УДК 62-523

КРИТЕРІЙ КЕРУВАННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯМ АВТОНОМНИХ РУХОМИХ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ

Кулагін Д.О., к.т.н.,
Андрієнко П.Д., д.т.н.
Запорізький національний технічний університет
Тел (066) 236-52-71

Анотація **– в даній роботі проаналізовано критерій мінімізації площі під траєкторією руху електротехнічного рухомого комплексу, що фактично зводиться до критерію мінімуму витрат на рух певною ділянкою, проте за своїм математичним описом є зручним при побудові оптимальної траєкторії руху на основі інтелектуальних керуючих систем. Описання проблемного питання здійснено на основі апарату варіаційного числення, теорії інтегралів та фізичного і геометричного змісту визначеного інтегралу.**

Ключові слова **– критерій, рух, робота, тягова електропередача, оптимізація.**

Постановка проблеми. Електричні передачі знаходять застосування в основному на машинах великої потужності. Застосовуються електромеханічні трансмісії постійного і змінного струму.

Електромеханічні трансмісії мають наступні переваг:

– можливість плавної, безступінчастої зміни крутного моменту;

– спрощена механічна частина приводу;

– більша екологічна безпечність (для машин з гідропередачами, механічними передачами частою є ситуація з витіканням мастила, яке потрапляючи у ґрунт створює значну небезпеку для сільськогосподарських угідь);

– первинний двигун працює в оптимальному, майже сталому, режимі роботи;

– можливість використання електричних способів гальмування, що дозволяє зменшити знос механічних частин гальмівної системи машини;

– менша маса трансмісії на одиницю маси машини для комплексів з двигуном потужністю понад 700 кВт.

Функціональні завдання, які покладено на тяговий електропривод, вимоги стандартів та особливості використання, що пред’являються до його техніко-економічних, екологічних, ергономіч-

них та інших показників (точність, швидкодія, діапазон допустимих змін робочих показників, електромагнітна сумісність з іншими компонентами енергетичних систем, енергозбереження), приводять до необхідності створення систем тягових електроприводів, в складі яких, окрім основного системоутворюючого компоненту – електромеханічного перетворювача – повинні бути різноманітні перетворювачі енергії, пристрої контролю, керування, захисту. Основу інформаційних підсистем сучасних тягових електроприводів, як правило, складають мікроконтролерні пристрої, що мають ряд істотних переваг в порівнянні з аналоговими пристроями керування, які реалізовують типові арифметичні і логічні функції, обробку масивів, регулювання електромагнітних і механічних змінних, стабілізацію, корекцію і компенсацію нелінійностей, спостереження, імітацію об'єкта керування і обробку законів роботи. Такі системи дозволяють реалізовувати точні математично складні закони керування, що дає змогу отримати додаткову економію паливно-енергетичних ресурсів.

Під оптимальним керуванням рухом електротехнічного комплексу розуміється такий вибір послідовності режимів керування, який забезпечує мінімізацію критерію оптимальності при виконанні всіх обмежень, що накладаються на параметри та умови роботи тягової передачі [4-6, 17].

Під критерієм оптимальності розуміється кількісний показник, що характеризує прийняте рішення – вибір керування рухом електротехнічного комплексу [11].

Аналіз останніх досліджень. Оптимізації руху автономних рухомих електротехнічних комплексів (електромобілів, тракторів та автобусів з електричною тяговою передачею, залізничного транспорту, тощо) в залежності від певних критеріїв присвячено багато фундаментальних робіт як в нашій державі, так і за кордоном [4-6, 9-14, 12, 17]. Більшість вказаних робіт зводиться до критерію мінімуму витрат на рух певною ділянкою, або мінімуму часу ходу даною ділянкою. В даній роботі проаналізовано критерій мінімізації площі під кривою руху, що фактично зводиться до критерію мінімуму витрат на рух певною ділянкою, проте за своїм математичним описом є зручним при побудові оптимальної траєкторії руху на основі інтелектуальних систем керування.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є описання в загальному вигляді змісту критерію мінімізації площі під кривою руху електротехнічного комплексу.

Основна частина. Суть зазначеного критерію полягає в одержанні мінімальної площі під кривою руху електротехнічного комплексу, що визначає мінімальне значення виконуваної роботи, необхідної

для забезпечення перевізного процесу. Пояснимо суть даного критерію.

Критерій оптимальності є одним із виходів системи, і, до нього пред'являються наступні вимоги:

1. Критерій оптимальності повинен виражатися кількісно.

2. Критерій оптимальності повинен бути єдиним.

3. Величина критерію оптимальності повинна бути монотонно змінною (без розривів і стрибків).

4. Критерій оптимальності повинен відображати найбільш суттєві сторони процесу.

5. Бажано щоб критерій оптимальності мав ясний фізичний або геометричний зміст і легко розраховувався.

Проте, для систем автоматичного керування критерії оптимальності являють певну міру відхилення системи від бажаного чи запланованого стану. При цьому вибір критерію оптимізації являє собою компроміс між бажанням більш точно описати визначену мету оптимізації та необхідністю отримати якомога простіше рішення необхідної задачі. При цьому критерій оптимізації не обов’язково повинен мати ясний фізичний або геометричний зміст, проте повинен при цьому задовольняти іншим вимогам щодо нього.

Нехай матеріальна точка *M*, рухаючись прямолінійно під дією постійної рівнодійної сили $\overline{F_p}$ переміщується на певну величину, що виражається вектором $\bar{r}$. Роботою A_F, що виконується даною силою (далі розглядаємо лише складову сили, що витрачається на тягу), називається скалярний добуток вектора сили $\overline{F_p}$ на вектор переміщення $\bar{r}$ [1, 19, 26]:

$$A_F = \overline{F_p} \cdot \bar{r}. \tag{1}$$

Оскільки в загальному випадку руху електротехнічного комплексу сила $\overline{F_p}$ змінюється як за величиною, так і за напрямком, та враховуючи те, що переміщення відповідно до кривої $S = S(t)$ не є прямолінійним, то безпосередньо використати формулу (1) неможливо. Тоді використаємо метод знаходження роботи сили вздовж криволінійної траєкторії [16, 27].

