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \frac{\sqrt{y-x^2}}{2x^2}$.
2. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(3xy^2 - x)$.
3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\frac{z}{x} = \cos(xyz).$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - 3y^2 - 2z^2 + xz - 4y = -15$ у точці $M_0(2; 1; 3)$.
5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{xy}{x+y}$.
6. Знайти: 1) похідну функції $z = \arcsin(x^2/y)$ у точці $M(1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(5; 12)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.
7. Дослідити на екстремум функцію $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.
8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$$
 в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x} dx.$

7. $\int \frac{4x^2 + 38}{(x+2)(x^2 - 2x + 10)} dx.$

2. $\int \frac{3^x}{9 + 9^x} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x \sqrt[4]{x^3}} dx.$

3. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1}} dx.$

9. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}.$

4. $\int x^2 \sqrt{25 - x^2} dx.$

10. $\int \frac{dx}{5 + 3 \sin^2 x}.$

5. $\int (x^2 + x)e^{-x} dx.$

6. $\int \frac{2-8x}{x^4 + 4x^2} dx.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{3+x^6};$ б) $\int_0^1 \ln(x^2 + 4) dx;$ в) $\int_{-1}^0 \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}};$ б) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$

ВАРІАНТ № 8**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції
 $z = \arcsin(2 - x^2 - y^2)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \sin \sqrt{3x + 2y^2}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$e^{zx} + yz + x^2y = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y$ у точці $M_0(-1; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^y$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 3x^4 + 2x^2y^3 + y^2$ у точці $M(1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(4; -3)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 8\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx.$$

6.
$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^3-x^2+4x-4)} dx$$

2.
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin^2 x}} dx.$$

7.
$$\int \frac{6x}{x^3-1} dx.$$

3.
$$\int \frac{5x+3}{2x^2-6x+1} dx.$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}} dx.$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

9.
$$\int \cos^6 x dx.$$

5.
$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

10.
$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_{-1}^0 \frac{x^4 dx}{\sqrt{8+x^5}};$$

б)
$$\int_{1/2}^1 (1-6x) e^{2x} dx;$$

в)
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$$

б)
$$\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} dx.$$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 1$.

ВАРІАНТ № 9**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції
 $z = \ln(4 + 2x - y^2)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arcsin xy - 3xy^2$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\sin\left(\frac{xy}{z}\right) + x^3 + y^3 + z^3 = 8.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 4y$ у точці $M_0(1; -1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції
 $z = \ln \frac{x}{y} - x^3 y^2$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^2 y - xy$ у точці $M(-3; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(4; 3)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(-3; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + x^2 - 2y^2 + 2xy - 7x + 2y.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$$

в замкненій області $D: x \leq 1, y \geq 0, y \leq x$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-2)^2}{x^3} dx.$

6. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx.$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(3x^3-2)^2}} dx.$

7. $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)} dx.$

3. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2} dx.$

8. $\int \frac{dx}{1-\sqrt[4]{x+1}}.$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$

9. $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx.$

5. $\int x^2 \sin^2 x dx.$

10. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$; б) $\int_{-1}^0 e^{-2x} (4x-3) dx$; в) $\int_0^{\pi/3} \sin x \sqrt[3]{\cos^2 x} dx.$

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$; б) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t; \\ y = 5 \sin^3 t; \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$

ВАРІАНТ № 10**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin \frac{4y}{x}$.
2. Знайти повний диференціал функції $z = 3 - \ln \sqrt{xy}$.
3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно $\ln \left(\frac{xz}{y} \right) + yz^2 = x$.
4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 - 4y^2 - 2xy + 2x - y$ у точці $M_0(1; 1; -4)$.
5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(e^x + e^y)$.
6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^2 + 6xy + y^3$ у точці $M(4; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(3; -5)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(4; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.
7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 4x^2 + 2xy + y^2 - 4x - y.$$
8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + xy - 2$$
 в замкненій області $D: 4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) \left(x^3 + \frac{x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx .$

6. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx .$

2. $\int x^2 e^{x^3 + 2} dx .$

7. $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx .$

3. $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} dx .$

8. $\int \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx .$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} .$

