ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА В РІШЕННЯХ ЗАДАЧ ІЗ ЗБІРНИКА І. В. МЕЩЕРСЬКОГО

П. К. Штанько, О. С. Омельченко

КІНЕМАТИКА

П. К. Штанько, О. С. Омельченко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

в рішеннях задач
із збірника
І. В. Мещерського

Частина II
КІНЕМАТИКА

Запоріжжя
СТАТУС
2024

ББК 22.2я73
УДК 531 (075.8)
Ш87

Штанько П. К., Омельченко О. С.
Ш87 **Теоретична механіка в рішеннях задач із збірника І. В. Мещерського. Частина ІІ. Кінематика**: навчальний посібник / сост. . П. К. Штанько, О. С. Омельченко; за ред. П. К. Штанька. — Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. — 264 с.
ISBN 978-617-8040-64-2

Книга являє собою посібник по рішенню задач теоретичної механіки. Короткі відомості з теорії надані в конспективній формі. Мета посібника – навчити користувача самостійно вирішувати основні типи задач з теоретичної механіки. Посібник складаєтьсяз трьох томів: І «Статика», ІІ «Кінематика», ІІІ «Динаміка».

Даний посібник може бути корисним не тільки для здобувачів освіти та викладачів, але й для інженерів-конструкторів, тому що рішення багатьох задач є прикладами реальних інженерних розрахунків.

В другому томі «Кінематика» розглядається наступні розділи: рух точки; поступальний рух і обертання твердого тіла навколо нерухомої осі; плоский рух тіла; складний рух точки і твердого тіла; планетарні і диференціальні механізми; сферичний рух. Всього в томі наведено рішення 120 задач.

ББК 22.2я73
УДК 531 (075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальної точки й абсолютно твердого тіла з геометричної точки зору, без аналізу причин, що зумовлюють цей рух, тобто без урахування сил.

Слово ”кінематика“ походить від грецького ”кінема“, що означає рух.

У кінематиці рух тіла або точки розглядають відносно вибраної системи відліку.

Системою відліку називають систему координат, яка зв’язана з твердим тілом, відносно якого визначається положення інших тіл в різні моменти часу.

Система відліку може бути як рухомою, так і умовно нерухомою, в більшості технічних задач за умовно нерухому приймають систему координат незмінно зв’язану з Землею. Проте при вивченні руху деяких механічних систем ця система відліку може виявитися не досить точною. Так при досліді з маятником Фуко, де помітно позначається обертання Землі, нерухому систему координат слід зв’язати з Сонцем.

В інших випадках, наприклад, при вивченні руху тіл сонячної системи, обирають систему координат з початком в центрі сонячної системи і осями, які напрямлені до трьох так званих нерухомих зірок.

По відношенню до різних систем відліку тіло може робити різні рухи або перебувати в стані спокою, тобто не змінювати свого положення протягом часу відносно обраної системи відліку. Наприклад, якщо тіло перебуває у спокої по відношенню до Землі, воно вже не буде перебувати в спокої по відношенню до Сонця. У цьому розумінні спокій і рух тіла відносні і залежать від обраної системи відліку.

При русі тіла всі його точки в загальному випадку здійснюють різні рухи. Наприклад, при коченні колеса по прямолінійній рейці його центр здійснює прямолінійний рух, а точки ободу рухаються по циклоїді. Тому кінематику поділяють на кінематику точки (вивчається рух окремих точок) і кінематику тіла.

У кінематиці розглядають дві **основні задачі**:

- установлення математичних методів задавання та опису руху точки (тіла) відносно вибраної системи відліку;
- визначення кінематичних характеристик заданого руху – траєкторій окремих точок, їх швидкості та прискорення.

Рух тіл відбувається у просторі з плином часу. Простір у механіці розглядається як трьохвимірний евклідов простір. За одиницю довжини приймається метр. Час вважається універсальним, тобто який плине однаково в усіх системах виміру. Час вимірюється в секундах. Час є скалярна величина, яка безперервно змінюється. В задачах кінематики час t приймається за незалежну змінну величину (аргумент). Всі інші змінні величини (відстань, швидкість і т.і.) розглядаються як функції часу t.

Даний посібник може бути корисним не тільки для здобувачів освіти та викладачів, але й для інженерів-конструкторів, тому що рішення багатьох задач є прикладами реальних інженерних розрахунків.

1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1 Траєкторія і рівняння руху точки

Безперервна лінія, яку описує точка, що рухається відносно даної системи відліку, називається **траєкторією точки**.

Закон руху точки можливо задати у трьох формах: векторній, координатній та натуральній.

Векторна форма завдання руху точки.

Для визначення законів руху прийнято ортонормовану декартову систему координат з базисом $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$. Проведемо у рухому точку M радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, який визначає положення точки M (Рис. 1.1):

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1.1}$$

Вираз (1.1) є **законом руху точки M у векторній формі.** Криву, яку описує точка M у просторі, називають **траєкторією руху точки або годографом радіуса-вектора $\bar{r}$.**

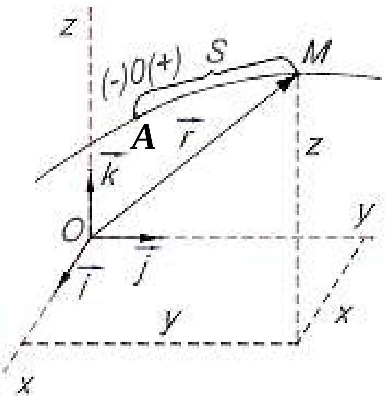


Рисунок 1.1

Координатна форма задання руху точки

Під час руху точки M у просторі кожному моменту часу t відповідає визначена сукупність її координат x, y, z.

Отже ці координати є однозначними функціями часу t:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \tag{1.2}$$

Ці залежності **є законом руху точки у координатній формі.** Водночас ці залежності є рівняннями траєкторії точки

M у параметричній формі.

Закон руху точки у натуральній формі

Цей спосіб використовують тоді, коли траєкторія точки відома. Виберемо на траєкторії нерухому точку A та будемо розглядати траєкторію як криволінійну координатну вісь. Встановимо на ній додатній та від'ємний напрями руху (див. рис. 1.1). Тоді положення точки M на траєкторії буде визначатися криволінійною координатою

$$S = f(t). \tag{1.3}$$

Вираз (1.3) є **закон руху точки у натуральній формі**.

Взаємозв'язок різних форм руху точки

1) координатно-векторний зв'язок:

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}; \tag{1.4}$$

2) натурально-координатний зв'язок:

$$S = S_O + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt \tag{1.5}$$

- закон руху точки по траєкторії, де

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt};\ \dot{y} = \frac{dy}{dt};\ \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

- похідні по часу від координат x, y, z.

Задача 10.2(1)

Дано:

x=3t-5, м; (1)

y=4 -2t, м. (2)

Визначити: рівняння траєкторії руху точки та напрям руху точки по траєкторії $A \rightarrow$.

Рівняння траєкторії знаходимо, виключивши з рівнянь (1), (2) час. Для цього помножимо рівняння (1) на 2, а (2) на 3 та складемо їх.

$$(x = 3t - 5) \quad \cdot 2$$

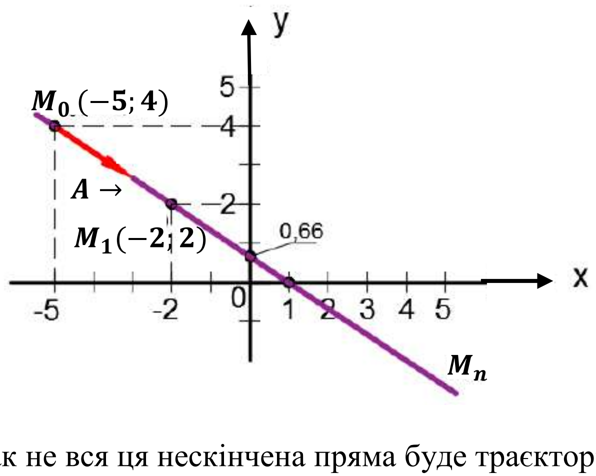
$$(y = -2\mathrm{t} + 4) \cdot 3$$

$$\begin{cases} 2x = 6t - 10 \\ 3y = -6t + 12 \end{cases} +$$

Отримуємо рівняння траєкторії: $2x + 3y - 2 = 0$. Це рівняння прямої лінії. Для побудови цієї прямої визначаємо, що при

$y = 0, x = 1$, а при $x = 0, y = \frac{2}{3} = 0{,}66$.

На рисунок наносимо точки з координатами (1;0) і (0; 0,66), через які проходить наша пряма.



Однак не вся ця нескінчена пряма буде траєкторією точки M. Визначимо положення точки M при $t = 0$. З рівнянь (1) і (2) при $t = 0$ $x = -5$, а $y = 4$, тобто початкове положення точки $M_0(-5; 4)$ – наносимо на траєкторію. Звідси точка починає рух. Для визначення напряму руху визначимо координати точки при $t = 1$ с.

При $t = 1$ с $x = 3 \cdot 1 - 5 = -2$; $y = 4 - 2 = 2$. Це точка $M_1(-2; 2)$. Знаходимо цю точку на траєкторії. Отже траєкторія точки M буде напівпряма $M_0M_1M_n$ з напрямом руху по ній -A→. Пряма від точки M_0 вліво не є траєкторією точки M.