Розіб'ємо криву *AB* довільними точками $A = A_0(S_0;t_0),\ A_1(S_1;t_1),\ldots,B = A_n(S_n;t_n)$, узятими за напрямком від *A* до *B*, на *n* дуг (рис. 1).

Таким чином на основі того, що для кожної точки кривої руху визначена рівнодійна сила, яка діє на електротехнічний комплекс, величина і напрям якої залежать від умов руху та положення об’єкта, ви-

значимо, що рух вказаної точки M відбувається в деякому силовому полі (F) (рис. 1).

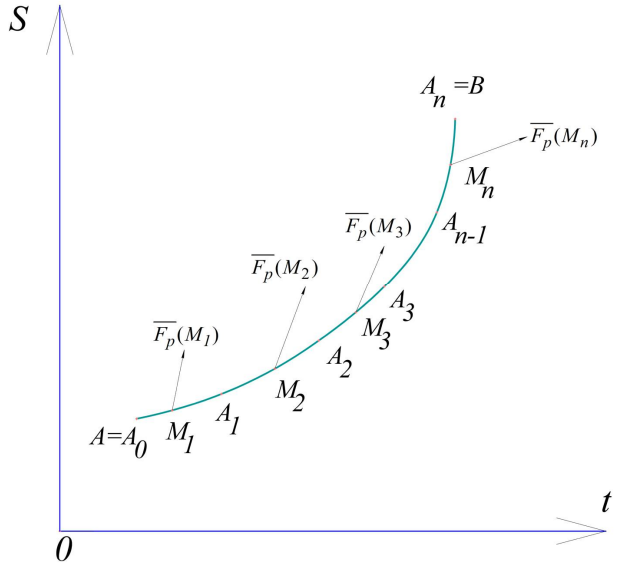

Рис. 1. Розділення кривої руху на частини

На кожній частковій дузі $\overset{\square}{A_{k-1}A_k}$ виберемо довільно точки $M_k\left(S_k;t_k\right)$, $k=\overline{1,n}$ (рис. 2).

На частковій дузі $\overset{\square}{A_{k-1}A_k}$ замінимо приблизно змінну силу $\overline{F_p}$ постійної силою $\overline{F_{pk}}\left(S_k;t_k\right)$, що рівна модулю вектора рівнодійної сили $\overline{F_p}$ в точці M_k. Рух матеріальної точки по цій дузі замінимо її рухом по хорді $A_{k-1}A_k$ цієї дуги.

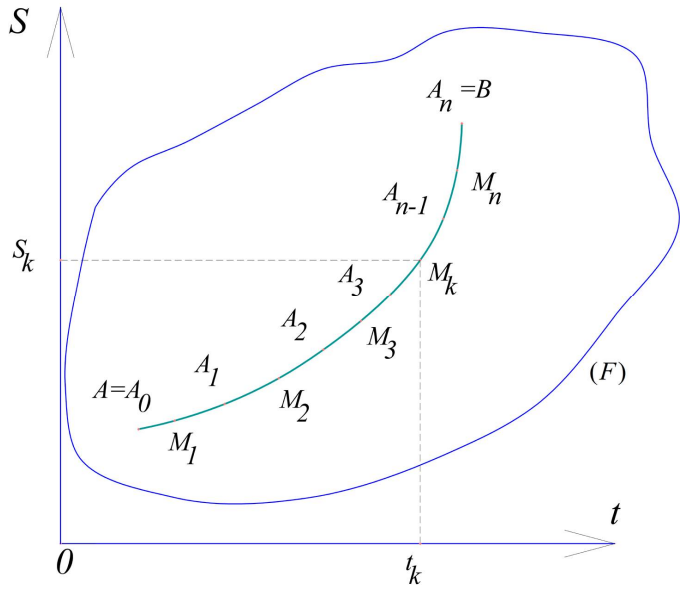

Рис. 2. Силове поле кривої руху

Виконаємо це все для $\forall\ k=\overline{1,n}$. В результаті наближених замін маємо:

- матеріальна точка рухається по ламаній, вписаній в криву *AB*;
- на кожній ланці ламаної на матеріальну точку діє постійна сила.

Робота сили $\overline{F_p}\left(S_k;t_k\right)$ на хорді $A_{k-1}A_k$ рівна

$$A'_k=\overline{F_{pk}}\left(S_k;t_k\right)\cdot\overline{A_{k-1}A_k}\,. \tag{2}$$

Знайдемо сумарну роботу на всій ділянці для $k=\overline{1,n}$:

$$A'=\sum_{k=1}^{n}A'_k=\sum_{k=1}^{n}\overline{F_{pk}}\left(S_k;t_k\right)\cdot\overline{A_{k-1}A_k}\,, \tag{3}$$

де A' - робота ступінчатої сили при русі матеріальної точки по ламаній $A_0A_1\ldots A_n$, вписаній в криву *AB*.

Робота, яка визначається за виразом (3), є наближеним значенням шуканої роботи A_F сили $\overline{F_p}$ при переміщенні матеріальної точки по кривій *AB*:

$$A'\approx A_F\,. \tag{4}$$

Нехай рівнодійна сила $\overline{F_p}$ в силовому полі (*F*) розкладається на складові за відповідними осями системи координат, в якій зображено силове поле, відповідно до наступного виразу:

$$\overline{F_p}=P(S;t)\bar{i}+Q(S;t)\bar{j}, \tag{5}$$

де $\bar{i},\ \bar{j}$ - одиничні вектори.

