МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Т.І. Левицька
І.С. Пожуєва

КУРС ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Запоріжжя ● НУ "Запорізька політехніка" ● 2020

УДК519.2(075.8)
Л37

*Рекомендовано до друку вченою радою
Запорізького національного технічного університету
(протокол № 3 від 06.07.2020)*

Р е ц е н з е н т и:

В. Г. Вербицький – завідувач кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Запорізького національного університету, доктор фізико-математичних наук, професор;

Т. О. Меліхова – завідувач кафедри обліку, аналізу, оподаткування та аудиту Запорізького національного університету, доктор економічних наук, професор.

Л37 **Левицька Т.І., Пожуєва І.С.**

Курс лекцій з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник / Т.І. Левицька, І.С. Пожуєва. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 164 с.

ISBN 978-617-529-285-3

Навчальний посібник написаний відповідно до навчальної програми дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика", як складової багатоступеневої підготовки фахівців всіх технічних спеціальностей. У виданні стисло і доступно викладено основний теоретичний матеріал, та для кожної теми розв'язано достатню кількість прикладів, що є важливим при освоєнні матеріалу.

Посібник може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

УДК519.2(075.8)

ISBN 978-617-529-285-3

ЗМІСТ

ЗМІСТ 3
ВСТУП 6
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ 9
ГЛАВА 1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ДІЇ НАД ВИПАДКОВИМИ ПОДІЯМИ, ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ 9
Розділ 1.1 Введення в теорію ймовірностей 9
Розділ 1.2 Алгебра подій 10
Розділ 1.3 Імовірність події 12
Розділ 1.4 Елементи комбінаторики 15
ГЛАВА 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ 16
Розділ 2.1 Теореми додавання ймовірностей 16
Розділ 2.2 Теорема множення ймовірностей 18
Розділ 2.3 Формула повної ймовірності, формула Байеса 20
Розділ 2.4 Формули Бернуллі та Пуассона 21
Розділ 2.5 Теореми Муавра-Лапласа 23
ГЛАВА 3 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ 25
Розділ 3.1 Функція розподілу випадкової величини. 25
Розділ 3.2 Щільність розподілу випадкової величини.. 31
ГЛАВА 4 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.. 32
Розділ 4.1 Математичне сподівання випадкової величини 32
Розділ 4.2 Дисперсія випадкової величини 35
Розділ 4.3 Моменти випадкової величини 38
ГЛАВА 5 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН 41
Розділ 5.1 Біноміальний закон розподілу 41
Розділ 5.2 Розподіл Пуассона 43

Розділ 5.3 Потік подій 45
ГЛАВА 6 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН 46
Розділ 6.1 Рівномірний розподіл 46
Розділ 6.2 Нормальний закон розподілу 49
Розділ 6.3 Показниковий розподіл 56
ГЛАВА 7 ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ 59
Розділ 7.1 Поняття двовимірної випадкової величини 59
Розділ 7.2 Функція розподілу двовимірної випадкової величини 61
Розділ 7.3 Двовимірна щільність ймовірності 62
Розділ 7.4 Умовні закони розподілу 65
Розділ 7.5 Залежні і незалежні випадкові величини . 68
Розділ 7.6 Лінійна регресія 73
ГЛАВА 8 ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ 75
Розділ 8.1 Закон великих чисел (нерівність Чебишева) 75
Розділ 8.2 Теорема Чебишева 80
Розділ 8.3 Центральна гранична теорема 86
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА 89
ГЛАВА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ВИБІРКОВОГО МЕТОДУ ТА ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ 89
Розділ 1.1 Вибірковий метод 89
Розділ 1.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу 94
Розділ 1.3 Точкові та інтервальні оцінки 98
ГЛАВА 2 ПЕРЕВІРКА ПАРАМЕТРИЧНИХ ГІПОТЕЗ 105
Розділ 2.1 Основні поняття теорії гіпотез 105
Розділ 2.2 Побудова критичної області 106
Розділ 2.3 Перевірка значущості вибіркового коефіцієнта кореляції 121
ГЛАВА 3 ПЕРЕВІРКА НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ГІПОТЕЗ 122
Розділ 3.1 Критерій згоди 122
Розділ 3.2 Критерій Пірсона (χ^2) 125

Розділ 3.3 Критерій Колмогорова (λ) 127
ГЛАВА 4 РЕГРЕСІЙНИЙ І КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ... 130
Розділ 4.1 Постановка задачі 130
Розділ 4.2 Лінійна регресія 131
Розділ 4.3 Перевірка гіпотези про незалежність двох випадкових величин 136
Розділ 4.4 Перевірка гіпотези про рівність параметрів двох біноміальних розподілів 139
ГЛАВА 5 НЕПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ 141
Розділ 5.1 Критерій знаків 141
Розділ 5.2 Критерій Уілкоксона-Манна-Уітні.......... 144
Розділ 5.3 Рангова кореляція за критеріями Спірмена і Кендела 147
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 151
ДОДАТКИ 154

ВСТУП

Події (явища), які ми спостерігаємо, можна підрозділити на: достовірні (обов'язково відбудеться), неможливі (обов'язково не відбудеться) і випадкові (або відбудеться, або ні). Кожна випадкова подія є наслідком дії дуже багатьох випадкових причин. Неможливо врахувати вплив на результат усіх цих причин, оскільки кількість їх дуже велика і закони їх дії невідомі. Тому теорія ймовірностей не ставить перед собою завдання передбачити, відбудеться одинична подія чи ні, - вона не в силах це зробити.

Теорія ймовірностей розглядає випадкові події, які можуть багаторазово спостерігатися при здійсненні одних і тих самих умов, тобто мова йде про масові однорідні випадкові події. Виявляється, що досить велика кількість однорідних випадкових подій незалежно від їх конкретної природи підпорядковується певним закономірностям, а саме імовірнісним закономірностям. Встановленням цих закономірностей і займається теорія ймовірностей.

Отже, предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових однорідних випадкових подій. Знання закономірностей, яким підкоряються масові випадкові події, дозволяє передбачити, як ці події будуть протікати.

Встановлення закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, засноване на вивченні методами теорії ймовірностей статистичних даних - результатів спостережень.

Математична статистика розробляє способи визначення числа необхідних випробувань до початку дослідження (планування експерименту), в ході дослідження (послідовний аналіз) і вирішує багато інших задач. Сучасну математичну статистику визначають як науку про прийняття рішень в умовах невизначеності.

Отже, завдання математичної статистики полягає в створенні методів збору і обробки статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в різних галузях природознавства і техніки: в теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, астрономії, теорії стрільби, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальної теорії зв'язку і в багатьох інших теоретичних і прикладних науках. Теорія ймовірностей служить також для обґрунтування математичної і прикладної статистики, яка в свою чергу використовується при плануванні і організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції і для багатьох інших цілей.

Коротка історична довідка.

Історія теорії ймовірностей почалася з досліджень азартних ігор вченими Ферма, Паскалем, Бернуллі у 1600 - 1700 роках. Суть їх робіт полягала у введенні понять «випадкова подія», «явище», «ймовірність», «математичне сподівання». Наступний етап у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з вченими Муавром, Лапласом, Пуассоном. Ними введено поняття «класичної ймовірності», встановлено правило обчислення ймовірності. У кінці XIX - початку XX століть вченими Чебишевим, Марковим, Ляпуновим уточнені поняття випадкової величини, випадкового процесу, побудована теорія граничних теорем. Розквітом теорії ймовірностей вважається 1933 рік, коли Колмогоров заклав основи аксіоматики теорії ймовірностей.

Математична статистика виникла у XVII столітті і розвивалася паралельно з теорією ймовірностей. Подальший розвиток математичної статистики (друга половина XIX - початок XX століття) зобов'язаний, в першу чергу, П.Л. Чебишеву, А.А Маркову, А.М. Ляпунову, а також К. Гаусу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пірсону та ін. У XX столітті найбільш істотний внесок у математичну статистику було зроблено радянськими математиками (В.І. Романовським, Е.Е. Слуцьким, А. Н. Колмогоровим, Н.В. Смирновим), а також англійськими (Стьюдентом (Вільям Сілі Госсет), Р. Фішером, Е. Пірсоном) і американськими (Ю. Нейманом, А. Вальдом) вченими.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ГЛАВА 1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, ДІЇ НАД ВИПАДКОВИМИ ПОДІЯМИ, ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Розділ 1.1 Введення в теорію ймовірностей

Визначення. *Теорія ймовірностей* - математична наука, що вивчає закономірності масових випадкових явищ.

При науковому дослідженні різних фізичних і технічних задач часто стикаємося з особливого типу явищами, які прийнято називати випадковими.

Визначення. *Випадкове явище* - це таке явище, яке при неодноразовому відтворенні одного і того ж досліду протікає щораз дещо по-іншому.

Як відомо, процес пізнання людиною навколишньої дійсності відбувається через експеримент або дослід. Одним з первісних понять теорії ймовірностей є поняття події.

Визначення. *Подія* - будь-який факт, який в результаті досліду може відбутися або не відбутися. Елементарною подією називається мінімальний логічно неподільний результат досліду.

Події бувають трьох видів:

1) достовірна - подія, яка обов'язково відбудеться, якщо створити певний комплекс умов (вода при нормальному тиску і температурі 20^0 C у рідкому стані), позначається - U;

2) неможлива - подія, яка явно не станеться (вода при нормальному тиску і температурі 20^0 C у твердому стані), позначається - V;

3) випадкова - подія, яка відбудеться або ні (поява орла при підкиданні монети).

Також події поділяють на:

а) сумісні - ті події, які в результаті досліду можуть відбутися одночасно;

б) несумісні - це події, які не можуть відбутися одночасно в одному досліді.

Приклад. При досліді з киданням монети подія А - з'явився орел і подія В - з'явилася решка несумісні (тобто поява одного з них виключає появу іншого).

Кілька подій утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування обов'язково з'явиться одне з них.

Розділ 1.2 Алгебра подій

Визначення. Подія С називається *сумою* подій А і В, якщо вона відбувається в тому випадку, коли в результаті досліду відбувається хоча б одна з подій А або В.

Позначення: $C = A \cup B$, або $C = A + B$.

Графічно сума подій А і В зображено на рис. 1.1.

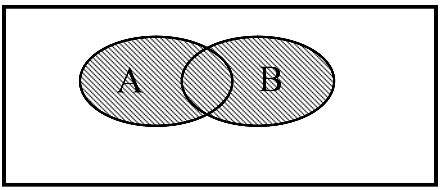

Рис.1.1 Сума подій

Приклад. Нехай подія А – влучення першим стрільцем у мішень, подія В – влучення другим стрільцем у мішень.

Подія C – ураження мішені, тобто хоча б одне влучення по мішені, є сумою подій A і B.

<u>Визначення.</u> Подія D називається *перетином або добутком* подій A і B, якщо вона відбувається в тому випадку, коли в результаті випробувань відбуваються обидві події одночасно.

Позначення: $D=A\bigcap B$, або $D=A\cdot B$.

Графічно добуток подій A і B зображено на рис. 1.2.

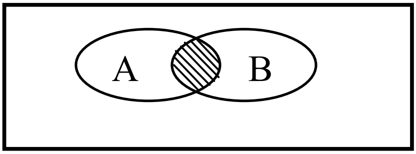

Рис.1.2 Добуток подій

<u>Приклад.</u> Нехай подія A - влучення першим стрільцем у мішень, подія B – влучення другим стрільцем у мішень. Подія D - влучення обох стрільців, є добутком подій A і B.

<u>Визначення</u>. Подія E називається *різницею* подій A і B, якщо в результаті випробування подія E відбувається тоді і тільки тоді, коли A відбувається, а B - не відбувається.

Позначення: $E=A\backslash B$.

Графічно різниця подій A і B зображено на рис. 1.3.

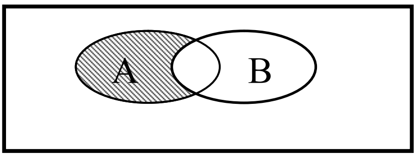

Рис.1.3 Різниця подій

Приклад. Нехай подія А - влучення першим стрільцем у мішень, подія В – влучення другим стрільцем у мішень. Подія Е - влучення першого стрільця і промах другого, є різницею подій А і В.

Визначення. Подія F називається *запереченням* події А, якщо в результаті випробування подія F відбувається тоді і тільки тоді, коли А не відбувається.

Позначення: $F=\bar{A}$.

Графічно заперечення події А зображено на рис. 1.4.

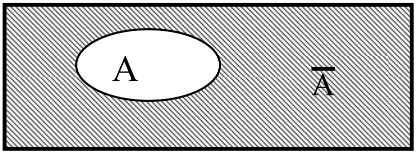

Рис.1.4 Заперечення події

Примітка. Сума події і її заперечення є достовірна подія (1.1). Добуток події з її запереченням є неможлива подія (1.2).

$$A \cup \bar{A} = U \tag{1.1}$$

$$A \cap \bar{A} = V \tag{1.2}$$

Приклад. Нехай подія А - влучення першим стрільцем у мішень, тоді подія $\bar{A}$ – промах стрільця.

Розділ 1.3 Імовірність події

Існують класичне, геометричне, статистичне і аксіоматичне поняття ймовірності події.

Визначення. Імовірність - це кількісна міра ступеня невизначеності в настанні події.

Класичне визначення. *Ймовірністю* P(A) настання події A називають відношення кількості випадків, що сприяють події, до всіх можливих випадків, якщо вони попарно несумісні і рівноможливі.

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.3}$$

Властивості: 1) P(**U**)=1 (m=n);
2) P(**V**)=0 (m=0);
3) 0<P(A)<1.

Задача. Кидають два гральних кубика. Визначити ймовірність того, що сума очок дорівнює трьом.

Підрахуємо число можливих випадків, вважаючи окремим елементарним випадком кожну можливу комбінацію (наприклад, випадання 1-1, 1-2, ..., 6-6). Очевидно, що таких випадків буде n = 6 * 6 = 36. Підрахуємо тепер число комбінацій, що задовольняють задану умову. Можливі лише два сприятливі випадки (1-2 і 2-1), тому шукана ймовірність P(A) = 2/36 = 1/18.

Обмеженістю класичного визначення є вимога підрахунку всіх можливих випадків, а також рівноможливість цих випадків.

Статистичне визначення. Нехай проводиться n випробувань, в результаті яких подія A настає m раз. Величину $\varpi_n(A) = \frac{m}{n}$ будемо називати *відносною частотою* настання події A або *частістю*. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \varpi_n(A) = P(A)$ називається *ймовірністю* події A.

Статистичне визначення ймовірності є основою в теорії прийняття рішень. На ньому базується прийняття рішень при аналізі даних. Математичною підставою статистичного визначення служить закон великих чисел, сформульований і доведений Бернуллі (описаний нижче).

Аксіоматичне визначення. Повна множина подій, які можуть відбутися в результаті випробування, будемо називати полем подій Ω. Елементи цього поля - елементарні події.

Аксіома 1. Для кожного елемента A_i з поля Ω існує величина $0 \le P(A_i) \le 1$, що належить цьому полю і називається ймовірністю цієї події.

Аксіома 2. Імовірність достовірної події дорівнює 1.

Аксіома 3. Якщо події А і В несумісні, то ймовірність їх суми дорівнює сумі ймовірностей подій А і В.

Геометричне визначення. Було введено для подолання незастосовності класичного визначення ймовірності для нескінченного числа випадків досліду.

Визначення. *Ймовірністю* називається відношення довжини (площі, об'єму) області, що сприяє появі події А, до довжини (площі, об'єму) області всіх можливих значень досліду.

Приклад. Нехай відрізок ℓ - частина відрізка L. На L навмання поставлена точка. Ймовірність влучення точки на ℓ пропорційна його довжині і не залежить від розташування ℓ на L. Тоді ця ймовірність дорівнює відношенню довжини відрізка ℓ до довжини відрізка L.

Зауваження. Недоліком є наступний факт. Для класичного визначення справедливими є зворотні твердження (наприклад, якщо Р = 0, то подія А є неможливою), а для геометричного вони не виконуються (наприклад, ймовірність попадання точки в точку дорівнює нулю, при цьому дана подія не є неможливою).

Розділ 1.4 Елементи комбінаторики

Основними поняттями, які використовує теорія ймовірностей з комбінаторики, є перестановка, розміщення і комбінація.

<u>Визначення</u>. *Перестановка* - це вибірка, що складається з одних і тих самих n різних елементів, які відрізняються порядком їх розташування. Кількість перестановок обчислюється за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!. \qquad (1.4)$$

<u>Приклад.</u> Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, якщо їх брати по одному разу?

Так як в нашому випадку всі числа складаються з одних і тих самих цифр - 1, 2, 3 і відрізняються лише порядком їх розташування, то ми маємо справу з перестановкою, і, отже, можна підрахувати: $P_3=3!=6$ чисел.

<u>Визначення.</u> *Розміщення* - це вибірка з n різних елементів по m елементів, які відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Кількість розміщень позначається і обчислюється за формулою:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \ . \qquad (1.5)$$

Приклад. Скільки можна подати сигналів, маючи 6 прапорців різного кольору, якщо сигналом вважається показ двох прапорців?

У цьому завданні ми маємо справу з розміщенням з шести прапорців по два прапорця, тому скористаємося формулою для підрахунку кількості всіх розміщень з 6 елементів по 2: $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Визначення. *Комбінація* - це вибірка, що складається з n елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом, порядок елементів не враховується. Кількість комбінацій позначається і обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad . \tag{1.6}$$

Приклад. Скількома способами можна взяти 2 деталі з 10?

У цьому завданні ми маємо справу з комбінацією, тому скористаємося формулою для підрахунку кількості комбінацій 2-х деталей з 10: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$.

ГЛАВА 2 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Розділ 2.1 Теореми додавання ймовірностей

Теорема 1. Імовірність появи однієї з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{2.1}$$

Доведення. Нехай n - загальне число випадків, m_1 - число випадків, які сприятливі події А, m_2 - число випадків, які сприятливі події В. Число випадків, які сприятливі або події А, або події В дорівнює $m_1 + m_2$ (з огляду на несумісність подій А і В). Тоді Р (А + В) = $(m_1 + m_2) / n = m_1 / n + m_2 / n$ = Р (А) + Р (В).

Теорема 2. Сума ймовірностей подій $\{A_i\}$, $i=\overline{1,n}$, що утворюють повну групу несумісних подій, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Приклад. Листи приходять з трьох міст А, В, С. Імовірність того, що лист прийде з міста А дорівнює 0.7, з міста В - 0.1. Знайти ймовірність того, що лист прийде з міста С.

Події А, В, С - несумісні і утворюють повну групу подій, отже, використовуючи теорему додавання ймовірностей, знаходимо:

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0.7-0.1=0.2.$$

Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \qquad (2.2)$$

Теорема 4. Імовірність появи хоча б однієї з двох спільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх спільної появи.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (2.3)$$

Доведення.

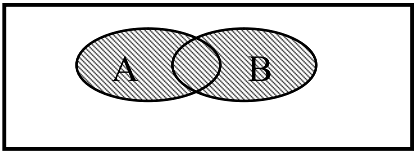

Рис.2.1 Сума двох подій

З рисунку 2.1 видно, що подія A + B складається з трьох подій, що не перетинаються (тобто несумісних): $A\overline{B}$, $B\overline{A}$ і AB. Подію A можна уявити як суму двох, що неперетинаються, подій: $A\overline{B}$ і AB, подію B - як суму $B\overline{A}$ і AB. Тоді за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій отримаємо:

$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(B\overline{A}) + P(AB)\,, \qquad (2.4)$$

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)\,, \qquad (2.5)$$

$$P(B) = P(B\overline{A}) + P(AB)\,. \qquad (2.6)$$

Підставивши другу і третю тотожності у першу, отримаємо остаточну формулу:

$$P(A+B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.7)$$

Розділ 2.2 Теорема множення ймовірностей

Визначення. *Умовною ймовірністю* P (A/B) будемо називати ймовірність події A, обчислену в припущенні, що подія B вже відбулася.

Визначення. Події A і B називаються *незалежними* тоді і тільки тоді, коли виконується така умова: P (A/B) = = P (A), тобто подія A не залежить від того, відбулося B чи ні.

Теорема. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку безумовної ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої події.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (2.8)$$

Наслідок. Якщо події A і B незалежні, тобто $P(A/B)=P(A)$ або $P(B/A)=P(B)$, тоді $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$.

Приклад 1. Стріляють два стрілка. Перший стрілок влучає 8 разів із 10 пострілів, другий - 9 разів із 10 пострілів. Визначити з якою ймовірністю мішень буде вражена.

Нехай подія A - влучення в мішень першим стрільцем, за класичною ймовірністю P (A) = 8/10. Подія B - влучення в мішень другим стрільцем, P (B) = 9/10. Позначимо C - подію, яка полягає в тому, що мішень буде вражена, тобто C = A + B. Використовуючи теорему 4 і наслідок з теореми множення, знаходимо:

$$P(C)=P(A)+P(B) - P(A \cdot B)=P(A)+P(B) - P(A) \cdot P(B)=$$
$$=0.8+0.9-0.8*0.9=0.98.$$

Приклад 2. Кидають кубик, подія A - випадання шістки, B - випадання числа, кратного трьом. Знайти ймовірність A, B, (A/B), (B/A) і з'ясувати, чи є A і B залежними подіями.

Оскільки кількість всіх можливих результатів випробування дорівнює шости, а для події A сприятливих результатів лише один, тоді P (A) = 1/6; для події B сприятливих результатів два, тоді P (B) = 1/3. Умовна ймовірність P(A/B) - ймовірність випадіння шістки, за умови, що випало число кратне трьом, за визначенням класичної ймовірності дорівнює 1/2, а P(B/A) = 1. Так як P (A/B) $\neq$ P (A), то події A і B залежні.

Приклад 3. У коробці є 10 білих і 5 чорних куль. Яка ймовірність дістати навмання з коробки 2 білих кулі?

Нехай події: A - перша навмання обрана куля біла, B - друга куля біла. Оскільки обидві події повинні відбутися одночасно, тому ймовірність дістати 2 білих кулі буде дорівнювати $P(AB) = P(A)P(B/A) = (10/15)\cdot(9/14) = 3/7$.

Розділ 2.3 Формула повної ймовірності, формула Байеса

Теорема 1. (Формула повної ймовірності) Нехай A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу несумісних подій (які називаються гіпотезами) і нехай подія B відбувається обов'язково з однією з A_i. Тоді ймовірність події B обчислюється за формулою:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + \ldots + P(A_n)P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i) \quad (2.9)$$

Приклад. Є три ящики. У першому ящику 3 білих і 3 чорних кулі, у другому - 5 білих і 1 чорна, в третьому - 1 біла і 5 чорних. Навмання вибираємо ящик і виймаємо з нього кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля біла.

Введемо наступні позначення: події A_i - обрано i-ий ящик, B - обрано білу кулю. Тоді маємо: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$, $P(B/A_1) = 3/6$, $P(B/A_2) = 5/6$, $P(B/A_3) = 1/6$. Використовуючи формулу повної ймовірності, отримуємо:

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. (Формула Байеса) Нехай A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу несумісних подій і нехай подія B відбувається обов'язково з однією з подій A_i. Тоді:

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)} . \qquad (2.10)$$

Приклад. Умова з попереднього прикладу. Якщо витягнуто білу кулю, то наскільки ймовірним є те, що її витягнули з третього ящика?

Використовуючи формулу Байеса, знаходимо:

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B / A_3)}{P(B)} = \frac{1/3*1/6}{1/2} = \frac{1}{9}.$$

Формула Байеса дозволяє переоцінити ймовірність гіпотез після того, як стає відомий результат випробування.

Розділ 2.4 Формули Бернуллі і Пуассона

Теорема. (Формула Бернуллі) Нехай проводиться n незалежних випробувань, результатом кожного з яких можуть бути успіх або невдача. Нехай ймовірність успіху в кожному випробуванні однакова і дорівнює p, ймовірність невдачі - q = 1 - p. Необхідно обчислити ймовірність того, що подія A (успіх) відбудеться рівно m разів. Така ймовірність позначається $P_n^m = P_n(m)$ і обчислюється за формулою:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (2.11)$$

Доведення. Імовірність однієї складної події, яка полягає у тому, що в n випробуваннях буде m успіхів і (n-m) невдач по теоремі множення ймовірностей дорівнює: $p^m q^{n-m}$. Таких складних подій може бути стільки, скільки існує комбінацій з n елементів по m елементів, тобто C_n^m. Оскільки ці складні події несумісні і для кожної події ймовірність однакова, тоді за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо:

$$P_n(m) = \sum p^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Приклад 1. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0.52. Чому дорівнює ймовірність того, що в сім'ї один хлопчик і дві дівчинки?

Маємо n = 3, m = 1, p = 0.52, значить q = 1-0.52 = 0.48. За формулою Бернуллі: $P_3^1 = C_3^1 (0.52)^1 (0.48)^2 = 0.36$.

Приклад 2. Монета кидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більше двох разів.

У цьому завданні кількість випробувань n = 5, а кількість того, що випаде герб - m ≤ 2. Нам необхідно знайти суму наступних ймовірностей: герб не випаде ні разу - $P_5(0)$, чи герб випаде один раз - $P_5(1)$, або герб випаде два рази - $P_5(2)$, тобто:

$$P_5(m \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) =$$
$$= C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Якщо число випробувань велике, а ймовірність успіху мала, то ймовірність m успіхів в n випробуваннях розраховують за наближеною формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np. \tag{2.12}$$

Якщо для формули Бернуллі (або тим паче Пуассона) побудувати графік залежності $P_n(m)$ від m, то ми помітимо, що ймовірність з ростом m спочатку буде зростати, а потім спадати. Для практики іноді потрібно знати, яке число настання подій є найімовірніше. Це число m_0 визначається за формулою:

$$np-q \le m_0 \le np+p\ . \tag{2.13}$$

Розділ 2.5 Теореми Муавра-Лапласа

У тому випадку, коли число випробувань та ймовірність успіху в кожному випробуванні великі, замість формули Бернуллі застосовують локальну теорему Лапласа.