Відповідь: $2x + 3y - 2 = 0$.

Задача 10.2(2)

Дано:

(1) x=2t, м;

(2) y=$8t^2$, м.

Визначити: $y = f(t)$; A→.

З (1) $t = \frac{x}{2}$ підставимо в (2) y=$8\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2x^2$. Рівняння траєкторії y=$2x^2$ – парабола. Будуємо параболу:

при $x_0 = 0$; $y_0 = 0$;

при $x_1 = \pm 1$; $y_1 = 2$;

при $x_2 = \pm 2$; $y_2 = 8$.

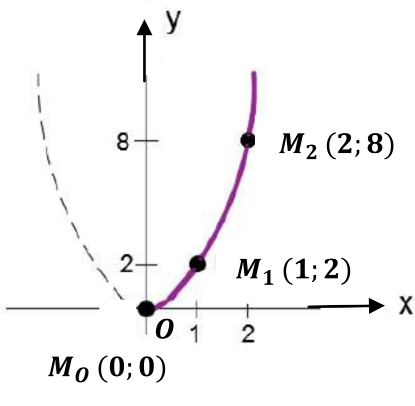
Початок руху в точці $M_0(0; 0)$;

при $t_0 = 0$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0$;

при $t_1 = 0{,}5\ c$; $x_1 = 1$; $y_1 = 2$;

при $t_2 = 1\ c$; $x_2 = 2$; $y_2 = 8$.

Відповідь: y=$2x^2$.



Траєкторія руху точки – це права гілка параболи. Початок руху при $t_0 = 0$ в точці $M_0(0; 0)$.

Задача 10.2(3)

Дано:
$x = 5sin10t$, м; (1)
$y = 3cos10t$, м. (2)

Визначити: $y = f(t)$; початок та напрям руху.

Для визначення траєкторії використаємо формулу тригонометрії $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

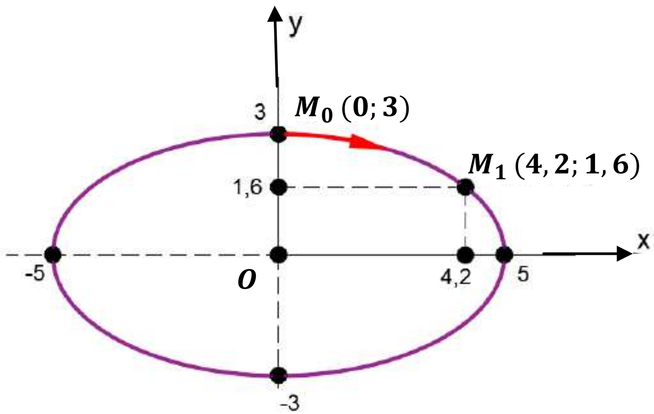
В рівняннях (1) і (2) залишаємо в правій частини sin та cos, обидві частини рівнянь зводимо до другої степені та додаємо.

$$+\begin{cases} \left(\frac{x}{5}\right)^2 = sin^2 10t; \\ \left(\frac{y}{3}\right)^2 = cos^2 10t; \end{cases}$$

$$sin^2 10t + cos^2 10t = 1$$

Траєкторія $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ – еліпс за радіусами $R = 5$ та $r = 3$.

Для визначення початку руху підставимо $t = 0$ в рівняння умови задачи.



Початок руху при $t = 0$

$x = 5sin0 = 0, y = 3cos0 = 3$. Це точка $M_0(0; 3)$.

При $t_1 = 0{,}1\ c$ $x = 5sin1 = 4{,}2$ м , $y = 3cos1 = 1{,}6$ м, (1 – радіан). Це точка $M_1(4{,}2; 1{,}6)$.

Напрям руху A→ від M_0 до M_1.

Відповідь: траєкторія еліпс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Початок руху точка $M_0(0; 3)$. Напрям руху A→ від M_0 до M_1.

Задача 10.4 (1)

Дано:

(1) $x = 3t^2$, м;

(2) $y = 4t^2$, м.

Визначити: $y = f_1(x)$; $S = f_2(t)$; закон руху від нуля.

Для визначення траєкторії домножимо (1) на 4, а (2) на 3. Потім віднімемо друге рівняння з першого.

$4x = 12t^2$

-$\underline{3y = 12t^2}$

$4x - 3y = 0$ –рівняння траєкторії – пряма лінія.

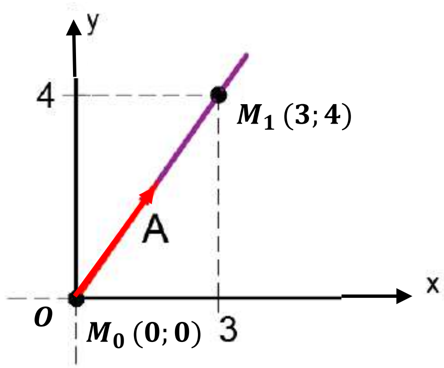
Підставимо значення t в рівняння (1), (2) та отримаємо:

при $t = 0$ $x =\ y =0$ – початок руху;

при $t = 1$ с $x = 3$ м, $y =4$ м.

Початок руху в т. M_0, далі по прямій вгору. (A→).

Для визначення закону руху точки по траєкторії використаємо рівняння (1.5).



При $t = 0$ S_0 =0; тоді

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^t \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^t \sqrt{36t^2 + 64t^2}\,\mathrm{dt} = \frac{10t^2}{2}\Big|_0^t = 5t^2.$$

$\begin{cases} \dot{x} = 6t \\ \dot{y} = 8t \end{cases}$ – похідні за часом t від (1) і (2) (див. Дано).

Відповідь: $4x - 3y = 0$ – траєкторія з початком в т. M_0.
$S = 5t^2$ – закон руху точки по траєкторії.

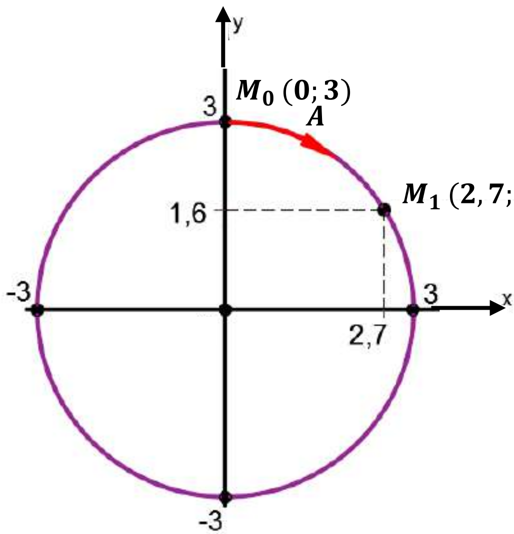
Задача 10.4 (2)

Дано:
$x = 3\,sin\,t$, м; (1)
$y = 3\,cos\,t$, м. (2)

Визначити: $y = f(x)$; $A -$ напрям руху від початку t_0 та закон руху $S = f(t)$.

Використовуємо формулу $sin^2\,\alpha + \cos^2\alpha\ = 1$ для визначення траєкторії $x^2 + y^2 = (3\,sin\,t)^2 + (3\,cos\,t)^2 = 9$;
$x^2 + y^2 = 9 -$ коло радіуса $R = 3$ м з центром т. O - початок координат.
Початок руху при $t = 0$; $S_0 = 0$; $x = 0$; $y = 3$ м. Це точка $M_0(0; 3)$.
При $t = 1$ с. $x = 3sin1 = 2{,}5$ м, $y = 3cos1$ =1,6 м,
(1 – радіан).

Точка $M_1(2{,}5; 1{,}6)$, тобто рух йде від M_0 до M_1 (A→).



Закон руху точки по траєкторії:

$$S = S_0 + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^t \sqrt{(3\,cos\,t)^2 + (-3\,sin\,t)^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^t 3dt = 3t\,\Big|_0^t = 3t.$$

$\begin{cases} \dot{x} = 3cost \\ \dot{y} = -3sint \end{cases}$ – похідні за часом t від (1) і (2) (див. Дано).

Відповідь: коло $x^2 + y^2 = 9$ з центром т.O - початок координат. $S = 3t -$ закон руху. (А→) – напрям руху.

Задача 10.4 (3)

Дано:

$x = a\,cos^2\,t$, м; (1)

$y = a\,sin^2\,t$, м. (2)

Визначити: $y = f_1(x); S = f_2(t)$–?

Складемо (1) та (2) $x + y = a\,cos^2\,t + a\,sin^2\,t = a$;

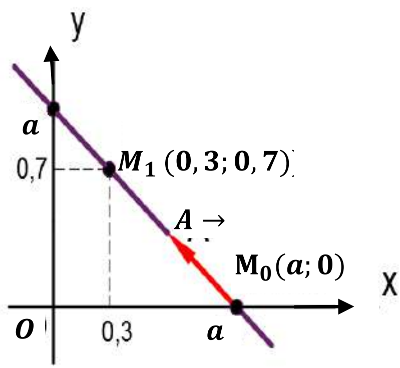
$x + y - a = 0$ – рівняння траєкторії. Початок: при $t = 0$; $S_0 = 0;\ x = a;\ y = 0$ (точка $M_O(a;0)$.