Задамо проекції вектора $\overline{A_{k-1}A_k}$ на осі системи координат наступними виразами:

$$\Delta S_k=S_k-S_{k-1}, \tag{6}$$

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}\,. \tag{7}$$

Тоді для вектора $\overline{A_{k-1}A_k}$ справедливе наступне співвідношення:

$$\overline{A_{k-1}A_k}=(t_k-t_{k-1})\bar{i}+(S_k-S_{k-1})\bar{j}==\Delta t_k\cdot\bar{i}+\Delta S_k\cdot\bar{j}. \tag{8}$$

З урахуванням останнього виразу, виразу (5) запишемо співвідношення (2) у наступному вигляді:

$$A'_k=P(S;t)\cdot\Delta t_k+Q(S;t)\cdot\Delta S_k\,. \tag{9}$$

Тоді на основі виразів (3) та (4) з урахуванням виразу (9) маємо наступне:

$$A_F\approx\sum_{k=1}^{n}P\left(t_k;S_k\right)\cdot\Delta t_k+Q\left(t_k;S_k\right)\cdot\Delta S_k\,. \tag{10}$$

Нехай ΔL_k - довжина дуги $\overset{\square}{A_{k-1}A_k}$, а величина $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta L_k$. Тоді вираз (10) можна записати наступним чином, вважаючи, що точним значенням роботи є границя отриманої суми за умови прямування довжини дуги $\overset{\square}{A_{k-1}A_k}$ до нуля:

$$A_F = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k + Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k. \tag{11}$$

Вираз (11) означає, що при $n \to \infty$ кожна з дуг $\overset{\square}{A_{k-1}A_k}$ стягується в точку. Тоді, відповідно до визначення криволінійного інтегралу, має місце наступний вираз:

$$A_F = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k + Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k. \tag{12}$$

На основі того, що

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \left[P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k + Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k \right] + \sum_{k=1}^{n} \left[Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k \right], \end{aligned} \tag{13}$$

та припускаючи, що існують границі сум, що знаходяться в правій частині останньої рівності, маємо

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k + Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k \right] = \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[P\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta t_k \right] + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[Q\left(t_k; S_k\right) \cdot \Delta S_k \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Границі, що знаходяться справа у виразі (14), можна розглядати як криволінійні інтеграли вздовж дуги $\overset{\square}{AB}$ відповідно від векторів-функцій $P(S;t)$ та $Q(S;t)$. Тому вираз (14) можна подати в наступній формі:

$$\int_{AB} \left[P(S;t)dt + Q(S;t)dS \right] = \int_{AB} P(S;t)dt + \int_{AB} Q(S;t)dS. \tag{15}$$

Відповідно до визначення криволінійного інтегралу [28-31], робота сили вздовж дуги рівна криволінійному інтегралу вздовж цієї дуги [24]. Останнє твердження дозволяє записати вираз (15) наступним чином:

$$A_F = \int_{AB} Pdt + \int_{AB} QdS, \tag{16}$$

де P та Q - проекції рівнодійної сили на осі координатної системи кривої руху.

З іншого боку, оскільки робота на кінцевому шляху визначається як границя суми елементарних робіт $\overline{F_p} \cdot d\overline{r}$ [8, 14], то вона фактично виражається наступним інтегралом:

$$A_F = \int_{S_1}^{S_2} \overline{F_p} \cdot d\overline{r}. \tag{17}$$

Виконаємо підстановку в останньому виразі замість вектора рівнодійної сили рівного йому, відповідно до основного закону механіки [8, 14], вектора $\left(m \cdot \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} + \overline{C_o} + \overline{C_\partial} \right)$, де C_o – сила основного опору, яка зумовлена опором повітряного середовища, внутрішнього тертя в електротехнічному комплексі, взаємодією електротехнічного комплексу та шляху, а C_∂ – сила додаткового опору руху, який визначається умовами проходження уклонів та кривих ділянок шляху, в результаті чого отримаємо наступний вираз:

$$A_F = \int_{S_1}^{S_2} \left(m \cdot \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} + \overline{C_o} + \overline{C_\partial} \right) d\overline{r}. \tag{18}$$

Виконаємо перехід до інтегрування за часом, використавши підстановку

$$d\overline{r} = \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot dt. \tag{19}$$

Тоді матимемо за виразом (18) наступне:

$$A_T = \int_{S_1}^{S_2} \left(m \cdot \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} + \overline{C_o} + \overline{C_\partial} \right) \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} dt = \frac{m}{2} \cdot \left(\left(\frac{d\overline{r}}{dt} \right)^2 \Bigg|_{t_2} - \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \right)^2 \Bigg|_{t_1} \right) + \tag{20}$$

$$+ \left(\overline{C_o} + \overline{C_\partial} \right) \cdot \left(r\big|_{t_2} - r\big|_{t_1} \right).$$

Аналізуючи останній вираз приходимо до висновку, що для мінімізації роботи, що виконується рівнодійною силою з переміщення тіла масою m, за умови сталих значень координат точок початку та кінця кривої руху – $(t_1; S_1)$ та $(t_2; S_2)$ відповідно – що визначається графіком руху необхідно зменшувати значення $\left(\frac{d\overline{r}}{dt} \right)$.

Оскільки відповідно до змісту кривої руху на координати точок початку та кінця кривої руху $(t_1; S_1)$ та $(t_2; S_2)$ накладається наступна система обмежень:

$$\begin{cases} t_1 < t_2; \\ S_1 < S_2, \end{cases} \tag{21}$$

то за умови сталих значень координат точок початку та кінця кривої руху можливими є наступні варіанти проходження кривої $S = S(t)$, що показані на рис. 3:

- випукла форма кривої $S = S(t)$ - крива 1;
- крива $S = S(t)$ являє собою пряму лінію - крива 2;
- вгнута форма кривої $S = S(t)$ - крива 3.

