

УДК 378.14:53 (043.2)

Лозовенко О.А.¹, Задоян М.К.²

¹ канд. пед. наук., доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. КНТ-116 НУ «Запорізька політехніка»

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО УМОВУ ЗРУШЕННЯ З МІСЦЯ

У минулорічній публікації ми звертали увагу читачів на парадоксальну відповідь до задачі про рух системи, яка складається з двох тіл з'єднаних пружиною. Цього разу ми докладно розглянемо, як, за допомогою математичного моделювання, можна пояснити цю ситуацію. Нагадаємо умову задачі:

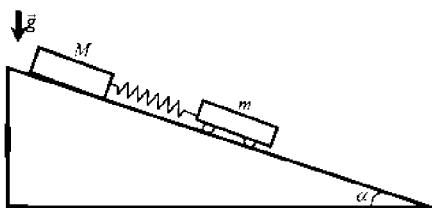


Рисунок 1 – Система, що розглядається

Два тіла масами M (брусок) та m (візок) з'єднані невагомю пружиною і знаходяться у спокої на похилій площині, що нахилена під кутом α до горизонту (рис. 1). Коефіцієнт тертя між бруском та похилою площиною дорівнює μ , тертям між візком та площиною можна знехтувати. Візок підтягують ближче до бруска так, щоб деформація пружини стала дорівнювати нулю, і відпускають без поштовху. Якщо маса візка перевищує певне критичне значення, брусок починає рухатися. Знайдіть цю критичну масу m_{cr} візка.

Типовий розв'язок цієї задачі починається з використання критичної умови зрушення блоку:

$$-\mu Mg \cos \alpha + Mg \sin \alpha + k \Delta x_{cr} = 0,$$

де Δx_{cr} — максимальне значення видовження пружини, k — коефіцієнт жорсткості пружини.

Закон збереження механічної енергії можна записати так:

$$k \Delta x_{cr}^2 / 2 = m_{cr} g \Delta x_{cr} \sin \alpha.$$

Формулу для критичної маси візка можна отримати, поєднавши ці два рівняння:

$$m_{cr} = M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1) / 2.$$

Якщо маса візка більша за це значення, блок починає рухатися. Якщо маса візка менша ніж m_{cr} , блок не рухається, а візок здійснює гармонічні коливання. Можна помітити, що в остаточній відповіді немає коефіцієнта жорсткості пружини, і це виглядає дещо дивно. Розглянемо детальніше рух цієї системи.

Опис моделі. Модель, яку ми будемо використовувати для аналізу описаної системи, містить три спрощуючих припущення: (1) сила тертя діє лише на блок, але не на візок; (2) величина сили тертя ковзання дорівнює

$$F = \mu N,$$

де N — сила нормальної реакції; і (3) похила площина достатньо довга.

Зверніть також увагу на те, що відповідно до умови задачі спочатку обидва об'єкти знаходяться у стані спокою, отже,

$$m \leq M(\mu \operatorname{tg} \alpha - 1).$$

Розглянемо ситуацію, коли $m > m_{cr}$. Для моделювання руху системи слід враховувати існування двох типів альтернативних фаз: *1-го типу* — коли блок нерухомий, та *2-го типу* — коли блок рухається. Рівняння руху однакові протягом усіх фаз певного типу, але початкові умови відрізняються.

Рівняння руху для фази 1-го типу. Якщо спроекувати сили на вісь, що паралельна похилій площині та спрямована вниз (див. рис. 2), то другий закон Ньютона для візка можна записати так

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - \frac{k}{m}(x_1 - \ell_0), \quad (1)$$

де x_1 визначає положення маси m , ℓ_0 — довжина нерозтягнутої пружини, а початкові умови такі: $x_1(0) = \ell_0$, $\dot{x}_1(0) = 0$.

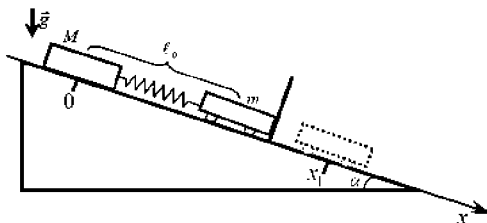


Рисунок 2 – Вибір координат

Рівняння (1) слід трохи змінити, якщо фаза цього типу повториться n -ий раз під час подальшого руху:

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - \frac{k}{m}(x_1 - \ell_0 - x_{2n}), \quad (2)$$

де x_{2n} — координата блоку під час n -ої фази 1-го типу. Зрозуміло, що $x_{21} = 0$.

Якщо в якийсь момент сума сил $k(x_1 - \ell_0 - x_{2n})$ та $Mg \sin \alpha$, що діють на блок, стає більшою, ніж сила тертя $\mu Mg \cos \alpha$, починається фаза 2-го типу.

Рівняння руху для фази 2-го типу. Ця фаза почнеться тоді, коли координата маси m стане більшою ніж $\ell_0 + Mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)/k + x_{2n}$. Застосування другого закону Ньютона дозволяє отримати такі рівняння для фази 2-го типу:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = g \sin \alpha - k(x_1 - x_2 - \ell_0)/m; \\ \ddot{x}_2 = g \sin \alpha + k(x_1 - x_2 - \ell_0)/M - \mu g \cos \alpha. \end{cases}$$

У цих рівняннях x_2 — координата блоку, для першої фази цього типу початкові умови такі: $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.