9. $\int \sin^2 4x \cos^4 4x dx .$

5. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx .$

10. $\int \frac{3 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx .$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

a) $\int_0^{1/2} \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx ;$ б) $\int_0^{\pi/6} (2x - 3) \cos 5x dx ;$ в) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} .$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

a) $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2 + 4x + 5} ;$ б) $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5 + 1}} .$

3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями

$$x = \frac{1}{2} y^2 ; y = 3 ; y = -2 .$$

ВАРІАНТ № 11**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \frac{3}{x - y + 1} + \sqrt{x - 2y}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \cos x - y^3 + e^{xy}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$xe^y + ye^z + ze^x = 8.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 3x - z + 1 = 0$ у точці $M_0(-1; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin^2(x - 2y)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^3 + 3x^2y + y^2$ у точці $M(-1; 4)$ за напрямом вектора $\vec{l}(-3; 5)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(-1; 4)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + 2,5y^2 - 2xy - 2x$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \left(\sqrt[4]{x} - 2 \right)^3 dx.$

6. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

2. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}.$

7. $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2 - x + 5}} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{x-1}.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

9. $\int \cos^4 x dx.$

5. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

10. $\int \frac{dx}{6 - 3\cos^2 x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$; б) $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 2x dx$; в) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx;$

б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

3. Знайти довжину дуги кривої $2y^2 = x^3$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 10$.

ВАРІАНТ № 12**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{x-y}}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = x^2 y \sin x - 5x$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\ln(xy + z) + xz^2 = 2.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 - 2yz - z^2 + x - 2z = -2$ у точці $M_0(1; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \operatorname{arctg}(x^2/y)$ у точці $M(3;4)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2;5)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(3;4)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 2x^3 - xy^2 + y^2$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 6$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 2x + 3\sqrt{x}}{x} dx .$$

7.
$$\int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2 - 1)} dx .$$

2.
$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx .$$

8.
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2x-1}} dx .$$

3.
$$\int \frac{11x-7}{2x^2 - 2x+1} dx .$$

9.
$$\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt[3]{\cos x}} .$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x - 1}} .$$

10.
$$\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} .$$

5.
$$\int \ln(x^2 + 1) dx .$$

6.
$$\int \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^4 - 1} dx .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2 + 4} dx ;$$
 б)
$$\int_0^{2\pi} (3x^2 + 5) \cos 2x dx ;$$
 в)
$$\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)} ;$$

б)
$$\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x} .$$

3. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.

ВАРІАНТ № 13**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin(xy)$.
2. Знайти повний диференціал функції $z = e^{2xy} - \sqrt{yx}$.
3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + xyz = 2.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 - xz - 2yz + 7 = 0$ у точці $M_0(2; 1; 3)$.
5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{x^2y}$.
6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^2y^3 - xy^2$ у точці $M(1; -2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(3; -2)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; -2)$ зростає з найбільшою швидкістю.
7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 2x^2 + 3y^2 + 1$$

в замкненій області $D: 0 \leq y \leq \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{5\sqrt{x^5} - 2x + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx.$$

2.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x (\operatorname{ctg}^2 x + 9)}$$

3.
$$\int \frac{2x+4}{3x^2+x-5} dx.$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

5.
$$\int \arcsin 9x dx.$$

6.
$$\int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx.$$

7.
$$\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

9.
$$\int \sin^3 x \cos^7 x dx.$$

10.
$$\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx.$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx;$$

б)
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x};$$

в)
$$\int_0^{\pi/2} \cos x e^{\sin x} dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5};$$

б)
$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

3. Знайти довжину дуги кривої $y = 1 - \ln \cos x$, де $0 \leq x \leq \ln 2$.

ВАРІАНТ № 14**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \ln(xy^2)$.
2. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(x - y^2 - 4)$.
3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\operatorname{tg}(zx) + z^2y - xy - \ln 2 = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - z^2 - 5yz + 3x + 35 = 0$ у точці $M_0(1; 2; 3)$.
5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{\cos(x+y)}$.
6. Знайти: 1) похідну функції $z = \ln(yx^2 + 2y^2)$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1$$

в замкненій області $D: x \geq -3, y \geq 0, x + y + 1 \leq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{x^3 - 2 + \sqrt[3]{\ln x}}{x} dx .$$