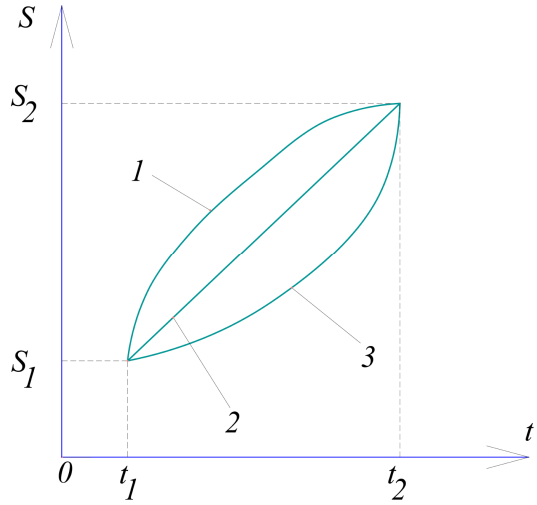

Рис. 3. Варіанти проходження кривої $S = S(t)$ на фіксованій ділянці кривої руху

Як відомо, в кожній точці похідна функції дорівнює нахилу дотичної лінії до кривої даної функції [1]. Оберемо довільну точку на кривій руху рис. 3 і проведемо до неї дотичні (рис. 4).

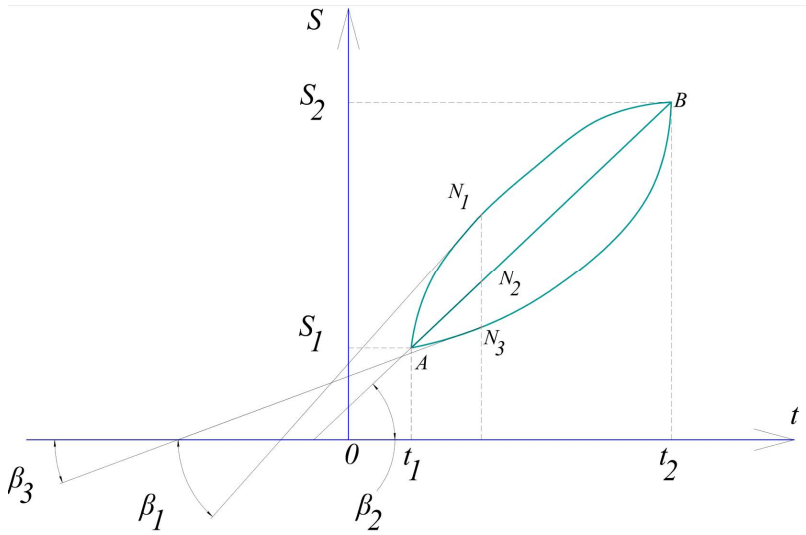

Рис. 4. Перший варіант розміщення дотичних до графіків $S = S(t)$

В даному варіанті розміщення дотичних точки взято на одному рівні часу для першої характерної ділянки кривої $S = S(t)$. Як видно в даному випадку має місце наступне співвідношення:

$$tg\beta_3 < tg\beta_2 < tg\beta_1, \qquad (22)$$

що свідчить про те, що саме такий варіант розподілу кривої $S = S(t)$ на ділянці AN_i (індекс i є номером позиції точки N для кожної кривої відповідно) дозволяє мінімізувати значення похідної від даної функції на ділянці такої характерної форми.

Розглянемо другий можливий випадок характерної форми ділянки кривої руху – такий, за якого певна ділянка наближується до прямої лінії.

Оберемо довільну точку на кривій руху рис. 3 і проведемо до неї дотичні (рис. 5).

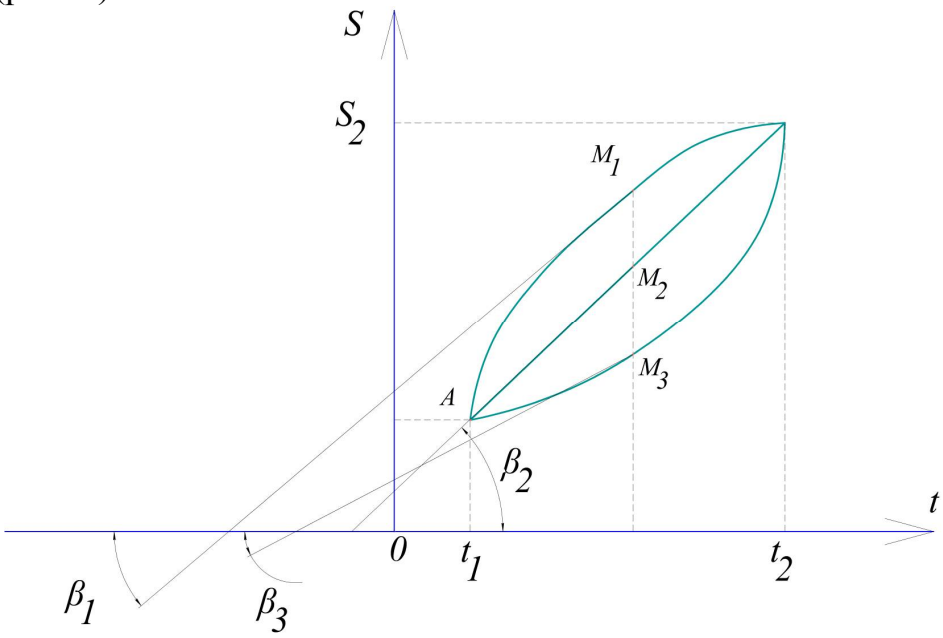

Рис. 5. Другий варіант розміщення дотичних до графіків $S = S(t)$

В даному варіанті розміщення дотичних точки взято на одному рівні часу для другої характерної ділянки кривої $S = S(t)$. Як видно в даному випадку має місце наступне співвідношення:

$$tg\beta_3 < tg\beta_2 \approx tg\beta_1, \qquad (23)$$

що свідчить про те, що саме такий варіант розподілу кривої $S = S(t)$ на ділянці в околі точки M_i (індекс i є номером позиції точки M для кожної кривої відповідно), який являє собою пряму лінію, дозволяє мінімізувати значення похідної від даної функції на ділянці прямої форми. В ситуації, за якої можна в околі точки M_i вважати ділянки функцій $S = S(t)$ наближеними до паралельних ліній, матиме місце наступне співвідношення:

$$tg\beta_3 \approx tg\beta_2 \approx tg\beta_1. \qquad (24)$$

Розглянемо другий можливий випадок характерної форми ділянки кривої руху – такий, за якого певна ділянка наближується до прямої лінії.