Будуємо траєкторію: при $x = 0;\ y = a$; при $y = 0;\ x = a$. При $t = 1$ с. $x = a\,cos^2\,1 = 0{,}3a,\ y = a\,sin^2\,1 = 0{,}7a$ $(1 -$ радіан).

Точка $M_1(0{,}3a; 0{,}7a)$. Напрям руху А→ вгору від M_0 до M_1.

Похідні від (1) і (2): $\dot{x} = -a\,2\cos t \sin t = -a\sin 2\,t$;

$$\dot{y} = a\,2\sin t \cos t = = a\sin 2\,t.$$



Закон руху по траєкторії:

$$S = S_0 + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^t \sqrt{(a\,sin2\,t)^2 + (a\,sin2\,t)^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^t a\sqrt{2}sin2tdt = \frac{-a\sqrt{2}}{2}[1 - 2sin^2t]\Big|_0^t =$$

$$= \frac{-a\sqrt{2}}{2}[1 - 2sin^2t - 1] = \frac{-a\sqrt{2}}{2}(-2sin^2t) =$$

$$= a\sqrt{2}sin^2t.$$

Відповідь: $x + y - a = 0$ –траєкторія, відрізок $0 \le x \le a.$

$$S = \ a\sqrt{2}sin^2t.$$

P.S.Використана формула $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$!!!!

Задача 10.4 (4)

Дано:

$x = 5cos5t^2$, м; (1)

$y = 5sin5t^2$, м. (2)

Визначити: $y = f_1(x); S = f_2(t)$–?

Задані обидва рівняння зводимо в квадрат та складаємо: $x^2 + \mathrm{y}^2 = (5cos5t^2)^2 + (5sin5t^2)^2 = 25.$

$x^2 + \mathrm{y}^2 = 25$ - це коло з радіусом $R = 5$ м, з центром в початку координат.

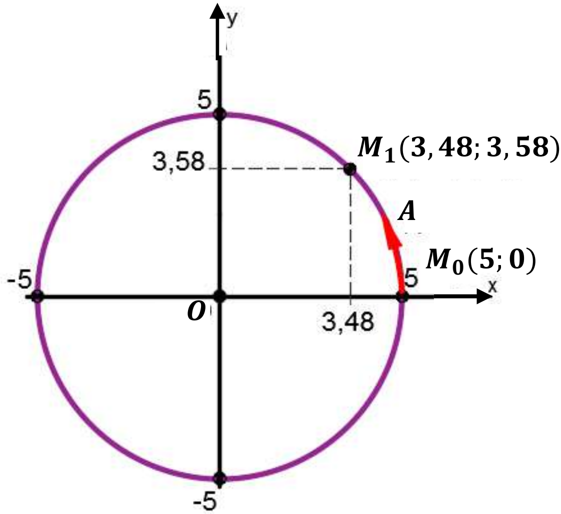
При $t = 0$; $S_0 = 0$; $x = 5$ м; $y = 0$. Точка $M_0(5; 0)$ – початок руху.

При $t = 0{,}4$ с;

$x = 5\cos(5 \cdot 0{,}4^2) = 5\cos 0{,}8 = 3{,}48$ м;

$y = 5\sin 0{,}8 = 3{,}58$ м.

Точка $M_1(3{,}48; 3{,}58)$. Напрям руху A→ від M_0 до M_1.



Закон руху точки по траєкторії:

$$S = S_0 + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt;$$

$\dot{x} = -5 \cdot 10t \cdot sin5t^2;\quad \dot{y} = 5 \cdot 10t \cdot cos5t^2;\ \ S_0 = 0.$

$$S = \int_0^t \sqrt{(50tsin5t^2)^2 + (50tcos5t^2)^2}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^t 50tdt = \frac{50t^2}{2}\Big|_0^t = 25t^2.$$

$S = 25t^2$ – закон руху по траєкторії з початком в т. $M_0(5;0)$ до точки $M_1(3{,}48;3{,}58)$.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 25$ - це коло з радіусом $R = 5$ м, з центром в початку координат. $S = 25t^2$ – закон руху по траєкторії з початком в т. $M_0(5;0)$ до точки $M_1(3{,}48;3{,}58)$.

Задача 10.11

Дано:

$x = asin2\omega t$, м; (1)

$y = asin\omega t$, м. (2)

Визначити: $y = f(x)$(траєкторію).

Для визначення траєкторії виключимо t з (1) та (2).

Перепишемо (1) у вигляді: $x = a \cdot sin\omega t \cdot cos\omega t = 2a \cdot sin\omega t \cdot \sqrt{1 - sin^2\omega t}$.

З рівняння (2)

$sin\omega t = \dfrac{y}{a}$, підставимо в рівняння вище

$$x = 2a \cdot \frac{y}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$$

і зведемо в квадрат обидві частини:

$$x^2 = 4y^2\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right),$$

звідси $x^2 \cdot a^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$ – це траєкторія руху.

Початок руху при $t = 0$; $x = y = 0$, – початок координат. Щоб побудувати траєкторіє потрібно задатися частотою ω, с$^{-1}$.

Відповідь: $x^2 \cdot a^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$ – це траєкторія руху.

Задача 10.12

Дано:

Кривошипно-шатунний механізм:

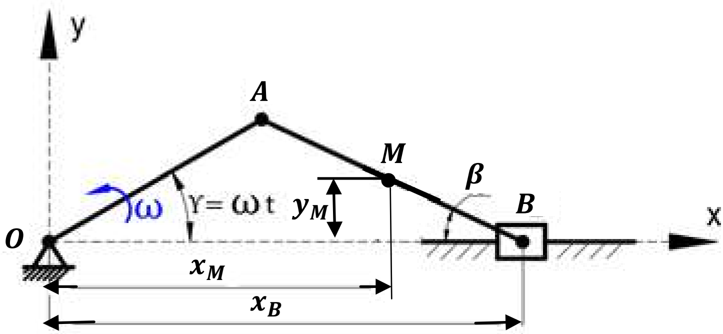
$OA = AB = 80$ см;

$\omega = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = const$;

$AM = MB = 40$ см;

Визначити: рівняння руху:

1) точки B;
2) точки M;
3) траєкторію точки M.



Так як ΔOAB рівнобічний, то $\beta = \omega t = 10t$.

1) Визначимо рівняння руху точки B:

$x_B = (OA + AB)cos\omega t = 160cos10t$, см;

$y_B = 0$.

2) Визначимо рівняння руху точки M:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = (OA + AM)cos\omega t = 120cos10t, \text{см}; \\ y_M = BMsin\omega t = 40sin10t, \text{см}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

3) Визначимо траєкторію точки M:

З (1) маємо (звести до квадрату та додати):

$$\left.\begin{aligned}(cos10t)^2 &= \left(\frac{x}{120}\right)^2, \text{см};\\ (sin10t)^2 &= \left(\frac{y}{40}\right)^2, \text{см}.\end{aligned}\right\} + \rightarrow \quad \left(\frac{x^2}{120^2}\right) + \left(\frac{y^2}{40^2}\right) = 1$$

- траєкторія точки M – еліпс.

Відповідь:

1) $x_B = 160cos10t,$ см;

2) $x_M = 120cos10t,$ см; $y_M = 40sin10t,$ см;

3) $\left(\frac{x^2}{120^2}\right) + \left(\frac{y^2}{40^2}\right) = 1$.

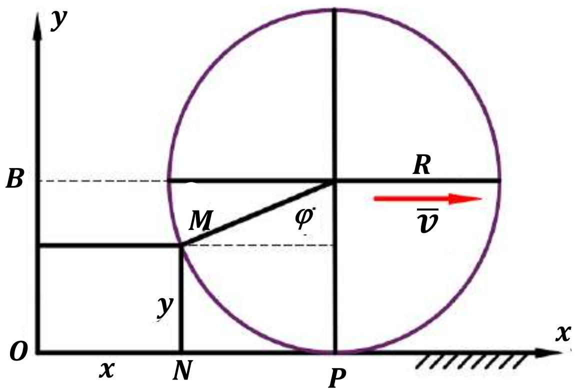
Задача 10.13

Дано:

$R = 1$ м; $v_0 = 20$ м/с.

Ковзання немає. При $t = 0$; $M_0(0; 0)$.

Визначити: $x_M = f_1(t); y_M = f_2(t);$



В початковий момент часу точка M співпадає з початком координат, а точка A - з точкою B. Колесо котиться без ковзання, тому дуга $MP = OP = AB = vt$.

Звідси $MP = R \cdot \varphi = vt$.

Звідси

$$\varphi = \frac{v}{R}t = 20t.$$

Далі маємо $x = ON = OP - NP = vt - Rsin\varphi$,
$y = MN = R - Rcos\varphi$.

Враховуючи дані задачі, отримуємо рівняння руху точки М (точки на ободі колеса).

Відповідь: $x = 20t - sin20t$; $y = 1 - cos20t$, м.

Задача 10.14

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 tcos\alpha; \quad &(1)\\ y &= v_0 tsin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \quad &(2)\end{aligned}\right\}$$

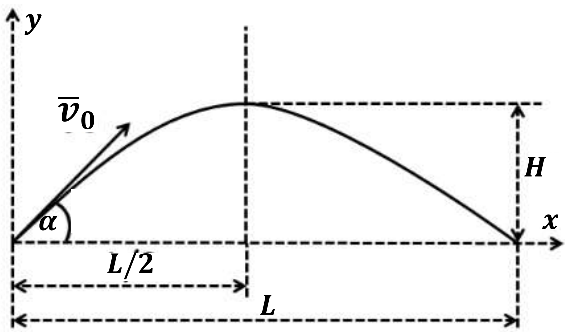
- рівняння руху снаряда (без опору повітря).