Цю систему рівнянь легше розв'язувати, коли вона записана через відносну координату $\xi = x_1 - x_2$ та координату центра мас $\eta = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$. Тоді рівняння можна розділити:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -k \frac{m+M}{mM} \xi + \frac{k\ell_0(m+M)}{mM} + \mu g \cos \alpha, & (3) \\ \ddot{\eta} = g \sin \alpha - \frac{\mu Mg}{m+M} \cos \alpha. & (4) \end{cases}$$

Рівняння (3) еквівалентне рівнянню простого гармонічного руху. Рівняння (4) описує рух тіла під дією сталої сили. Обидва рівняння легко розв'язуються:

$$\xi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C \quad \text{та} \quad \eta(t) = \eta_0 + Vt + \frac{at^2}{2},$$

$$\text{де } \omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}, \quad C = \ell_0 + \frac{\mu m M g \cos \alpha}{k(m+M)}, \quad a = g \sin \alpha - \frac{\mu M g}{m+M} \cos \alpha, \quad A,$$

B , η_0 , та V — константи, які можна знайти шляхом узгодження загальних розв'язків для фаз 1-го та 2-го типів.

Коли в якийсь момент часу швидкість блоку стає нульовою, ця фаза закінчується і знов починається фаза 1-го типу. Графічне зображення розв'язку для певного набору параметрів подане на рис. 3.

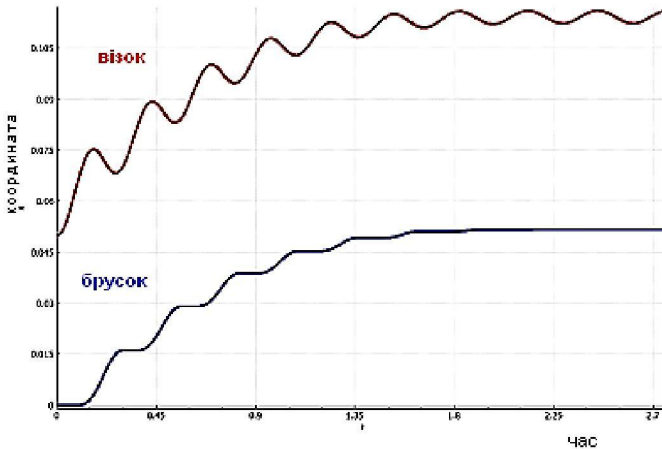


Рисунок 3 – Графік залежності координат візка та бруска від часу для випадку $m/M=0,5$, $k\ell_0/Mg=1$, $\alpha=\pi/6$ рад, $\mu=0,9$

Пояснення парадоксу. Тут нас будуть цікавити лише випадки, коли

$$m \in (M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)/2; M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)]$$

верхня маса M повинна рано чи пізно зупинитися. Розглянемо, як коефіцієнт жорсткості пружини впливає на рух системи. Умова для початку руху верхньої маси формується так: зміщення маси M повинно бути більше певного значення δ , яке можна експериментально зафіксувати. Відстань d , яку блок проходить до кінцевої зупинки, можна знайти чисельно, використовуючи рівняння (2-4). Після цього можна отримати найбільше значення нижньої маси ($\tilde{m}_{cr}$) для умови $d \leq \delta$ для різних значень коефіцієнта жорсткості пружини k (див. рис. 4).

Як можна помітити з рис. 4, для малих значень коефіцієнта жорсткості мінімальні значення нижньої маси близькі до значення $M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)/2$, яке було отримано після стандартного розв'язку задачі. Однак це значення різко зростає зі збільшенням коефіцієнта жорсткості, прагнучи до значення $M(\mu \operatorname{ctg} \alpha - 1)$.

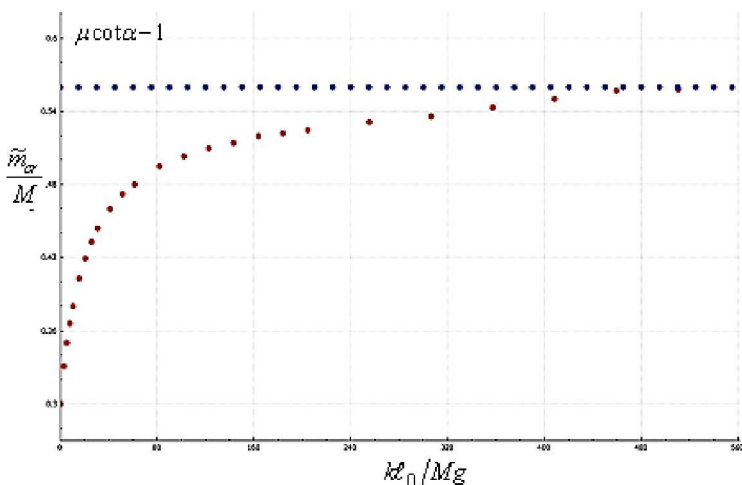


Рисунок 4 – Графік залежності безрозмірного мінімального значення нижньої маси ($\tilde{m}_{cr}/M$) від безрозмірного коефіцієнта жорсткості пружини ($k\ell_0/Mg$) для випадку $\delta/\ell_0=0,01$, $\alpha=\pi/6$ рад, $\mu=0,9$

Отже, парадоксальну відповідь до розглянутої задачі можна пояснити різницею між умовою початку руху, яка зазвичай використовується для *теоретичного* розв'язання задачі, та умовою, що використовується для *експериментальної* фіксації цього моменту.