7.
$$\int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2} dx .$$

2.
$$\int \frac{x^3}{x^4 + 3} dx .$$

8.
$$\int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx .$$

3.
$$\int \frac{6x + 5}{\sqrt{3x^2 - 12x + 3}} dx .$$

9.
$$\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} .$$

10.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3 \cos^2 x} .$$

5.
$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx .$$

6.
$$\int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x + x}{x^2 + 1} dx ;$$
 б)
$$\int_0^{\pi/6} (1 - 8x^2) \cos 4x dx ;$$
 в)
$$\int_0^3 x \arctg x dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} \frac{(x + 2) dx}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 1}} ;$$
 б)
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx .$$

3. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, де $0 \leq x \leq \ln 2$.

ВАРІАНТ № 15**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arctg(y^2 + x^2)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$xy^2z^3 + x^2yz - 5 \ln x = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 4z = 6$ у точці $M_0(2; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^3 + 5x^2y + xy^2$ у точці $M(2; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(-2; 1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = xy(6 - x - y)$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$$

в замкненій області $D: x \leq 5, y \geq 0, x - y \geq 1$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{(2 - \sqrt[3]{x})^3}{x^2} dx.$$

2.
$$\int \frac{\sqrt{2 + \ln x}}{x} dx.$$

3.
$$\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx.$$

4.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

5.
$$\int \arccos \frac{1}{x} dx.$$

6.
$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx.$$

7.
$$\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx.$$

8.
$$\int \frac{\sqrt[6]{x+3} dx}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}}.$$

9.
$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

10.
$$\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}.$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx;$$
 б)
$$\int_{-1}^0 (7x-10) \sin 4x dx;$$
 в)
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx;$$
 б)
$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

3. Знайти довжину дуги кривої $y = 4 - x^2$ між точками її перетину з віссю Ox .

ВАРІАНТ № 16**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення

$$\text{функції } z = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x-5}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \operatorname{tg}(y^5 x^3)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$xe^{yz} + ze^x = 10.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: 3x^2 - y^2 + z^2 + xz - z + y = 12$ у точці $M_0(2; -1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin(x^2 y)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = xy^3 + 3xy + 4$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = 4x + 2y - 4x^2 - y^2$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 2x^2 - 0,5y^2 + 2xy - 4x$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \leq 2, y \geq 2x$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{\sqrt[5]{x^2 + 3\sqrt{x}}}{x} dx .$$

2.
$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx .$$

3.
$$\int \frac{12x - 9}{x^2 - 5x + 8} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + x - 1}} .$$

5.
$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} .$$

6.
$$\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx .$$

7.
$$\int \frac{7x - 2}{(x-1)(x^2 + 4)} dx .$$

8.
$$\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx .$$

9.
$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^3 x} dx .$$

10.
$$\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx ;$$
 б)
$$\int_0^1 x^2 e^{3x} dx ;$$
 в)
$$\int_0^{1/2} \arcsin x dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx ;$$
 б)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^5 - x^2 + 2} dx .$$

3. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{3}$.

ВАРІАНТ № 17**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \frac{\sqrt{2y + 4 - x^2}}{y - 1}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = xe^{x^3y^2}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно $z \ln(y + zx) + e^{xz^2} = 6$.

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 + z^2 + 5y + 4x = 17$ у точці $M_0(2; -1; 3)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^2 + 2y - xy + 1$ у точці $M(1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(3; 1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; -1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2).$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$$

в замкненій області $D: 2y + x \leq 4, x - 2y \leq 4, x \geq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - x^2 \right) \sqrt{x} dx.$

6. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

2. $\int (1 - x^2)^6 x dx.$

7. $\int \frac{3x - 8}{(x - 1)^2 (x^2 + 4)} dx.$

3. $\int \frac{2x + 1}{1 + x - 3x^2} dx.$

8. $\int \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x + 1}}.$

4. $\int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$

9. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

5. $\int x^2 (\cos 2x + 3) dx.$

10. $\int \frac{7 + 6 \sin x - 5 \cos x}{1 + \cos x} dx.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x} \sin^2 x};$ б) $\int_1^3 \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$ в) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x + 3)^2}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1 + \ln^2 x)};$ б) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x}.$

3. Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 6(2 \cos t - \cos 2t); \\ y = 6(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$ де $0 \leq t \leq 2\pi.$