<u>Теорема (локальна Лапласа)</u>. Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів, приблизно дорівнює (тим точніше, чим більше n) значенню функції:

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \tag{2.14}$$

де $$x = (k-np)\big/\sqrt{npq}\ .$$

Практично у кожній книжці з теорії ймовірностей існують таблиці значень функції Гауса φ(x). Крім того, φ(-x)=φ(x), тобто функція парна.

<u>Приклад.</u> Знайти ймовірність події А - рівно 80 успіхів в 400 випробуваннях, якщо в одному випробуванні ймовірність успіху дорівнює 0.2.

Скористаємося формулою Лапласа:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x),$$

$$x = (k - np)\Big/\sqrt{npq} = (80 - 400 \cdot 0.2)/0.8 = 0.$$

За таблицею знаходимо $\varphi(0)$=0.3989, тоді $P_{400}(80)$ = =0.3989/8=0.04986.

<u>Зауваження.</u> Теорема непридатна при n ≤ 10.

<u>Теорема (інтегральна Лапласа).</u> Якщо ймовірність p настання події А в кожному випробуванні постійна і не дорівнює нулю і одиниці, то ймовірність $P_n(k_1,k_2)$ того, що подія А з'явиться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює наступному визначеному інтегралу:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-z^2/2} dz \qquad (2.15)$$

де $\quad x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

Цей інтеграл аналітично не розв’язується. Існують таблиці функції $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$. Крім того,

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$, і ця функція носить назву *функція Лапласа*. Формулу (2.15) з теореми після ряду перетворень можна отримати у вигляді:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x') \qquad (2.17)$$

Приклад. Імовірність браку деталі дорівнює 0.2. Визначити ймовірність того, що з обраних навмання 400 деталей виявиться бракованих від 70 до 100 штук.

В даному випадку p=0.2, q=1-p=1-0.2=0.8. Скористаємося інтегральною теоремою:

$$P_{400}(70{,}100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

$$x' = \frac{70 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = -1.25, \quad x'' = \frac{100 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = 2.5.$$

За таблицею знаходимо Ф(-1.25)=-0.3944, Ф(2.5)=0.4938, отже:

$P_{400}(70{,}100) \approx 0.4938-(-0.3944)=0.8882$.

ГЛАВА 3 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Розділ 3.1 Функція розподілу випадкової величини

Визначення. *Випадковою величиною* називають величину, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які наперед не можуть бути враховані.

Наприклад, число народжених хлопчиків серед 100 новонароджених є випадкова величина, яка може приймати значення 0, 1, 2, ···, 100.

Будемо позначати випадкову величину прописними буквами X, Y, Z, а їх значення - малими: x_i, y_i, z_i.

Випадкова величина буває:

а) дискретною - випадкова величина, яка може приймати скінчену або нескінченну зліченну множину ізольованих значень з певною ймовірністю;

б) неперервною - випадкова величина, яка може приймати всі значення зі скінченого або нескінченного інтервалу.

Будемо говорити, що про випадкову величину відомо все, якщо можна перелічити всі значення випадкової величини в експерименті або вказати інтервал її значень, а також перелічити ймовірності, з якими приймаються кожне значення або вказати ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал. Інакше кажучи, необхідно задати закон розподілу випадкової величини. Його можна задати за допомогою таблиці, аналітично (у вигляді формул) і графічно. Дискретну випадкову величину зазвичай задають таблицею, причому:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\} = U, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{3.1}$$

<u>Приклад.</u> Задати закон розподілу числа випадіння герба в п'яти киданнях монети.

X - число випадінь герба. Ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі.

$$p_5(0) = C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \qquad p_5(1) = C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$p_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}, \qquad p_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32},$$

$$p_5(4) = C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}, \qquad p_5(5) = C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Побудуємо ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	p_0=1/32	p_1=5/32	p_2=5/16	p_3=5/16	p_4=5/32	p_5=1/32

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого будують точки (x_i, p_i) і з'єднують їх ламаною лінією. Отриману фігуру, називають багатокутником розподілу (рис.3.1).

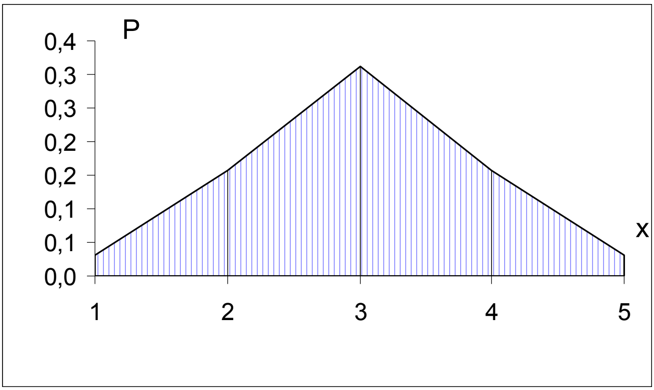

Рис.3.1 Багатокутник розподілу

Для неперервних випадкових величин потрібно вказати область визначення випадкової величини і записати закон розподілу ймовірностей попадання випадкової величини в будь-який інтервал цієї множини. Аналітичним виразом закону розподілу випадкової величини є поняття функції розподілу.

Визначення. *Функцією розподілу ймовірностей* або інтегральною функцією випадкової величини X називається функція F(x), яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше за аргумента x, тобто:

$$F(x)=P(X<x) . \tag{3.2}$$

Визначення (уточнене). Випадкова величина неперервна, якщо її функція розподілу неперервна, кусочно-диференційована з неперервною першою похідною.

Властивості функції розподілу:

1). Значення функції розподілу належать відрізку [0,1], тобто $0 \le F(x) \le 1$.

2). Функція розподілу ймовірностей неспадна, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення. Нехай $x_2 > x_1$, тоді подію $X < x_2$ можна розбити на несумісні події: а) $X < x_1$ і б) $x_1 < X < x_2$. За теоремою додавання ймовірностей: $P(X<x_2)=P(X<x_1) + P(x_1<X<x_2)$, звідки слідує:

$P(X<x_2) - P(X<x_1) = P(x_1<X<x_2)$, або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1<X<x_2)$.

Тому що будь-яка ймовірність більше або дорівнює нулю, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належить проміжку (a, b), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a).$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина прийме одне певне значення, дорівнює нулю.

Наслідок 3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то: а) $F(x)=0$ при $x \le a$; б) $F(x)=1$ при $x>b$.

Наслідок 4. Якщо можливі значення випадкової величини належать дійсній множині, то справедливі такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1. \tag{3.3}$$

Примітка 1. Поняття функції розподілу поширюється і на дискретні, і на неперервні випадкові величини. Для дискретної випадкової величини X, яка може приймати значення $x_1, \cdots, x_n$:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\}. \tag{3.4}$$

Але, на відміну від неперервної випадкової величини, яка має неперервну функцію розподілу, дискретна випадкова величина має розривну функцію розподілу.

Приклад 1. Нехай випадкова величина задана таблицею:

X	1	4	8
P	0.3	0.1	0.6

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 1 \\ 0.3 & при\ 1 < x \le 4 \\ 0.4 & при\ 4 < x \le 8 \\ 1 & при\ x > 8 \end{cases}$$

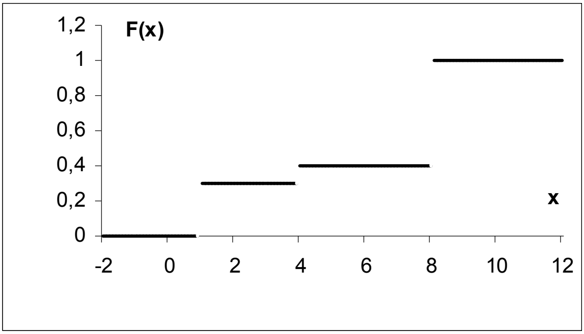

Рис.3.2 Графік функції розподілу

Примітка 2. Нехай випадкова подія A має ймовірність $P(A) = p$. Назвемо індикатором події A випадкову величину J_A, яка приймає тільки два значення 1 або 0, причому $J_A=1$ - подія A відбулась, $J_A=0$ - подія A не відбулась. Тоді індикатор є дискретна випадкова величина з таблицею розподілу:

J_A	1	0
	p	q

де $q=1-p$.

Розділ 3.2 Щільність розподілу випадкової величини

Визначення. Функція f (x) називається *щільністю розподілу* випадкової величини X, якщо для будь-яких a, b, що належать дійсній множині (a<b), справедливою є наступна рівність:

$$P\{a \le x \le b\} = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (3.5)$$

Якщо у випадкової величини існує щільність розподілу f (x), то:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty \le X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \qquad (3.6)$$

Наслідок. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X є похідною функції розподілу:

$$f(x)=F'(x).$$

Лема. Якщо випадкова величина X має щільність розподілу, то ця випадкова величина є неперервною.

Графік щільності розподілу називають *кривою розподілу*.

Властивості щільності розподілу:

1). $f(x) \ge 0$ як похідна неспадної функції.

2). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$ оскільки $p\{-\infty \le X \le \infty\} = 1.$

Геометричний зміст останньої властивості - площа криволінійної трапеції, що обмежена віссю Ox і *f(x)*, дорівнює 1 (див. рис.3.3).

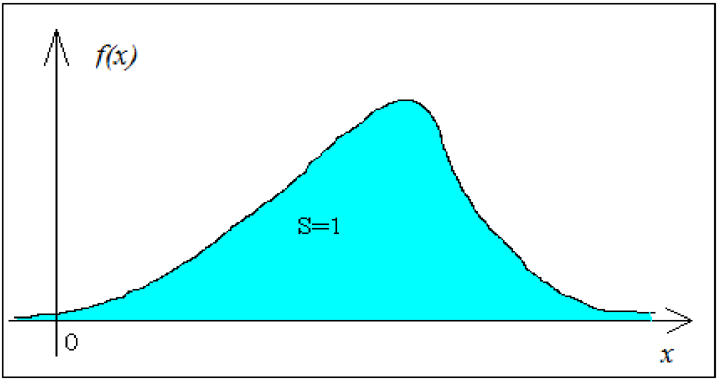

Рис.3.3 Геометричний зміст щільності розподілу

ГЛАВА 4 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Розділ 4.1 Математичне сподівання випадкової величини

У багатьох питаннях практики немає необхідності характеризувати випадкову величину повністю, як це роблять закони розподілу. Досить вказати числові характеристики - параметри, що характеризують, як правило, очікуване справжнє значення випадкової величини X (міри центральної тенденції або міри положення) і розкид значень випадкової величини відносно центру (міри масштабу або зсуву). Параметрами, що характеризують міру положення, є: математичне сподівання μ, мода μ_0, медіана μ_e.

Визначення. *Модою* μ_0 називається значення випадкової величини X, для якого щільність розподілу ймовірностей максимальна, тобто $\max\limits_{x} f(x)$ (для неперервних випадкових величин) або в якому випадкова величина має найбільшу ймовірність $\max\limits_{i} p_i$ (для дискретних випадкових величин).

Визначення. *Медіаною* μ_e називається значення випадкової величини X, для якого виконується рівність:

$$P\{X < \mu_e\} = P\{X > \mu_e\} = 1/2 \qquad (4.1)$$

Визначення. *Математичним сподіванням* μ називається зважене за ймовірністю середнє значення випадкової величини X. Воно вводиться окремо для дискретних і неперервних випадкових величин.

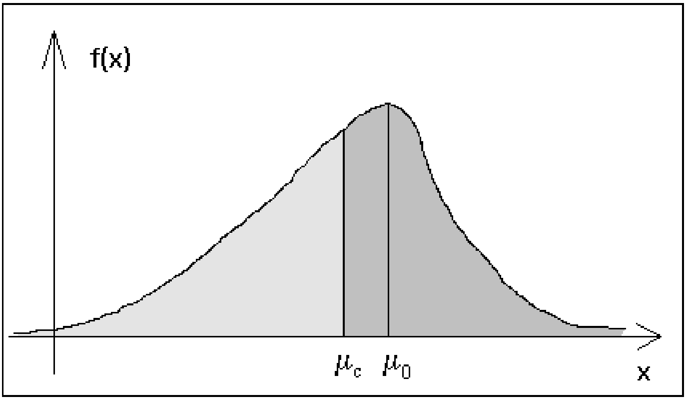

Рис.4.1 Графічне означення моди і медіани

1) Для дискретних випадкових величин математичне сподівання обчислюється за формулою:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (4.2)$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей. Іноді математичне сподівання називають просто середнім значенням випадкової величини.

2) Для неперервних випадкових величин математичне сподівання узагальнює формулу для дискретних і обчислюється за формулою:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (4.3)$$

Теорема 1. Математичне сподівання кількості появи події в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події.

Доведення. В одному випробуванні може бути два результати: x=0 з ймовірністю q, і x=1 з ймовірністю p. Тоді M(x)=1·p+0·q=p.

Властивості математичного сподівання:

1). M(C)=C, де C – константа.

Доведення. Нехай C - дискретна випадкова величина з ймовірністю p=1. тоді M(C)=C·1=C.

2). M(CX)=C·M(x).

Доведення. Нехай випадкова величина X може приймати значення x_1, x_2, ... з ймовірностями p_1, p_2, ... відповідно. Тоді випадкова величина C*X може приймати значення $C*x_1$, $C*x_2$, ... з такими ж ймовірностями p_1, p_2, ...

Математичне сподівання дорівнює:

$$M(C*X)= C*x_1*p_1+C*x_2*p_2+\ldots=C*(x_1*p_1+ x_2*p_2+\ldots)=C*M(X) \qquad (4.4)$$

3). Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(X*Y)=M(X)*M(Y)$.

4). Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків: $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

Слідство. Властивості 3 і 4 справедливі для будь-якої кількості випадкових величин.

Теорема 2. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю.

$$M[X-M(X)]=0 \tag{4.5}$$

Доведення. Для доказу розкриємо дужки і використаємо властивості математичного сподівання, а також той факт, що $M(M(X))=M(X)$ (так як математичне сподівання не є випадковою величиною, це - константа).

$$M[X-M(X)]=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0 \tag{4.6}$$

Розділ 4.2 Дисперсія випадкової величини

Визначення. *Дисперсією* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання. Позначається: Д(X), $\sigma^2(X)$.

$$Д(X)=M[X-M(X)]^2 \tag{4.7}$$

Для дискретних випадкових величин дисперсія обчислюється за формулою:

$$Д(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i\ , \qquad \sum_{i=1}^{n}p_i=1. \qquad (4.8)$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей. Іноді дисперсію називають просто квадратом відхилення випадкової величини.

Для неперервних випадкових величин дисперсія узагальнює формулу для дискретних і обчислюється за формулою:

$$Д(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx \qquad (4.9)$$

Теорема. Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням від квадрата випадкової величини і квадратом математичного сподівання випадкової величини:

$$Д(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2 \qquad (4.10)$$

Доведення. За визначенням дисперсії, отримуємо:
$Д(X) = M(X-M(X))^2 = M(X^2-2M(X)X+M^2(X)) =$
$=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X) = M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X) =$
$=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Властивості дисперсії:

1). Дисперсія константи дорівнює нулю.

$$Д(C)=0 \qquad (4.11)$$

Доведення. За визначенням дисперсії маємо:

$Д(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$

2). Константа виноситься з під знаку дисперсії в квадраті.

$$Д(CX)=C^2Д(X) \tag{4.12}$$

Доведення. За визначенням дисперсії маємо:

$$Д(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 =$$

$$= M\left[C(X - M(X))\right]^2 = C^2 Д(X).$$

3). Дисперсія суми двох і більше незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

$$Д(X+Y)=Д(X)+Д(Y) \tag{4.13}$$

Доведення. Використовуючи теорему, отримуємо:

$$Д(X+Y) = M((X+Y)^2) - \left[M(X+Y)\right]^2 =$$

$$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X) + M(Y))^2 =$$

$$= M(X^2) + M(Y^2) - \left[M(X)\right]^2 - \left[M(Y)\right]^2 = Д(X) + Д(Y).$$

4). Дисперсія різниці двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

$$Д(X-Y)=Д(X)+Д(Y) \tag{4.14}$$

Доведення.

$$Д(X-Y)=Д(X)+Д(-Y)=Д(X)+(-1)^2Д(Y)=Д(X)+Д(Y).$$

Визначення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини називають квадратний корінь з дисперсії цієї випадкової величини.

$$\sigma(X) = \sqrt{Д(X)} \tag{4.15}$$

Лема. Дисперсія числа появи події А в n незалежних випробуваннях обчислюється за формулою (далі див. біноміальний закон):

$$Д(X)=npq \tag{4.16}$$

Розділ 4.3 Моменти випадкової величини

Найбільш загальними характеристиками випадкової величини є початкові і центральні моменти k-го порядку.

Визначення. Початковим моментом k-го порядку називають математичне сподівання k-го степеня випадкової величини:

$$\mu_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \quad \text{(для дискретних величин)}, \quad (4.17)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \quad \text{(для неперервних величин)}. \quad (4.18)$$

Примітка. Математичне сподівання - це початковий момент 1-го порядку.

Визначення. *Центральним моментом k-го порядку* називають математичне сподівання k-го степеня відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$\nu_k = M\left[(X - M(X))^k\right] \quad (4.19)$$

Для дискретних випадкових величин:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^k p_i \,. \quad (4.20)$$

Для неперервних випадкових величин:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x)dx \,. \quad (4.21)$$

Примітка.

$$\nu_1 = 0; \quad \nu_2 = Д(X) \,. \quad (4.22)$$

Визначення. *Асиметрією* називають відношення третього центрального моменту до кубу середнього квадратичного відхилення.

$$S_x = \nu_3 / \sigma^3 \qquad (4.23)$$

Ця величина характеризує несиметричність розподілу відносно M(X). Дійсно, в сумі $\nu_3 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^3 p_i$ або в інтегралі $\nu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)^3 f(x)dx$ при симетричному відносно M(X) законі розподілу кожному додатному доданку відповідає рівній йому за модулем від'ємний доданок, так що вся сума або інтеграл дорівнюють нулю.

Четвертий центральний момент служить для характеристики «крутості», тобто гостровершинності або плосковершинності розподілу. Це властивість описується за допомогою так званого ексцесу.

Визначення. *Ексцесом* випадкової величини X називається величина E_x, яка обчислюється за формулою:

$$E_x = \nu_4 / \sigma^4 - 3 \qquad (4.24)$$

У цій формулі віднімається число 3 тому, що для важливого нормального закону розподілу $\nu_4 / \sigma^4 = 3$ і E_x=0. Таким чином, для кривих більш гостровершинних E_x> 0, а для менш гостровершинних - E_x <0.

На рисунку 4.2 зображені графіки щільності розподілу ймовірностей двох випадкових величин. При зміщенні графіка вліво відносно математичного сподівання асиметрія від'ємна (графік 1), вправо – додатна (графік 2).

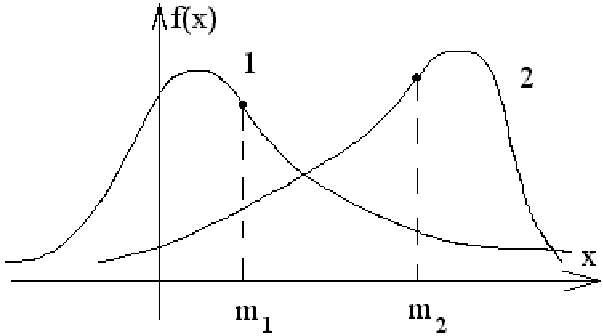

Рис.4.2 Графік кривої розподілу для різних значень асиметрії

На рисунку 4.3 представлено порівняння графіків щільності розподілу випадкових величин з нормальною випадковою величиною за допомогою ексцесу. При більш швидкому зростанні ймовірності, ніж у нормального закону (графік 2) величина ексцесу додатна (графік 1), а при більш повільному – від'ємна (графік 3). У нормального закону, як у еталонного, величини асиметрії і ексцесу дорівнюють нулю.

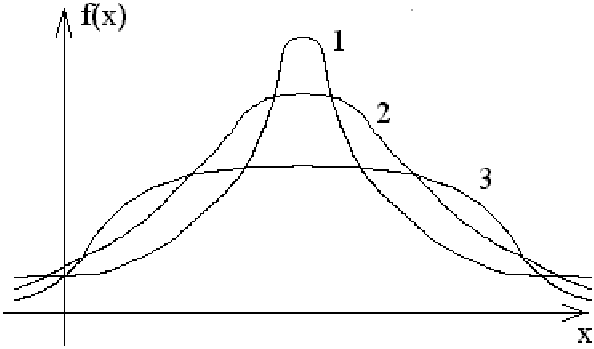

Рис.4.3 Порівняння кривих розподілу для різних значень ексцесу

ГЛАВА 5 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розділ 5.1 Біноміальний закон розподілу

Визначення. *Біноміальним* називають розподіл ймовірностей, який визначається за допомогою формули Бернуллі.

Приклад. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися з імовірністю p або не з'являться з ймовірністю q (q = 1- p). Складемо таблицю розподілу випадкової величини X - число успіхів в n випробуваннях.

X	n	n-1	…	k	…	0
p	p^n	$C_n^{n-1}p^{n-1}q$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	q^n

Якщо підсумувати всі ймовірності у другому рядку, то отримаємо формулу бінома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} p^{n-k} q^k = (p+q)^n = 1^n = 1. \qquad (5.1)$$

<u>Теорема 1</u>. Математичне сподівання числа появи події А в n незалежних випробуваннях дорівнює M(X) = n * p.

<u>Доведення</u>. Нехай випадкова величина X - число появ події А в n випробуваннях. Тоді $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, де X_i - число появ події А в і-ом випробуванні (індикатор). За властивістю 3 математичного сподівання отримаємо $M(X)=M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$. Проте математичне сподівання у кожному випробуванні постійно і дорівнює ймовірності події, тоді M(X)=n*p.

<u>Теорема 2</u>. Дисперсія числа появи події А в n незалежних випробуваннях дорівнює Д(X) = n * p * q.

<u>Доведення</u>. Розмірковуючи як в попередній теоремі за властивістю дисперсії отримаємо:

$$Д(X)=Д(X_1) + Д(X_2) + ... + Д(X_n).$$

Дисперсія у кожному випробуванні дорівнює $Д(X_i)= M(X_i^2)-(M(X_i))^2= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1- p) = pq$.

Звідки маємо Д(X)=n*p*q.

<u>Теорема 3</u>. Мода (найімовірніше число успіхів) для біноміального закону обчислюється за формулою:

$$np-q \le m_0 \le np+p . \qquad (5.2)$$

Визначення. Багаточлен ступені n, в якому коефіцієнти при невідомих дорівнюють ймовірностям у біноміальному розподілу, називається *виробляючою функцією:*

$$\varphi_n(z) = (q + p*z)^n \ . \qquad (5.3)$$

Розділ 5.2 Розподіл Пуассона

Розглянемо дискретну випадкову величину X, яка може приймати цілі невід'ємні значення: 0, 1, 2, ···, m, ···, причому послідовність цих значень не обмежена.

Визначення. Кажуть, що випадкова величина X розподілена за законом *Пуассона*, якщо ймовірність того, що вона прийме деяке значення m дорівнює:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \ , \qquad (5.4)$$

де $\lambda > 0$ – параметр закону Пуассона.

За допомогою розкладання експоненти в ряд Тейлора можна довести основну тотожність усіх законів розподілу Пуассона:

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \, . \qquad (5.5)$$

Обчислимо математичне сподівання:

$$M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda \, . \qquad (5.6)$$

Аналогічним чином, обчислюючи дисперсію, отримаємо:

$$Д(X)=M(X)=\lambda \qquad (5.7)$$

На практиці велике значення має наступна лема.

Лема. Закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу, якщо $n\to\infty$ і $p\to0$ так що $n*p$ дорівнює λ.

Доведення.

$$P_m = \lim_{n\to\infty} C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\cdot\frac{\lambda^m}{n^m}\cdot\frac{\left(1-\lambda/n\right)^{\frac{n}{\lambda}\lambda}}{\left(1-\lambda/n\right)^m} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{\left(1-\lambda/n\right)^{\frac{n}{\lambda}\lambda}}{\left(1-\lambda/n\right)^m} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \qquad (5.8)$$

Примітка. Нехай проводиться велика кількість дослідів n, в кожному з яких подія A має малу ймовірність p. Тоді для обчислення P_n^m використовується наступний вираз:

$$P_n^m \approx \frac{(np)^m}{m!}e^{-np} \ . \qquad (5.9)$$

Тому закон Пуассона носить другу назву - *закон рідкісних явищ*.

Приклад. Завод відправив на базу 500 доброякісних виробів. Імовірність того, що в шляху виріб пошкодиться дорівнює 0.002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 пошкоджені вироби.

p=0.002;   q=0.998; n=500.

M(X)=np=1; λ =M(X)=1.

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad , \quad p_3 = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0.06 \,.$$

Розділ 5.3 Потік подій

Визначення. *Потоком подій* називають послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу.

Наприклад, надходження викликів на АТС, літаків в аеропорт.

Властивості потоків:

1). Стаціонарність - ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу залежить тільки від числа k і від тривалості Δt проміжку часу, і не залежить від початку його відліку (проміжки не перетинаються).

2). Відсутність післядії - незалежність появи того чи іншого числа подій в проміжки часу, які не перетинаються.

3). Ординарність - за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше однієї події.

Визначення. Якщо виконуються властивості: стаціонарність, відсутність післядії та ординарність, тоді потік є *найпростішим (пуассонівським*).

Визначення. *Інтенсивністю потоку* λ називають середнє число подій за одиницю часу.

Імовірність появи k подій за час тривалістю t визначається за формулою:

$$P_t(k) = {(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}} \Big/ {k!} \quad . \tag{5.10}$$

Приклад. Середнє число викликів на АТС за одну хвилину дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за п'ять хвилин буде три виклики.