Визначити: траєкторію;

H – висоту польоту;

L – дальність польоту;

T – час польоту.



З рівняння (1) визначаємо

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

та підставимо в рівняння (2):

$$\text{y} = v_0 \frac{x}{v_0 cos\alpha} sin\alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{{v_0}^2 cos^2\alpha} = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha} \ (3).$$

Траєкторія руху парабола.

Дальність польоту визначаємо, поклавши в рівняння (3)

$$\text{y} = 0: xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha} = 0.$$

Звідси знаходимо два значення x: $x_0 = 0$;

$$x_2 = L = \frac{tg\alpha}{g} \cdot 2{v_0}^2 cos^2\alpha = \frac{{v_0}^2}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot 2cos^2\alpha = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\alpha.$$

L_{max} – при $\alpha = 45°$.

Для визначення найбільшої висоти H польоту снаряда потрібно знайти екстремальне значення y. Для цього обчислимо похідну від y по часу t та дорівняємо її нулю.

$$\dot{\text{y}} = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0.$$

Звідси y досягає екстремального значення Н при

$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (4).

Це час половини польоту. Повний час

$$T = 2t = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha \ .$$

Підставивши час t_1 в рівняння (2), знайдемо найбільшу висоту польоту:

$$H = y(t_1) = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g}.$$

Відповідь: $y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2{v_0}^2cos^2\alpha}$ – траєкторія руху;

$H = \dfrac{1}{2}\dfrac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g}$; $L = \dfrac{{v_0}^2}{g}\sin 2\alpha$; $T = 2t = 2\dfrac{v_0}{g}\sin\alpha$.

Задача 10.19

Дано:

$x = 2acos^2\left(\frac{kt}{2}\right)$; (1)

$y = asinkt$; (2)

a і k позитивні сталі.

Визначити: $x = f(y)$(траєкторію); $S = f(t)$.

Спростимо (1):

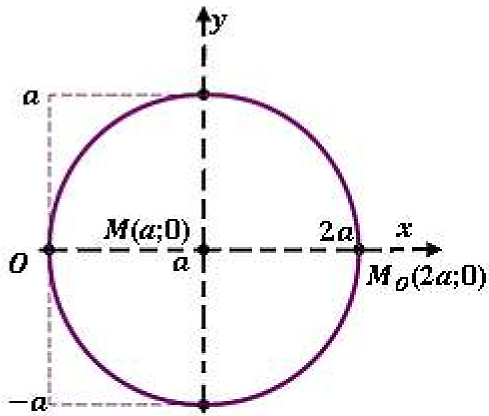
(А) $x = 2a\dfrac{1}{2}(1 + \cos kt) = a\left(1 + \sqrt{1 - sin^2kt}\right) =$

$= a + a\sqrt{1 - sin^2kt};$

З (2) $sinkt = \frac{y}{a}$ підставимо в рівняння x:

$x = a + a\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} = a + \sqrt{a^2 - y^2}$, звідси

$x - a = \sqrt{a^2 - y^2}$, зведемо в квадрат:
$(x-a)^2 = a^2 - y^2 \ \ \rightarrow \ (x-a)^2 + y^2 = a^2 -$ це траєкторія руху – коло радіуса $R = a$ з центром в т. $M\,(a;0)$.



При $t = 0;\ x = 2a;\ y = 0\ , S_0 = 0.$ Початок руху в т. $M_0(2a;0)$.
Визначимо закон руху точки по траєкторії. З (А)
$x = a + acoskt; y = asinkt;$

$$S = S_0 + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt;$$

$\dot{x} = -aksinkt;\quad \dot{y} = akcoskt;\ \ S_0 = 0.$

$$S = \int_0^t \sqrt{(-aksinkt)^2 + (akcoskt)^2}\,\mathrm{dt} = \int_0^t akdt = akt\,\Big|_0^t = akt.$$

Відповідь: $(x-a)^2 + y^2 = a^2 -$ це траєкторія руху;
$S = akt$ – закон руху точки по траєкторії.

1.2. Швидкість та прискорення точки

Швидкість токи – є похідна по часу від радіуса-вектора $\bar{r}$, який визначає її положення в просторі. Швидкість точки характеризує зміну її положення за часом.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} + v_z\bar{k}. \tag{1.6}$$

Проекції швидкості на осі нерухомих декартових координат дорівнюють:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ \ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{1.7}$$

Модуль швидкості визначається за формулою:

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}. \tag{1.8}$$

Напрям вектора швидкості визначається напрямними косинусами:

$$\begin{gathered} \cos\alpha = \cos(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{v_x}{v}; \\ \cos\beta = \cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{v_y}{v}; \\ \cos\gamma = \cos(\widehat{\bar{v}, z}) = \frac{v_z}{v}. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Вектор швидкості точки напрямлений по дотичній до траєкторії.

Прискорення точки – це похідна від вектора швидкості за часом або друга похідна від радіус-вектора $\bar{r}$. Прискорення точки характеризує швидкість зміни швидкості:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}. \tag{1.10}$$

Проекції прискорення на нерухомі декартові осі координат дорівнюють:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x};\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}. \qquad (1.11)$$

Модуль прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}. \qquad (1.12)$$

Напрямляючи косинуси вектора прискорення:

$$\cos\alpha_1 = \cos(\widehat{\bar{a},x}) = \frac{a_x}{a};$$
$$\cos\beta_1 = \cos(\widehat{\bar{a},y}) = \frac{a_y}{a}; \qquad (1.13)$$
$$\cos\gamma_1 = \cos(\widehat{\bar{a},z}) = \frac{a_z}{a}.$$

При натуральному способі завдання руху швидкість та прискорення точки визначаються у вигляді:

$$\bar{v} = \frac{dS}{dt}\cdot\bar{\tau}, \qquad v = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \qquad (1.14)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau = a_n\cdot\bar{n} + a_\tau\cdot\bar{\tau};\ a_n = \frac{v^2}{\rho};\ a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{S}. \quad (1.15)$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}. \qquad (1.16)$$

$\bar{n}$ і $\bar{\tau}$ - орти натуральних осей координат;

$\rho = \dfrac{v^2}{a_n} -$ радіус кривизни траєкторії.

Вектор повного прискорення лежить в дотичній площині $n\tau$, його проекція на ось бінормаль $(\bar{b})\ a_b = 0$. При прямолінійному русі $\rho = \infty$, а при русі по колу радіусу R $\rho = R$.

Кінематичні характеристики руху точки наведено в табл.1.1

Швидкість в полярних координатах.

Полярні координати для точки, яка рухається весь час в одній і тій же площині:

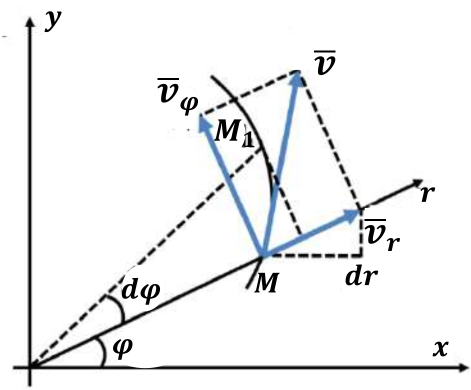
$$r = f_1(t); \quad \varphi = f_2(t).$$

Переміщення dS точки за час dt геометрично складається із радіального переміщення dr та поперечного перпендикулярного до r, яке дорівнює $rd\varphi$. Звідси, швидкість точки $\bar{v}$ дорівнює геометричній сумі радіальної швидкості $\bar{v}_\tau$ та поперечній швидкості $\bar{v}_\varphi$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}; \; v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}.$$

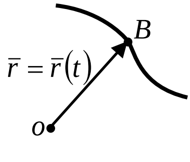
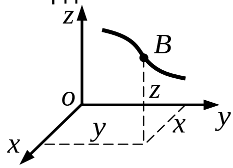
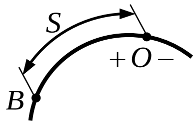
Модуль швидкості точки в полярних координатах:

$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\varphi}^2} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2}.$$

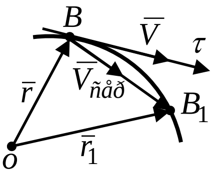
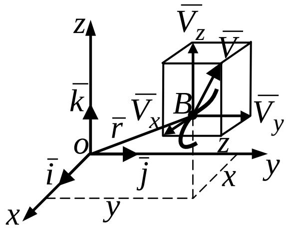
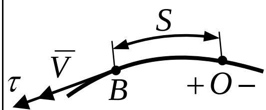


Таблиця 1.1

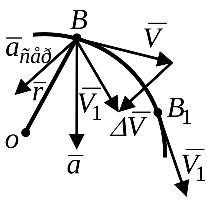
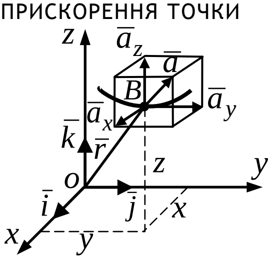
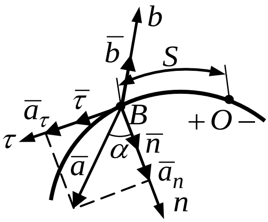
СПОСОБИ ЗАДАННЯ РУХУ ТОЧКИ

Векторний спосіб	Координатний спосіб	Натуральний спосіб
		
$\overline{r} = \overline{r}(t)$	$x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$	$S = f(t)$

ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ

		
$\overline{V} = \dot{\overline{r}} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$	$V_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$; $V_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ $V_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$; $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$	$V = \dfrac{dS}{dt} = \dot{S}$

ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ

		
$\overline{a} = \ddot{\overline{r}} = \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$	$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$; $a_x = \ddot{x}$; $a_y = \ddot{y}$; $a_z = \ddot{z}$; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$; $a_\tau = \dot{V} = \dfrac{dV}{dt} = \ddot{S}$ $\overline{a} = \overline{\tau} a_\tau + \overline{n} a_n$; $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$; $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Задача 11.3

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2cost,\ \text{см};\ (1)\\ y &= 4cos2t, \text{см}.\ (2)\end{aligned}\right\} - \text{(фігура Ліссажу)}$$

Визначити: модуль та напрям $\bar{v}$ точки, коли вона знаходиться на осі y.