Оберемо довільну точку на кривій руху рис. 3 і проведемо до неї дотичні (рис. 6).

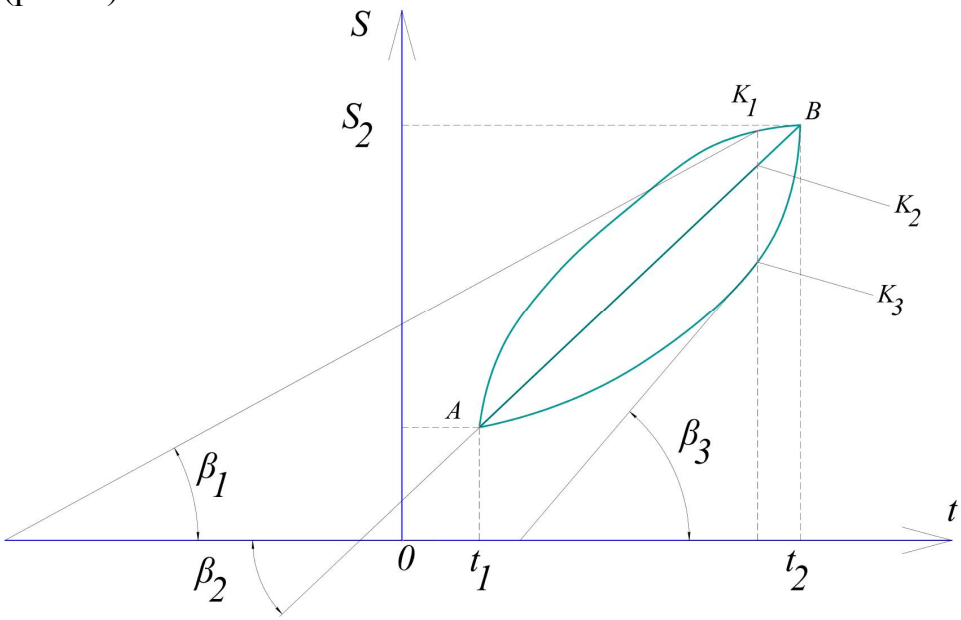

Рис. 6. Другий варіант розміщення дотичних до графіків $S = S(t)$

В даному варіанті розміщення дотичних точки взято на одному рівні часу для третьої характерної ділянки кривої $S = S(t)$. Як видно в даному випадку має місце наступне співвідношення:

$$tg\beta_1 < tg\beta_2 < tg\beta_3. \qquad (25)$$

Відповідно до співвідношення (25) на даній ділянці значення похідних від функції $S = S(t)$ в околі точки K_i (індекс i є номером позиції точки K для кожної кривої відповідно) не дозволяє мінімізувати значення похідної від даної функції на ділянці такої форми (для третьої кривої). Даний варіант потребує окремого пояснення.

З огляду на особливості кривої $S = S(t)$ як геометричної інтерпретації кривої руху електротехнічного комплексу неможливими є варіанти побудови кривої руху, в яких виконуються співвідношення, що можна представити наступною сукупністю:

$$\begin{cases} t_k < t_{k+1}; \\ S_{k+1} < S_k. \end{cases} \cup \begin{cases} t_k > t_{k+1}; \\ S_{k+1} < S_k, \end{cases} \qquad (26)$$

де k - довільний номер ділянки кривої $S = S(t)$, причому

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} S_k = AB \qquad (27)$$

Тоді введемо обмеження на значення відповідних координат, яке задамо наступною системою:

$$\begin{cases} t_k < t_{k+1}; \\ S_k < S_{k+1}, \end{cases} \qquad (28)$$

при цьому вважаючи, що вираз (27) є справедливим.

Система обмежень (28) фактично означає «незворотність» часу та виключає ситуацію, за якої електротехнічний комплекс проїжджає повз пункт призначення, до якого він прямував, а потім повертається на нього, через те, що він його минув. З математичної точки зору ми виключили з розгляду випадок, в якому $tg\beta_i < 0$, оскільки в такому випадку $\beta_i \geq \frac{\pi}{2}$, що показано на рис. 7.

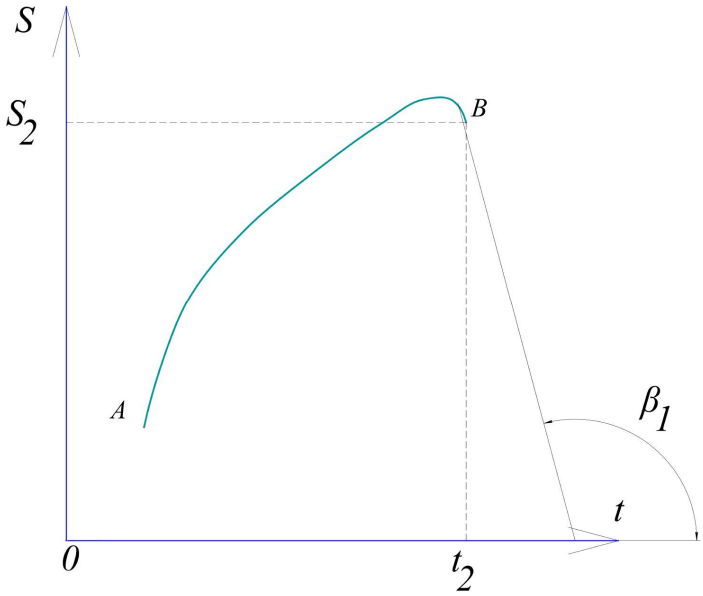

Рис. 7. Неможливий варіант розподілу кривої $S = S(t)$

На рис. 8 розглянемо криву 3, відповідно до випадку, проаналізованого на рис. 6.

