Снижко Н.В., *Запорожский национальный технический университет ЗНТУ, 69063 Запорожье, ул. Жуковского, 64, Украина*
n_snizhko@mail.ru

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ КОШИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ В ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Снижко Н.В.

В данной работе устанавливаются условия ограниченности оператора сингулярного интегрирования с ядром Коши на вещественной оси в обобщённых пространствах Гёльдера (ОПГ), определяемых модулями непрерывности [1]. Для модулей непрерывности, являющихся структурными характеристиками ОПГ, установлены аналоги условий Зигмунда–Бари–Стечкина [2], которые являются достаточными условиями инвариантности построенных ОПГ относительно оператора сингулярного интегрирования.

Пусть задана непрерывная на R комплекснозначная функция $u(x)$, имеющая конечный предел на бесконечности. В качестве её основных характеристик рассматривается следующая пара функций (где $0 < \xi \leqslant 1$, $\delta > 0$):

$$\tilde{\omega}_u(\xi) = \sup_{\substack{x \in R, \\ (1+|x|)^{-1} \leqslant \xi}} |u(x)|,$$

$$\omega_u(\delta, \xi) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in R, |x_1 - x_2| \leqslant \delta, \\ (1+|x_1|)^{-1} \leqslant \xi, (1+|x_2|)^{-1} \leqslant \xi}} |u(x_1) - u(x_2)|.$$

Рассматривается класс пар функций $(\tilde{\omega}(\xi); \omega(\delta, \xi))$, $0 < \xi \leqslant 1$, $\delta > 0$ таких, что

a) $\tilde{\omega}(\xi) > 0$, $\omega(\delta, \xi) > 0$;

b) $\tilde{\omega}(\xi), \omega(\delta, \xi)$ не убывают по ξ и δ;

c) $\frac{\omega(\delta,\xi)}{\delta}$ почти убывает по δ равномерно по ξ.

Обозначим через $H_{\tilde{\omega}\omega}$ пространство функций $u(x) \in C(R)$ таких, что

$$||u||_{H_{\tilde{\omega}\omega}} = \sup_{0 < \xi \leqslant 1} \frac{\tilde{\omega}_u(\xi)}{\tilde{\omega}(\xi)} + \sup_{0 < \xi \leqslant 1, \, \delta > 0} \frac{\omega_u(\delta, \xi)}{\omega(\delta, \xi)} < \infty$$

Для введённых таким образом ОПГ $H_{\tilde{\omega}\omega}$ устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1 *Пространство* $\langle H_{\tilde{\omega}\omega}, || \cdot ||_{H_{\tilde{\omega}\omega}} \rangle$ *– банахово.*

Теорема 2 *Пусть $u(x) \in H_{\tilde{\omega}\omega}$, где функции $\tilde{\omega}(\xi)$ и $\omega(\delta, \xi)$ удовлетворяют условиям:*

1) $\int\limits_0^\xi \frac{\tilde{\omega}(x)}{x} dx + \xi \int\limits_\xi^1 \frac{\tilde{\omega}(x)}{x^2} dx = O(\tilde{\omega}(\xi))$;

2) $\int\limits_0^\delta \frac{\omega(x,\xi)}{x} dx + \delta \int\limits_\delta^{\frac{1}{\xi}} \frac{\omega(x,\xi)}{x^2} dx = O(\omega(\delta, \xi))$, $0 < \delta < \frac{1}{\xi}$;

3) $\delta\xi\tilde{\omega}(\xi) = O(\omega(\delta, \xi))$, $0 < \delta < \frac{1}{\xi}$;

4) $\omega(\delta, \xi) = O(\tilde{\omega}(\xi))$.

Тогда оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши на вещественной оси:

$$(Su)(y) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{x - y} dx \qquad (1)$$

действует из $H_{\tilde{\omega}\omega}$ в $H_{\tilde{\omega}\omega}$ и ограничен.

Таким образом, построенные пространства $H_{\tilde{\omega}\omega}$ инвариантны относительно оператора сингулярного интегрирования (1). Условия 1) – 4) представляют собой аналог классических условий Зигмунда-Бари-Стечкина [2] для случая сингулярного интеграла (1) вдоль замкнутого ляпуновского контура.

Отметим, что данный результат позволяет охватить известные классические результаты, в частности, известные классы функций $A_{\alpha,k}$ [3] в терминах $H_{\tilde{\omega}\omega}$ имеют вид: $\tilde{\omega}(\xi) = \xi^k$, $\omega(\delta, \xi) = \frac{\delta^\alpha \xi^k}{(1+\delta)^\alpha}$. При этом классы $A_{\alpha,k}$ не являются инвариантными относительно оператора (1), поэтому пространства $H_{\tilde{\omega}\omega}$ в случае выполнения условий теоремы 2 можно рассматривать как их видоизменение.

1. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. –Москва: Наука, 1980. –416 с.

2. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряжённых функций // Труды Моск. матем. об-ва. –1956. №5. –С. 485-522.

3. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. –Москва: ГИФМЛ, 1961. –250 с.