ВАРІАНТ № 18**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції
 $z = \arcsin(x^2 - y^2)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 \sin(xy^2)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\frac{yz}{x} - \sin(xyz) + 1 = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 - z^2 - xz + 5y = 7$ у точці $M_0(2; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{x^2 y}{x - y}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \arctg(x/y^2)$ у точці $M(1;1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1;1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 y(4 - x - y)$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y - 6 \leq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{\sqrt[3]{x} 4^x - 3^x}{4^x} dx .$$

6.
$$\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx .$$

2.
$$\int \frac{e^x}{x^2} dx .$$

7.
$$\int \frac{x^2 + 23}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx .$$

3.
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2 + x + 2}} dx .$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2 - x + 1}} .$$

9.
$$\int \cos^4 x \sin^3 x dx .$$

5.
$$\int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx .$$

10.
$$\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x} .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^{1/2} \frac{(8x - \operatorname{arctg} 2x) dx}{1 + 4x^2};$$
 б)
$$\int_0^2 (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx;$$
 в)
$$\int_0^\pi x^3 \sin x dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^\infty x \sin x dx;$$
 б)
$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^5 + 2}} .$$

3. Знайти довжину дуги кривої $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

ВАРІАНТ № 19**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y-2}}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = y^2 \ln(yx^3 + x)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + z^2 - 2y^2 = -2xz + 2$ у точці $M_0(-2; 1; 4)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(x^2 + e^{-y})$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \ln(3x^2 + y^2)$ у точці $M(2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x\sqrt{x} - 3)^2}{\sqrt[3]{x}} dx.$

6. $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx.$

2. $\int \frac{x}{x^4 + 4} dx.$

7. $\int \frac{6 - 9x}{x^3 + 8} dx.$

3. $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{\sqrt[3]{x} + 1} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}.$

9. $\int \cos^3 x \sin^7 x dx.$

5. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx.$

10. $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{(x^3 + x)dx}{1 + x^4};$ б) $\int_0^{\pi/9} (x^2 + 17.5) \sin 2x dx;$ в) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2 - 4x) \ln 5};$ б) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}.$

3. Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t; \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$

ВАРІАНТ № 20**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = x - \sqrt{x^2 - y^2}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \sin(3x^2y + e^x)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x \ln(y + z) + 2^{y+z^2} = \ln 8.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 + y^2 + z^2 + 8z - 4x - 18 = 0$ у точці $M_0(1; 1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{x^2+xy}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \arcsin(x/y)$ у точці $M(1;-2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(3;-2)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1;-2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = (x - y)^2 + 2y^2 - 10.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^5} - 8}{x} dx.$$

6.
$$\int \frac{x^2 - 13x + 40}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx.$$

2.
$$\int \frac{dx}{e^{-x} + 1}.$$

7.
$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2} dx.$$

3.
$$\int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx.$$

8.
$$\int \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

4.
$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

9.
$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx.$$

5.
$$\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$$

10.
$$\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x}.$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$
 б)
$$\int_1^e \sqrt{x} \ln^2 x dx;$$
 в)
$$\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{4x+2}}.$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\arctg^2 3x};$$

б)
$$\int_1^{\infty} \frac{\arctg x dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

3. Знайти довжину дуги кривої
$$\begin{cases} x = t^2; \\ y = 1 - t, \end{cases} \text{ де } 0 \leq t \leq 1.$$

ВАРІАНТ № 21**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \sqrt{y-2x} + \sqrt{yx^2}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\left(\sqrt{xy^3} - 2\right)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\arctg(xz) - e^{x+yz} = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = 2x^2 - 4y^2 + 6xy - 3x$ у точці $M_0(1; 2; -5)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arctg(xy^2)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 2x^2y - xy + 5y$ у точці $M(1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; 1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 5x^2 + y^2 - 3xy$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}} \right) \sqrt{x} dx .$$

6.
$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx .$$

2.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}} dx .$$

7.
$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx .$$

3.
$$\int \frac{7x-2}{x^2-5x+1} dx .$$

8.
$$\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}} dx .$$

4.
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+9}} .$$

9.
$$\int \sin^5 x dx .$$

5.
$$\int x \arctg^2 x dx .$$

10.
$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx ;$$
 б)
$$\int_1^2 \arctg \sqrt{2x-1} dx ;$$
 в)
$$\int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}} .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\pi \arctg \frac{x}{2}}} ;$$