Визначимо проекції швидкості на осі x, y:

$$v_x = \dot{x} = -2sint;\ v_y = \dot{y} = -8sin2t.$$

Модуль швидкості $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$. (A)

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{v_x}{v};$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{v_y}{v}.$$

Коли точка знаходиться на осі y, її координата $x = 0$.

$$x = 2cost = 0, \qquad t_1 = \frac{\pi}{2},\ \ t_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Визначимо модуль та напрям $\bar{v}$ для цих t.

1) При $t_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad v_{x_1} = \dot{x} = -2\,\frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_y = \dot{y} = 0.$

$$v_1 = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha_1 = \frac{v_{x_1}}{v_1} = \frac{-2}{2} = -1;\ \alpha_1 = \pi.$$

2) При $t_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\quad v_{x_2} = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_{y_2} = 0.$

$$v_2 = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos\alpha_2 = \frac{v_{x_2}}{v_2} = \frac{2}{2} = 1;\ \alpha_2 = 0.$$

Відповідь:

1) $v_1 = 2\frac{\text{см}}{\text{с}};\ \cos\alpha_1 = -1;\ \alpha_1 = \pi;$

2) $v_2 = 2\frac{\text{см}}{\text{с}};\ \cos\alpha_2 = 1;\ \alpha_2 = 0.$

Задача 11.5

Дано:

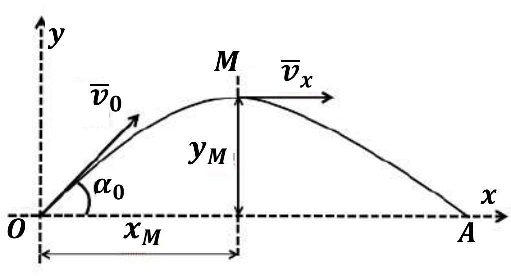
$$\left.\begin{array}{l} а)\ \ x = v_0 t cos\alpha_0\ ,\ \text{см} \\ б)\ \ y = v_0 t sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}, \text{см} \end{array}\right\}$$

$v_0, g, \alpha_0 < \frac{\pi}{2} = const$ (всі).

Визначити: 1) траєкторію;

2) x_M, y_M – при $H = H_{max}$;

3) v_x, v_y – коли точка знаходиться на осі x.



1) Визначаємо рівняння траєкторії. З а) знаходимо

$$t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

та підставимо до б):

$$y = \frac{v_0 sin\alpha_0 x}{v_0 cos\alpha} - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 cos^2\alpha} = xtg\alpha_0 - \frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha_0} \cdot x^2$$

– траєкторія парабола.

2) Координати найвищого положення точки знаходимо з умови, коли в цій точці *M* проекція вектора $v_y = 0$ тобто

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0.$$

$$\dot{y} = v_0 sin\alpha_0 - gt = 0 \rightarrow$$

$$t_M = \frac{v_0 sin\alpha_0}{g} - \text{час польоту точки до } H_{max}.$$

Підставимо це до виразів x та y та отримаємо координату точки М в точці максимальної висоти траєкторії.

$$x_M = \frac{v_0 cos\alpha_0 \cdot v_0 sin\alpha_0}{g} = \frac{{v_0}^2}{2g} sin2\alpha_0.$$

P.S. Використовували формулу $2sin\alpha \cdot cos\alpha = sin2\alpha.$

$$y_M = \frac{v_0 sin\alpha_0 \cdot v_0 sin\alpha_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha_0}{g^2} = \frac{{v_0}^2}{2g} sin^2\alpha_0.$$

3) Проекції вектора швидкості на осі координат:

$$v_x = \dot{x} = v_0 cos\alpha_0;\ v_y = \dot{y} = v_0 sin\alpha_0 - gt. \qquad \text{(A)}$$

Точка знаходиться на осі x при $T_1 = 0$ та

$$T_2 = 2t_M = \frac{2v_0}{g} sin\alpha_0$$

(так як точка *M* – це середина дальності польоту).

T_1 – початок польоту, T_2 – кінець польоту (точка А) .

Підставив ці моменти часу до (А), отримаємо:

При $T_1 = 0$ $v_{x_1} = v_0 cos\alpha_0$; $v_{y_1} = v_0 sin\alpha_0$.

При

$$T_2 = \frac{2v_0}{g} sin\alpha_0;\ v_{x_2} = v_0 cos\alpha_0;$$

$$v_{y_2} = v_0 sin\alpha_0 - g\frac{2v_0}{g} sin\alpha_0 = -\, v_0 sin\alpha_0.$$

Відповідь:

1) $y = xtg\alpha_0 - \frac{g}{2{v_0}^2 cos^2\alpha} \cdot x^2$ – парабола;

2) $x_M = \frac{{v_0}^2}{2g} sin2\alpha_0$. $y_M = \frac{{v_0}^2}{2g} sin^2\alpha_0$.

3) $v_x = v_0 cos\alpha_0$ (в т. O і A),
$v_y = \pm v_0 sin\alpha_0$, знак $\ominus$ в точці A.

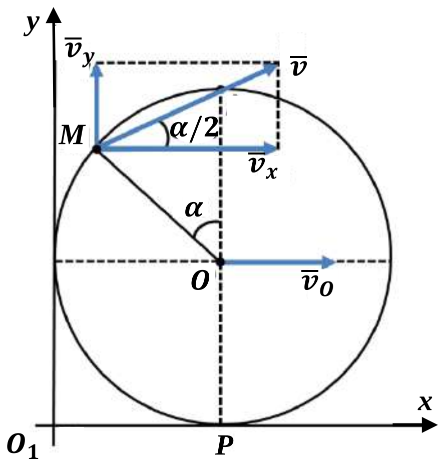
Задача 11.10 (1)

Дано:

$v_0 = 72 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 20$ м/с, $R = 1$ м.

Колесо котиться без ковзання

Визначити: 1) величину та напрям швидкості т. M на ободі колеса в момент, коли $\angle(\bar{v}, OM) = \frac{\pi}{2} + \alpha$.



Рівняння руху т. M. мають вигляд при $v_0 = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}$ та $R = 1$ м (див. задачу 10.13, де $\varphi = \angle(MOP) = 20t = \pi - \alpha$):

$$\left.\begin{array}{l} x = 20t - sin20t, \\ y = 1 - cos20t. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Визначаємо швидкість т. M

$$v_x = \dot{x} = 20 - 20cos20t = 20(1 - 20t)|_{\pi-\alpha} = 20(1 + cos\alpha);$$

$$v_y = \dot{y} = 20sin20t\Big|_{\pi-\alpha} = 20sin\alpha;$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 20\sqrt{(2)(1 + cos\alpha)} = 40cos\frac{\alpha}{2}, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Напрямні косинуси:

$$\cos(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{20(1 + cos\alpha)}{40cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{20 \cdot 2(cos\frac{\alpha}{2})^2}{40cos\frac{\alpha}{2}} = cos\frac{\alpha}{2};$$

$$(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{20sin\alpha}{40cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{20 \cdot 2sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2}}{40cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$(\widehat{\bar{v}, y}) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

Вектор швидкості т. M напрямлений по MA для будь-якого положення т. M зліва від вертикального діаметру AP.

Відповідь:

$v = 40cos\frac{\alpha}{2}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$ та напрямлений по прямій MA.

Задача 11.12

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ae^{-ht}cos\,(kt+\varepsilon); \\ y &= Ae^{-ht}\sin(kt+\varepsilon)\,. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Визначити: 1) проекції v_x, v_y; 2) проекції v_r, v_φ на осі полярних координат; 3) модуль швидкості v .