За умовою задачі: λ=2, t=5, k=3, отже, використовуючи формулу (5.10), отримаємо: $P_5(3) = {10^3 \cdot e^{-10}}/{3!} \approx 0.0075$.

ГЛАВА 6 ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розділ 6.1 Рівномірний розподіл

Іноді зустрічаються неперервні випадкові величини, про які відомо, що їх значення лежать в межах певного інтервалу, причому в межах цього інтервалу всі значення рівноймовірні. Ці випадкові величини розподілені за законом рівномірної щільності.

Визначення. Розподіл називають *рівномірним*, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, щільність розподілу стала, а поза цим інтервалом дорівнює нулю.

Приклад 1. Проводиться зважування на вагах з використанням гирьок в один грам. Якщо визначають, що вага лежить між k і (k+1) грамами, приймають вагу рівною (k+1/2) грам. Тоді помилка - випадкова величина, яка розподілена рівномірно на інтервалі: (-1/2; +1/2).

Приклад 2. Обертають колесо. Розглядається випадкова величина X - кут θ, який утворює радіус з горизонтом. Вона розподілена рівномірно на відрізку (0; 2П].

Відповідно визначенню, щільність має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} C & при \quad \alpha<x<\beta \\ 0 & при \quad x\notin(\alpha;\beta) \end{cases}. \qquad (6.1)$$

Оскільки площа, яка обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці, тоді C*(β-α) = 1, C = 1/(β-α). отже:

$$f(x)=\begin{cases} 1/(\beta-\alpha) & при \quad \alpha<x<\beta, \\ 0 & при \quad x\notin(\alpha;\beta). \end{cases} \qquad (6.2)$$

Функція рівномірного розподілу має наступний вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<\alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & при \quad \alpha<x<\beta, \\ 1 & при \quad x>\beta. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Графічно функція розподілу зображена на рисунку 6.1.

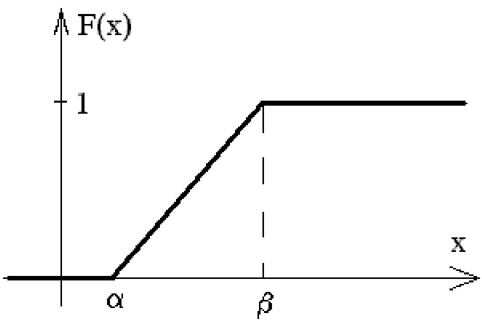

Рис.6.1 Функція рівномірного розподілу

Математичне сподівання величини X дорівнює:

$$m_x = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta - \alpha} dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \ . \qquad (6.4)$$

В силу симетричності рівномірного розподілу медіана дорівнює середині інтервалу: $m_e=(\alpha+\beta)/2$, мода не визначена, дисперсія знаходиться наступним чином:

$$Д(X) = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} . \qquad (6.5)$$

Отже, середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma_x = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}} \ . \qquad (6.6)$$

Асиметрія дорівнює нулю, для визначення ексцесу знаходимо четвертий центральний момент:

$$\nu_4 = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^4 dx = \frac{(\beta - \alpha)^4}{80} ,$$

$$E_x = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = -1.2 \ . \qquad (6.7)$$

Нарешті, знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X, яка розподілена рівномірно, на інтервал (a;b).

1). Якщо $\alpha<a<b<\beta$, тоді:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \frac{b - a}{\beta - \alpha} . \qquad (6.8)$$

2). Якщо a<α<b<β, тоді:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \frac{b-\alpha}{\beta-\alpha} \quad . \qquad (6.9)$$

Приклад. Нехай випадкова величина рівномірно розподілена на інтервалі (2; 8). Знайти P(4<x<6).

P(4<x<6) = $F(6) - F(4) = \frac{6-4}{8-2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Розділ 6.2 Нормальний закон розподілу

Найбільш часто зустрічається на практиці закон, до якого наближаються інші закони при певних умовах. Він називається нормальним законом розподілу (Гаусса).

Визначення. *Нормальним* називають розподіл N(a,σ^2) випадкової величини з параметрами a, σ (σ>0), який описується наступною щільністю:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2 / 2\sigma^2} \quad . \qquad (6.10)$$

Знайдемо числові характеристики:

1). Математичне сподівання.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (6.11)$$

Введемо нову змінну $z = \frac{x-a}{\sigma}$, тоді:

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z+a)e^{-z^2/2}dz=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-z^2/2}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2/2}dz \qquad (6.12)$$

У першому інтегралі підінтегральна функція непарна, і тому інтеграл дорівнює нулю, другий інтеграл - інтеграл Пуассона і він дорівнює $\sqrt{2\pi}$, отже, математичне сподівання дорівнює параметру а.

$$M(X) = a \qquad (6.13)$$

2). Дисперсія.

$$Д(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx \qquad (6.14)$$

Введемо ту ж змінну z, отримаємо:

$$Д(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot ze^{-z^2/2}dz\ . \qquad (6.15)$$

Інтегруючи за частинами, знаходимо дисперсію:

$$Д(X)=\sigma^2 \qquad (6.16)$$

Отже, середнє квадратичне відхилення дорівнює σ.

Визначення. *Стандартним (нормованим)* нормальним розподілом називається розподіл N(0;1), який описується наступною щільністю:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\ . \qquad (6.17)$$

Якщо X - випадкова величина з нормальним законом розподілу з параметрами (a,σ^2), тоді $U = (X-a)/\sigma$ - нормована випадкова величина. Покажемо це на прикладах математичного сподівання і дисперсії:

$$M(U) = \frac{1}{\sigma}M(X-a) = \frac{1}{\sigma}\left[M(X) - M(a)\right] = \frac{1}{\sigma}(a-a) = 0,$$

$$Д(U) = \frac{1}{\sigma^2}Д(X-a) = \frac{1}{\sigma^2}\left[Д(X) - Д(a)\right] = \frac{1}{\sigma^2}Д(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1. \quad (6.18)$$

Таким чином, будь-яку нормальну випадкову величину можна привести до стандартного вигляду.

Дослідимо криву нормального розподілу, використовуючи методи математичного аналізу.

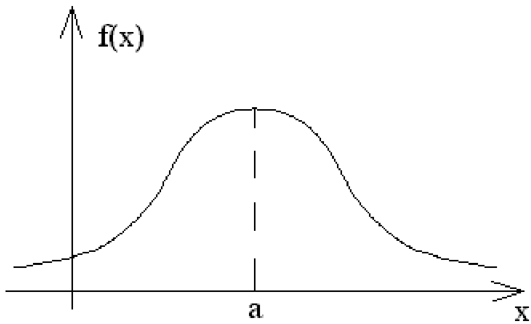

Рис.6.2 Функція розподілу нормального закону

Можна зробити наступні висновки:

1) Функція визначена на всій числовій осі.

2) Для кожного значення аргументу функція додатна, тобто функція розташована над віссю Ox.

3) Границя функції при прямуванні X до нескінченності дорівнює нулю:

$$\lim_{|x|\to\infty} y = 0,$$

тобто вісь Ox - горизонтальна асимптота.

4) За допомогою першої похідної встановимо точку екстремуму:

$$y' = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2};$$

$y' = 0$ при $x = a$.

Звідки $y_{\max} = y(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Крім того, функція зростає лівіше точки x = a і спадає правіше цієї точки.

5) Функція симетрична відносно прямої x = a.

6) За допомогою другої похідної встановимо, що точками перегину є значення аргументу x = a ± σ.

Виведемо формулу для обчислення ймовірності попадання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом в певний інтервал. За визначенням щільності розподілу маємо:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx \ . \quad (6.19)$$

Скористаємося заміною змінних, введеною нами раніше для нормування:

$$\left| \begin{array}{ll} z = \dfrac{x-a}{\sigma} & x = \sigma\, z + a \\ & dx = \sigma\, dz \\ x = \alpha & z = \dfrac{\alpha - a}{\sigma} \\ x = \beta & z = \dfrac{\beta - a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\,.$$

Далі до результату застосуємо формулу функції Лапласа Ф(x), значення якої табульовані:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-z^2/2}\, dz\,.$$

Звідки

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (6.20)$$

<u>Приклад.</u> Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами a = 30 і σ = 10. Знайти ймовірність попадання X в інтервал P(10 <X <50).

Використовуючи формулу (6.20), отримаємо:

$$P(10 < x < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) \approx 0.9544\,.$$

Зауваження. Функція Лапласа непарна: Ф (-х) = - Ф(х).

Обчислимо ймовірність того, що відхилення нормального розподілу випадкової величини Х від математичного сподівання за модулем менше δ, тобто $P(|x-a|<\delta)$.

$$P(|x-a|<\delta)=P(a-\delta<x<a+\delta)=$$

$$=\Phi\left(\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \qquad (6.21)$$

Якщо прийняти $\delta=n\sigma$, то отримаємо:

$$P(|x-a|<n\sigma)=2\Phi(n). \qquad (6.22)$$

При цьому, якщо $n=3$, $\delta=3\sigma$, тоді:

$$P(|x-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0.49865=0.9973. \qquad (6.23)$$

Правило трьох σ. Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення. Тобто для нормального розподілу практично достовірно, що відхилення від центру розподілу не перевищать 3σ.

Знайдемо тепер функцію нормального розподілу. За визначенням:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-(z-a)^2/2\sigma^2}dz. \qquad (6.24)$$

Для нормованого нормального розподілу:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz \,. \qquad (6.25)$$

Зауважимо, що $F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

Введемо тепер функцію Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-z^2/2} dz \qquad (6.26)$$

та враховуючи на те, що $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ і те, що для N(0; 1) має функцію щільності розподілу φ(x) симетричну відносно нуля, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0.5 \,. \qquad (6.27)$$

Тоді:

$F_0(x)=P(-\infty<X<x)=P(-\infty<X<0)+P(0<X<x)=0.5+\Phi(x)$ (6.28)

Взагалі для нормального закону розподілу:

$$F(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (6.29)$$

Розглянемо функцію F(x).

Властивості:

1) $F(-\infty)=0$;
2) $F(+\infty)=1$;
3) F(x) – неспадна;

4) Для N(0;1) F(-x)=1- F(x).

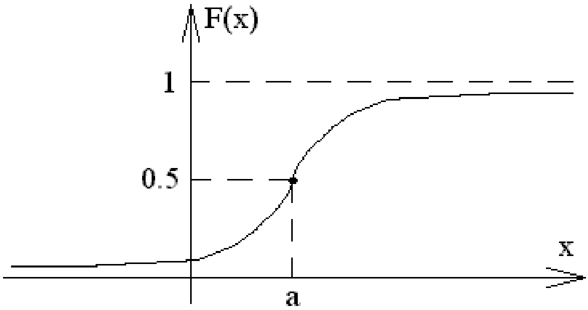

Рис.6.3 Графік функції нормального розподілу

Розділ 6.3 Показниковий розподіл

<u>Визначення.</u> *Показниковим (експоненціальним)* називається розподіл випадкової величини X, який описується наступною щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0.\end{cases} \qquad (6.30)$$

де λ - додатна константа.

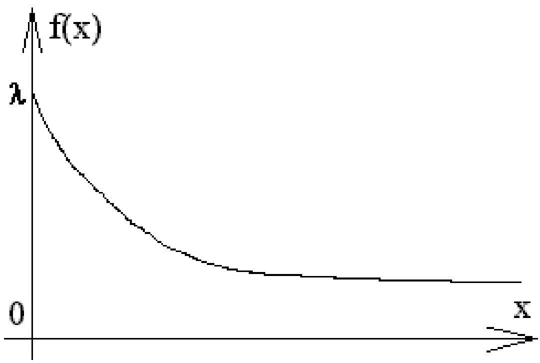

Рис.6.4 Графік щільності показникового розподілу

Прикладом показникового закону може служити випадкова величина X, де X - час між появами двох послідовних подій найпростішого потоку.

Знайдемо функцію розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}. \quad (6.31)$$

Отже, остаточно маємо:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0. \end{cases} \quad (6.32)$$

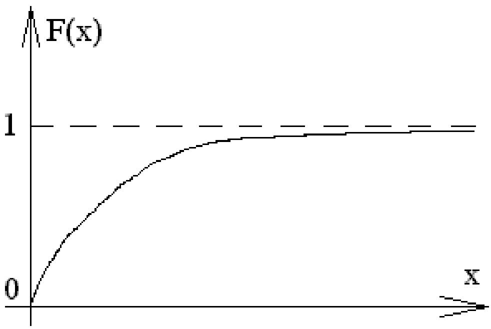

Рис.6.5 Графік функції показникового розподілу

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (a; b). За визначенням маємо:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

(6.33)

Приклад. Випадкова величина розподілена за законом:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ 2e^{-2x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

Знайти P(0.3<x<1).

За умовою задачі λ= 2, тоді за формулою (6.33) отримуємо:

$$P(0.3<x<1)=e^{-(2\cdot 0.3)}-e^{-(2\cdot 1)}\approx 0.41.$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію:

1). Для знаходження математичного сподівання використовуємо інтегрування частинами:

$$M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx=\lambda\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}. \qquad (6.34)$$

2). Аналогічним чином проведемо інтегрування для знаходження дисперсії:

$$Д(X)=\int_0^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (6.35)$$

Звідси,

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (6.36)$$

Приклад. Нехай електроприлад починає працювати в $t_0=0$, і по закінченню часу t відбувається відмова. Позначимо випадкову величину T - тривалість часу безвідмовної роботи.

Функція розподілу F(t)=P(T<t) визначає ймовірність відмови за час t. Отже, ймовірність безвідмовної роботи за час t обчислюється за формулою: R(t)=1-P(T<t)=1-F(t).

Функцію R(t) називають *функцією надійності*. Часто тривалість безвідмовної роботи має показниковий розподіл, тобто $F(t)=1-e^{-\lambda t}$.

Визначення. *Показниковим законом надійності* називають функцію:

$$R(t) = e^{-\lambda t}. \qquad (6.37)$$

Приклад. Час безвідмовної роботи елемента розподілено згідно із законом $f(t)=0.02e^{-0.02t}$. Знайти ймовірність того, що елемент пропрацює 100 годин.

За умовою постійна інтенсивності відмов $\lambda=0.02$, отже:

$$R(100)=e^{-0.02\cdot 100}=e^{-2}\approx 0.13534.$$

ГЛАВА 7 ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Розділ 7.1 Поняття двовимірної випадкової величини

На практиці часто зустрічаються із задачами, в яких результат досліду описується не однією випадковою величиною, а двома або більшою кількістю випадкових величин, що утворюють *систему* випадкових величин. Будемо позначати через (X,Y) двовимірну випадкову величину, кожну з величин X і Y будемо називати *складовою*. Систему двох випадкових величин можна зображати *випадковою точкою* на площині з координатами (X,Y) або ж *випадковим вектором*. Доцільно розрізняти *дискретні* (коли складові X і Y дискретні) і *неперервні* двовимірні випадкові величини.

Приклад 1. Нехай верстат штампує пластинки. Контрольовані розміри X - довжина і Y - ширина складають двовимірну випадкову величину (X,Y).

Приклад 2. Стрілець стріляє по мішені. Координати влучення (X,Y) - двовимірна випадкова величина.

Визначення. *Законом розподілу* дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік всіх можливих значень цієї величини (x_i,y_j) і їх ймовірностей - $p(x_i,y_i)$, де $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Зазвичай закон розподілу задають у вигляді таблиці:

Y \ X	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	…	$p(x_n,y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	…	$p(x_n,y_2)$
…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1,y_m)$	$p(x_2,y_m)$	…	$p(x_n,y_m)$

Таблиця 7.1 Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини

Оскільки події $(X=x_i,\ Y=y_i)$ утворюють повну групу подій, то сума всіх клітин дорівнює одиниці. Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини, можна знайти закони розподілу кожної складової. Так, наприклад, події $(X=x_1,\ Y=y_1)$, $(X=x_1,\ Y=y_2)$, … несумісні, тому ймовірність $p(x_1)$ дорівнює сумі ймовірностей стовпчика «x_1». Аналогічно для Y.

Розділ 7.2 Функція розподілу двовимірної випадкової величини

<u>Визначення.</u> *Функцією розподілу* двовимірної випадкової величини називають функцію F(x,y), що визначає для кожної пари (x,y) ймовірність того, що X<x і при цьому y<Y, тобто F(x,y) = P(X<x, Y<y).

<u>Геометричний зміст:</u> F(x,y) є ймовірність того, що випадкова точка (X,Y) потрапить у нескінченний квадрант лівіше і нижче точки (x,y).

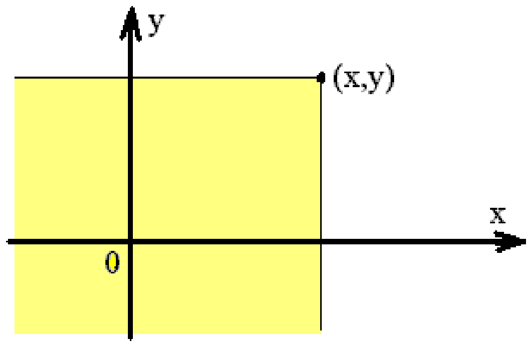

Рис.7.1 Геометричний зміст функції розподілу

<u>Властивості функції розподілу:</u>

1). $0 \le F(x,y) \le 1$. З визначення ймовірності.

2). F (x,y) - неспадна по кожному аргументу, тобто

$F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$ при $x_2 > x_1$;

$F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$ при $y_2 > y_1$.

<u>Доведення.</u> $P(X<x_2, Y<y) = P(X<x_1, Y<y) + P(x_1 \le X < x_2, Y<y)$. Звідси $P(X<x_2, Y<y) - P(X<x_1, Y<y) = P(x_1 \le X < x_2, Y<y)$. Оскільки будь-яка ймовірність невід'ємна, тоді $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$.

3). $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$,

$F(\infty,\infty)=1$.

4). $F(x,\infty)=F_1(x)$,

$F(\infty,y)=F_2(y)$.

Ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник буде обчислюватися за формулою:

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2)=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)] \quad (7.1)$$

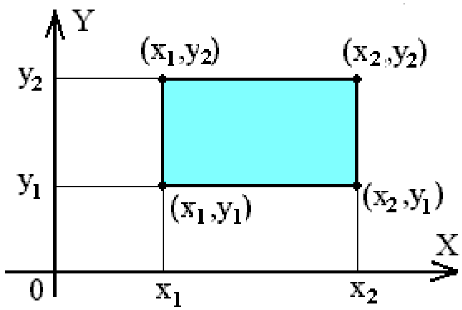

Рис.7.2 Ймовірність попадання випадкової величини в прямокутник

Розділ 7.3 Двовимірна щільність ймовірності

<u>Визначення.</u> *Щільністю спільного розподілу ймовірностей* f(x,y) двовимірної неперервної випадкової величини (X,Y) називають другу змішану частинну похідну від функції розподілу:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\ . \quad (7.2)$$

Приклад. Знайти щільність по відомій функції розподілу

F(x,y)=sinx·siny (0≤x≤π/2; 0≤y≤π/2).

Візьмемо частинну похідну по x, а потім по y, отримаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y \ , \qquad f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y \ .$$

Знаючи щільність спільного розподілу, можна знайти функцію розподілу за формулою:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy \ . \tag{7.3}$$

Лема. Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової точки (X,Y) в область D використовують формулу:

$$P((X,Y) \subset D) = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy \ . \tag{7.4}$$

Властивості щільності розподілу ймовірностей:

1). f(x,y)≥0, оскільки F(x, y) - неспадна.

2). $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

Визначення. *Щільність розподілу однієї зі складових* дорівнює невласному інтегралу з нескінченними границями від щільності розподілу системи за іншою складовою, тобто:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x.y)dy \ , \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x.y)dx \ . \tag{7.5}$$

Приклад. Нехай двовимірна випадкова величина задана щільністю:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/6\pi & при \quad x^2/9+y^2/4<1, \\ 0 & при \quad x^2/9+y^2/4>1. \end{cases}$$

Знайти $f_1(x)$ і $f_2(y)$.

Використовуючи формули (7.5), знаходимо $f_1(x)$:

$$f_1(x)=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}}dy=\frac{2}{6\pi}\int\limits_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}}dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}\ ,$$

отже:

$$f_1(x)=\begin{cases} 2\sqrt{9-x^2}/(9\pi) & при \quad |x|<3, \\ 0 & при \quad |x|\geq 3. \end{cases}$$

Аналогічним чином знаходимо $f_2(y)$:

$$f_2(y)=\begin{cases} \sqrt{4-y^2}/(2\pi) & при \quad |y|<2, \\ 0 & при \quad |y|\geq 2. \end{cases}$$

Визначення. *Математичним сподіванням двовимірної випадкової величини* (X,Y) називається точка (M_X, M_Y) – центр двовимірного розподілу:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy\ , \qquad (7.6)$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy . \qquad (7.7)$$

Розділ 7.4 Умовні закони розподілу

Розглянемо систему дискретної випадкової величини (X,Y). Припустимо, що в результаті випробування величина Y прийняла значення y_1, при цьому X прийме одне зі своїх можливих значень x_i (i=1...n). Позначимо умовну ймовірність того, що $X=x_1$ за умови що $Y=y_1$ через $P(x_1/y_1)$. Ця ймовірність, взагалі кажучи, не дорівнюватиме ймовірності $P(x_1)$.

Визначення. Умовним розподілом складової X при $Y=y_j$ називають сукупність умовних ймовірностей $P(x_1/y_j),...,P(x_n/y_j)$, обчислених в припущенні, що подія $Y=y_j$ вже настала.

У загальному випадку умовні закони розподілу складової X визначаються співвідношенням:

$$P(x_i/y_j) = P(x_i,y_j)/P(y_j) \qquad (7.8)$$

Приклад. Дискретна випадкова величина задана таблицею:

X \ Y	x_1	x_2	x_3
y_1	0.1	0.3	0.2
y_2	0.06	0.18	0.16

Знайти умовний закон розподілу X при $Y=y_1$.

Шуканий закон визначається сукупністю ймовірностей $P(x_1/y_1)$, $P(x_2/y_1)$, $P(x_3/y_1)$. Скористаємося формулою умовної ймовірності двох подій А і В: P(B/A)=P(AB)/P(A) і, взявши до уваги, що $P(y_1)=0.6$ - сума ймовірностей першого рядка, отримаємо:

$P(x_1/y_1) = P(x_1,y_1)/P(y_1) = 0.1/0.6 = 1/6$, $P(x_2/y_1) = 1/2$, $P(x_3/y_1) = 1/3$.

Для перевірки складемо отримані ймовірності: 1/6+1/2+1/3= =1.

Нехай (X,Y) - неперервна двовимірна випадкова величина.

<u>Визначення.</u> *Умовною щільністю розподілу* $\varphi(x/y)$ складової X при даному значенні Y=y називається відношення щільності спільного розподілу f(x,y) до щільності $f_2(y)$:

$$\varphi(x/y) = f(x,y)/f_2(y). \tag{7.9}$$

Аналогічно визначається $\psi(y/x)$:

$$\psi(y/x) = f(x,y)/f_1(x). \tag{7.10}$$

Якщо відома щільність спільного розподілу, тоді:

$$\varphi(x/y) = f(x.y) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \tag{7.11}$$

$$\psi(y/x) = f(x.y) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy. \tag{7.12}$$

Як і будь-яка щільність, умовні щільності мають наступні властивості:

1) $\varphi(x/y) \geq 0$, $\psi(y/x) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x/y)dx = 1$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(y/x)dy = 1$.

<u>Визначення.</u> *Умовним математичним сподіванням* дискретної випадкової величини Y при X=x називають добуток можливих значень Y на їх умовні ймовірності:

$$M(Y/X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j / x) \qquad (7.13)$$

Для неперервної випадкової величини:

$$M(Y/X = x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\psi(y/x)dy \qquad (7.14)$$

<u>Визначення.</u> Умовне математичне сподівання M(Y/x) є функція від x: M(Y/x)=f(x), яку називають функцією регресії Y на X.

Аналогічно визначаються умовне математичне сподівання випадкової величини X і функція регресії X на Y: $M(X/y)=\varphi(y)$.

<u>Приклад.</u> Дискретна випадкова величина задана таблицею:

Y \ X	$x_1=1$	$x_2=3$	$X_3=4$	$X_4=8$
$y_1=3$	0.15	0.06	0.25	0.04
$y_2=6$	0.3	0.1	0.03	0.07

Знайти умовне математичне сподівання Y при $X=x_1=1$.

Знайдемо $p(x_1)$, для чого складемо ймовірності у першому стовпці: $p(x_1)=0.45$. Тепер знайдемо умовний розподіл Y при $X=x_1=1$:

$P(y_1/x_1) = P(x_1,y_1)/P(x_1)=0.15/0.45=1/3$,

$P(y_2/x_1) = P(x_1,y_2)/P(x_1)=0.3/0.45=2/3$.

Нарешті, знаходимо умовне математичне сподівання:

$$M(Y/X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j/x_1)=3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=5.$$

Розділ 7.5 Залежні і незалежні випадкові величини

Теорема. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо щоб функція розподілу системи дорівнювала добутку функцій розподілу складових:

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)\,. \tag{7.15}$$

Доведення необхідності. Нехай X і Y незалежні. Тоді події $X<x$, $Y<y$ незалежні, отже $P(X<x,\ Y<y) = P(X<x)\cdot P(Y<y)$ або $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$.

Доведення достатності. Нехай $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$, звідси $P(X<x,Y<y) = P(X<x)\cdot P(Y<y)$, тобто ймовірність одночасного настання подій $X<x$ і $Y<y$ дорівнює добутку цих подій, отже випадкові події X і Y незалежні.

Наслідок. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежні необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність:

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y). \tag{7.16}$$

Доведення. Даний наслідок зводиться до теореми шляхом інтегрування.