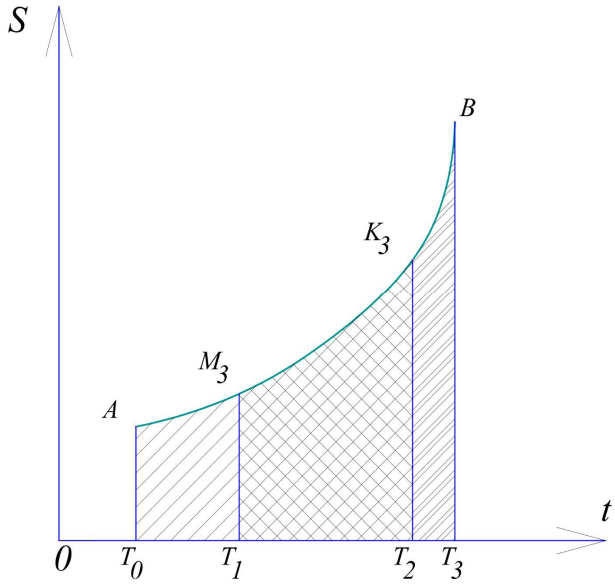

Рис. 8. Схема до пояснення площ під графіком $S = S(t)$ в різних випадках нахилу даної кривої відносно осі абсцис

Очевидним є той факт, що для площ Π заштрихованих на рис. 8 фігур (під відповідними ділянками кривої руху) виконується співвідношення

$$\Pi_{AM_3T_1T_0} + \Pi_{M_3K_3T_2T_1} > \Pi_{K_3BT_3T_2} \,. \qquad (29)$$

Збільшення довжини відповідної дуги K_3B, в наслідок чого різко зміниться нахил кривої $S = S(t)$ і вираз (29) може при певних співвідношеннях втратити справедливість є неможливим, оскільки фактично це буде означати значне збільшення швидкості руху, яка є обмеженою величиною. Окрім того величина максимального кута нахилу дотичної до графіка кривої $S = S(t)$ визначається граничними значеннями ривка та прискорення і тому має певне фіксоване для даного електротехнічного комплексу на визначеній ділянці дистанції руху значення [2, 3, 7, 20-25].

Для фаз руху електротехнічного комплексу - розгін $\rightarrow$ рух з усталеною швидкістю $\rightarrow$ гальмування – характерною є наступна форма кривої $S = S(t)$, наведена на рис. 9.

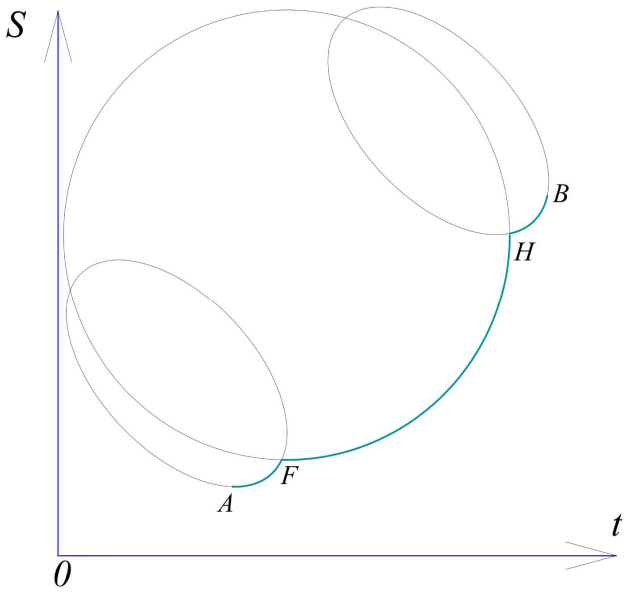

Рис. 9. Характерна форма кривої $S = S(t)$ для різних фаз руху електротехнічного комплексу

На рис. 9 ділянка набору швидкості буде відповідати дузі *AF*, що фактично є елементом контуру еліпсу, оскільки має місце зміна швидкості у часі, тобто зміна співвідношення між ділянками шляху, пройденими за один і той самий проміжок часу.

На рис. 9 ділянка руху зі сталою швидкістю буде відповідати дузі *FH*, що фактично є елементом кола, оскільки має місце стале співвідношення між ділянками шляху, пройденими за один і той самий проміжок часу.

На рис. 9 ділянка гальмування буде відповідати дузі *HB*, що є елементом контуру еліпсу, оскільки має місце зменшення швидкості у часі, тобто зменшення співвідношення між ділянками шляху, пройденими за один і той самий проміжок часу.

Розглянемо ділянку руху зі сталою швидкістю (рис. 10).

Для виконання нерівності (29) введемо обмеження:

$$\Delta L_{F_3O_5} > \Delta L_{O_5H_3}, \tag{30}$$

враховуючи також, що обмеження за максимальними значеннями швидкості, прискорення та ривка в даному разі виконуються [2, 3, 7, 20-25].

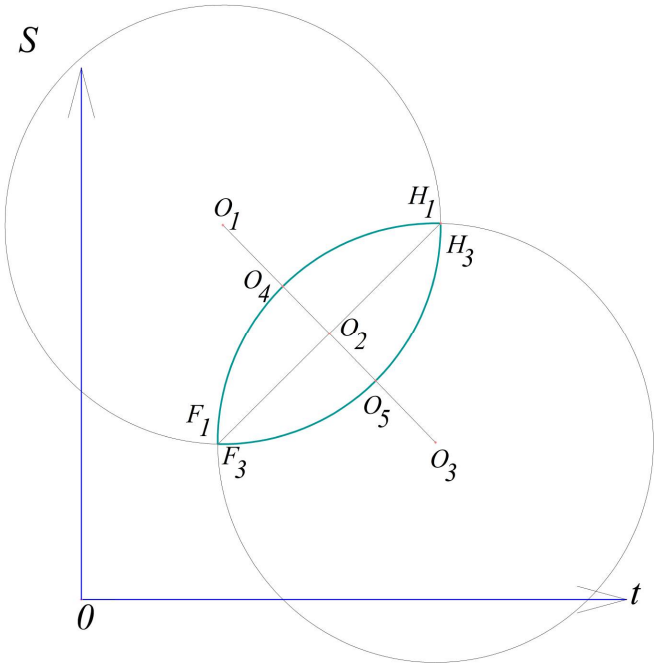

Рис. 10. Ділянка кривої $S = S(t)$ для руху з постійною швидкістю

При цьому повинно виконуватись також співвідношення

$$\Delta L_{F_1 O_4} > \Delta L_{O_4 H_1}, \tag{31}$$

що призведе до виконання виразів (23), (29).