1) Диференціюючи (1) за часом, отримаємо проекції вектору швидкості на осі декартових координат x , y:

$$v_x = \dot{x} = -Ahe^{-ht}\cdot\cos(kt+\varepsilon) - Ae^{-ht}\cdot ksin(kt+\varepsilon);$$

$$v_y = \dot{y} = -Ahe^{-ht}\cdot\sin(kt+\varepsilon) + Ae^{-ht}\cdot kcos(kt+\varepsilon).$$

Звідки:

$$v_x = -Ae^{-ht}\cdot[h\cos(kt+\varepsilon) + ksin(kt+\varepsilon)];$$

$$v_y = -Ae^{-ht}\cdot[h\sin(kt+\varepsilon) - kcos(kt+\varepsilon)].$$

2) Модуль вектора швидкості

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = Ae^{-ht}\sqrt{h^2+k^2} \quad (A)$$

3) Полярні координати:

$$\begin{cases} \varphi = kt+\varepsilon; \; r^2 = x^2+y^2 = A^2e^{-2ht} \\ \qquad\qquad\quad r = Ae^{-ht}. \end{cases};$$

Проекції вектора швидкості на полярні координати:

$$v_r = \dot{r} = -Ae^{-ht}\cdot h; \; v_\varphi = r\cdot\dot{\varphi} = Ae^{-ht}\cdot k, \;\; (\dot{\varphi} = k).$$

Модуль вектора швидкості:

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\varphi)^2} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2} = Ae^{-ht}\sqrt{h^2+k^2}. \text{ (B)}$$

(A)=(B). Модуль вектора швидкості не залежить від системи координат.

Відповідь:

1) $v_x = -Ae^{-ht}\cdot[h\cos(kt+\varepsilon) + ksin(kt+\varepsilon)]$;

$v_y = -Ae^{-ht}\cdot[h\sin(kt+\varepsilon) - kcos(kt+\varepsilon)]$;

2) $v = Ae^{-ht}\sqrt{h^2 + k^2}$;

3) $v_r = \dot{r} = -Ae^{-ht}$; $v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = Ae^{-ht} \cdot k$.

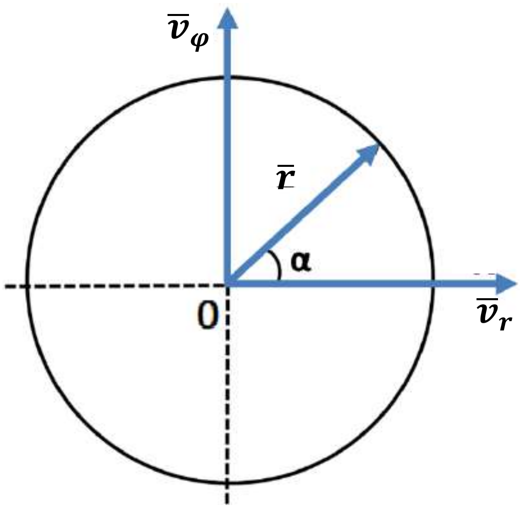
Задача 11.15

Дано:

Точка рухається по колу згідно рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} &r = 2a \cdot cos\left(\frac{kt}{2}\right); \\ &\varphi = \frac{kt}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Визначити: v_r, v_φ –?



Проекції швидкості на осі полярної системи координат:

$$v_r = \dot{r} = -a \cdot k \cdot sin\left(\frac{kt}{2}\right);$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = 2a \cdot \cos\left(\frac{kt}{2}\right) \cdot \frac{k}{2} = a \cdot k \cdot cos\left(\frac{kt}{2}\right);\ \dot{\varphi} = \frac{k}{2}.$$

Модуль вектору швидкості:

$$v = \sqrt{(v_r)^2 + (v_\varphi)^2} = ak.$$

Відповідь:

$$v_r = -a \cdot k \cdot sin\left(\frac{kt}{2}\right); v_\varphi = a \cdot k \cdot cos\left(\frac{kt}{2}\right); v = ak.$$

Задача 12.4

Дано:

$v_0 = 400\,\frac{\text{км}}{\text{год}} = 111$ м/с;

$\ell = S = 1200$ м;

$a = const.$

Визначити: $a-?$

Літак сідає на смугу зі швидкістю v_0, зупиняється, пробігши шлях S. Визначити прискорення, вважаючи його рівноуповільненим.

Зв'язок між x та а:

$\frac{d^2x}{dt^2} = a$, інтегруємо двічі $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -at + C_1$ (1)

$$x = \frac{-at^2}{2} + C_1 t + C_2. \quad (2)$$

<u>Початкові умови задачі</u>: при $t = 0, x = 0, \dot{x} = v_0$.

Підставляємо в (1) та (2), отримаємо: $C_1 = v_0; C_2 = 0$.

$$\dot{x} = -at + v_0; \quad (3)$$

$$x = \frac{-at^2}{2} + v_0 t. \quad (4)$$

В момент зупинки літака $t = T, \dot{x} = 0, x = S$.

З (3) $T = \frac{v_0}{a}$, підставимо в (4),

отримаємо $S = \frac{a}{2}(\frac{v_0}{a})^2 + v_0\frac{v_0}{a} = \frac{(v_0)^2}{2a}$, звідки

$$a = \frac{{v_0}^2}{2S} = \frac{111,1^2}{2 \cdot 1200} = 5{,}143 \approx 5{,}15\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a = 5{,}15\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 12.7

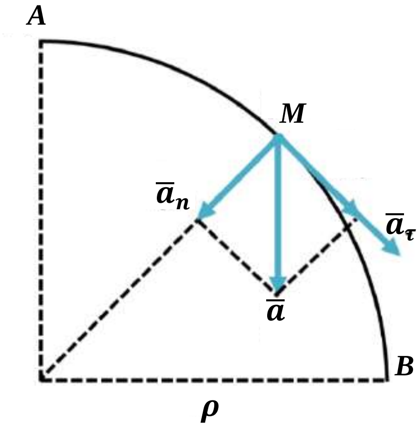
Дано:

$v_0 = 54$ км/год $= 15$ м/с;

$S = 600$ м; $\rho = 1000$ м;

$a = const,\ t_1 = 30\ c$.

Визначити: v_1, a_1–?



Використаємо відомі залежності:

$\frac{dv}{dt} = a_\tau$ і $\frac{ds}{dt} = v$.

Інтегруємо двічі:

$$\left.\begin{aligned} v &= a_\tau + C_1\,; \\ S &= \frac{a_\tau t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Початкові умови задачі:

при $t = 0, \;\; v = v_0; \;\; S = 0.$ (2)

Підставимо (1)до (2), отримаємо:

$$C_1 = v_0; C_2 = 0. \tag{3}$$

(1) приймає вигляд:

$$v = a_\tau t + v_0; \quad S = a_\tau \frac{t^2}{2} + v_0 t. \tag{4}$$

З (4) визначаємо

$$a_\tau = \frac{(S - v_0 t) \cdot 2}{t^2} = \frac{(600 - 15 \cdot 30) \cdot 2}{30^2} = \frac{1}{3}\,\text{м/с}^2 = 0{,}333\ \text{м/с}^2.$$

З (4) визначаємо швидкість при $t_1 = 30$ с.

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot 30 + 15 = 25\ \text{м/с}.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{25^2}{1000} = \frac{5}{8} = 0{,}625\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Повне прискорення при $t_1 = 30$ с:

$$a_1 = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{0{,}333^2 + 0{,}625^2} = 0{,}768\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь:

$$v_1 = 25\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, a_1 = 0{,}768\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Задача 12.8

Дано:

$v_0 = 0$ м/с; $t_1 = 3$ хв. $= 180$ с;

$v_1 = 72\,\frac{\text{км}}{\text{год}} = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad \rho = 800$ м;

$a_\tau = const,\ t_2 = 2$ хв. $= 120$ с.

Визначити: $a_\tau, a_n, a-$? при $t = 120$ с.

При відході потягу швидкість збільшується рівномірно ($a_\tau = const$):

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau \rightarrow \ v = a_\tau t + C_1.$$

При $t = 0, v_0 = 0$, тоді $C_1 = 0;\ v = a_\tau t$.

При $t_1 = 180$ с$, v_1 = 20$ м/с,

$$a_\tau = \frac{v}{t_1} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = const.$$

При

$$t_2 = 120 \text{ с}, v_2 = \frac{1}{9} \cdot 120 = \frac{40}{3} \text{м/с}.$$

Нормальне прискорення при t_2:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{40^2}{800 \cdot 3^2} = \frac{2}{9}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Повне прискорення при t_2:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = 2{,}25\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь:

$$a_\tau = \frac{1}{9}\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ a_n = \frac{2}{9}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ ;\ a = 2{,}25\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Задача 12.13

Дано:

Рівняння руху:

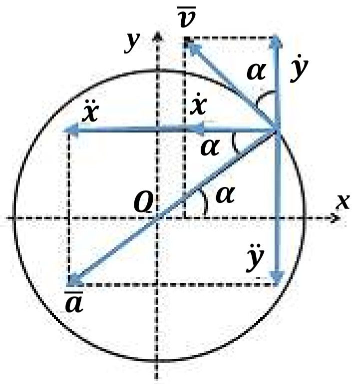
$x = 10\,cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$, см;

$y = 10 sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$, см.

Визначити:

1) $x = f(t) = ?$ $-$траєкторію;

2) $v = ?$ 3) $a = ?$



Визначимо траєкторію руху точки. Зведемо задані x та y до квадрату та складемо:

$$x^2 + y^2 = \left[10\,cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)\right]^2 + \left[y = 10 sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)\right]^2 = 10^2.$$

$x^2 + y^2 = 10^2$ - коло з радіусом $R = \rho = 10$ см.