Введемо за аналогією з одновимірною випадковою величиною числові характеристики – початкові і центральні моменти для системи двох випадкових величин.

<u>Визначення.</u> Початковим моментом порядку k, s системи (X,Y) називається математичне сподівання добутку X^k на Y^s:

$$\mu_{k,s}=M(X^k \cdot Y^s) . \quad (7.17)$$

<u>Визначення.</u> Центральним моментом порядку k, s системи (X,Y) називається математичне сподівання добутку $(X-M(x))^k$ на $(Y-M(y))^s$:

$$\nu_{k,s}=M[(X-M(x))^k \cdot (Y-M(y))^s] . \quad (7.18)$$

Напишемо формули, які служать для безпосереднього підрахунку моментів. Для дискретних випадкових величин:

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij} , \quad (7.19)$$

$$\nu_{k,s} = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_x\right)^k \cdot \left(y_j - m_y\right)^s \cdot p_{ij} , \quad (7.20)$$

де $\quad p_{ij} = P\left((X = x_i),(Y = y_j)\right)$

Для неперервних випадкових величин:

$$\mu_{k,s} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy , \quad (7.21)$$

$$\nu_{k,s} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^k (y-m_y)^s f(x,y)dxdy . \quad (7.22)$$

Перші початкові моменти представляють собою математичні сподівання величин X і Y:

$$m_x=\mu_{1,0}=M(X^1Y^0)=M(X), \tag{7.23}$$

$$m_y=\mu_{0,1}=M(X^0Y^1)=M(Y). \tag{7.24}$$

На практиці також широко застосовуються центральні моменти системи другого порядку:

$$Д_x=\nu_{2,0}=M[(x-m_x)^2(y-m_y)^0]=M[(x-m_x)^2], \tag{7.25}$$

$$Д_y=\nu_{0,2}=M[(x-m_x)^0(y-m_y)^2]=M[(y-m_y)^2]. \tag{7.26}$$

Особливу роль грає другий змішаний центральний момент.

Визначення. *Кореляційним моментом* або *коваріацією* випадкових величин X і Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин:

$$K_{xy}=\nu_{1,1}=M[(x-m_x)(y-m_y)] \tag{7.27}$$

На практиці для обчислення коваріації використовуються наступні формули:

а) для дискретних випадкових величин:

$$K_{xy}=\sum_i\sum_j (x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}\ ; \tag{7.28}$$

б) для неперервних випадкових величин:

$$K_{xy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy\ . \tag{7.29}$$

Кореляційний момент служить для характеристики зв'язку між величинами X і Y. Легко переконатися, що кореляційний момент можна записати в наступному вигляді:

$$K_{xy}=M(XY) - M(X)M(Y) \tag{7.30}$$

<u>Теорема.</u> Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

<u>Доведення.</u> Оскільки X і Y незалежні випадкові величини, то і їх відхилення X-M(X) і Y-M(Y) також незалежні. За властивістю математичного сподівання (математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань співмножників) і відхилення (математичне сподівання відхилення дорівнює нулю), отримуємо:

$$K_{xy}=M[(x-m_x)(y-m_y)]=M(x-m_x)\cdot M(y-m_y)=0.$$

За визначенням кореляційного моменту слідує, що він має розмірність, що дорівнює добутку розмірностей X і Y, що незручно, тому що важко порівнювати різні системи випадкових величин. Тому вводять нову числову характеристику – коефіцієнт кореляції.

<u>Визначення.</u> *Коефіцієнтом кореляції* випадкових величин X і Y називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень, тобто:

$$r_{xy}=K_{xy}/(\sigma_x\sigma_y) \tag{7.31}$$

<u>Теорема 1.</u> Абсолютна величина кореляційного моменту двох випадкових величин X і Y не перевищує середнього геометричного їх дисперсій:

$$\left|K_{xy}\right| \le \sqrt{D(X)D(Y)} \qquad (7.32)$$

<u>Доведення.</u> Оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини завжди невід'ємне, тому при будь якому дійсному t буде мати місце співвідношення

$$M\left(t\left(X - M(X)\right) - \left(Y - M(Y)\right)\right)^2 \ge 0 .$$

Звідки маємо

$$t^2 D(X) - 2tK_{xy} + D(Y) \ge 0 .$$

Квадратний тричлен невід'ємний тільки тоді, коли його дискримінант $D \le 0$. З цієї умови отримуємо

$$K_{xy}^2 - D(X)D(Y) \le 0 ,$$

$$\left|K_{xy}\right| \le \sqrt{D(X)D(Y)} .$$

<u>Наслідок.</u> Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці:

$$|r_{xy}| \le 1 . \qquad (7.33)$$

<u>Теорема 2.</u> Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X і Y дорівнює ± 1 тоді і тільки тоді, коли X і Y пов'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$, причому $r_{xy} = 1$ при $a > 0$, $r_{xy} = -1$ при $a < 0$.

<u>Теорема 3.</u> Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $r_{xy} = 0$.

<u>Наслідок.</u> Якщо $r_{xy} \ne 0$, то X і Y залежні випадкові величини.

Визначення. Дві випадкові величини називають *корельованими*, якщо їх коефіцієнт кореляції відмінний від нуля. У протилежному випадку *–некорельованими.*

З некорельованості двох випадкових величин, в загальному випадку, не випливає їх незалежність. Але ж, для нормально розподілених випадкових величин некорельованість тотожна незалежності.

Визначення. *Нормальним законом розподілу на площині* називають розподіл ймовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y), якщо:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\cdot\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]\right). \qquad (7.34)$$

З формули видно, що нормальний закон на площині характеризується наступними величинами: a_1, a_2 - математичні сподівання, σ_x, σ_y - середньо квадратичні відхилення і r_{xy} - коефіцієнт кореляції величин X, Y. Легко побачити, що в разі некорельованості випадкових величин X, Y ці величини є незалежними. Дійсно, якщо $r_{xy}=0$, то $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Розділ 7.6 Лінійна регресія

Розглянемо двовимірну випадкову величину (X,Y), де X і Y - залежні. Представимо одну з величин наближено як лінійну функцію від іншої:

$$Y \approx g(X) = \alpha X + \beta \qquad (7.35)$$

де α і β - невідомі параметри.

Функцію g(X) називають *найкращим наближенням* Y за методом найменших квадратів, якщо $M[Y-g(X)]^2$ приймає мінімальні значення; функцію y=g(X) називають *середньоквадратичною регресією* Y на X.

Теорема. Лінійна середньоквадратична регресія Y на X має вигляд:

$$y - m_y = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - m_x\right). \qquad (7.36)$$

Доведення. Для знаходження коефіцієнтів α і β в (7.35) виходимо з умови $M[Y-g(X)]^2 \to \min$.

$$M(Y - \alpha X - \beta)^2 =$$

$$= M((Y - M(Y)) - \alpha(X - M(X)) + M(Y) - \alpha M(X) - \beta)^2 =$$

$$= \sigma_y^2 - 2\alpha K_{xy} + \alpha^2\sigma_x^2 + (M(Y) - \alpha M(X) - \beta)^2$$

$$= (r_{xy}\sigma_y - \alpha\sigma_x)^2 + (1 - r_{xy}^2)\sigma_y^2 + (M(Y) - \alpha M(X) - \beta)^2,$$

де r_{xy} – коефіцієнт кореляції між X і Y.

З останнього співвідношення випливає, що мінімум буде досягнуто, якщо

$$r_{xy}\sigma_y - \alpha\sigma_x = 0 \text{ і } M(Y) - \alpha M(X) - \beta = 0.$$

Звідки маємо $\alpha = r_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $\beta = M(Y) - \alpha M(X)$.

Підставивши ці параметри в (7.35), рівняння прямої регресії Y на X отримає вигляд:

$$y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + M(Y) - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}M(X),$$

або

$$y - M(Y) = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - M(X)).$$

Коефіцієнт $\beta = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ називають *коефіцієнтом регресії Y на X*.

Аналогічно можна побудувати пряму регресії X на Y:

$$x - M(X) = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - M(Y)). \qquad (7.37)$$

Обидві прямі проходять через точку (m_x;m_y), яку називають *центром спільного розподілу величин Y* і *X*.

ГЛАВА 8 ТЕОРІЯ ОЦІНЮВАННЯ

Розділ 8.1 Закон великих чисел (нерівність Чебишева)

Математичні закони теорії ймовірності пов'язані з масовістю явищ, тобто з великою кількістю однорідних дослідів. Масові явища мають наступну властивість: конкретні особливості кожного окремого випадкового явища майже не впливають на середнє значення результатів маси таких явищ. Звідси «фізичний зміст» закону великих чисел: при великій кількості випадкових явищ їх результат не випадковий. Для практики важливим є значення умов, при яких результат маси випадкових подій не випадковий. Ці умови і вказуються в теоремах, що носять загальну назву - закон великих чисел.

Нерівність Маркова. Якщо випадкова величина приймає невід'ємне значення і має математичне сподівання $M(X)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}, \tag{8.1}$$

або рівносильне йому

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Приклад 1. Середня кількість викликів на телефонну станцію становить 200 за одну годину. Оцінити ймовірність того, що за наступну годину кількість викликів буде менш ніж 300.

За умовою задачі $M(X) = 200$, $\varepsilon = 300$. Отже, $P(X < 300) \geq 1 - \frac{200}{300} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$.

Нерівність Чебишева. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за модулем менше додатного числа ε, не менше, ніж $1\text{-Д}(X)/\varepsilon^2$, тобто:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1\text{-Д}(X)/\varepsilon^2. \tag{8.2}$$

Доведення. За означенням протилежних подій:

$P(|X-M(X)| < \varepsilon) + P(|X-M(X)|\geq\varepsilon) = 1$,

звідси як наслідок:

$P(|X-M(X)|<\varepsilon) = 1 - P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$.

Обчислимо $P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)$.

За визначенням, для дискретної випадкової величини дисперсія дорівнює:

$$Д(X)=[x_1-M(X)]^2p_1+[x_2-M(X)]^2p_2+\ldots+[x_n-M(X)]^2p_n>0.$$

Відкинемо ті складові, для яких $|x_i-M(X)|<\varepsilon$. Для визначеності будемо вважати, що ця нерівність виконується для $x_1,\ldots, x_k$. Тоді:

$$Д(X) \geq [x_{k+1}-M(X)]^2p_{k+1} + \ldots + [x_n-M(X)]^2p_n,$$

причому для кожного $j = k+1, \ldots, n$: $|x_j-M(X)|\geq\varepsilon$. Після піднесення до квадрату, отримаємо $|x_j-M(X)|^2\geq\varepsilon^2$, отже:

$$Д(X) \geq \varepsilon^2p_{k+1} + \ldots + \varepsilon^2p_n=\varepsilon^2(p_{k+1} + \ldots + p_n).$$

За теоремою додавання ймовірностей сума $(p_{k+1} + \ldots + p_n)$ є ймовірність того, що X прийме значення $x_{k+1}, \ldots, x_n$, для яких $|x_j-M(X)|\geq\varepsilon$. Тобто:

$$p_{k+1} + \ldots + p_n=P(|X-M(X)|\geq\varepsilon).$$

Тоді:

$$Д(X) \geq \varepsilon^2\cdot P(|X-M(X)|\geq\varepsilon), \quad \text{або} \quad P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq Д(X)/\varepsilon^2,$$

або

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon) \geq 1-Д(X)/\varepsilon^2.$$

Аналогічне доведення і для неперервних випадкових величин.

Приклад 2. Дана випадкова величина з математичним сподіванням m_x і σ_x^2. Оцінити ймовірність того, що $|X-m_x|\geq3\sigma_x$.

За нерівністю Чебишева при $\varepsilon=3\sigma_x$

$$P(|X-m_x|\geq3\sigma_x)\leq Д_x/(9\sigma_x^2)=1/9=0{,}1111\ldots .$$

Зауваження. Нерівність Чебишева дає тільки верхню границю ймовірності даного відхилення (вище не може бути ні для якого закону розподілу). Ми вже бачили, що для нормального закону: $P(|X-M(X)|\geq 3\sigma) \approx 0.0027$. Підрахуємо цю ймовірність для інших законів:

1). Для рівномірного на [a, b]:

$P(|X-M(X)|<3\sigma) = P(M(X)-3\sigma<X<M(X)+3\sigma)$,

$M(X)=(a+b)/2, \quad \sigma=(b-a)/2\sqrt{3}$.

Доведемо, що 1) $M(X)+3\sigma>b$, 2) $M(X)-3\sigma<a$, для чого підставимо значення M(X) і σ.

1) $(a+b)/2+3(b-a)/2\sqrt{3}-b>0$;
$a+b+b\sqrt{3}-a\sqrt{3}-2b>0$;
$(b-a)(\sqrt{3}-1)>0$ – очевидно.

2) $(a+b)/2-3(b-a)/2\sqrt{3}-a<0$;
$a+b-b\sqrt{3}+a\sqrt{3}-2a<0$;
$(b-a)(1-\sqrt{3})<0$ – очевидно.

За визначенням рівномірного розподілу: $F(m_x+3\sigma)=1$, $F(m_x-3\sigma)=0$. Звідки $P(|X-M(X)|<3\sigma) = 1$.

2). Для показникового розподілу:

$P(|X-M(X)|<3\sigma) = F(M(X)+3\sigma)-F(M(X)-3\sigma)=$

$=F(1/\lambda+3/\lambda)-F(1/\lambda-1/\lambda)=F(4/\lambda)=1 - \exp(-\lambda\cdot 4/\lambda)=1-\exp(-4)\approx 0.018.$

Як ми бачимо, значення випадкової величини вкрай рідко виходять за межі $m_x\pm 3\sigma$. Тому застосовують «правило трьох сигм» для будь-якого закону розподілу: абсолютна величина відхилення від математичного сподівання не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення.

Приклад 3. Імовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює $1/4$. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появи події перебуває в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 випробувань.

$$M(X) = np = 800 \cdot \frac{1}{4} = 200, \; D(X) = npq = 200 \cdot \frac{3}{4} = 150 .$$

Знайдемо максимальну різницю між числом настання події й математичним сподіванням $\varepsilon = 250 - 200 = 50$.

За нерівністю Чебишева маємо

$$P(|X - 200| < 50) \geq 1 - \frac{150}{50^2} = 0{,}94.$$

Приклад 4. Ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює 0,4. Оцінити ймовірність того, що при 1000 випробуваннях відхилення відносної частоти настання події A від її ймовірності буде менш ніж 0,1.

Визначимо математичне сподівання і дисперсію появи події A в одному випробуванні: $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = 0{,}4$, $D(X) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = pq = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$.

Математичне сподівання і дисперсія появи події A в серії з n випробувань:

$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}4 = 400$,

$D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 240$.

За нерівністю Чебишева маємо P(|X-M(X)|<ε) ≥ 1-Д(X)/ε^2.

Тоді P(|X-*np*|<ε) ≥ 1- *npq*/ε^2, або P(|$\frac{X}{n}$-*p*|<ε/n) ≥ 1- *npq*/ε^2.

Оскільки необхідно оцінити $P(|\frac{X}{n}-p|<0,1)$, тому $\varepsilon/n=0,1$. Звідки $\varepsilon=100$ і

$P(|\frac{X}{n}-p|<0,1) \geq 1-240/(100)^2 = 1-0,024=0,976.$

Розділ 8.2 Теорема Чебишева

Розв'яжемо допоміжну задачу.

Задача. Дана випадкова величина X з математичним сподіванням $M(X)=m_x$ і дисперсією $Д(X)=Д_x$. Над цією випадковою величиною проводиться n незалежних дослідів і знаходиться середнє арифметичне результатів. Знайти числові характеристики цього середнього арифметичного.

Нехай x_i - значення величини X в i-му досліді. Кожна з величин x_i - випадкова величина, розподілена за тим самим законом, що і X. Розглянемо $Y=\sum x_i/n$. За означенням математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$M_y=M[Y]= M[\sum x_i/n]= \sum M[x_i]/n=m_x n/n=m_x \qquad (8.3)$$

$$Д_y=\sum Д[x_i]/n^2=Д_x/n \qquad (8.4)$$

Таким чином, математичне сподівання не залежить від числа дослідів, дисперсія ж необмежено спадає і може бути як завгодно малою, звідки випливає, що середнє арифметичне при великому числі дослідів - невипадкова величина.

Визначення. Кажуть, що послідовність випадкових величин X_n *сходиться по ймовірності до величини a*, якщо для будь-якого ε> 0 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| < \varepsilon\right) = 1$. Позначимо це як $X_n \xrightarrow{P} a$, $n \to \infty$.

<u>Теорема (Чебишева).</u> Нехай $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots$- послідовність попарно незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $M(X_i) = a_i < \infty$ і дисперсіями, обмеженими однією сталою $D(X_i) \le C$. Тоді

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty. \quad (8.5)$$

Таким чином, теорема Чебишева стверджує, що якщо розглядається досить велике число незалежних випадкових величин, що мають обмежені дисперсії, то майже достовірним можна вважати подію, що полягає в тому, що <u>відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їхніх математичних сподівань буде по абсолютній величині як завгодно малим</u>.

<u>Доведення.</u> Введемо в розгляд нову випадкову величину – середнє арифметичне випадкових величин:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Знайдемо математичне сподівання $M(\overline{X})$.

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n}$$

Застосуємо до $\overline{X}$ нерівність Чебишева:

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}$$, або

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq$$

$$\geq 1-\frac{D\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}. \qquad (*)$$

Використовуючи властивості дисперсії, отримаємо:

$$D\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2}.$$

Оскільки за умовою теореми $D(X_i)\leq C$, тому

$$\frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2}\leq\frac{C+C+....+C}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Звідки $D\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\leq\dfrac{C}{n}$.

За допомогою отриманого співвідношення посилимо нерівність (*):

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq$$

$$\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Далі переходимо до границі при $n\to\infty$, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\geq 1$$

Враховуючи, що ймовірність не може бути більшою за 1, остаточно отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\cdots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Теорема доведена.

<u>Наслідок.</u> Нехай X_1, X_2, ..., X_n, ...- послідовність попарно незалежних випадкових величин с однаковими математичними сподіваннями $M(X_i)=a<\infty$ і дисперсіями, обмеженими однією сталою $D(X_i)\le C$. Тоді

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-a\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

Це твердження підтверджує правило середнього арифметичного. Нехай вимірюють деяку фізичну величину a. Здійснивши n незалежних вимірювань, ми одержимо n значень цієї величини. Кожне значення є випадковою величиною. При цьому вважаємо, що математичне сподівання кожної із цих величин дорівнює а: $M(X_i)=a$. Ця умова означає, що у вимірах виключені систематичні помилки. Також вважаємо, що дисперсії обмежені. Це означає, що виміри проводяться з деякою гарантованою точністю. При виконанні цих умов при досить великій кількості вимірів з імовірністю як завгодно близької до одиниці, середнє арифметичне результатів вимірювань буде як завгодно мало відрізнятися від вимірюваної величини.

Розглянемо кілька наслідків з теореми Чебишева.

Теорема (Бернуллі). Нехай μ - число появ події А при n послідовних незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність настання події А постійна й дорівнює р. Тоді

$$\frac{\mu}{n} \xrightarrow{P} p\,,\ n \to \infty \tag{8.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1\,.$$

Тобто як завгодно близькою до одиниці є ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірності р по абсолютній величині буде як завгодно малим, якщо число випробувань велике.

Доведення. Розглянемо незалежні випадкові величини X_i - число появ події А в i-ому випробуванні. Закон розподілу цих величин:

0	1
q	p

До даних величин можна застосувати теорему Чебишева. Попарна незалежність величин X_i випливає з того, що випробування незалежні. Дисперсія будь-якої величини X_i дорівнює добутку pq; а тому що p+q=1, то pq≤1/4. Отже, дисперсії обмежені числом 1/4.

Застосуємо наслідок з теореми Чебишева:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1\,.$$

Оскільки M(X_i) = p, i=1,…,n, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1\,.$$

З появою події А кожна з величин X_i приймає значення рівне одиниці, тому $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \mu$, де μ - число появ події у n випробуваннях. З останньої рівності отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема доведена.

<u>Теорема (Пуассона)</u>. Якщо проводиться n незалежних дослідів і ймовірність появи події А в і-ому досліді дорівнює p_i, то при збільшенні n частота події А збігається по ймовірності до середнього арифметичному ймовірностей p_i .

Узагальнення закону великих чисел на випадок залежних величин належить Маркову.

<u>Теорема (Маркова)</u>. Якщо є залежні випадкові величини X_1, …, X_n з математичними сподіваннями $M(X_i)=a_i$ і якщо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n^2} = 0,$$

то середнє арифметичне значення спостережуваних випадкових величин X_1, …, X_n збігається по ймовірності до середнього арифметичного їхніх математичних сподівань, тобто

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \; n \to \infty.$$

Розділ 8.3 Центральна гранична теорема

Всі форми закону великих чисел стверджують одне: факт збіжності за ймовірністю тих чи інших випадкових величин до певних сталих. У жодній з форм закону великих чисел ми не маємо справи з законами розподілу випадкових величин. Граничні закони розподілу становлять предмет іншої групи теорем.

Центральна гранична теорема. Якщо $X_1, \ldots, X_n$ – незалежні випадкові величини, що мають один і той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, то при необмеженому збільшенні числа n закон розподілу суми $Y_n = \sum X_k$ необмежено наближається до нормального.

При цьому нормована сума

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

прямує при $n \to \infty$ до функції розподілу стандартної нормованої випадкової величини:

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Доведемо наслідок цієї теореми, відомий як теорема Лапласа.

Теорема (Лапласа). Якщо проводиться n незалежних дослідів, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p, то справедливим є співвідношення:

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \ , \qquad (8.7)$$

де Y - число появи події A в n досвідах, q=1-p, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ - нормальна функція розподілу (функція Лапласа).

Доведення. Представимо випадкову величину Y у вигляді суми: $Y=\sum x_i$, де x_i - число появ події A в i-му досліді. За центральною граничною теоремою, при великому n закон розподілу Y близький до нормального. Тоді випадкова величина $Z=(Y-m_y)/\sigma_y$ розподілена за нормальним законом N(0,1), і справедливою є формула: $P(\alpha<Z<\beta)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$. Але ми довели раніше, що $m_y=np$, а $Д_y=npq$. Отже, підставляючи значення Z, m_y, $Д_y$ отримаємо формулу (8.7).

З формули (8.7) безпосередньо випливає, що для обчислення ймовірності $P(k_1 < Y < k_2)$ використовуємо формулу:

$$P(k_1 < Y < k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') \, , \qquad (8.8)$$

де $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Приклад. По смузі укріплень скидається 100 серій бомб. При скиданні однієї серії математичне сподівання числа влучень дорівнює 2, середнє квадратичне відхилення σ = 1,5. Знайти наближено ймовірність того, що в 100 серіях в смугу потрапить від 180 до 220 бомб.

Представимо загальне число влучень як суму влучень в окремих серіях. Умови центральної граничної теореми дотримані, тому що x_i розподілені однаково. Будемо вважати, що n=100 досить велике, щоб застосовувати центральну граничну теорему. Маємо: $m_x=\sum m_i=200$ $\sum Д_i=\sum 1.5^2=225$. За формулою (8.8) маємо:

$$P(180<x<220)=\Phi((220-200)/\sqrt{225})-\Phi((180-200)/\sqrt{225})\approx 0.82.$$

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ГЛАВА 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ВИБІРКОВОГО МЕТОДУ ТА ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Розділ 1.1 Вибірковий метод

Задачами математичної статистики є:

1) вказати способи збору і угрупування статистичних даних;

2) розробити методи аналізу статистичних даних в залежності від цілей дослідження. До даної задачі відносяться:

а) оцінка функції і параметрів розподілу;

б) перевірка статистичних гіпотез.

Нехай потрібно вивчити сукупність однорідних об'єктів, щодо деякої якісної (для групи деталей - стандартність) або кількісної (контрольований розмір) ознаки, що характеризує ці об'єкти. Іноді проводять суцільне обстеження, тобто обстеження кожної деталі, але частіше відбирають обмежене число.

Визначення. *Вибірковою сукупністю (вибіркою)* називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Визначення. *Генеральною сукупністю* називають ту сукупність, з якої вилучається вибірка. *Обсяг (об'єм) сукупності* - число об'єктів.

Вибірки поділяють на:

1) *повторна* - відібраний об'єкт перед відбором наступного повертається в генеральну сукупність;

2) *безповторна* - відібраний об'єкт не повертається.

На практиці зазвичай користуються вибіркою безповторною і *репрезентативною* - тобто тією, яка повинна чітко представляти пропорції генеральної сукупності. За законом великих чисел можна стверджувати, що вибірка репрезентативна, якщо її здійснити випадково.

На практиці застосовують:

1) відбір без розчленування генеральної сукупності на частини:

а) простий випадковий безповторний відбір;

б) простий випадковий повторний відбір;

2) відбір з поділом генеральної сукупності на частини:

а) типовий;

б) механічний;

в) серійний.

<u>Визначення.</u> *Типовий відбір* - відбір, при якому об'єкти відбирають з кожної типової частини генеральної сукупності.

<u>Приклад.</u> Деталі виготовляються на верстатах, є верстати різного ступеня зношеності, відбирають по k деталей від кожного верстата.

<u>Визначення.</u> *Механічний відбір* - відбір, при якому генеральна сукупність ділиться на стільки груп, скільки необхідно об'єктів. (Наприклад, якщо треба 5%, то відбирають кожну двадцяту деталь.)

<u>Визначення.</u> *Серійний відбір* - відбір, при якому з генеральної сукупності об'єкти відбираються серіями. (Наприклад, якщо однакові верстати, то обстежуються всі деталі будь-якого верстата.)

Нехай з генеральної сукупності вилучено вибірку, причому x_1 спостерігалося n_1 разів, ..., x_k - n_k разів. ($\sum n_i=n$ – об’єм вибірки).

Визначення. Спостережувані значення x_i називаються *варіантами*, а послідовність варіант у зростаючому порядку - *варіаційним рядом*.