Всі наведені ділянки кривої $S = S(t)$ для різних фаз руху електротехнічного комплексу за своєю формою повторюють форму кривої, розглянутої раніше в даному дослідженні між двома довільними точками руху. Тобто для кожної фази руху необхідно вирішувати оптимізаційну задачу розподілу кривої $S = S(t)$ та відповідно реалізовувати її.

Як відомо [1, 19], довжиною дуги *AB* називається така границя, до якої прямує довжина вписаної в цю дугу ламаної, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля. Тобто має місце співвідношення:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \lim_{\max \Delta L_k \to 0} \sum_{k=1}^{m} \Delta L_k . \tag{32}$$

Виходячи з того, що керування електротехнічним комплексом є неперервною функцією, тобто сила тяги є неперервною, то на певному відрізку часу, за умови сталих значень координат точок початку та кінця кривої руху – $(t_1; S_1)$ та $(t_2; S_2)$ відповідно, функція $S = S(t)$ та її похідна також є неперервними функціями. Тоді можна стверджувати, що границя (32) існує.

Нехай

$$\Delta S_k = S(t_k) - S(t_{k-1}). \tag{33}$$

Тоді, враховуючи що час не може приймати від'ємних значень маємо:

$$\Delta S_k = \sqrt{\left(\Delta S_k\right)^2 + \left(\Delta t_k\right)^2} = \Delta t_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta S_k}{\Delta t_k}\right)^2}. \tag{34}$$

Використовуючи теорему Лагранжа [1] отримаємо:

$$\frac{\Delta S_k}{\Delta t_k} = \frac{S\left(t_k\right) - S\left(t_{k-1}\right)}{t_k - t_{k-1}} = S^{'}\left(\tau_k\right), \tag{35}$$

причому

$$t_{k-1} < \tau_k < t_k. \tag{36}$$

Тоді на основі виразів (35), (36) маємо:

$$\Delta S_k = \Delta t_k \cdot \sqrt{1 + \left(S^{'}\left(\tau_k\right)\right)^2}. \tag{37}$$

Отже, приходимо до висновку що довжина вписаної ламаної рівна

$$L_m = \sum_{k=1}^{m}\left[\Delta t_k \cdot \sqrt{1 + \left(S^{'}\left(\tau_k\right)\right)^2}\right]. \tag{38}$$

Виходячи з неперервності похідної функції $S = S(t)$ маємо, що функція $\sqrt{1 + \left(S^{'}\left(\tau_k\right)\right)^2}$ також неперервна. Тоді існує границя інтегральної суми, що рівна визначеному інтегралу:

$$L_{\overset{\square}{AB}} = \lim_{\max \Delta L_k \to 0} \sum_{k=1}^{m}\left[\Delta t_k \cdot \sqrt{1 + \left(S^{'}\right)^2}\right] \tag{39}$$

або

$$L_{\overset{\square}{AB}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{40}$$

Висновки. 1. Таким чином ми отримали довжину дуги кривої руху електротехнічного комплексу на основі значень координат точок початку та кінця кривої руху – $(t_1; S_1)$ та $(t_2; S_2)$ відповідно. Порівнюючи даний вираз з виразом для знаходження площі фігури, що її утворює дуга $S = S(t)$ при своєму обертанні навколо осі абсцис, бачимо, що даний вираз входить до формули обчислення площі як множник.

2. Отже, мінімізація площі, що її утворює дуга $S = S(t)$ при своєму обертанні навколо осі абсцис призводить також до зменшення довжини дуги $S = S(t)$. Тобто вирази (30), (31) в такому випадку також будуть виконуватись автоматично.

Література

1. *Банах С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / *С. Банах*. – М. : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958. – 404 С.
2. *Вериго М. Ф.* Динамика вагонов / *Вериго М. Ф.* – М. : Транспорт, 1971. –175 С.
3. *Воронин М. И.* Развитие скорости движения пассажирских поездов на железных дорогах СССР / *Воронин М. И.* // Труды ЛИИЖТ. – № 409. – 1976. – С. 3-15.
4. *Гетьман Г. К.* Анализ расхода электроэнергии на тягу карьерных поездов / *Г. К. Гетьман, В. Е. Васильев* // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2011. – Вип. 36. – С. 70-74.
5. *Гетьман Г. К.* Теория электрической тяги : монография : в 2 т. / *Г. К. Гетьман.* – Д. : Изд-во Маковецкий, 2011. – Т. 2. – 363 с.
6. *Гетьман Г. К.* Научные основы определения рационального мощностного ряда тяговых средств железнодорожного транспорта : монография / *Г. К. Гетьман*. – Днепропетровский нац. ун-т ж.-д. трансп. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп., 2008. – 444 с.
7. Инструкция по расшифровке путеизмерительных лент и оценке состояния рельсовой колеи по показаниям вагона-путеизмерителя ЦНИИ-2 и мерам по обеспечению безопасности движения поездов. – ЦП-515 от 14.10.97 г. – М. : Транспорт, 1997. – 51 С.
8. *Иос Г.* Курс теоретической физики. Часть 1. / *Иос Г.* – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1963. – 579 С.
9. *Кулагин Д. А.* Механизация, автоматизация, информатизация, телекоммуникация и связь в отраслях производств : коллективная монография / *П. Д. Андриенко, Д. А. Кулагин, [под ред. С. М. Ахметова]*. – Новосибирск : Изд. «СибАК», 2014. – 156 с.
10. *Кулагин Д. А.* Определение рационального способа вождения моторвагонного электротранспорта переменного тока по наклонным профилям железнодорожного пути / *Кулагин Д. А.* // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. – 2014. – №1(86). – С. 32-37.
11. *Кулагін Д. О.* Особливості задачі раціонального керування модулем вектора потокозчеплення тягового асинхронного двигуна дизель-поїзда / *Кулагін Д. О.* // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – №2. – С. 155-157.