1) Визначимо величину та напрям вектору швидкості $\bar{v}$:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$= \sqrt{(4\pi)^2\left[cos^2\left(\frac{2\pi t}{5}\right) + sin^2\left(\frac{2\pi t}{5}\right)\right]} = 4\pi\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$v_x = \dot{x} = -4\pi \cdot sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right);\ v_y = \dot{y} = \ 4\pi \cdot cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right).$$

Напрямляючи косинуси вектору $\bar{v}$:

$$\cos(\widehat{\bar{v};x}) = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{4\pi \cdot sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)}{4\pi} = -sin\alpha;$$

$$\cos(\widehat{\bar{v};y}) = \frac{\dot{y}}{v} = cos\alpha.$$

Вектор $\bar{v}$ напрямлений по дотичній до траєкторії в сторону переходу від осі ox до осі oy.

2) Визначимо величину та напрям вектору прискорення $\bar{a}$.

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \ \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2} \ = \frac{8}{5}\pi^2 \frac{см}{с^2}.$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{8}{5}\pi^2 \cdot cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right);\ a_y = \ddot{y} = -\frac{8}{5}\pi^2 \cdot sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right).$$

Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4\pi) = 0.$$

Тоді, з урахуванням, що $a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = a_n$, так як вектор $\bar{a}$ напрямлений до центра кола.

Напрямні косинуси вектору $\bar{a}$:

$$\cos(\widehat{\bar{a};x}) = \frac{\ddot{x}}{a} = \frac{-\frac{8}{5}\pi^2 \cdot cos\left(\frac{2\pi t}{5}\right)}{\frac{8}{5}\pi^2} = -cos\alpha;$$

$$\cos(\widehat{\bar{a};y}) = \frac{\ddot{y}}{a} = -sin\alpha.$$

Користувалися формулою: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Відповідь:

1) $x^2 + y^2 = 10^2$ - коло з радіусом $\rho = 10$ см;

2) $v = 4\pi\ \frac{см}{с}$; 3) $a = \frac{8}{5}\pi^2 = 1{,}6\pi^2 \frac{см}{с^2}$.

Задача 12.15

Дано:

Рівняння руху:

$x = a(e^{kt} + e^{-kt})$; $a, k = const$;

$y = a(e^{kt} - e^{-kt})$.

Визначити:

1) $x = f(y) -$ траєкторія?

2) v, $a-$? як функції радіус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Довідка:

$sh(kt) = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$; $ch(kt) = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$;

$ch^2(kt) - sh^2(kt) = 1$. Гіперболічні функції і співвідношення!!!

$\dfrac{d}{dt}[sh(kt)] = kch(kt)$; $\dfrac{d}{dt}[ch(kt)] = ksh(kt)$.

1) Тоді

$x = 2a \cdot ch(kt); y = 2a \cdot sh(kt)$; звідки

$ch(kt) = \dfrac{x}{2a}; sh(kt) = \dfrac{y}{2a}$.

$\left(\dfrac{x}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{2a}\right)^2 = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = 4a^2 -$

траєкторія руху точки – гіпербола.

2) Швидкість руху точки

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \qquad \text{(A)}$$

$\dot{x} = 2ak \cdot sh(kt)$; $\dot{y} = 2ak \cdot ch(kt)$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\dot{x} = ky; \dot{y} = kx$ - підставимо в (A).

$v = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr.$

3) Прискорення руху точки

$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2} = k^2 r.$

$a_x = \ddot{x} = 2ak^2 \cdot ch(kt) = k^2 x;$

$a_y = \ddot{y} = 2ak^2 \cdot sh(kt) = k^2 y;$

$a = \sqrt{(k^2 x)^2 + (k^2 y)^2} = k^2 r.$

Відповідь: 1) $x^2 + y^2 = 4a^2$ траєкторія руху точки – гіпербола;

2) швидкість $v = kr$; 3) прискорення $a = k^2 r$.

Задача 12.21

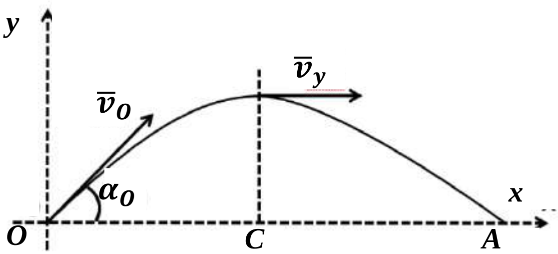
Дано:

Рівняння руху:

$x = v_0 t\ cos\alpha_0;$

$y = v_0 t\ sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2;$

$v_0, \alpha_0 - const.$



траєкторія симетрична

Визначити: $\rho -$ радіус кривизни траєкторії при $t = 0$ та в момент падіння на Землю.

Формула радіуса кривизни:

$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$

$\rho_{t=0} = \rho -$ радіуси кривизни однакові.

1) Визначимо швидкість:

$v_x = \dot{x} = v_0\, cos\alpha_0$; $v_y = \dot{y} = v_0\, sin\alpha_0 - gt$;

$v = \sqrt{(v_0\, cos\alpha_0)^2 + (v_0\, sin\alpha_0 - gt)^2}$.

При $t = 0$ $v = \sqrt{(v_0\, cos\alpha_0)^2 + (v_0\, sin\alpha_0)^2} = v_0$.

2) Визначимо прискорення:

$a_x = \ddot{x} = 0$; $a_y = \ddot{y} = -g$; $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = g$.

3) Визначимо тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \left.\frac{2(v_0\, sin\alpha_0 - gt)\cdot(-g)}{2\sqrt{(v_0\, cos\alpha_0)^2 + (v_0\, sin\alpha_0 - gt)^2}}\right|_{t=0} = -g sin\alpha_0.$$

4) Визначимо нормальне прискорення:

$$a_n|_{t=0} = \sqrt{a^2 - {a_\tau}^2} = \sqrt{g^2 - g^2 sin^2\alpha_0} = g cos\alpha_0.$$

5) Визначимо радіус кривизни траєкторії:

$$\rho|_{t=0} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{{v_0}^2}{g cos\alpha_0} = \rho_{x=A},$$

- траєкторія симетрична.

Час польоту:

$$t = \frac{2v_0\, sin\alpha_0}{8}$$

(з умови, що $v_y = 0$ та швидкість в т.A $v = v_0$.

Відповідь:

$$\rho = \frac{{v_0}^2}{g cos\alpha_0}.$$

Задача 12.24

Дано:

Рівняння руху:

$x = 2t,\ c$м; $y = t^2,\ \ c$м;

$t = 1\ c$.

Визначити: 1) $v, a -$? при $t = 1\ c$.

2) напрямляючи косинуси кутів.

1) Визначимо величину та напрям швидкості руху:

$v_x = \dot{x} = 2;\ v_y = \dot{y} = 2t$.

$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{2^2 + (2t)^2}$, при $t = 1\ c$:

$v_x = 2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_y = 2\ \frac{\text{см}}{\text{с}};\ v = 2\sqrt{2}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

$$cos\alpha = \cos(\widehat{\bar{v};x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \alpha = 45°.$$

2) Визначимо величину та напрям прискорення.

$a_x = \dot{v_x} = 0;\ a_y = \dot{v_y} = 2$.

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + \ {a_y}^2} = \sqrt{0 + (2)^2} = 2\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$cos\beta = \cos(\widehat{\bar{a};x}) = \frac{a_x}{a} = \frac{0}{2} = 0;\quad \beta = 90°.$$

Відповідь:

$v = 2\sqrt{2}\ \frac{\text{см}}{\text{с}}, \alpha = 45°, \beta = 90°$.

Задача 12.32

Дано:

Рівняння руху точки в циліндричній системі координат:

$r = a = const, \varphi = kt, z = \nu\ t$ *с*м.

Визначити:1) проекції прискорення точки на осі циліндричної системи координат: $a_r -? \ a_\varphi -? \, a_z -?$

2) $a_\tau -? \ a_n -?$

3) $\rho -?$ (радіус кривизни гвинтової лінії).

В циліндричній системі координат складові прискорення

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -rk^2; \ a_\varphi = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0;$$

$$a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \ \Big[\text{з урахуванням даних : } \frac{dr}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0; \ \ \dot{\varphi} = k; \ \ a = \sqrt{{a_r}^2 + {a_\varphi}^2 + {a_z}^2} = ak^2.$$

При заданні руху токи природним способом, прискорення розраховуються за формулами:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}; \ a_\tau = \frac{dv}{dt}; \ a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

де a_τ, a_n- тангенціальне та нормальне складові прискорення.

v, ρ – швидкість та радіус кривизни траєкторії.

За умовами задачі визначимо швидкість:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0; \ \ v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = a \cdot k; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \vartheta.$$

Модуль v: $v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\varphi}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{a^2 \cdot k^2 + \vartheta^2} = const.$

Звідки :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0;\ a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = \sqrt{(ak^2)^2 - 0} = ak^2.$$

Радіус кривизни:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(\sqrt{a^2 \cdot k^2 + \vartheta^2}\right)^2}{ak^2} = \frac{a^2 \cdot k^2 + \nu^2}{ak^2}.$$

Відповідь:

$$a_r = -rk^2;\ a_\varphi = a_z = 0; a_\tau = 0;\ a_n = ak^2;\ \rho = \frac{a^2 \cdot k^2 + \nu^2}{ak^2}.$$

Для нотаток

Для нотаток

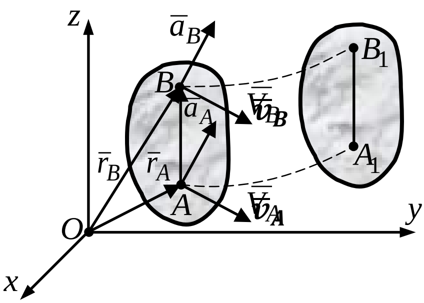
Для нотаток

2. ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА

1. Поступальним рухом тіла називається такий його рух, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму початковому положенню під час всього руху.