Визначення. Числа спостережень n_i називаються *частотами*, а відносини $w_i = n_i / n$ - *відносними частотами (частості)*.

Визначення. *Статистичним розподілом* вибірки називається перелік варіант і відповідних їм частот (або частостей).

Визначення. *Емпіричною функцією розподілу* називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного x відносну частоту події $X<x$, тобто $F^*(x) = n_x /n$, де n_x - число варіант, які менші ніж x, n - обсяг вибірки.

Функцію розподілу генеральної сукупності $F(x)$ називають теоретичною функцією розподілу. За теоремою Бернуллі випливає, що при великих значеннях n відносна частота події прямує до ймовірності, отже:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right] = 1. \tag{1.1}$$

Таким чином, функція $F^*(x)$ має всі властивості функції $F(x)$.

Приклад. Побудувати функцію розподілу за наступним статистичним рядом.

Варіанти x_i	2	6	10	Σ
Частоти n_i	12	18	30	60
Частості w_i	0.2	0.3	0.5	1

Найменша величина варіанти $x_1=2$, отже $F^*(x)=0$ при всіх $x \le 2$. Значення $x<6$ спостерігалося 12 разів, отже $F^*(x)=0{,}2$ при $2<x\le 6$. Значення $x<10$ спостерігалися 12 + 18 разів, отже значення $F^*(x)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$ при $6<x\le 10$. Так як $x=10$ - найбільша варіанта, то $F^*(x)=1$ при $x> 10$.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 2 \\ 0.2 & при\ 2<x\le 6 \\ 0.5 & при\ 6<x\le 10 \\ 1 & при\ x>10 \end{cases}$$

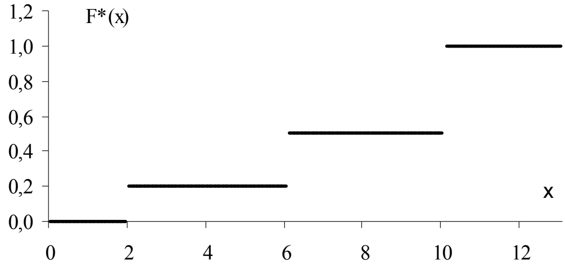

Рис.1.1 Графік функції розподілу $F^*(x)$

Для наочності будують різні графіки, зокрема полігон і гістограму.

Визначення. *Полігоном частот* називають ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами (x_1,n_1), ..., (x_k, n_k). *Полігоном частостей* називають ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами (x_1,w_1), ..., (x_k,w_k).

При великому обсязі вибірки її елементи об'єднують у групи, отримуючи *інтервальний статистичний ряд*. Для цього інтервал розбивають на m часткових інтервалів, які не перетинаються довжиною h і знаходять для кожного інтервалу n_i і w_i.

<u>Визначення.</u> *Гістограмою частот* називають ступінчату фігуру, основою кожного прямокутника якої служать часткові інтервали довжиною h, а висоти - n_i/h.

<u>Визначення.</u> *Гістограма частостей* - це ступінчата фігура, основою кожного прямокутника якої служать часткові інтервали h, а висоти - $w_i/h=n_i/(nh)$.

Площа гістограми частот дорівнює n, гістограми частостей - 1, і тому це є статистичний аналог функції щільності розподілу неперервної випадкової величини.

<u>Приклад.</u> Побудувати гістограму частот і частостей за наступним інтервальним рядом.

Інтервал	2-5	5-8	8-11	11-14
Частоти n_i	9	10	25	6
Частості w_i	0.18	0.2	0.5	0.12

$h=3$

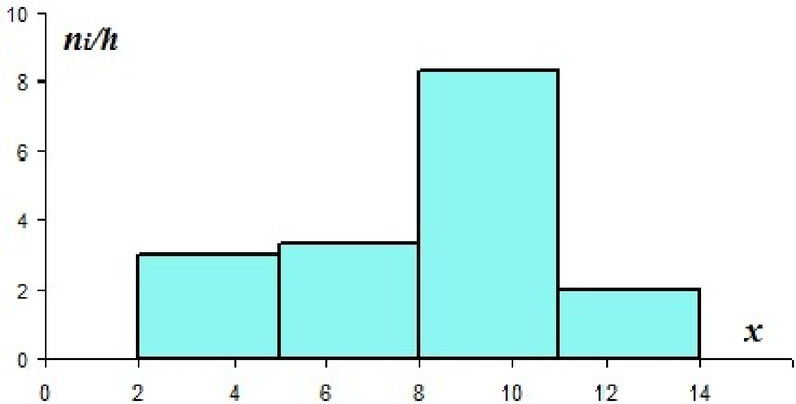

Рис.1.2 Гістограма частот

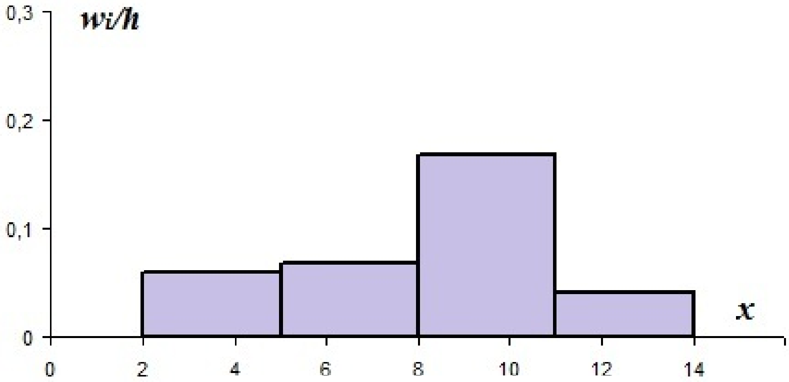

Рис.1.3 Гістограма частостей

Побудована гістограма дає наочне і дуже точне уявлення про розподіл випадкової величини по всій генеральної сукупності за умови, що вибірка є репрезентативною.

Розділ 1.2 Статистичні оцінки параметрів розподілу

Визначення. Статистичною оцінкою $\tilde{\theta}$ невідомого параметра θ теоретичного розподілу називають функцію від спостережуваних випадкових величин. Це функція повинна відповідати таким вимогам:

1) *Незміщеність*, тобто вибирається оцінка $\tilde{\theta}$, математичне сподівання якої дорівнює параметру, який оцінюється, для будь-якого об'єму вибірки: $M(\tilde{\theta})=\theta$. Ця вимога допомагає уникнути отримання систематичних помилок (постійного завищення або заниження).

2) *Ефективність*, тобто будується оцінка, яка при заданому об'ємі вибірки має мінімальну дисперсію: $Д(\tilde{\theta})\to \min$.

3) *Спроможність*, тобто отримана оцінка при n→∞ прямує до параметру θ, який оцінюється: $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\tilde{\theta}-\theta|=0\}=1$.

Як оцінку для математичного сподівання використовують середнє арифметичне спостережуваних значень (має назву - *вибіркове середнє*):

$$\tilde{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ , або } \tilde{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i n_i \text{ .} \qquad (1.2)$$

Неважко переконатися, що ця оцінка є спроможною. Відповідно до закону великих чисел при збільшенні n величина $\tilde{m}$ збігається по ймовірності до m. Переконаємося, що ця оцінка незміщена. Будемо розглядати x_1, ..., x_n як незалежні, однаково розподілені випадкові величини, причому їх закон розподілу такій, як і у генеральної сукупності. Тоді: $M(\tilde{m})=\sum M(x_i)/n=mn/n=m$.

Оцінкою моди μ_0 є елемент вибірки, що зустрічається з максимальною частотою.

Оцінкою медіани μ_e називається число, яке ділить варіаційний ряд на дві частини, що містять рівне число елементів. Якщо об'єм вибірки n=2k+1 - непарний, тоді $\tilde{\mu}_e=x_{k+1}$; якщо n=2k - парне число, тоді $\tilde{\mu}_e=\frac{1}{2}\left(x_k+x_{k+1}\right)$.

Визначення. *Вибірковою дисперсією $Д_в$* називається середнє арифметичне квадратів відхилення спостережуваних величин від їх середнього, тобто:

$$Д_в=\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\tilde{m}\right)^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-2\tilde{m}\frac{\sum x_i}{n}+\tilde{m}^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\tilde{m}^2 . \qquad (1.3)$$

Перевіримо спроможність і незміщеність. У виразу (1.3) перший член є середнім арифметичним n спостережуваних значень випадкової величини x^2; за законом великих чисел він сходиться по ймовірності до $M(x^2)=\mu_2(x)$ - другого початкового моменту. Другий член сходиться по ймовірності до величини m^2. Тоді вся величина сходиться по ймовірності до $\mu_2(x)-m^2=Д$, звідки слідує спроможність.

Представимо вибіркову дисперсію у наступному вигляді:

$$Д_в=\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\frac{\sum x_i^2}{n^2}-2\frac{\sum\limits_{i<j} x_i x_j}{n^2}=$$

$$=\frac{n-1}{n^2}\sum x_i^2-2\frac{\sum\limits_{i<j} x_i x_j}{n^2} \qquad (1.4)$$

Знайдемо математичне сподівання отриманої величини (1.4):

$$M(Д_в)=\frac{n-1}{n^2}\sum M(x_i^2)-\frac{2}{n^2}\sum_{i<j} M(x_i x_j) \qquad (1.5)$$

Оскільки дисперсія не залежить від того, в якій точці вибрати початок координат, виберемо його в точці m, тоді:

$$M\left(x_i^2\right)=M\left((x_i-m)^2\right)=Д, \qquad \sum M\left(x_i^2\right)=nД \qquad (1.6)$$

З умови незалежності дослідів:

$$M\left(x_i x_j\right)=M\left((x_i-m)(x_j-m)\right)=K_{ij}=0\ . \qquad (1.7)$$

Підставляючи (1.6) і (1.7) у вираз (1.5), отримуємо: $M(Д_в)=(n-1)Д/n$. Таким чином, якщо використовувати подібну оцінку, то отримаємо систематичну помилку в меншу сторону. Тому в якості оцінки для дисперсії використовують величину $S^2 = \widetilde{Д}$ (*виправлена дисперсія*), яка обчислюється за формулою:

$$\widetilde{Д} = \frac{n}{n-1} Д_в = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \widetilde{m})^2 . \tag{1.8}$$

На практиці іноді використовують цю формулу у вигляді:

$$\widetilde{Д} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \widetilde{m}^2 \right). \tag{1.9}$$

Для оцінки середнього квадратичного відхилення використовують величину $\widetilde{\sigma} = \sqrt{\widetilde{Д}}$, або $S = \sqrt{\widetilde{Д}}$ (*виправлене середнє квадратичне відхилення*).

Приклад 1. Обчислимо дисперсію для вибірки об'єму n=10: 3, 7, 7, 0, 2, 1, 2, 3, 5, 4 за умови, що вибірка отримана з генеральної сукупності: а) з невідомим середнім; б) з відомим середнім m=3.5.

Знайдемо суму всіх значень вибірки: $\sum x_i=34$, суму їх квадратів: $\sum x_i^2=166$ і середнє арифметичне: $\bar{x}$ =34/10=3.4. У випадку а) отримаємо: $\widetilde{Д} = \frac{10}{9}\left(\frac{166}{10} - 3{,}4^2\right)$=5.6; у випадку б) якщо m відомо, використовуємо невиправлену формулу: $\widetilde{Д}$=(166-2·3.5·34+10·3.5^2)/10=5.05.

Приклад 2. Аналізується зміст Cd у пробі. Отримано наступні практичні результати у п'ятьох дослідах:

г/мл	1.2	3.4	1.8	2.6	3.0

Визначити вміст Cd в пробі і помилку методу вимірювання.

$$\bar{x} = 2.4\,, \qquad S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1.2^2 + 1^2 + 0.6^2 + 0.2^2 + 0.6^2}{5-1}} \approx 0.894\,.$$

Розділ 1.3 Точкові та інтервальні оцінки

Визначення. *Точковою* називають оцінку, яка визначається одним числом.

Всі розглянуті вище оцінки - точкові. При вибірці малого об'єму точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра.

Визначення. *Інтервальною* називають оцінку, яка визначається двома числами - кінцями інтервалу.

Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність і надійність оцінок.

Нехай за даними вибірки знайдена оцінка $\tilde{\theta}$. Складемо такий вираз: $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$. Очевидно, що чим менше $\delta > 0$, тим оцінка точніше. Таким чином, число $\delta > 0$ характеризує точність оцінки. Однак статистичні методи не можуть стверджувати, що подібний вираз вірний.

Визначення. *Надійністю (довірчою ймовірністю)* оцінки θ по $\tilde{\theta}$ називають ймовірність γ, при якій виконується нерівність $|\theta - \tilde{\theta}| < \delta$, тобто:

$$P(|\theta-\tilde{\theta}|<\delta)=\gamma=1-\alpha\ , \tag{1.10}$$

де α - *рівень значущості*.

Визначення. *Довірчим* називають *інтервал* ($\tilde{\theta}$ -δ; $\tilde{\theta}$ +δ), який покриває заданий параметр із заданою надійністю γ.

Приклад 1. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини при відомому середньому квадратичному відхиленні σ.

1). Знайдемо вибіркову середню $\bar{x}=\tilde{m}$. Будемо розглядати вибіркову середню $\bar{x}$ як випадкову величину $\bar{X}$, а значення ознаки x_1, ..., x_n - як однаково розподілені випадкові величини. Математичне сподівання кожної з них дорівнює a, середнє квадратичне відхилення - σ. Параметри нормально розподіленої випадкової величини $\bar{X}$ такі: $M(\bar{X})=a$, $\sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n}$ (за властивістю математичного сподівання і дисперсії).

Вимагатимемо, щоб виконувалося співвідношення: $P(|\bar{X}-a|<\delta)=\gamma$. За властивістю нормального розподілу $P(|x-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)$, отже, замінюючи x на $\bar{X}$ і σ на $\sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n}$, отримаємо: $P(|\bar{X}-a|<\delta)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t)$, де $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$, отже $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, тоді можемо записати:

$$P(|\bar{X}-a|<t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma\ . \tag{1.11}$$

Отримаємо довірчий інтервал:

$$P(\bar{X}-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{X}+t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t)=\gamma\ . \tag{1.12}$$

Зміст: з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал ($\overline{X}$ -tσ/ $\sqrt{n}$; $\overline{X}$ +tσ/ $\sqrt{n}$) покриває невідомий параметр **a** з точністю δ=tσ/ $\sqrt{n}$.

Число t визначається з рівності Φ(t)=γ/2, значення Φ(t) знаходиться за таблицею функції Лапласа.

Приклад 2. Випадкова величина X має нормальний розподіл N(a; σ=3). Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання за вибірковим середнім, якщо об'єм вибірки n=36, а вибіркове середнє $\overline{x} = 4.1$. Рівень значущості α=0.05.

Знайдемо t з співвідношення 2Φ(t)=1-α, отримаємо Φ(t)=0.475. За таблицею знаходимо t=1.96. Тепер знайдемо точність оцінки: δ=tσ/ $\sqrt{n}$ =1.96·3/ $\sqrt{36}$ =0.98. Отже, отримуємо наступний довірчий інтервал: a∈(4.1-0.98; 4.1+0.98), a∈(3.12;5.08).

Розглянемо нормовану випадкову величину N=(0;1).

Визначення. U_p - *квантиль* - це значення випадкової величини U, для якого виконується співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{U_P} f(u)du = p, \tag{1.13}$$

або

$$P(-\infty<U<U_p)= p, \tag{1.14}$$

або

$$F(U_p)= p . \tag{1.15}$$

де F - функція нормального нормованого розподілу.

Тоді довірчий інтервал буде мати вигляд:

$$P(-U_{1-\alpha/2}<U<U_{1-\alpha/2})=1-\alpha. \qquad (1.16)$$

Розглянемо ряд задач, які знаходять довірчі інтервали.

Задача1. Нехай X - нормально розподілена випадкова величина з відомим σ. Сформуємо випадкову величину виду:

$$U=\frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n}\,, \qquad (1.17)$$

математичне сподівання і дисперсія якої відповідно дорівнюють:

$$M(U)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}M(\overline{x}-m)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m-m)=0\ ; \qquad (1.18)$$

$$Д(U)=\frac{n}{\sigma^2}Д(\overline{x}-m)=\frac{n}{\sigma^2}\left(Д(\overline{x})+Д(m)\right)=$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}Д\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)=\frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{n\sigma^2}{n^2}=1\ . \qquad (1.19)$$

Підставляючи U у формулу (1.16), отримуємо:

$$P(-U_{1-\alpha/2}< U \le U_{1-\alpha/2}) = P(-U_{1-\alpha/2}< \frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n} \le U_{1-\alpha/2}) =$$

$$= P(\overline{x} - U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < m \le \overline{x} + U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha \qquad (1.20)$$

Значення функції $U_{1-\alpha/2}$ табульовані і знаходяться з таблиці подвоєної функції Лапласа, оскільки:

$$P(-U_{1-\alpha/2} < U \le U_{1-\alpha/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-U_{1-\alpha/2}}^{U_{1-\alpha/2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{U_{1-\alpha/2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi'\left(U_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \ .$$

Наведемо найбільш поширені значення квантилей.

Довірча ймовірність $1-\alpha$	Значення квантиля $U_{1-\alpha/2}$
0,9	1,64
0,95	1,96
0,99	2,58
0,9973	3.00
0,999	3,37

Таблиця 1.1 Значення квантилей

Визначення. *Числом ступенів вільності f* називається різниця між об’ємом вибірки n і числом накладених на неї зв'язків, де під зв'язком розуміють якийсь оцінюваний параметр.

Задача 2. Нехай виконані умови задачі 1 з невідомим σ. Сформуємо статистику:

$$T = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} \ , \qquad (1.21)$$

яка має *розподіл Ст'юдента* з f = n-1 ступенями вільності.

$$1-\alpha = P(-t_{1-\alpha/2} < T \le t_{1-\alpha/2}) = P(-t_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} \le t_{1-\alpha/2}) =$$

$$= P(\bar{x} - t_{1-\alpha/2} S/\sqrt{n} \le m < \bar{x} + t_{1-\alpha/2} S/\sqrt{n}). \qquad (1.22)$$

Значення $t_{1-\alpha/2}$ табульовані по $(f;\alpha)$.

Зауваження 1. Нехай $X_1, ..., X_n$ - незалежні випадкові величини з нормальним законом розподілу N(0;1). Тоді сума квадратів цих величин $X^2=\sum X_i^2$ має *розподіл* χ^2 (хі-квадрат) з f = n ступенями вільності.

Зауваження 2. Нехай Z - випадкова величина з нормованим нормальним розподілом N(0;1), V - незалежна від Z випадкова величина, яка розподілена за законом χ^2 з k ступенями вільності. Тоді випадкова величина $T = Z\Big/\sqrt{V/k}$ має *розподіл Ст'юдента* з f = k ступенями вільності.

Обидва ці розподіли табульовані. Також існують і інші табульовані розподіли, таблицями яких ми в подальшому будемо користуватися.

Приклад. Розв'язати задачу 1 при невідомому σ, тобто X~N(a-?;σ-?). Вибірка обсягом n = 36 с параметрами $\bar{x}=4.1$, S=3 на рівні значущості α=0.05.

За таблицею знаходимо $t_{0.975}(35)=2.03$. Тоді $m\in(4.1\pm2.03\cdot3/\sqrt{36})$ або $m\in(3.085;\ 5.115)$.

Зауваження. При необмеженому зростанні об'єму вибірки n розподіл Ст'юдента прямує до нормального. Тому практично при n>30 замість t_α використовують U_α. Однак для малих вибірок заміна на нормальний розподіл призводить до грубих помилок.

Приклад. Випадкова величина X має нормальний розподіл. Об'єм вибірки n=9, $\bar{x}=4$, критерій значущості α=0.01. Знайти довірчий інтервал для m при: а) σ=3; б) S=3.

У першому випадку за таблицею знаходимо квантиль $U_{0,995}$=2,58. Тоді довірчий інтервал $m\in(4\pm 2.58\cdot 3/\sqrt{9})$, або $m\in(1.42;\ 6.58)$. У другому випадку необхідно використовувати квантиль розподілу Ст'юдента $t_{0.995}(8)=3.36$. Довірчий інтервал в цьому випадку значимо відрізняється: $m\in(4\pm 3.36\cdot 3/\sqrt{9})$, або $m\in(0.64;\ 7.36)$.

Задача 3. Нехай X розподілено нормально. Потрібно оцінити середнє квадратичне відхилення σ за вибірковим середнім квадратичним відхиленням S.

Вимагатимемо, щоб виконувалося співвідношення:

$$P(|\sigma-S|<\delta)=\gamma,\ \text{або}\quad P(S-\delta<\sigma<S+\delta)=\gamma \tag{1.23}$$

Введемо у розгляд випадкову величину χ з f=n-1 ступенями вільності:

$$\chi=\frac{S}{\sigma}\sqrt{n-1} \tag{1.24}$$

За визначенням χ^2 розподілу отримуємо наступне співвідношення:

$$1-\alpha=P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}<\frac{S^2}{\sigma^2}(n-1)<\chi^2_{\alpha/2}\right)=P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}}<\sigma^2<\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1=\alpha/2}}\right) \tag{1.25}$$

Тоді оцінка для середнього квадратичного відхилення набуватиме вигляду:

$$1-\alpha=P\left(\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}}}<\sigma<\frac{S\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}}}\right). \tag{1.26}$$

ГЛАВА 2 ПЕРЕВІРКА ПАРАМЕТРИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Розділ 2.1 Основні поняття теорії гіпотез

Побудова точкових та інтервальних оцінок є, як правило, попередньою формою статистичного аналізу. Основне завдання математичної статистики – вміти на основі точкових і інтервальних оцінок приймати рішення в умовах невизначеності, тобто вирішувати статистичні гіпотези. Гіпотези бувають параметричні і непараметричні. Якщо закон розподілу випадкової величини відомий, а необхідно висунути припущення тільки про деякі параметри цього розподілу, то гіпотеза називається *параметричною.* Якщо ж висловлюється припущення про невідомий закон розподілу, то гіпотеза називається *непараметричною.*

Гіпотези бувають основні або нуль - гіпотези (H_0) та альтернативні (H_1). Нульова гіпотеза завжди одна, а альтернативних може бути декілька. Якщо H_0 відкидається, то має місце гіпотеза, що їй суперечить.

<u>Приклад.</u> Непараметрична гіпотеза: «Генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона»; параметрична гіпотеза: «Дисперсії двох нормальних сукупностей рівні». Основна гіпотеза: «Математичне сподівання дорівнює 10»; конкуруючі: а) «Математичне сподівання менше 10», б) «Математичне сподівання більше 10», в) «Математичне сподівання не дорівнює 10».

<u>Визначення.</u> *Простою* називають гіпотезу, яка містить тільки одне припущення (наприклад, H_0: $\lambda=5$). *Складною або складеною* називають гіпотезу, яка складається зі скінченого або нескінченого числа простих гіпотез (наприклад, H_0: $\lambda>5$).

Висунута гіпотеза може бути правильною або помилковою, тому виникає необхідність у її перевірці статистичними методами. При цьому можуть бути допущені такі помилки:

А) помилка першого роду - відкинута правильна гіпотеза. Імовірність цієї помилки - $P(H_1/H_0)=\alpha$;

Б) помилка другого роду - прийнята неправильна гіпотеза. Імовірність такої помилки $P(H_0/H_1)=\beta$.

Імовірність припуститися помилки першого роду позначають через α - рівень значущості. Другою важливою характеристикою критерію є його потужність - величина $\gamma=1-\beta$.

Розділ 2.2 Побудова критичної області

Для перевірки гіпотези H_0 використовують спеціально підібрану випадкову величину, розподіл якої відомий. Цю величину позначають по-різному в залежності від її розподілу: U або Z при нормальному розподілі, T - при розподілі Ст'юдента і т.д.

Визначення. *Статистичним критерієм* або просто *критерієм* називають випадкову величину К, яку використовують для перевірки гіпотези H_0. Спостережуваним значенням $K_{сп}$ називають значення критерію, обчислене за вибіркою.

Визначення. Безліч усіх можливих значень критерію розбивають на дві області:

А) область прийняття гіпотези (H_0 вірна);

Б) критична область (H_0 помилкова).

Критичними точками $K_{кр}$ називають точки поділу цих областей.

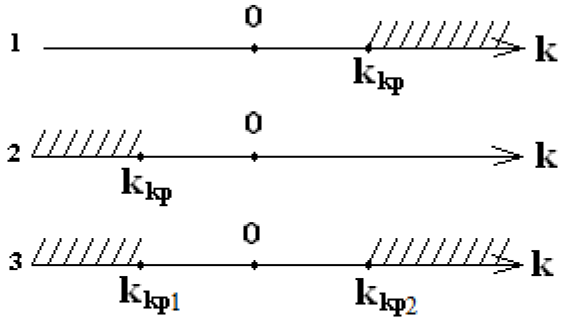

Рис.2.1 Графічна демонстрація
критичних областей

Випадки 1 і 2 на рис.2.1 відповідають одностороннім критичним областям - правосторонній і лівосторонній відповідно, випадок 3 - двосторонній критичній області.

Алгоритм перевірки параметричних гіпотез.

1. Висловлюється припущення про закон розподілу.

2. Відбирається вибірка.

3. Формулюються основна (H_0) і альтернативна (H_1) гіпотези.

4. Будується статистика, що зв'язує параметр, який досліджують, і вибіркові значення зі статистичним критерієм. Наприклад,

$$U = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \qquad \text{для } N(0;1);$$

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{S}\sqrt{n} \qquad \text{для } t_\alpha(f); \qquad (2.1)$$

$$\chi^2 = \frac{S^2}{\sigma^2}(n-1) \qquad \text{для } \chi^2_\alpha(f).$$

5. Для обраної статистики будується довірчий інтервал з ймовірністю 1-α виду:

$$P(-U_{1-\alpha/2}<U<U_{1-\alpha/2})=1-\alpha \qquad (2.2)$$

$$P(-\infty<U<U_{1-\alpha})=1-\alpha \qquad (2.3)$$

Формула (2.2) відповідає двосторонній критичній області, а формула (2.3) - односторонній.