12. *Кулагін Д. О.* Проектування систем керування тяговими електропередачами моторвагонних поїздів : монографія / *Дмитро Олександрович Кулагін*. – Бердянськ : ФО-П Ткачук О. В., 2014. – 154 с.
13. *Кулагін Д. О.* Спосіб апроксимації кривої намагнічування тягового асинхронного двигуна / *Кулагін Д. О.* // Електротехніка та електроенергетика. – 2013. – №2. – С. 66-70.
14. *Ландау Л. Д.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика / *Л. Д. Ландау, А. И. Ахиезер, Е. М. Лифшиц*. – М. : Наука, 1969. – 400 С.
15. *Логвінова Н. О.* Зменшення експлуатаційних витрат за допомогою енергооптимального руху поїздів / *Н. О. Логвінова, Д. О. Босий, О. М. Полях* // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2012. – Вип. 42. – С. 110-113.
16. *Марон И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной) / *Марон И. А.* – М. : Наука, 1973. – 400 С.
17. Оптимизация управления движением поездов : учеб. пособие / *[Баранов Л. А., Ерофеев Е. В., Мелешин И. С., Чинь Л. М.]* – М. : МИИТ, 2011. – 164 С.
18. Патент 63239 Україна, МПК (2011.01) H02P7/00. Пристрій для формування кривої зміни частоти струму частотно-керованого електроприводу з обмеженням активної складової струму та ривка / *Кулагін Д. О., Андрієнко П. Д., Качур О. С.* Заявник та патентовласник Запорізький національний технічний університет. – u201013488; заявл. 15.11.2010; опубл. 10.10.2011, Бюл. №19. – 2011 р. − 2 С.
19. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2 / *Н. С. Пискунов*. – М. : Наука, 1978. – 576 С.
20. *Понырко В. Н.* Определение и оценка плавности движения экипажа на переходных кривых / *Понырко В. Н.* // Труды ДИИТ. – № 148. – 1974. – С. 113−120.
21. Технические указания по определению и использованию характеристик устройства и состояния пути, получаемых вагонами-путеобследовательскими станциями системы ЦЕИИ-4. ЦПТ-55/22. Утв. 31 августа 2000 г. – М., 2000. – 68 С.
22. *Толочко О. И.* Синтез задатчика положения с ограничением рывка при учете статического момента / *О. И. Толочко, П. Х. Коцегуб, П. И. Розкаряка* // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету : Наукові праці КДПУ. – Кременчук : КДПУ. – 2008. – №3 (50). – частина 4.1. – С. 58-63.
23. *Фришман М. А.* Экспериментальные исследования в зоне переходных кривых / *Фришман М. А.* // Труды ДИИТа. – 1973. − № 142.– С. 21−31.

24. *Хавин В. П.* Основы математического анализа: В 3-х ч. Часть 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной : учеб. пособие / *В. П. Хавин*. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. – 448 С.
25. *Шаройко В. С.* О допускаемых значениях горизонтальных ускорений при кратковременном их воздействии / *Шаройко В. С., Киселев А. С.* // Труды ЛИИЖТ. – № 323. – 1971. – С. 28-39.
26. *Шнейдер В. Е.* Краткий курс высшей математики. Учебное пособие для втузов / *Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С.* – М. : Высшая школа, 1972. – 640 С.
27. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / *Л. Э. Эльсгольц*. – М. : Наука, 1969. – 326 С.
28. *Cassel Kevin W.* Variational Methods with Applications in Science and Engineering / *Cassel Kevin W.* – Cambridge University Press, 2013. – 432 p.
29. *Gelfand I. M.* Calculus of Variations / *I. M. Gelfand, S. V. Fomin*. – Courier Dover Publications, 2000 – 232 p.
30. *Lebedev L. P.* The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics / *Lebedev L. P., Cloud M. J.* – World Scientific, 2003. – 436 p.
31. *Logan J. David*. Applied Mathematics / *Logan J. David*. – 3rd Ed. – Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2006. – 546 p.

КРИТЕРИЙ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ АВТОНОМНЫХ ПОДВИЖНЫХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Д.А.Кулагин, П.Д. Андриенко

***Аннотация* – в данной работе проанализирован критерий минимизации площади под траекторией движения электротехнического подвижного комплекса, что фактически сводится к критерию минимума затрат на движение по определенному участку, однако по своему математическому описанию является удобным при построении оптимальной траектории движения на основе интеллектуальных управляющих систем. Описание проблемного вопроса осуществлено на основе аппарата вариационного исчисления, теории интегралов, физического и геометрического содержания определенного интеграла.**

THE CRITERION FOR MOTION CONTROL OF AUTONOMOUS

MOBILE ELECTRICAL SYSTEMS

D. Kulagin , P. Andrienko

Summary

The author analyses the criterion of minimizing the area under the trajectory of movement of a train, which in fact boils down to the criterion of minimum cost of traffic on a particular site, but on their mathematical description is convenient when constructing optimal trajectories of movement of trains on the basis of neural network systems with the ability of self-learning outside of training. Description of the problem issue carried out on the base of the variational calculus, theory of integrals, physical and geometric content of the definite integral.