б)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13} .$$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо

вісі Ox
$$\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \text{ де } 0 \leq t \leq \pi .$$

ВАРІАНТ № 22**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin(xy - 1)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = y \sin(x^3 y^2 - 1)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$xy^2 + \ln(yz) - z^2 = e^2.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 5$ у точці $M_0(-2; 1; 7)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \frac{y^2}{y + x^2}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \arcsin\left(\frac{y}{x+y}\right)$ у точці

$M(4;4)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2;3)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(4;4)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + xy^2 + 6xy.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = xy - x - 2y$$

в замкненій області $D: y \geq 0, y \leq x, x \leq 3$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{2^x \sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx.$

3. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}.$

5. $\int \ln \frac{2-x}{2+x} dx.$

6. $\int \frac{8}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx.$

7. $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx.$

8. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^3}}.$

9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx.$

10. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 8\sin 2x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$; б) $\int_0^3 e^{-x} (2x - 3) dx$; в) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x) \ln^3 x}$; б) $\int_2^6 \frac{x dx}{\sqrt{x-2}}.$ 3. Знайти об'єм тіла,

створеного обертанням плоскої фігури навколо вісі Ox $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}.$

ВАРІАНТ № 23**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \sqrt{\frac{xy}{x-y}}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(xy^2 - x^3)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$z = 2y + xz^2 + 2xy.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - 5y^2 + 3z^2 + xz - y = 6$ у точці $M_0(0; 1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{xy-y^2}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = xe^y$ у точці $M(1; 1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; 2)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x\sqrt{y} + x^2 - y + 6x + 3.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 4x^2 + (y + 1)^2$$

в замкненій області $D: x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 2 \right)^2 \frac{1}{x} dx .$$

6.
$$\int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x+1)^2} dx .$$

2.
$$\int \frac{4x - \sqrt[3]{\arcsin^2 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

7.
$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2}{x^4 + 3x^2 - 4} dx .$$

3.
$$\int \frac{x-18}{\sqrt{4x^2+x-5}} dx .$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx .$$

4.
$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx .$$

9.
$$\int \sin^3 x \cos^6 x dx .$$

5.
$$\int (x^2 + 2x)e^{-3x} dx .$$

10.
$$\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx .$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а)
$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx ;$$
 б)
$$\int_0^{\pi/6} x^2 \sin 2x dx ;$$
 в)
$$\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx .$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а)
$$\int_0^{\infty} e^{-3x} x dx ;$$
 б)
$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} .$$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Oy $y = \sin x$; $y = 0$.

ВАРІАНТ № 24**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \ln(2 - 2x + y^2)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arccos(3xy^2)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x \sin(xz) + e^{yz} = 5.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - 4y^2 - 2z^2 + xy - y - z + 13 = 0$ у точці $M_0(1; 1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = \frac{1}{(xy + 1)^2}.$$

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \arctg(xy)$ у точці $M(1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(1; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + 3y^2 + x + y$$

в замкненій області $D: x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+2}} dx.$

3. $\int \frac{x-1}{2x^2+3x+1} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}.$

5. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

6. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx.$

7. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx.$

8. $\int \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3-7x-6}\sqrt[4]{x^3}} dx.$

9. $\int \cos^7 x dx.$

10. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$; б) $\int_{\pi/3}^3 (3x-x^2) \sin 2x dx$; в) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} dx.$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Ox : $9x^2-4y^2=36$; $x=3$.

ВАРІАНТ № 25**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення

$$\text{функції } z = \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4}}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \arcsin \sqrt{2x^3 y}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$ye^{yz} + zxe^x = \ln 3.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = 5x^2 - y^2 + 3xy - x - y + 1$ у точці $M_0(1; 1; 6)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = ye^{\frac{y}{x}}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = ye^x$ у точці $M(2; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^4 + 4xy - 2y^2.$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + 4y^2 - 2xy + x + 2y$$

в замкненій області $D: y \geq x, y \leq -x, x + 2 \geq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{e^x - \sqrt{x} 2^x}{2^x} dx.$

6. $\int \frac{2x^3 + 1}{x^2(x+1)} dx.$

2. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

7. $\int \frac{x^3 + 8x - 2}{x^4 + 4x^2} dx.$

3. $\int \frac{3x+7}{2+3x-x^2} dx.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}.$

4. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx.$

9. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

5. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

10. $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} - 3};$ б) $\int_1^2 x \ln^2 x dx;$ в) $\int_0^7 \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x} dx}{x}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1};$ б) $\int_0^e x \ln x dx.$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Ox : $y^2 = 2px$; $x = h$.