6. Довірчий інтервал перетворюється в інтервал для параметра, який досліджується. Наприклад,

$$P(\bar{x}-U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le m < \bar{x}+U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha \qquad (2.4)$$

7. Прийняття рішення на основі побудованого інтервалу. Якщо $K_{сп}$ потрапляє в область прийняття гіпотези, то немає підстави відкидати основну гіпотезу H_0. Якщо ж не потрапляє, то приймається альтернативна гіпотеза H_1. При цьому ймовірність помилки першого роду дорівнює рівню значущості $P(H_1/H_0)=\alpha$.

Приклад. Виготовляється сталь, міцність якої повинна бути 100 кг/см^2. За результатами плавок виміри показали 98; 100; 96; 102; 98. Чи відповідає сталь вимогам? Відповідь дати з надійністю $\gamma = 0.95$.

Нехай міцність є нормально розподіленою випадковою величиною з невідомими математичним сподіванням і середньо квадратичним відхиленням. Перевіримо гіпотезу H_0: m=100 кг/см^2 при альтернативній гіпотезі H_1: m$\neq$100. За вибіркою знаходимо середнє $\bar{x}$=98.8 і оцінку для дисперсії

S^2=5.2. По таблиці знаходимо квантиль при рівні значущості α=0.05 $t_{1-\alpha/2}(4) = 2{,}776$. За цими даними будуємо критичні точки $\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{5}}$, тобто 98.8±2.776*2.28/$\sqrt{5}$ і інтервал, для якого сталь відповідає вимогам при рівні значущості 0.05 дорівнює (95.97; 101.63). Так як 100 потрапляє в отриманий інтервал, то немає підстав вважати, що сталь не відповідає вимогам.

Розглянемо ряд типових задач.

Задача 1. Дана задача виникає при необхідності вибору більш точного приладу, тобто приладу з меншим розкидом показань. Висувають гіпотезу про рівність дисперсій H_0: Д(X)=Д(Y).

1-й випадок. Альтернативна гіпотеза H_1: Д(X)>Д(Y) (перший прилад гірше). Як критерій приймають наступну величину:

$$F=S^2_{\text{більше}}/S^2_{\text{менше}} \qquad (2.5)$$

Ця величина має розподіл Фішера-Снедекора зі ступенями вільності $k_1=n_1-1$, $k_2=n_2-1$, де n_1, n_2 – об'єми вибірок з більшою і меншою дисперсіями відповідно. Будуємо правосторонню критичну область:

$$P[F>F_{kp}(\alpha; k_1; k_2)] = \alpha\ . \qquad (2.6)$$

Звідки область прийняття гіпотези H_0 матиме вигляд:

$$P[F<F_{kp}] = 1-\alpha\ . \qquad (2.7)$$

За вибірками обчислюють за формулою (2.5) значення F. Якщо $F<F_{kp}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$, то гіпотеза H_0 приймається, якщо $F \geq F_{kp}(\alpha;\ k_1;\ k_2)$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Зауваження. Якщо U і V - незалежні випадкові величини, що мають розподіл χ^2 з k_1 і k_2 ступенями вільності, то величина $F = \dfrac{U / k_1}{V / k_2}$ має розподіл, який називається *розподілом Фішера-Снедекора* з (k_1, k_2) степенями вільності.

Приклад. Нехай маємо дві вибірки обсягом $n_1=12$ і $n_2=15$, $S^2_X=11.41$, $S^2_Y=6.52$. Рівень значущості $\alpha=0.05$. Необхідно перевірити гіпотезу H_0: Д(X)=Д(Y) при альтернативній гіпотезі H_1: Д(X)>Д(Y).

За формулою (2.5) знаходимо вибіркове значення критерію - $F_{сп}=11.41/6.52=1.75$, за таблицею розподілу Фішера-Снедекора при відповідних значеннях ступенів вільності знаходимо $F_{kp}(0.05;11;14)=2.56$. Тому, що $F_{сп}<F_{kp}$, немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

2-ий випадок. При основний гіпотези H_0:Д(X)=Д(Y) альтернативною виступає гіпотеза про нерівність дисперсій H_1: Д(X)≠Д(Y). В цьому випадку будують двосторонню критичну область. Так як в таблиці немає лівосторонніх точок (значення критерію завжди додатне), то знаходимо значення при зменшеному вдвічі рівні значущості: $F_{kp}(\alpha/2;\ k_1;\ k_2)$ і при $F_{сп}<F_{kp}$ не відкидаємо гіпотезу H_0, а при $F_{сп} \geq F_{kp}$ – відкидаємо.

Приклад. $n_1=10$, $n_2=18$, $S^2_X=1.23$, $S^2_Y=0.41$, $\alpha=0.1$.

Перевіримо H_0: Д(X)=Д(Y) при H_1: Д(X)≠Д(Y). Знайдемо значення $F_{сп}=3$ і $F_{kp}(0.05;9;17)=2.5$. Так як $F_{сп}>F_{kp}$, то відкидаємо гіпотезу H_0.

<u>Задача 2</u>. Нехай потрібно встановити значимо або незначимо розрізняються S^2 и σ^2 (чи збігаються теоретична і практична похибки вимірювань). Критерієм перевірки є випадкова величина $\chi^2=(n-1)S^2/\sigma^2$, що має хі-квадрат розподіл. Це завдання виникає при порівнянні точності приладу з деяким еталонним значенням σ^2.

<u>1-ий випадок</u>. Перевіримо H_0: $S^2=\sigma^2$ в припущенні, що реальний розкид вище: H_1: $S^2>\sigma^2$. Будується правостороння критична область:

$$P[\chi^2>\chi^2_{kp}(\alpha;k)]=\alpha\ , \tag{2.8}$$

число ступенів вільності k=n-1.

<u>2-ий випадок</u>. H_0: $S^2=\sigma^2$ і розглядається двостороння критична область: H_1: $S^2\neq\sigma^2$. Тоді областю прийняття гіпотези H_0 буде інтервал:

$$P[\chi^2(1-\alpha/2;k)\leq\chi^2<\chi^2(\alpha/2;k)]=1-\alpha\ . \tag{2.9}$$

<u>3-ий випадок.</u> За альтернативну гіпотезу приймемо припущення, що вибіркова дисперсія менша: H_0: $S^2=\sigma^2$, H_1: $S^2<\sigma^2$. Отримаємо лівосторонню критичну область, область прийняття гіпотези H_0 дорівнює наступного виразу:

$$P[\chi^2>\chi^2(1-\alpha;k)]=1-\alpha\ . \tag{2.10}$$

<u>Приклад.</u> З нормальної генеральної сукупності витягнута вибірка об'ємом n=13 і знайдена вибіркова

дисперсія $S^2=10.3$. При $\alpha=0.02$ перевірити гіпотезу H_0: $S^2=\sigma^2=12$ при $H_1:S^2\neq\sigma^2=12$.

Обчислимо спостережуване значення критерію за формулою:

$\chi^2_{сп}=(n-1)*S^2/\sigma^2=10.3(13-1)/12=10.3.$

За таблицею при заданому рівні значущості і числі ступенів вільності $k=12$ знайдемо дві критичні точки, що задають область прийняття гіпотези:

$\chi^2(1-\alpha/2;k)=3.57$ и $\chi^2(\alpha/2;k)=26.2.$

Значення 10.3 належить цьому інтервалу, тому немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

Задача 3. Порівняння двох середніх. Залежно від виду розподілу і об'єму вибірок розрізняють кілька випадків.

1-ий випадок. Випадкові величини розподілені за нормальним законом *з відомими дисперсіями*. Для перевірки використовують наступний критерій:

$$Z=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma\left(\bar{x}-\bar{y}\right)}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{Д(x)}{n}+\frac{Д(y)}{m}}}\ . \qquad (2.11)$$

Критичні точки знаходяться за таблицею функції Лапласа. Залежно від виду конкуруючої гіпотези, інтервали будуються односторонніми або двосторонніми:

1) При H_1: $M(x)\neq M(y)$ двосторонні критичні точки знаходять з рівності $\Phi(Z_{крит})=(1-\alpha)/2$. Область прийняття гіпотези H_0 задається нерівністю

$$\left|Z_{сп}\right|<Z_{крит}\ . \qquad (2.12)$$

2) У разі, якщо H_1: $M(x)>M(y)$ або H_1: $M(x)<M(y)$ односторонні критичні точки знаходять при подвоєному рівні значущості, тобто $\Phi(Z_{крит})=(1-2\alpha)/2$. Областю прийняття гіпотези є відповідно:

$$Z_{сп}<Z_{крит}\text{ , або }\qquad Z_{сп}>-Z_{крит} \qquad (2.13)$$

<u>2-ий випадок.</u> Випадкові величини розподілені за довільним законом. У разі якщо об’єм кожної з вибірок не менш тридцяти елементів, відповідно до закону великих чисел, вибіркові середні розподілені нормально і для перевірки використовують формули з першого випадку.

<u>3-ій випадок.</u> Випадкові величини розподілені за нормальним законом, Д(X), Д(Y) *невідомі*. Розглядаються малі незалежні вибірки. У загальному випадку задачу розв’язати не можливо, але якщо припустити, що дисперсії невідомі, але рівні між собою (наприклад, порівнюються середні розміри двох партій деталей, виготовлених на одному верстаті), то можна побудувати критерій Ст'юдента порівняння середніх:

1) Спочатку перевіримо гіпотезу H_0:M(X)=M(Y) при конкуруючої H_1:M(X)≠M(Y) при Д(X)=Д(Y)=σ^2, але σ^2 невідома. У всіх випадках за критерій будемо приймати наступну випадкову величину:

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}\ , \qquad (2.14)$$

де S_x^2, S_y^2 - виправлені дисперсії.

Якщо H_0 справедлива, тоді T має розподіл Ст'юдента з $f=n+m-2$ ступенями вільності. За таблицею знаходимо $t_{двостор.кр.}(\alpha;f)$. Якщо виконується нерівність:

$$|T_{сп}|<t_{двостор.кр.}(\alpha;f) \qquad (2.15)$$

то відкидати H_0 немає підстав.

2) Якщо конкуруюча гіпотеза задана у вигляді нерівності (H_0:M(X)=M(Y), H_1:M(X)>M(Y)), довірчий інтервал буде одностороннім (правостороння критична область). При цьому, якщо:

$$T_{сп}>t_{правостор.}(\alpha;f) \qquad (2.16)$$

то нульову гіпотезу відкидають.

3) Аналогічно діють і в разі альтернативної гіпотези виду H_1:M(X)<M(Y). Будують лівосторонню критичну область і в силу симетрії маємо: $t_{лівостор.}= - t_{правостор.}$. Таким чином, знаходять $t_{правостор.}$ з другого випадку і беруть з протилежним знаком. якщо:

$$T_{сп}> - t_{правостор.}(\alpha;f) \qquad (2.17)$$

відкидати гіпотезу H_0 немає підстав.

<u>Приклад.</u> Нехай маємо вибірки об'ємів n=5, m=6, які витягнуті з нормальних генеральних сукупностей. Знайдено наступні параметри: $\bar{x}=3.3$; $\bar{y}=2.48$; $S^2_x=0.25$; $S^2_y=0.108$. На рівні значущості $\alpha=0.05$ перевірити гіпотезу H_0: M(X)=M(Y) при альтернативній H_1:M(X)≠M(Y).

Оскільки $S^2_x \neq S^2_y$, перевіримо спочатку гіпотезу про рівність дисперсій, користуючись критерієм Фішера-Снедекора. Для цього обчислимо значення критерію

$F_{сп}$=0.25/0.108≈2.31. За альтеративну візьмемо гіпотезу H_1:Д(X)>Д(Y). У таблиці за рівнем значущості α=0.05 і числами ступенів вільності k_1=5-1=4; k_2=6-1=5 знаходимо $F_{кр}$(0.05;4;5)=5.19. Тому, що $F_{сп}<F_{кр}$,то немає підстав відкидати гіпотезу H_0. Далі для перевірки основного припущення обчислимо статистику $T_{сп}$ за формулою (2.14): $T_{сп}$≈3.27. За видом H_1 в даному випадку необхідна двостороння критична область. За рівнем значущості α=0.05 і числом ступенів вільності f=5+6-2=9 з таблиці знаходимо $t_{двохстор}$(0.05;9)=2.26. Отримаємо, що $T_{сп} > t_{двохстор}$, тому гіпотезу H_0 відкидаємо. Іншими словами, вибіркові середні відрізняються значимо.

Зауваження. Якщо є тільки одна таблиця для $t_{правостор}$, тоді на практиці використовують наступну формулу:

$$t_{двохстор}(\alpha;f) = t_{правостор}(\alpha/2;f). \tag{2.18}$$

Задача 4. Нехай генеральна сукупність випадкової величини X розподілена за нормальним законом. Необхідно встановити значимо або ні відрізняються $\bar{x}$ і M(X)=a_0. Ця задача виникає, коли, наприклад, перевіряють партію деталей x_i на відповідність проектному розміру a_0.

1-ий випадок. Дисперсія відома.

1) Висуваємо гіпотези H_0: $\bar{x}=a_0$ і H_1: $\bar{x}\neq a_0$. За критерій вибирають наступну випадкову величину, яка розподілена за нормальним законом, причому при справедливості H_0 його параметри дорівнюють M(U)=0, σ(U)=1:

$$U = (\bar{x} - a_0)\cdot\sqrt{n}/\sigma\,. \tag{2.19}$$

За таблицею функції Лапласа знаходять критичну точку $\Phi(U_{кр})=(1-\alpha)/2$ або $U_{1-\alpha/2}$-квантиль. якщо:

$$|U_{сп}|<U_{кр}\,, \tag{2.20}$$

то немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

2) Аналогічно перевіряють односторонні гіпотези: $H_0: \bar{x}=a_0$ при $H_1: \bar{x}>a_0$. В цьому випадку $\Phi(U_{кр})=(1-2\alpha)/2$ і гіпотеза H_0 не відкидається за умови:

$$U_{сп}<U_{кр}\,. \tag{2.21}$$

3) Останній випадок: H_0: $\bar{x}=a_0$ і H_1: $\bar{x}<a_0$. Знаходять $U_{кр.}$ як в пункті 2), а гіпотеза H_0 не відкидається, якщо:

$$U_{сп}> -U_{кр}\,. \tag{2.22}$$

Приклад. Нехай випадкова величина розподілена нормально (X~N) і, крім того, відомо $\sigma=0.36$. За вибіркою об'єму $n=36$ з вибірковим середнім $\bar{x}=21.6$ на рівні значущості $\alpha=0.05$ перевірити гіпотезу $H_0: \bar{x}=a_0=21$ при альтернативній $H_1: \bar{x}>21$.

Використовуючи формулу (2.19), знаходимо вибіркове значення параметра $U_{сп}= (21.6-21)\sqrt{36}/0.36=10$, а за таблицею функції Лапласу для критичної точки маємо: $\Phi(U_{кр})=(1-2\cdot0.05)/2=0.45$, отже $U_{kр}=1.65$. Оскільки $U_{сп}>U_{кр}$ і прийнята правостороння критична область, гіпотезу H_0 відкидають.

2-ий випадок. Дисперсія невідома.

За критерій беруть наступну випадкову величину:

$$T=(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}/S \tag{2.23}$$

Ця випадкова величина T має розподіл Ст'юдента з f=n-1 ступенями вільності. Нульова гіпотеза аналогічна першому випадку: H_0: $\bar{x}=a_0$. Розглянемо різні випадки для альтернативної гіпотези H_1:

1) H_1: $\bar{x} \neq a_0$. Гіпотеза H_0 не відкидається, якщо виконується нерівність:

$$|T_{сп}|<t_{двостор} . \tag{2.24}$$

2) H_1: $\bar{x} > a_0$. Гіпотеза H_0 не відкидається, якщо виконується нерівність:

$$T_{сп}<t_{правостор} . \tag{2.25}$$

3) H_1: $\bar{x} < a_0$. Гіпотеза H_0 не відкидається, якщо виконується нерівність:

$$T_{сп} > - t_{правостор} . \tag{2.26}$$

<u>Задача 5.</u> Порівняння відносної частоти з ймовірністю. Нехай по великому числу n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність p постійна, але невідома, знайдена відносна частота m/n. Потрібно при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу H_0, яка полягає у тому, що ймовірність p дорівнює гіпотетичної ймовірності p_0.

За критерій приймемо наступну випадкову величину:

$$U = {\left(m/n - p_0\right)\cdot\sqrt{n}} \Big/ {\sqrt{p_0 q_0}}, \tag{2.27}$$

яка при справедливості гіпотези H_0 розподілена за нормальним законом N(0;1).

Дійсно, за теоремою Лапласа доведено, що при великих n відносна частота має нормальний розподіл з математичним сподіванням p і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{pq/n}$. Нормуючи відносну частоту, отримаємо:

$$U = \frac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{\left(m/n - p\right)\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}. \qquad (2.28)$$

Створимо нульову гіпотезу H_0: $p = p_0$ і наступні альтернативні гіпотези:

1) H_1: $p \neq p_0$. З таблиці Лапласа знаходимо критичні точки $\Phi(U_{kp})=(1-\alpha)/2$ для двосторонньої критичної області. Гіпотеза H_0 не відкидається при виконанні нерівності:

$$|U_{сп}|<U_{kp}\,. \qquad (2.29)$$

2) H_1: $p > p_0$. При цьому $\Phi(U_{kp})=(1-2\alpha)/2$. Гіпотеза H_0 не відкидається при виконанні нерівності:

$$U_{сп}<U_{kp}\,. \qquad (2.30)$$

3) H_1: $p < p_0$. $\Phi(U_{kp})=(1-2\alpha)/2$. Гіпотеза H_0 не відкидається при виконанні нерівності:

$$U_{сп}> - U_{kp}\,. \qquad (2.31)$$

<u>Задача 6.</u> Порівняння декількох дисперсій нормальних генеральних сукупностей.

<u>1-ий випадок.</u> Розглядаються вибірки різного об'єму. Для перевірки нульової гіпотези в даному випадку

використовують *критерій Бартлетта*. Нехай випадкові величини X_1, …, X_ℓ розподілені за нормальним законом. З генеральних сукупностей отримано незалежні вибірки об'ємів n_1, …, n_ℓ і знайдено дисперсії S_1^2, …, S_ℓ^2. Необхідно перевірити гіпотезу про однорідність дисперсій, тобто висувається наступна нульова гіпотеза: H_0: Д(X_1) = Д(X_2) =…= Д(X_ℓ). За критерій приймемо наступну випадкову величину (критерій Бартлетта):

$$B=V/C, \tag{2.32}$$

$$V = 2.303\cdot\left(k\lg S^2 - \sum_{i=1}^{\ell} k_i \lg S_i^2\right),$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(\ell-1)}\left(\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{k_i} - \frac{1}{k}\right),$$

$$k_i = n_i - 1, \qquad S^2 = \left(\sum_{i=1}^{\ell} k_i S_i^2\right)\Big/ k, \qquad k = \sum_{i=1}^{\ell} k_i .$$

Випадкова величина B розподілена як χ^2 з ℓ-1 ступенями вільності.

<u>Обмеження.</u> Об'єм кожної вибірки повинен бути не менше чотирьох.

Критична область правостороння, тобто:

$$P[B>\chi^2_{kp}(\alpha;\ell-1)]=\alpha . \tag{2.33}$$

Таким чином, якщо:

$$B_{сп}<\chi^2_{kp} , \tag{2.34}$$

то немає підстав відкидати нульову гіпотезу.

<u>2-ий випадок.</u> Для перевірки гіпотези H_0: $Д(X_1) = Д(X_2) = \ldots = Д(X_\ell)$ про однорідність дисперсій при рівних об'ємах всіх вибірок $n_1=n_2=\ldots=n_\ell=n$ може бути використаний критерій Кочрена. Число ступенів вільності для кожної вибірки дорівнює $k = n-1$. Перевірити висунуту вище нульову гіпотезу можливо за допомогою наступних способів:

1) використовувати критерій Фішера-Снедекора для порівняння максимальної та мінімальної дисперсій. Недолік даного методу полягає у тому, що втрачається інформація, яку містять інші дисперсії;

2) використовувати перший випадок (критерій Бартлетта). Недолік полягає у суттєвій помилці, тому що метод Бартлетта лише наближений;

3) використовувати критерій Кочрена.

<u>Критерій Кочрена.</u> Розглядають наступну випадкову величину

$$G=S_{max}^2/(S_1^2+\ldots+S_\ell^2), \qquad (2.35)$$

де $S_1^2,\ldots,S_\ell^2$ - дисперсії відповідних вибірок, S_{max}^2 - найбільша з дисперсій.

Вона має табульований розподіл Кочрена. Критичну область будують правостороннього виду:

$$P[G>G_{kp}(\alpha;k;\ell)]=\alpha\ . \qquad (2.36)$$

Якщо $G_{сп}<G_{кр}$, то нульову гіпотезу H_0 не відкидають.

<u>Приклад.</u> Нехай дано чотири вибірки об’ємів n=17 кожна. При цьому кожна вибірка має наступне середнє

квадратичне відхилення відповідно: $S_1^2=0.26$, $S_2^2=0.36$, $S_3^2=0.40$, $S_4^2=0.42$; а) при рівні значущості $\alpha=0.05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $Д(X_1)=Д(X_2)=Д(X_3)=Д(X_4)$; б) оцінити генеральну дисперсію.

а) Використовуємо критерій Кочрена. Для цього обчислюємо наступну величину:

$G_{сп}=0.42/(0.26+0.36+0.4+0.42)=0.2917$.

З таблиці знаходимо $G_{кр}(0.05;16;4)=0.4366$. Тому, що $G_{сп}< G_{кр}$, гіпотезу H_0 не відкидаємо.

б) Нульова гіпотеза справедлива, тому генеральна дисперсія обчислюється як середнє арифметичне знайдених значень відхилення: $\sigma^2=(0.26+0.36+0.4+0.42)/4\approx 0.36$.

Розділ 2.3 Перевірка значущості вибіркового коефіцієнта кореляції

Нехай двовимірна генеральна сукупність (X;Y) розподілена за нормальним законом. З неї витягнута вибірка об'ємом n і знайдено коефіцієнт кореляції $r_B\neq 0$. Необхідно перевірити, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності також не дорівнює нулю. Отже, маємо наступну нульову й альтернативну гіпотези: H_0: $r_г=0$; H_1: $r_г\neq 0$. Якщо H_0 вірна, то випадкові величини X і Y некорельовані.

Для створення критерію розглянемо наступну випадкову величину:

$$T = r_B\sqrt{n-2}\Big/\sqrt{1-r_B^2}\ . \tag{2.37}$$

Величина T при справедливості нульової гіпотези має розподіл Ст'юдента з k=n-2 ступенями вільності. Критична область двостороння. Отже, при:

$$|T_{сп}|<t_{kp}(\alpha;k) \qquad (2.38)$$

немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

<u>Приклад</u>. По вибірці об'єму n=122 знайдено коефіцієнт кореляції $r_B=0.4$. При рівні значущості $\alpha=0.05$ перевірити гіпотезу H_0: $r_г=0$ при H_1: $r_г\neq 0$.

Скористаємося критерієм (2.37): $T_{сп} = 0.4\sqrt{122-2}\Big/\sqrt{1-0.4^2} = 4.78$. По таблиці розподілу Ст'юдента знаходимо критичне значення $t_{kp}(0.05;120)=1.98$. Оскільки $T_{сп}>t_{kp.}$ гіпотезу H_0 відкидаємо. Тобто вибірковий коефіцієнт кореляції значимо відрізняється від нуля, величини X і Y корельовані.

ГЛАВА 3 ПЕРЕВІРКА НЕПАРАМЕТРИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Розділ 3.1 Критерій згоди

У попередніх задачах закон розподілу генеральної сукупності передбачається відомим. Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вигляд, то перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена за законом А.

<u>Визначення.</u> *Критерієм згоди* називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Побудова інтервального статистичного ряду й основних числових характеристик вибірки дозволяє зробити попередній вибір закону розподілу випадкової величини X, виходячи з наступних міркувань:

1) По виду гістограми частостей статистичного ряду. Вид гістограми дає орієнтування на можливий закон розподілу. Достоїнство даного методу полягає в простоті й наочності, недолік у тім, що гістограма може одночасно нагадувати кілька законів розподілу.

2) Порівняння вибіркових оцінок математичного сподівання випадкової величини. Наприклад, для нормального закону розподілу $\mu=\mu_e=\mu_0$. Достоїнство – простота й наочність, недолік – висновки можуть бути зроблені тільки для нормального закону розподілу, не враховується ступінь симетрії кривої розподілу.

3) По емпіричному коефіцієнту варіації $V=S/\bar{x}$. Відомо, що кожному закону розподілу відповідає певний діапазон значень коефіцієнта варіації:

Закон розподілу	Границі	Середнє значення
Нормальний	(0.08;0.4)	0.25
Вейбула	(0.36;0.63) (0.4;0.85)	0.44 0.71
Логарифмічний нормальний	(0.35;0.8)	0.68
Експоненціальний	(0.6;1.3)	0.92

Таблиця 3.1 Вибір закону по емпіричному коефіцієнту

Достоїнство методу - простота, недолік - коефіцієнт варіації не відображає ступінь симетричності емпіричної кривої розподілу, неоднозначність вибору.

4) По вибіркових коефіцієнтах асиметрії й ексцесу.

$$\hat{A} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^3 m_j}{nS^3} \ , \qquad (3.1)$$

$$\hat{Э} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})^4 m_j}{nS^4} - 3 . \qquad (3.2)$$

Емпірична функція вважається узгодженою з гіпотетичною функцією, якщо вибіркові коефіцієнти асиметрії й ексцесу відрізняються по абсолютній величині від своїх математичних сподівань не більше ніж на потроєні середні квадратичні відхилення. Тобто якщо:

$$|A-M(A)|<3S_A \ , \qquad (3.3)$$

$$|Э-M(Э)|<3S_Э \ , \qquad (3.4)$$

то обраний закон розподілу узгоджується з експериментальними даними. Наприклад, для нормального закону розподілу M(A)=M(Э)=0, тому умови узгодження приймуть вид:

$$|A|<3S_A \ , \qquad |Э|<3S_Э \ , \qquad (3.5)$$

де $S_A^2 = \dfrac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}$, $\quad S_Э^2 = \dfrac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2 (n+3)(n+5)}$.

Достоїнство методу – врахування симетрії й крутості, тобто форми кривої, недолік – немає строгої кількісної оцінки припустимої розбіжності між вибірковими коефіцієнтами асиметрії й ексцесу і їхніх математичних сподівань, тому що використовується правило «трьох сигм», що недостатньо точне.

5) За допомогою чисел Вестергарда. Використовується тільки для перевірки близькості емпіричного закону розподілу до нормального. Числа Вестергарда: 0.3, 0.7, 1.1, 3. Емпіричний розподіл близький до нормального закону розподілу, якщо в інтервалі ($\bar{x}$ -0.3S; $\bar{x}$+0.3S) розташована чверть всієї сукупності даних, в інтервалі ($\bar{x}$ -0.7S; $\bar{x}$+0.7S) – половина всієї сукупності даних, в інтервалі ($\bar{x}$ -1.1S; $\bar{x}$+1.1S) – три чверті, а в інтервалі ($\bar{x}$ -3S; $\bar{x}$+3S) - 0.998 відсотків всієї сукупності даних.

Розділ 3.2 Критерій Пірсона (χ^2)

Нехай x_1, x_2, …, x_n – вибірка спостережень випадкової величини X. Перевіряється гіпотеза H_0, яка стверджує, що випадкова величина X має закон розподілу F(X). Процедура застосування критерію χ^2 для перевірки гіпотези H_0 складається з наступних етапів:

1) По вибірці спостережень випадкової величини X складають згрупований (інтервальний) статистичний ряд і знаходять оцінки невідомих параметрів передбачуваного закону розподілу (тобто $\widetilde{M}(X)$ *і* $\widetilde{Д}(X)$).

2) Використовуючи передбачуваний закон розподілу, обчислюють імовірності p_k, з якими випадкова величина X потрапляє в кожний інтервал. Наприклад, для нормального закону:

$$p_j=P\{x_{j-1}<x\le x_j\}=\Phi(U_j)-\Phi(U_{j-1}) , \qquad (3.6)$$

де $U_j=(x_j-\bar{x})/S$.

3) Визначають теоретичні частоти n^*p_j для кожного часткового інтервалу.

4) Обчислюють вибіркову статистику (критерій) по формулі:

$$\chi_B^2=\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(m_j-np_j\right)^2}{np_j}. \qquad (3.7)$$

5) Приймають статистичне рішення: гіпотеза H_0 не суперечить вибірці спостережень на заданому рівні значущості α, якщо:

$$\chi_B^2<\chi_{1-\alpha}^2(r-\ell-1) \qquad (3.8)$$

де r – число інтервалів, ℓ - число параметрів розподілу, які оцінюються по вибірці. У тому випадку, якщо $\chi_B^2\ge\chi_{1-\alpha}^2(r-\ell-1)$, нульова гіпотеза відхиляється.

Зауваження. Необхідно, щоб для всіх інтервалів виконувалася умова $np_j\ge 5$. Якщо в деяких інтервалах ця умова не виконується, то їх варто об'єднати із сусідніми.

Приклад. Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл групованих даних, рівень значущості прийняти рівним 0.1.

Обсяг вибірки n=55, середнє значення $\bar{x}$=17.84, оцінка для середнє квадратичного відхилення дорівнює S=2.92.

<table>
<tr><th>x_j-x_{j+1}</th><th>m_j</th><th>U_j;U_{j+1}</th><th>P_j=Φ(U_{j+1})-Φ(U_j)</th><th>np_j</th><th>m_j-np_j</th><th>$\frac{(m_j-np_j)^2}{np_j}$</th></tr>
<tr><td>10-12</td><td>2</td><td>-2.68; -2</td><td>0.0191</td><td>1.0505</td><td rowspan="3">-0.333</td><td rowspan="3">0.0077</td></tr>
<tr><td>12-14</td><td>4</td><td>-2; -1.32</td><td>0.0714</td><td>3.927 } 14.333</td></tr>
<tr><td>14-16</td><td>8</td><td>-1.32; -0.63</td><td>0.1701</td><td>9.3555</td></tr>
<tr><td>16-18</td><td>12</td><td>-0.63; 0.05</td><td>0.2556</td><td>14.058</td><td>-2.058</td><td>0.3013</td></tr>
<tr><td>18-20</td><td>16</td><td>0.05; 0.74</td><td>0.2504</td><td>13.772</td><td>2.228</td><td>0.3604</td></tr>
<tr><td>20-22</td><td>10</td><td>0.74; 1.43</td><td>0.1526</td><td>8.393 } 11.671</td><td rowspan="2">1.329</td><td rowspan="2">0.1513</td></tr>
<tr><td>22-24</td><td>3</td><td>1.43; 2.11</td><td>0.0596</td><td>3.278</td></tr>
<tr><td colspan="6">χ_B^2</td><td>0.8207</td></tr>
</table>

Таблиця 3.2 Перевірка гіпотези H_0 за критерієм Пірсона

Для нормального закону число оцінюваних по вибірці параметрів дорівнює двом (тобто ℓ=2), число ступенів вільності f=4-2-1=1. По таблиці χ^2 знаходимо: $\chi_{0.9}^2(1)=2.71$. Тому що $\chi_B^2=0.8207<\chi_{0.9}^2(1)$, гіпотеза про нормальний закон розподілу не суперечить результатам спостережень.

Розділ 3.3 Критерій Колмогорова (λ)

Критерій згоди χ^2 дозволяє перевірити гіпотезу про узгодженість даних вибірки з конкретним теоретичним законом розподілу для будь-якої випадкової величини (як неперервної, так і дискретної). Критерій λ застосовується для перевірки гіпотез про закони розподілу тільки неперервних випадкових величин. Його відмінність полягає в тому, що порівнюються не емпіричні й теоретичні частоти, а емпірична й гіпотетична функції розподілу. Передбачається, що теоретичні значення параметрів істинної функції розподілу відомі. Перевірку гіпотези H_0 проводять за наступною схемою:

1) Будують інтервальний статистичний ряд і знаходять емпіричну функцію розподілу:

$$\hat{F}_n(X) = \frac{m_x}{n}. \tag{3.9}$$

2) Знаходять нормовані інтервали (для перевірки нормального закону розподілу):

$$U = \frac{x - \bar{x}}{S} . \tag{3.10}$$

3) Визначають значення теоретичної функції розподілу $F(X)$, що відповідають спостережуваним значенням випадкової величини X.

4) Для кожного x_j (або інтервалу) знаходять модуль різниці між емпіричною і теоретичною функціями розподілу: $\left|\hat{F}_n(X) - F(X)\right|$.

5) Обчислюють спостережуване значення вибіркової статистики Колмогорова:

$$\lambda = \max\left|\hat{F}_n(X) - F(X)\right| \cdot \sqrt{n} . \tag{3.11}$$

6) Порівнюють спостережуване значення вибіркової статистики λ із критичним значенням λ_α, що визначають за таблицями квантилей розподілу Колмогорова при заданому рівні значущості α. При цьому якщо $\lambda<\lambda_\alpha$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези, якщо ж $\lambda\geq\lambda_\alpha$, то приймають альтернативну гіпотезу.

α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
λ_α	1.078	1.224	1.358	1.520	1.827	1.950

Таблица 3.3 Таблиця квантилей розподілу Колмогорова

Приклад. Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл групованих даних, рівень значущості прийняти 0.1. Обсяг вибірки n=55, середнє значення $\bar{x}$=17.84, оцінка середнє квадратичного відхилення дорівнює S=2.92.

x_j-x_{j+1}	m_j	$U_j;U_{j+1}$	$\hat{F}_n(X)$ для U_{j+1}	F(X) для U_{j+1}	$\left\|\hat{F}_n(X)-F(X)\right\|$
10-12	2	-2.68; -2	0.0364	0.0227	0.0137
12-14	4	-2; -1.32	0.1091	0.0934	0.0157
14-16	8	-1.32; -0.63	0.2545	0.2643	0.0098
16-18	12	-0.63; 0.05	0.4727	0.5199	0.0472
18-20	16	0.05; 0.74	0.7636	0.7703	0.0067
20-22	10	0.74; 1.43	0.9455	0.9236	0.0219
22-24	3	1.43; 2.11	1	0.9826	0.0174

Таблиця 3.4 Перевірка гіпотези H_0 за критерієм Колмогорова

Для обчислення значень теоретичної функції нормального розподілу використовують функцію Лапласа $\Phi(x)$, враховуючи її непарність:

$$F(x) = 0.5 + \varPhi(U), \text{ або } F(x) = 0.5 + \varPhi\left(\frac{x - \bar{x}}{S}\right).$$

Значення функції $F(x)$ розраховувалось на правому кінці кожного інтервалу. Далі знаходимо найбільшу з різниць і обчислюємо статистику $\lambda = 0.0472 \cdot \sqrt{55} = 0.35$. Оскільки $\lambda<1.224$, тому немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

ГЛАВА 4 РЕГРЕСІЙНИЙ І КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

Розділ 4.1 Постановка задачі

У багатьох задачах потрібно встановити й оцінити залежність досліджуваної випадкової величини Y від однієї або декількох інших величин. Дві випадкові величини можуть бути зв'язані або функціональною залежністю, або статистичною, або бути незалежними.

<u>Визначення</u>. *Статистичною* називають залежність, при якій зміна однієї з величин тягне зміну іншої. Якщо зміна однієї з величин змінює середнє значення іншої, то статистичну залежність називають *кореляційною.*

<u>Приклад</u>. Нехай випадкова величина X - кількість добрив, Y - урожай зерна. При рівних значеннях X значення Y може бути різним, тоді функціональна залежність відсутня. Однак (по досвіду) середній урожай залежить від кількості

добрив, отже, величини X и Y зв'язані кореляційною залежністю.

При описі статистичної залежності знаходять вибіркове рівняння регресії Y на X виду:

$$\overline{y}_x = f^*(x) \ , \qquad (4.1)$$

де $\overline{y}_x$ - умовне середнє, тобто середнє арифметичне значень Y при X=x; функцію $f^*(x)$ називають вибірковою регресією, а її графік – вибірковою лінією регресії.

Розділ 4.2 Лінійна регресія

Нехай вивчається система двох випадкових величин (X;Y). У результаті n незалежних дослідів отримано n пар чисел (x_1,y_1), …, (x_n,y_n). Знайдемо вибіркове рівняння регресії наступного виду:

$$\overline{y}_x = kX + b \qquad (4.2)$$

Якщо число n невелике, то результати не групують і замість умовної середньої записують випадкову величину Y. Тоді:

$$Y = \rho_{yx} X + b \ , \qquad (4.3)$$

де ρ_{xy} – вибірковий коефіцієнт регресії.

Для знаходження коефіцієнтів ρ_{xy} і b використовують метод найменших квадратів. Його сутність полягає в тому, щоб сума квадратів відхилень теоретичних і дослідних значень досліджуваної величини $(Y_i-y_i)^2$ була мінімальною. Тут Y_i - розраховані за формулою (4.3), y_i – спостережувані значення. Тобто нам необхідно знайти мінімум наступної функції:

$$F(\rho;b)=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-y_i\right)^2 \qquad (4.4)$$

Або, підставивши замість Y_i його значення з формули (4.3), мінімум функції:

$$F(\rho;b)=\sum_{i=1}^{n}\left(\rho\, x_i+b-y_i\right)^2 \qquad (4.5)$$

Для відшукання мінімуму прирівнюємо до нуля похідні по ρ і b, таким чином одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\rho\sum x^2+b\sum x=\sum xy\\ \rho\sum x+nb=\sum y\end{cases} \qquad (4.6)$$

Розв'язав систему, знайдемо невідомі коефіцієнти:

$$\rho_{XY}=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2} \qquad (4.7)$$

$$b=\frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum xy}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2} \qquad (4.8)$$

Аналогічно знаходять рівняння прямої регресії X на Y.

Приклад. Знайти рівняння регресії Y на X, якщо у випробуваннях було отримано наступні результати:

						Σ
X	1	1.5	3	4.5	5	15
Y	1.25	1.4	1.5	1.75	2.25	8.15

Будуємо допоміжну таблицю:

						Σ
x_i^2	1	2.25	9	20.25	25	57.5
$x_i y_i$	1.25	2.1	4.5	7.875	11.25	26.975

Підставимо обчислені в таблиці суми у співвідношення (4.7), (4.8), отримаємо:

$$\rho_{xy} = \frac{5 \cdot 26.975 - 15 \cdot 8.15}{5 \cdot 57.5 - 15^2} = 0.202,$$

$$b = \frac{5 \cdot 7.5 \cdot 8.15 - 15 \cdot 26.97515}{5 \cdot 57.5 - 15^2} = 1.024.$$

Тоді рівняння лінійної регресії набуває вигляду: Y=0.202X+1.024.

Графічно точки, отримані в результаті випробувань, і лінія регресії представлено на рисунку 4.1.

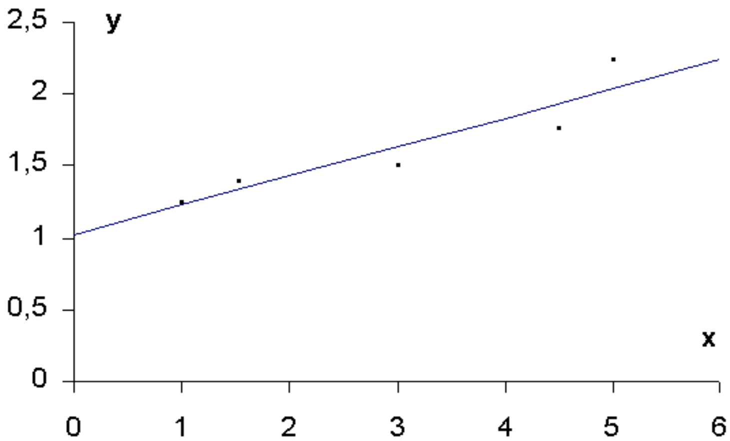

Рис.4.1 Графік лінійної регресії

Однак при вибірках малого обсягу можливі істотні помилки. При великому ж числі спостережень те саме значення x може зустрітися n_x разів, y – n_y разів, а пари чисел (x,y) – n_{xy} разів. Тому дані групують і записують у вигляді таблиці, що називають *кореляційною*. Зовнішній вигляд кореляційної таблиці розглянемо на наступному прикладі:

y \ x	10	20	30	40	n_y
0.4	5	-	7	14	26
0.6	-	2	6	4	12
0.8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	n=60

У першому рядку таблиці 4.1 перебувають можливі значення компоненти X, у першому стовпці - значення компоненти У. У полі таблиці розташовані частоти, з якими зустрічалася кожна пара значень. Останні рядок і стовпець служать для підсумовування відповідних частот і в нижньому правому куті, як перевірка, одержують обсяг вибірки.

Перетворимо систему (4.6), скориставшись наступними тотожностями:

$$\sum x = n\overline{x}, \qquad \sum y = n\overline{y}; \qquad (4.9)$$

$$\sum x^2 = n\overline{x^2}, \qquad \sum xy = \sum n_{xy}xy. \qquad (4.10)$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\bar{x}b = \sum n_{xy}xy \\ \bar{x}\rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases} . \qquad (4.11)$$

Розв'язуючи отриману систему (4.11), знаходимо невідомі ρ_{yx} і b, а потім і шукане рівняння. Однак зазвичай рівняння регресії записують у трохи іншому виді. Для цього вводять нову величину - вибірковий коефіцієнт кореляції, по формулі:

$$r_B = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{nS_xS_y} . \qquad (4.12)$$

Після цього вибіркове рівняння прямої регресії Y на X прийме вид:

$$y - \bar{y} = r_B \frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}) . \qquad (4.13)$$

А вибіркове рівняння прямої регресії X на Y матиме вид:

$$x - \bar{x} = r_B \frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}) . \qquad (4.14)$$

Коефіцієнт кореляції вимірює силу (тісноту) лінійного зв'язку між Y і X. Якщо $r_B=\pm1$, то Y і X зв'язані лінійною функціональною залежністю, якщо $r_B=0$, то вони не залежні лінійно. Якщо r_B близько до нуля, то немає сенсу шукати рівняння прямої регресії.

Для застосування результатів вибіркових даних до генеральної сукупності використовують параметричну гіпотезу про значущість коефіцієнта кореляції (див. розділ 2.3).

Розділ 4.3 Перевірка гіпотези про незалежність двох випадкових величин

Нехай проведено n експериментів, у результаті яких випадкові величини X и Y прийняли відповідно значення x_1, x_2, …, x_k і y_1, y_2, …, y_ℓ. Позначимо n_{ij} – число експериментів, у яких $X=x_i$, $Y=y_j$. Результати дослідів можна представити у вигляді *таблиці спряженості ознак* виду:

Y / X	y_1	y_2	…	y_ℓ	Σ
x_1	n_{11}	n_{12}	…	$n_{1\ell}$	n_1
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	$n_{k\ell}$	n_k
Σ	m_1	m_2	…	m_ℓ	$\Sigma n_{ij}=n$

Таблиця 4.2 Таблиця спряженості ознак

Перевіряється гіпотеза H_0, яка стверджує, що випадкові величини X и Y незалежні. Якщо H_0 вірна, то за означенням:

$$P\{X=x_i;\ Y=y_j\}=P(X=x_i)P(Y=y_j)=p_i q_j \tag{4.15}$$

Нехай $\hat{p}_i=\dfrac{n_i}{n}$; $\hat{q}_j=\dfrac{m_j}{n}$ - оцінки ймовірностей p_i і q_j. Якщо гіпотеза H_0 вірна, то очікуване число експериментів $\hat{n}_{ij}$, у яких випадкова величина X прийняла значення x_i (потрапила в i-ий інтервал), а випадкова величина Y прийняла значення y_j (потрапила в j-ий інтервал) дорівнює:

$$\hat{n}_{ij} = n\hat{p}_i \hat{q}_j = \frac{n_i m_j}{n} \tag{4.16}$$

Для перевірки гіпотези H_0 за критерієм χ^2 використовують наступну статистику:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\left(n_{ij} - \hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}} \tag{4.17}$$

За умови, що гіпотеза H_0 вірна, а всі очікувані частоти $\hat{n}_{ij} \geq 4$, статистика (4.17) має розподіл χ^2 з $(k-1)(\ell-1)$ ступенями вільності.

Гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α, якщо вибіркове значення статистики відповідає наступній нерівності:

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2\big((k-1)(\ell-1)\big). \tag{4.18}$$

Для обчислення χ_B^2 зручно використовувати формулу (4.19), тотожну формулі (4.17):

$$\chi_B^2 = n\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{n_{ij}^2}{n_i m_j} - 1\right). \tag{4.19}$$

Зауваження 1. Якщо очікувані частоти $\hat{n}_{ij}$ для деяких кліток таблиці не задовольняють умові $\hat{n}_{ij} \geq 4$, то відповідні рядки й стовпці повинні бути об'єднані із сусідніми.

Зауваження 2. Якщо $(k-1)(\ell-1) \geq 8$ і $n \geq 40$, то мінімальне припустиме значення очікуваних частот може бути рівним одиниці.

Зауваження 3. Для перевірки однорідності декількох вибірок (тобто того факту, що вони отримані з однієї генеральної сукупності) використовують той самий критерій, що й для перевірки незалежності.

Приклад 1. Комплектуючі надходять із трьох підприємств: A, B і C. Результати перевірки якості комплектуючих представлені у вигляді таблиці:

	A	B	C	Усього
Придатні	29	38	53	120
Брак	1	2	7	10
Усього	30	40	60	130

Чи можна вважати, що якість не залежить від постачальника? Прийняти рівень значущості α=0.1.

Перевіряється гіпотеза про незалежність двох ознак - якості виробу й місця його виготовлення. По формулі (4.19) отримаємо:

$$\chi_B^2 = 130\left(\frac{29^2}{30\cdot 120}+\frac{38^2}{40\cdot 120}+\frac{53^2}{60\cdot 120}+\frac{1^2}{30\cdot 10}+\frac{2^2}{40\cdot 10}+\right.$$

$$\left.+\frac{7^2}{60\cdot 10}-1\right)\approx 2.546.$$

Число ступенів вільності f=(2-1)(3-1)=2. По таблиці знаходимо $\chi_{0.9}^2(2)=4.605$ і отримуємо, що $\chi_B^2<4.605$, отже якість комплектуючих не залежить від постачальника.

Приклад 2. Визначається залежність кольору волосся від місця проживання. Експериментальні дані представлені в таблиці:

Колір / Район	Рудий	Світлий	Темний	Усього
A	2	9	9	20
B	3	6	21	30
C	15	15	20	50
Усього	20	30	50	100

На рівні значущості α=0.05 перевірити гіпотезу про залежність кольору волосся від регіону проживання.

Обчислимо вибіркове значення критерію по формулі (4.19):

$$\chi_B^2 = 100\left(\frac{2^2}{20\cdot 20}+\frac{9^2}{30\cdot 20}+\frac{9^2}{50\cdot 20}+\frac{3^2}{20\cdot 30}+\frac{6^2}{30\cdot 30}+\frac{21^2}{50\cdot 30}+\right.$$

$$\left.+\frac{15^2}{20\cdot 50}+\frac{15^2}{50\cdot 30}+\frac{20^2}{50\cdot 50}-1\right)=11.$$

Число ступенів вільності f=(3-1)(3-1)=4. По таблиці знаходимо $\chi_{0.95}{}^2(4)$ =9.49 і маємо $\chi_B{}^2>\chi_{0.95}{}^2(4)$, отже залежність існує.

Розділ 4.4 Перевірка гіпотези про рівність параметрів двох біноміальних розподілів

Припустимо, що незалежно проведено дві серії, що містять n_1 і n_2 випробувань відповідно. У першій серії подія A відбулася n_{11} разів, а в другій – n_{21} разів. Потрібно перевірити гіпотезу H_0 про те, що ймовірність появи події А в обох серіях однакова, тобто H_0: $p_1=p_2$.

Складемо таблицю:

Подія / Серія	A	$\overline{A}$	$\sum$
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}	n_{22}	$n_{2\cdot}$
$\sum$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\sum n_{\cdot\cdot}=n$

Таблиця 4.3 Розподіл частот по серіям

Гіпотеза H_0 еквівалентна гіпотезі про приналежність вибірок однієї й тої ж генеральної сукупності й перевіряється по χ^2 – критерію. Для обчислення вибіркового значення критерію використовують формулу:

$$\chi_B^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}} \quad . \tag{4.20}$$

Гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості α, якщо

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2(1) \ . \tag{4.21}$$

<u>Зауваження</u>. Обмеження на використання методу полягає в тому, що всі $\hat{n}_{ij}=\dfrac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}>3$ і $n>20$. Для малих вибірок необхідно замінити n на n-1; при цьому повинні виконуватися нерівності: $n_{1\cdot}>5$, $n_{2\cdot}>n_{1\cdot}/3$.

<u>Приклад</u>. Досліджувалися два способи виготовлення поршневих кілець. Перевірити гіпотезу про рівність відсотка браку при рівні значущості 0.01. Дані дослідження представлені в таблиці:

Процес \ Кільця	Придатні	Брак	$\sum$
1	195	5	200
2	149	2	151
$\sum$	344	7	351

Складемо нульову гіпотезу H_0: відсоток браку однаковий в обох способах. Перевіримо обмеження - мінімальне значення очікуваної частоти:

$$\hat{n}_{22} = \frac{n_2 . n_{\cdot 2}}{n} = \frac{7 \cdot 151}{351} = 3.01 > 3 .$$

Значить можна перейти до перевірки гіпотези, для чого обчислимо χ_B^2:

$$\chi_B^2 = \frac{351(195 \cdot 2 - 5 \cdot 149)^2}{200 \cdot 151 \cdot 344 \cdot 7} \approx 0.608 .$$

Порівняємо з табличним значенням: $\chi_B^2 < \chi_{0.99}^2(1)=6.63$.
Отже, немає підстав відкидати гіпотезу H_0.

ГЛАВА 5 НЕПАРАМЕТРИЧНІ МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Розділ 5.1 Критерій знаків

У практиці обробки результатів генеральної сукупності часто невідомий закон або відрізняється від нормального розподілу випадкової величини. У цих випадках застосовують методи, що не залежать від розподілу, або, так звані *непараметричні*. Ці методи використовують не самі чисельні значення елементів вибірки, а *структурні властивості вибірки* (наприклад, порядок між елементами). Тому потужність таких методів нижче, ніж потужність параметричних гіпотез. Достоїнством цих методів є простота й можливість побудови загальних суджень. Більша група непараметричних критеріїв використовується для перевірки гіпотези про приналежність двох вибірок однієї й тої ж генеральної сукупності, Тобто про рівність функцій розподілу: $F(x)\equiv F(y)|_{y=x}$. Такі генеральні сукупності називаються *однорідними*.

Найпростішим критерієм такого роду є критерій знаків. Він служить для перевірки гіпотези H_0 про однорідність генеральних сукупностей по попарно зв'язаних вибірках (задача порівняння двох вимірювальних приладів).

Критерій знаків. Використовується n об'єктів і над кожним проводять по одному виміру за допомогою обох приладів. Якщо вибірки однорідні, то значення x_i і y_i взаємозамінні й імовірності появи того, що $x_i-y_i>0$ і $x_i-y_i<0$ рівні.