ВАРІАНТ № 26**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \ln(2x + y) - \frac{4x}{y^2 - 4}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = ye^{x^2+y^2}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$e^{x^2yz} + x \sin(xyz^2) = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: 2x^2 - 3y^2 + 4z^2 + xy - 4xz - y = 18$ у точці $M_0(2; 1; 3)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(x^2y - y^3)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 2xy - y^3 + x$ у точці $M(-1; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(-3; 4)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(-1; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 4xy - 2x - 3y$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 x dx.$

6. $\int \frac{2x^2 + 7x + 7}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx.$

2. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^2 x}.$

7. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx.$

3. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+5x-x^2}} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}.$

4. $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2+2x-1}}.$

9. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx.$

5. $\int \arcsin^2 x dx.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{a) } \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1+3x^2}}; \quad \text{б) } \int_1^e x^2 e^x dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/4} \cos^3 2x dx.$$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо

вісі Ox : $y = \operatorname{tg} x$; $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

ВАРІАНТ № 27**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \frac{\sqrt{2x+6-y^2}}{x^2-1}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = 3xy + \sin(2xy^2)$.

3. Знайти частинні похідні z'_x, z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$\ln z = 2y + \cos(xz^2) + 2xz.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = x^2 - 8y^2 + xy - 2x + 3y - 5$ у точці $M_0(1; 2; -30)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = \frac{1}{x^2 - y^2}.$$

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ у точці $M(1; 3)$ за напрямом вектора $\vec{l}(2; -1)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; 3)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 4x^2 - 0,5y^2 + 4xy - 2x$$

в замкненій області $D: x \geq 0, y \leq 2, y \geq 4x$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(x+2)^2}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

2. $\int \frac{xdx}{e^{x^2+5}}.$

3. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

5. $\int x^2 \cos \frac{x}{5} dx.$

6. $\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2} dx.$

7. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx.$

8. $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$

9. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx.$

10. $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2};$ б) $\int_{-2}^0 (x^2+9)\sin x dx;$ в) $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$ б) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\arctg x}}{x^2+1} dx.$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Ox : $y = e^{-x}$; $y = 0$; $x = \ln 2$.

ВАРІАНТ № 28**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \arcsin(x/y)$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$y \ln \left(\frac{x}{y+z} \right) + yz = x^2.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: z = 6x^2 - 4y^2 + 3xy - 2x + 4y - 7$ у точці $M_0(1; 1; 0)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^{\frac{y}{x^2}}$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = x^3 - 2xy + y^2$ у точці $M(-2; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(-6; 8)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(-2; -1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = xy(1-x)(2-y).$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 + 3xy - 8$$

в замкненій області $D: y \geq x^2 - 6, y \leq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{(2 + \sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$

6. $\int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

2. $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + 9}} dx.$

7. $\int \frac{5 dx}{x^4 + 3x^2 - 4}.$

3. $\int \frac{x - 5}{2x^2 + x - 4} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x}}.$

9. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$

5. $\int x^2 \ln(1+x) dx.$

10. $\int \frac{dx}{8 + 4 \cos x}.$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x} dx}{x};$ б) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$ в) $\int_1^e \ln^3 x dx.$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1) \ln \frac{3}{4}};$ б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Oy : $y = x^3$; $x = 2$; $y = 0$.

ВАРІАНТ № 29**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 - y^2}$.

2. Знайти повний диференціал функції $z = \frac{x}{\sin(xy^2)}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x^5 + 3zx - y^3z^2 = 12.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: x^2 - y^2 + z^2 - xy + xz + 4y - z = 7$ у точці $M_0(1; 1; 2)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln(xy + e^x)$.