Статистикою критерію знаків є число знаків «+» у послідовності знаків різниць, не рівних нулю. За умови, що H_0 вірна, а пари спостережень $(x_i; y_i)$ незалежні, число знаків має біноміальний розподіл з параметрами $p=1/2$ і $n=L$ (L-число ненульових знаків). Таким чином, нульова гіпотеза має вигляд: H_0: $p=1/2$, а можливі конкуруючі гіпотези: $H_1^{(1)}$:$p>1/2$, $H_1^{(2)}$: $p<1/2$, $H_1^{(3)}$: $p\neq 1/2$.

Для перевірки гіпотези H_0 використовують статистику Фішера-Снедекора. Критичні області:
для $H_1^{(1)}$:

$$F_B = \frac{R}{L - R + 1} \geq F_{1-\alpha}(k_1; k_2) \ , \qquad (5.1)$$

де $k_1=2(L-R+1)$, $k_2=2R$;
для $H_1^{(2)}$:

$$F_B = \frac{L - R}{R + 1} \geq F_{1-\alpha}(k_1; k_2) \qquad (5.2)$$

де $k_1=2(R+1)$, $k_2=2(L-R)$;
для $H_1^{(3)}$: об'єднання перших двох випадків для рівня значущості $\alpha/2$.
Тут R – число знаків «+», k_1, k_2 – ступені вільності.
Приклад. Перевірялася швидкість десяти автомобілів за допомогою двох приладів. Результати перевірки представлені у вигляді наступної таблиці:

V_1	70	85	63	54	65	80	75	95	52	55
V_2	72	86	62	55	63	80	78	90	53	57

Чи можна сказати, що другий прилад дає завищені значення? Рівень значущості прийняти 0.1.
Складемо послідовність знаків різниці швидкостей автомобілів отриманих на першому й другому приладах:

-, -, +, -, +, 0, -, +, -,-.

Альтернативна гіпотеза припускає, що показання другого приладу вище, тоді знаків «+» повинне бути менше, а ймовірність, отже, повинна бути менша 1/2. Отже, альтернативну гіпотезу приймаємо $H_1^{(2)}$:$p<1/2$ і використовуємо формулу (5.2).

$k_1=2(3+1)=8$ $k_2=2(9-3)=12$ $F_B=(9-3)/(3+1)=1.5$.

По таблиці Фішера $F_{0.9}$ (8;12) =2.24, а тому що $F_B<F_{0.9}$ (8;12) немає підстави відкидати гіпотезу H_0. Показання приладів однорідні.

Розділ 5.2 Критерій Уілкоксона - Манна - Уітні

Критерій Уілкоксона-Манна-Уітні застосовується для порівняння двох незалежних вибірок обсягів n_1 і n_2 і перевіряє гіпотезу H_0, яка стверджує, що вибірки отримані з однорідних генеральних сукупностей (або з однієї генеральної сукупності), та їх функції розподілу ймовірностей рівні: $F_1(x)=F_2(x)$. Цей критерій дозволяє виявити відмінності в значенні параметра між невеликими вибірками.

Статистика U будується в такий спосіб. Розташуємо n_1+n_2 значень об'єднаної вибірки в порядку зростання (у вигляді варіаційного ряду). Для кожного елемента ряду поставимо у відповідність його номер у ряді – ранг. Якщо кілька елементів збігаються по величині, то кожному з них привласнюється ранг, рівний середньому арифметичному їхніх номерів. Останній елемент повинен мати ранг n_1+n_2. Далі нехай R_1 – сума рангів першої вибірки, R_2 – другої. Обчислимо наступні величини:

$$U_1=n_1n_2+n_1(n_1+1)/2-R_1 \tag{5.3}$$

$$U_2=n_1n_2+n_2(n_2+1)/2-R_2 \tag{5.4}$$

Правильність обчислень перевіряють по формулі: $U_1+U_2=n_1n_2$. Вибіркове значення U_B є мінімум з U_1 і U_2.

У таблиці розподілу Уілкоксона-Манна-Уітні за відповідними обсягами вибірок n_1 і n_2 знаходять критичне значення $U_{кр}$ на рівні значущості α. Гіпотеза H_0 відхиляється, якщо $U_B \le U_{кр}$, тобто визначається наявність істотної відмінності між рівнем ознаки в даних вибірках (приймається альтернативна гіпотеза). У протилежному випадку $U_B > U_{кр}$ приймається нульова гіпотеза. Достовірність відмінностей тим вище, чим менше значення U_B.

Якщо обсяг кожної з вибірок $n_1, n_2>8$, то перевірку гіпотези H_0 можна проводити, використовуючи нормовану і центровану статистику Манна-Уітні:

$$Z = \frac{U_B - n_1 n_2 / 2}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)/12}}. \tag{5.5}$$

Z має для гіпотези H_0 нормальний розподіл N(0;1). Критичні точки знаходять по таблиці розподілу Лапласа залежно від виду альтернативної гіпотези:

1). Двостороння $\Phi(Z_{kp})=(1-\alpha)/2$. Критична область: $|Z_B|>Z_{kp}$.

2). Одностороння $\Phi(Z_{kp})=(1-2\alpha)/2$. Критична область: $Z_B<-Z_{kp}$. або $Z_B>Z_{kp}$ для лівосторонньої й правосторонньої відповідно.

<u>Приклад</u>. Вимірялася напруга пробою у діодів двох партій, результати вимірів представлені в наступній таблиці:

1 партія	39	50	61	67	40	40	54	-
2 партія	60	53	42	41	40	54	63	69

Чи можна вважати, що для другої партії напруга пробою вище при рівні значущості 0.1?

Для критерію Уілкоксона-Манна-Уітні складемо варіаційний ряд, відзначаючи приналежність до першої партії рисою зверху:

Элемент	$\overline{39}$	$\overline{40}$	$\overline{40}$	40	41	42	$\overline{50}$	53	$\overline{54}$	54	60	$\overline{61}$	63	$\overline{67}$	69
Ранг	1	3	3	3	5	6	7	8	9.5	9.5	11	12	13	14	15

Знайдемо суми рангів першої і другої вибірок: R_1=49.5, R_2=70.5. Використовуючи формули (5.3) і (5.4), обчислимо величини U_1 і U_2:

$U_1=7\cdot8+7(7+1)/2-49.5=34.5$, $U_2=7\cdot8+8(8+1)/2-70.5=21.5$.

Проведемо перевірку: $34.5+21.5=7\cdot8=56$.

$U_B = \min(U_1;U_2)=21.5$.

По таблиці знаходимо критичне значення для однобічної гіпотези $U_{кр}(\alpha=0.1;7;8)=16$. Оскільки $U_B>U_{кр}$, то приймаємо гіпотезу H_0, тобто напруги двох партій вважаємо рівні.

Розділ 5.3 Рангова кореляція за критеріями Спірмена і Кендела

Існує ряд показників тісноти зв'язку, коли ознакам спостережуваного явища не вдається однозначно приписати ті або інші значення. До таких показників відносять коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Його застосування не пов'язане з передумовою нормальності розподілу вихідних даних.

При застосуванні методів рангової кореляції виходять не з точних кількісних оцінок значень досліджуваної величини, а з рангів, коли елементи ряду упорядковуються згідно погіршення (або поліпшення) якості ознаки. Таким чином, елементам привласнюються ранги - їх порядкові номери в цьому ряді. Цей процес називають ранжируванням.

Якщо елемент володіє не одним, а двома ознаками x і y, то для дослідження їхнього впливу один на одного кожному елементу приписується два порядкових номера відповідно із установленим правилом ранжирування. Позначимо ранги відповідні ознаці x - u_i, а ознаці y - v_i.

Далі, щоб знайти кореляцію між ознаками x і y, шукають зв'язок між ранговими числами u_i, v_i шляхом визначення відповідності між двома послідовностями порядкових оцінок. Інакше кажучи, вимірюється тісноту рангової кореляції. Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена обчислюється за формулою:

$$r_S = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}, \tag{5.6}$$

де $d_i = u_i - v_i$, n - об'єм вибірки.

На практиці доводиться зіштовхуватися з випадками, коли два або більша кількість елементів сукупності мають однакові значення ознаки й дослідник не здатний знайти істотні розходження між ними. Елементи, що володіють цією властивістю - відсутністю переваг, - називаються *зв'язаними*, а утворена з них група - *зв'язкою*. Метод, що застосовується для приписування порядкового номера зв'язаним елементам, називається методом середніх рангів. Він полягає в усередненні рангів, які мали б елементи, якби вони були відмінні. Сума рангів при цьому залишається точно такою, як і при ранжируванні без зв'язків. При наявності зв'язаних рангів застосовують коефіцієнт рангової кореляції Кендела (виправлене значення коефіцієнта кореляції Спірмена):

$$r_K = \frac{\frac{n(n^2-1)}{6} - \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - T_x - T_y}{\sqrt{\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - 2T_x\right)\left(\frac{n(n^2-1)}{6} - 2T_y\right)}}, \tag{5.7}$$

або

$$r_K = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1) - 6(T_x + T_y)}. \tag{5.8}$$

де $T_x = \frac{1}{12}\sum_i (a_i^3 - a_i)$, $T_y = \frac{1}{12}\sum_i (b_i^3 - b_i)$, a_i, b_i - кількості зв'язаних рангів у кожній зв'язці для x і y відповідно.

Значення коефіцієнта рангової кореляції r належать інтервалу $[-1; 1]$. Якщо $u_i = v_i$, то $r = 1$. В цьому випадку є повна погодженість між елементами двох послідовностей. Кожний елемент займає те саме місце в обох рядах, що означає повну додатну кореляцію рангів. Якщо $r = -1$, то елементи двох послідовностей розташовані у зворотному порядку й між ними повна неузгодженість. Це означає повну від'ємну кореляцію рангів. І нарешті, якщо $r = 0$, то це свідчить про відсутність кореляції між рангами.

Для перевірки гіпотези H_0: r=0 (між рядами немає кореляції) застосовують таблицю критичних значень критерію, які залежать від рівня значущості α і об'єму вибірки n. Спостережуване значення критерію значимо відрізняється від нуля, якщо його абсолютна величина є більшою, або дорівнює критичному значенню. Коли знак коефіцієнта r_S не грає ролі, і конкуруюча гіпотеза має вигляд H_1: $r \neq 0$, то використовують двосторонню область, при цьому рівень значущості необхідно подвоїти.

Приклад 1. У конкурсі проектів на будівництво паркової зони два члена журі оцінили 10 робіт за 100-бальною шкалою:

Роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Суддя 1	70	83	65	98	77	85	99	75	60	80
Суддя 2	80	75	67	95	85	72	90	78	65	70

Чи можна вважати оцінювання членів журі узгодженим?

Складемо таблицю рангів:

Суддя 1	70	83	65	98	77	85	99	75	60	80
Ранг u_i	8	4	9	2	6	3	1	7	10	5
Суддя 2	80	75	67	95	85	72	90	78	65	70

Ранг v_i	4	6	9	1	3	7	2	5	10	8

Підрахуємо різниці між рангами двох послідовностей.

d_i	4	2	0	1	3	4	1	2	0	3

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 16 + 4 + 1 + 9 + 16 + 1 + 4 + 9 = 60 .$$

Обчислимо коефіцієнт рангової кореляції Спірмена:

$$r_S = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{60}{10(100-1)} = \frac{2}{33} \approx 0.06 .$$

Звідки можна зробити висновок про неузгодженість оцінювання цих двох членів журі.

<u>Приклад 2.</u> Перевірити залежність успішності вивчення математики та англійської мови для 12 студентів на основі балів, отриманих в першому семестрі:

Студенти	D	E	B	G	K	A	C	H	I	F	L	J
Англійська мова (A)	70	80	100	75	80	70	95	68	75	80	65	70
Математика (M)	65	75	90	95	90	75	90	77	65	100	80	78

Зробити висновок про корельованість знань з англійської мови та математики на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

Представимо дані таблиці за допомогою рангів:

Студенти	D	E	B	G	K	A	C	H	I	F	L	J
Ранг A	5	3	1	4	3	5	2	6	4	3	7	5
Ранг M	8	7	3	2	3	7	3	6	8	1	4	5

Для існуючих зв'язок знайдемо середні значення рангів:

Студенти	B	C	E	K	F	G	I	D	A	J	H	L
Ранг А	1	2	4	4	4	6.5	6.5	9	9	9	11	12
Ранг М	4	4	9.5	4	1	2	11.5	11.5	9.5	7	8	6

$$\sum d_i^2 = 9+4+30{,}25+9+20{,}25+25+6{,}25+0{,}25+4+9+36=$$

$$=153;\quad T_x = \frac{1}{12}\left(\left(3^3-3\right)+\left(2^3-2\right)+\left(3^3-3\right)\right)=4{,}5\,;$$

$$T_y = \frac{1}{12}\left(\left(3^3-3\right)+\left(2^3-2\right)+\left(2^3-2\right)\right)=3\,;$$

$$r_K = 1-\frac{6\cdot 153}{12(12^2-1)-6\cdot 7{,}5}\approx 0{,}451\,.$$

Критичне значення коефіцієнта за таблицею $r_{S\,кр}$=0,4965. Оскільки 0,451<0,4965, то нульова гіпотеза приймається. Таким чином, між оцінками з цих предметів немає взаємозалежності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В.В.Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін - Київ. Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
2. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика:Навч.-метод. Посібник. У 2 ч.-Ч.1. Теорія ймовірностей / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний .- Вид. 2-ге, без змін. -К. : КНЕУ,2007. – 304 с.

3. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика:Навч.-метод. Посібник. У 2 ч.-Ч.2..- Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний . - Вид . 2-ге, без змін.-К. : КНЕУ, 2007. – 368 с.
4. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебник для студентов вузов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 551 с.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : Учебное пособие для бакалавров. - М. : Юрайт, 2013. – 479 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей : учебник . – 12-е изд., стер. – Москва: ЮСТИЦИЯ, 2018. – 658 с.
7. Дорош А. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навч. посібник /А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – К. : НТУУ "КПІ", 2006. – 268 с.
8. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник [для самост. вивч. дисц.] / А.Б.Волощенко, І.А. Джалладова - К.: КНЕУ, 2003. - 256 с.
9. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. - 448 с.
10. Карташов М.В. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студ. вищ. навч. закл. – ВПЦ Київський університет, 2009. – 480 с.

11. Бобик О.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник/ О.І. Бобик, Г.І. Берегова, Б.І. Копитко. - К.:ВД «Професіонал», 2007. - 560 с.
12. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2016. – 404 с.

ДОДАТКИ

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,d\,z$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47493	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	43831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	49997		4,1	49998	4,2	49999	4,3	49999	4,4	49999
4,5	499997									
5,0	49999997									

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (одностороння критична область)							
	0,25	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**	**0,0005**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	318,289	636,578
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,328	31,600
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291
	0,5	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
	Рівень значущості α (двостороння критична область)							

Таблиця значень χ^2 в залежності від r і α

(r – число ступенів вільності)

r	Рівень значущості α (Ймовірність $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha)$)											
	0,99	0,975	0,95	0,90	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	0,0002	0,00098	0,004	0,02	0,46	1,32	2,71	3,84	5,20	6,63	7,88	10,8
2	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,12	0,21	0,35	0,58	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	3,05	3,82	4,57	5,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,57	4,40	5,23	6,30	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	4,11	5,01	5,89	7,04	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,66	5,63	6,57	7,79	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	5,23	6,26	7,26	8,55	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,81	6,91	7,96	9,31	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	6,41	7,56	8,67	10,1	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	7,01	8,23	9,39	10,9	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	7,63	8,91	10,1	11,7	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	8,26	9,59	10,9	12,4	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,90	10,28	11,6	13,2	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	9,54	10,98	12,3	14,0	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	10,2	11,69	13,1	14,8	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	10,9	12,40	13,8	15,7	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	11,5	13,12	14,6	16,5	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	12,2	13,84	15,4	17,3	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	12,9	14,57	16,2	18,1	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	13,6	15,31	16,9	18,9	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	14,3	16,05	17,7	19,8	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	15,0	16,79	18,5	20,6	29,3	34,8	43	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора

(k_1 – число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2 – число ступенів вільності меншої дисперсії)

k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	Рівень значущості $\alpha = 0,01$																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	21,20	18,00	16,69	15,89	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	4,78	3,69
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	3,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	8,10	5,89	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
	Рівень значущості $\alpha = 0,05$																	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	9,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,36	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

Критичні значення U для Уілкоксона-Манна-Уітні критерію для односторонньої області при $\alpha = 0.05$ і двосторонньої області при $\alpha = 0.1$ (n-менший осяг, m - більший обсяг)

m	n: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—																			
2	—	—																		
3	—	—	0																	
4	—	—	0	1																
5	—	0	1	2	4															
6	—	0	2	3	5	7														
7	—	0	2	4	6	8	11													
8	—	1	3	5	8	10	13	15												
9	—	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	—	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	—	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	—	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	—	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	—	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	—	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	—	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				
17	—	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	—	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	0	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	0	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
21	0	5	11	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146
22	0	5	12	20	28	36	44	52	60	68	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154
23	0	5	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	98	107	116	125	134	143	152	161
24	0	6	13	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169
25	0	6	14	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177
26	0	6	15	24	33	43	53	62	72	82	92	103	113	123	133	143	154	164	174	185
27	0	7	15	25	35	45	55	65	75	86	96	107	117	128	139	149	160	171	182	192
28	0	7	16	26	36	46	57	68	78	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200
29	0	7	17	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	138	150	162	173	185	196	208
30	0	7	17	28	39	50	61	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216
31	0	8	18	29	40	52	64	76	88	100	112	124	136	149	161	174	186	199	211	224
32	0	8	19	30	42	54	66	78	91	103	116	128	141	154	167	180	193	206	218	231
33	0	8	19	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	172	186	199	212	226	239
34	0	9	20	32	45	57	70	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247
35	0	9	21	33	46	59	73	86	100	114	128	141	156	170	184	198	212	226	241	255
36	0	9	21	34	48	61	75	89	103	117	131	146	160	175	189	204	219	233	248	263
37	0	10	22	35	49	63	77	91	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271
38	0	10	23	36	50	65	79	94	109	124	139	154	170	185	201	216	232	247	263	278
39	1	10	23	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286*
40	1	11	24	39	53	68	84	99	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294*

Критичні значення U для Уілкоксона-Манна-Уітні критерію для односторонньої області при $\alpha = 0.1$ і двосторонньої області при $\alpha = 0.2$ (n-менший осяг, m - більший обсяг)

m	n																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	—																			
2	—	—																		
3	—	0	1																	
4	—	0	1	3																
5	—	1	2	4	5															
6	—	1	3	5	7	9														
7	—	1	4	6	8	11	13													
8	—	2	5	7	10	13	16	19												
9	0	2	5	9	12	15	18	22	25											
10	0	3	6	10	13	17	21	24	28	32										
11	0	3	7	11	15	19	23	27	31	36	40									
12	0	4	8	12	17	21	26	30	35	39	44	49								
13	0	4	9	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58							
14	0	5	10	15	20	25	31	36	41	47	52	58	63	69						
15	0	5	10	16	22	27	33	39	45	51	57	63	68	74	80					
16	0	5	11	17	23	29	36	42	48	54	61	67	74	80	86	93				
17	0	6	12	18	25	31	38	45	52	58	65	72	79	85	92	99	106			
18	0	6	13	20	27	34	41	48	55	62	69	77	84	91	98	106	113	120		
19	1	7	14	21	28	36	43	51	58	66	73	81	89	97	104	112	120	128	135	
20	1	7	15	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94	102	110	119	127	135	143	151
21	1	8	15	23	32	40	48	56	65	73	82	91	99	108	116	125	134	142	151	160
22	1	8	16	25	33	42	51	59	68	77	86	95	104	113	122	131	141	150	159	168
23	1	9	17	26	35	44	53	62	72	81	90	100	109	119	128	138	147	157	167	176
24	1	9	18	27	36	46	56	65	75	85	95	105	114	124	134	144	154	164	174	184
25	1	9	19	28	38	48	58	68	78	89	99	109	120	130	140	151	161	172	182	193
26	1	10	20	30	40	50	61	71	82	92	103	114	125	136	146	157	168	179	190	201
27	1	10	21	31	41	52	63	74	85	96	107	119	130	141	152	164	175	186	198	209
28	1	11	21	32	43	54	66	77	88	100	112	123	135	147	158	170	182	194	206	217
29	2	11	22	33	45	56	68	80	92	104	116	128	140	152	164	177	189	201	213	226
30	2	12	23	35	46	58	71	83	95	108	120	133	145	158	170	183	196	209	221	234
31	2	12	24	36	48	61	73	86	99	111	124	137	150	163	177	190	203	216	229	242
32	2	13	25	37	50	63	76	89	102	115	129	142	156	169	183	196	210	223	237	251
33	2	13	26	38	51	65	78	92	105	119	133	147	161	175	189	203	217	231	245	259
34	2	13	26	40	53	67	81	95	109	123	137	151	166	180	195	209	224	238	253	267
35	2	14	27	41	55	69	83	98	112	127	141	156	171	186	201	216	230	245	260	275
36	2	14	28	42	56	71	86	100	115	131	146	161	176	191	207	222	237	253	268	284
37	2	15	29	43	58	73	88	103	119	134	150	166	181	197	213	229	244	260	276	292
38	2	15	30	45	60	75	91	106	122	138	154	170	186	203	219	235	251	268	284	301*
39	3	16	31	46	61	77	93	109	126	142	158	175	192	208	225	242	258	275	292	309*
40	3	16	31	47	63	79	96	112	129	146	163	180	197	214	231	248	265	282	300*	317*

Критичні значення U для Уілкоксона-Манна-Уітні
критерію для односторонньої області при $\alpha = 0.025$ і двосторонньої області при $\alpha = 0.05$ (n-менший осяг, m - більший обсяг)

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	—	—	0	1	2															
6	—	—	1	2	3	5														
7	—	—	1	3	5	6	8													
8	—	0	2	4	6	8	10	13												
9	—	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	—	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	—	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	—	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	—	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	—	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	—	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					
16	—	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	—	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	—	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		
19	—	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	—	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	—	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	—	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	—	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	—	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	—	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	163
26	—	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	—	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	—	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	—	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	—	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200
31	—	5	14	24	34	45	66	67	78	90	101	113	125	136	148	160	172	184	196	208
32	—	5	14	24	35	46	58	69	81	93	105	117	129	141	153	166	178	190	203	215
33	—	5	15	25	37	48	60	72	84	96	108	121	133	146	159	171	184	197	210	222
34	—	5	15	26	38	50	62	74	87	99	112	125	138	151	164	177	190	203	217	230
35	—	6	16	27	39	51	64	77	89	103	116	129	142	156	169	183	196	210	224	237
36	—	6	16	28	40	53	66	79	92	106	119	133	147	161	174	188	202	216	231	245
37	—	6	17	29	41	55	68	81	95	109	123	137	151	165	180	194	209	223	238	252
38	—	6	17	30	43	56	70	84	98	112	127	141	156	170	185	200	215	230	245	259
39	0	7	18	31	44	58	72	86	101	115	130	145	160	175	190	206	221	236	252	267
40	0	7	18	31	45	59	74	89	103	119	134	149	165	180	196	211	227	243	258	274

Критичні значення коефіцієнта рангової кореляції r_S Спірмена для одностороннього критерію

n	Рівень значущості α					
	0,001	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100
4	—	—	—	—	0,8000	0,8000
5	—	—	0,9000	0,9000	0,8000	0,7000
6	—	0,9429	0,8857	0,8286	0,7714	0,6000
7	0,9643	0,8929	0,8571	0,7450	0,6786	0,5357
8	0,9286	0,8571	0,8095	0,6905	0,5952	0,4762
9	0,9000	0,8167	0,7667	0,6833	0,5833	0,4667
10	0,8667	0,7818	0,7333	0,6364	0,5515	0,4424
11	0,8455	0,7545	0,7000	0,6091	0,5273	0,4182
12	0,8182	0,7273	0,6713	0,5804	0,4965	0,3986
13	0,7912	0,6978	0,6429	0,5549	0,4780	0,3791
14	0,7670	0,6747	0,6220	0,5341	0,4593	0,3626
15	0,7464	0,6536	0,6000	0,5179	0,4429	0,3500
16	0,7265	0,6324	0,5824	0,5000	0,4265	0,3382
17	0,7083	0,6152	0,5637	0,4853	0,4118	0,3260
18	0,6904	0,5975	0,5480	0,4716	0,3994	0,3148
19	0,6737	0,5825	0,5333	0,4579	0,3895	0,3070
20	0,6586	0,5684	0,5203	0,4451	0,3789	0,2977
21	0,6455	0,5545	0,5078	0,4351	0,3688	0,2909
22	0,6318	0,5426	0,4963	0,4241	0,3597	0,2829
23	0,6186	0,5306	0,4852	0,4150	0,3518	0,2767
24	0,6070	0,5200	0,4748	0,4061	0,3435	0,2704
25	0,5962	0,5100	0,4654	0,3977	0,3362	0,2646
26	0,5856	0,5002	0,4564	0,3894	0,3299	0,2588
27	0,5757	0,4915	0,4481	0,3822	0,3236	0,2540
28	0,5660	0,4828	0,4401	0,3749	0,3175	0,2490
29	0,5567	0,4744	0,4320	0,3685	0,3113	0,2443
30	0,5479	0,4665	0,4251	0,3620	0,3059	0,2400

Навчальне видання

ЛЕВИЦЬКА Тетяна Ігорівна
ПОЖУЄВА Ірина Сергіївна

КУРС ЛЕКЦІЙ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Комп’ютерний набір *Левицька Т.І., Пожуєва І.С.*

Підписано до друку 21.09.2020. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 9,6.
Тираж 100 прим. Зам. № 991.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.