6. Знайти: 1) похідну функції $z = \ln(x^3y^2 + 1)$ у точці $M(1; -1)$ за напрямом вектора $\vec{l}(5; 12)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(1; -1)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = (2x - x^2)(2y - y^2).$$

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x^3 - 3y^3 - 2xy$$

в замкненій області $D: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 3$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1.
$$\int \frac{3\sqrt[7]{x} + 2\sqrt{x} + x^2}{x\sqrt{x}} dx.$$

7.
$$\int \frac{7x+10}{x^3+8} dx.$$

2.
$$\int \frac{3^x+1}{\sqrt{9^x+1}} dx.$$

8.
$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}-1} dx.$$

3.
$$\int \frac{3x-9}{x^2-6x+1} dx.$$

9.
$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}.$$

4.
$$\int x\sqrt{x^2-4} dx.$$

10.
$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

5.
$$\int x \operatorname{arctg} 2x dx.$$

6.
$$\int \frac{12 dx}{(x-2)(x^2-2x+3)}.$$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

a)
$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x dx}{\cos x};$$

б)
$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{3x+5} dx;$$

в)
$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx.$$

2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

a)
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2};$$

б)
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі Ox : $y = \ln x$; $y = 0$; $1 \leq x \leq l$.

ВАРІАНТ № 30**Завдання 1.**

1. Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = \sqrt{\frac{x}{4 - x^2 - y^2}}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z = \cos \sqrt{2x^2 + y}$.

3. Знайти частинні похідні z'_x , z'_y функції $z = z(x, y)$, заданої неявно

$$x \operatorname{arctg}(x/z) - ye^{yz} = 0.$$

4. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $S: 5z^2 = 2x^2 + 4y^2 - xz$ у точці $M_0(1; 1; 1)$.

5. Знайти частинні похідні другого порядку функції
- $$z = \frac{1}{x^2 y + 3}.$$

6. Знайти: 1) похідну функції $z = 2x^2 + y^2 x - 4y$ у точці $M(2; 2)$ за напрямом вектора $\vec{l}(6; -8)$; 2) вектор, за напрямом якого задана функція у точці $M(2; 2)$ зростає з найбільшою швидкістю.

7. Дослідити на екстремум функцію $z = 27x^3 + y^3 - 9xy$.

8. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$$

в замкненій області $D: x \leq 0, y \leq 0, x + y + 4 \geq 0$.

Завдання 2.

Обчислити невизначені інтеграли:

1. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)^3 dx .$

6. $\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2 + 2x + 1)} dx .$

2. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx .$

7. $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4} dx .$

3. $\int \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx .$

8. $\int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}} dx .$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 1}} .$

9. $\int \sin^6 x dx .$

5. $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx .$

10. $\int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx .$

Завдання 3.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-3}^0 \frac{xdx}{(x^2 + 1)^3} ;$ б) $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} x \sin^2 x dx ;$ в) $\int_1^2 \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)} dx .$

2. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} ;$ б) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x \sqrt[3]{x}} dx .$

3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вісі $Oy : 3x^2 + 4y^2 = 12 .$

Література

1. Анпілогов Д.І. Інтегральне числення: навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2021. – 254 с.
2. Литвин, І.І. Вища математика: Навчальний посібник: рек. МОНУ / І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желізняк. – 2-ге вид. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 368 с.
3. Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. Невизначений та визначений інтеграли. – Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах. / Під ред. Л.В. Курпи. – Харків: НТУ «ХП», 2009. – Т.2. – 432 с.
5. Дороговцев А.Л. Математичний аналіз. Підручник. К.: Либідь.- ч.1. – 1993, ч.2. – 1994.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І . Вища математика.- Київ: Либідь, 1993.
7. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика.- Київ, 1996.
8. Шкіль М.І., Колеснік Т.В. Вища математика. Кн. 1, 2. К.: Либідь, 1994.
9. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі/ За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 1994.

Додаток А

Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
4. $\int e^u du = e^u + c$
5. $\int \sin u du = -\cos u + c$
6. $\int \cos u du = \sin u + c$
7. $\int shu du = chu + c$
8. $\int chu du = shu + c$
9. $\int tgu du = -\ln|\cos u| + c$
10. $\int ctgu du = \ln|\sin u| + c$
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$
12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$
13. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + c$
14. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + c$
15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg \frac{u}{2}\right| + c$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
17. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$
20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$