Закон руху, швидкості і прискорення точок тіла



$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$; $AB = const$;

$\bar{v}_A = \bar{v}_B$; $\bar{a}_A = \bar{a}_B$

Теорема. При поступальному русі твердого тіла траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок тіла однакові.

Оскільки в цьому русі положення тіла визначається положенням будь-якого відрізку AB, а його положення визначається положенням будь якої точки, (наприклад A), то законом його руху буде закон руху однієї точки тіла:

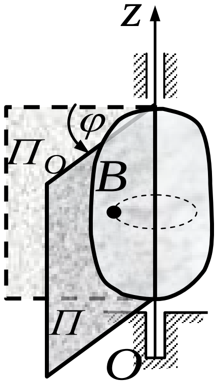
$$X_A = X_A(t);\ У_A = У_A(t);\ Z_A = Z_A(t). \qquad (2.1)$$

Зауваження:

1. Тільки при поступальному русі кутова швидкість твердого тіла дорівнює 0, $\omega = 0$.

2. Тільки при поступальному русі твердого тіла **мають сенс** наступні вирази: **швидкість тіла, прискорення тіла, траєкторія тіла**.

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

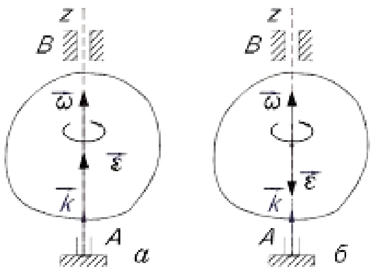


1. **Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі** називають такий його рух, при якому існує пряма, незмінно зв'язана з тілом, яка залишається нерухомою на протязі всього руху тіла.

2. Рівняння обертального руху, кутова швидкість і кутове прискорення тіла

$\varphi = f(t)$; $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi$;

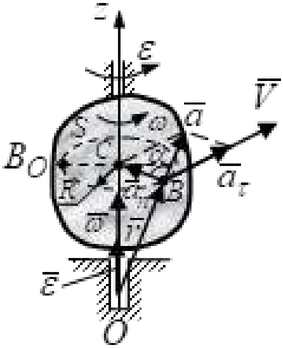
$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad (2.2)$$



3) **Кутова швидкість і кутове прискорення як вектор**.

Щоб охарактеризувати обертальний рух тіла навколо даної нерухомої осі, кутову швидкість обертання зображають вектором, напрямленим уздовж осі обертання z в той бік, звідки обертання тіла відбувається проти ходу годинникової стрілки і якщо вісь обертання Oz.

$$\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{k}. \qquad (2.3)$$



Кутове прискорення теж є вектором, напрямленим уздовж осі обертання тіла:

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \overline{k}. \qquad (2.4).$$

Вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ та кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ в прискореному обертанні напрямлені в один бік, а в уповільненому обертанні напрямлені в протилежні боки вздовж осі обертання.

Зауваження:

В техніці кутову швидкість ω визначають ще числом обертів в хвилину (n, об/хв). Зв'язок між одиницями вимірювання дає формула:

$$\omega = n\frac{2\pi}{60}\, c^{-1} = \frac{n\pi}{30} c^{-1}. \qquad (2.5)$$

При $\boldsymbol{\omega = const}$ обертання називається рівномірним та відбувається згідно закону:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \qquad (2.6)$$

При $\varepsilon = const$ обертання називається рівнозмінним (рівноприскореним або рівноуповільненим) та відбувається за законом:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (2.6^*)$$

4.Вектор і модуль швидкості точки тіла в обертальному русі:

(формула Ейлера) $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$; $\quad v = \omega R$. (2.7)

5. Прискорення точки тіла в обертальному русі:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n; \qquad \bar{a} = \bar{\tau} a_\tau + \bar{n} a_n. \qquad (2.8)$$

5.1 Тангенціальне і нормальне прискорення точки:

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r};\ a_\tau = \varepsilon R;\ \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v};\ a_n = \omega^2 R. \qquad (2.9)$$

5.2 Модуль і напрям прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ ; tg\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (2.10)$$

2.1 Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Задача 13.1

Визначити кутову швидкість:

1) секундної стрілки годинників ω_1 ($n_1 = 1$ об/хв). Використовуємо формулу 2.5 – визначення кутової швидкості через кількість обертів n в хвилину:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1}{30} = 0{,}1047 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \text{ або } c^{-1}.$$

2) хвилинної стрілки годинників ω_2

$(n_2 = 1 \; \frac{\text{об}}{\text{год}} = \frac{1}{60}$об/хв):

$$\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1}{30 \cdot 60} = \frac{3{,}14}{1800} = 0{,}001745 \quad c^{-1}.$$

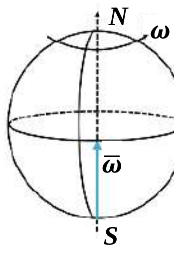
3) годинникової стрілки ω_3 ($n_3 = \frac{1\text{об}}{12\text{ год}} = \frac{1}{12 \cdot 60}$об/хв):

$$\omega_3 = \frac{\pi n_3}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1}{30 \cdot 12 \cdot 60} = 0{,}0001455 \quad c^{-1}.$$

4) Землі навколо своєї осі ω_4

$(n_4 = \frac{1\text{об}}{24\text{ год}} = \frac{1}{24 \cdot 60}$об/хв):

$$\omega_4 = \frac{\pi n_4}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1}{30 \cdot 24 \cdot 60} = 0{,}0000727 = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \quad c^{-1}.$$



Кутова швидкість Землі

$\omega_4 = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \quad c^{-1}$.

Земля обертається з заходу на схід. Якщо дивитися з північного полюсу, то обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки.

5) Парової турбіни Лаваля ω_5 ($n_5 = 15000$ об/хв):

$$\omega_5 = \frac{\pi n_5}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 15000}{30} = 1570{,}8 \quad c^{-1}.$$

Задача 13.4

Дано:

$\varepsilon = const.$

При $t = 0$; $\omega_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; (обертання зі стану спокою).

За $t = 2$ хв $= 120$ с $N = 3600$ обертів.

Визначити: ε –?

Для визначення кутового прискорення тіла через 120 с обертання скористаємось формулою $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ (A). Кут φ за 3600 обертів $\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 3600$. Враховуючі, що $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, з (A) отримаємо:

$$2\pi \cdot 3600 = \varepsilon \cdot \frac{120^2}{2} \rightarrow 14400\,\pi = \varepsilon \cdot 14400;$$

$\varepsilon = \pi$ рад/с.

Відповідь: $\varepsilon = \pi$ рад/с.

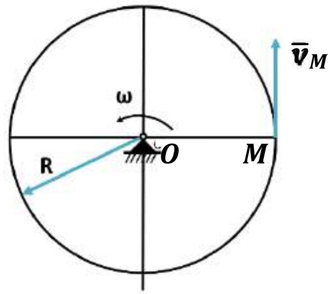
Задача 13.5

Дано:

$\omega_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$;

$\varepsilon = const$ (рівноприскорений рух);

$t_1 = 5\ c$; $N = 12{,}5$ обертів.



Визначити: ω при $t_1 = 5\ c$.

При рівноприскореному обертанні кут повороту валу визначається за формулою (закон рівноприскореного обертання)

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Так як при $t = 0$ $\omega_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$, то в нашому випадку

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (\mathrm{A}),$$

звідси $\varphi = 2\pi N = 2\pi \cdot 12{,}5 = 25\pi$, підставимо в (А)

$$25\pi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \to \varepsilon = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 2\pi\ \text{с}^{-2}.$$

Кутова швидкість валу $\omega = \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) = \varepsilon t$.

При $t_1 = 5\ c$ $\omega = 5\varepsilon = 2\pi \cdot 5 = 10\pi\ \text{с}^{-1}$.

Відповідь: $\omega = 10\pi\ \text{с}^{-1}$.

Задача 13.8

Дано:

При $t = 0$ $\omega_0 = 40\pi\ c^{-1}$; $\varepsilon = const$ (рівноуповільнений рух).

При $t = T$ (час до зупинки) пропелер зробив $N = 80$ обертів.

Визначити: Т-? (час до зупинки)

При рівнозмінному обертанні $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varepsilon = const$; при $t = 0$

$\omega_0 = 40\pi\ c^{-1}$ і $\varphi_0 = 0$. $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Користуючись початковими умовами, отримаємо

$$\varphi = 40\pi t - \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad \text{(B)}$$

Кутова швидкість $\omega = \dot{\varphi} = 40\pi - \varepsilon t$. (A)

При $t = T$ (час до зупинки) $\omega = 0$ з (A)

$T = \dfrac{40\pi}{\varepsilon}$ с і $\varphi = 2\pi N$.

Підставимо Т до (B):

$$80\pi \cdot 2 = \frac{40\pi \cdot 40\pi}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{40\pi}{\varepsilon}\right)^2$$

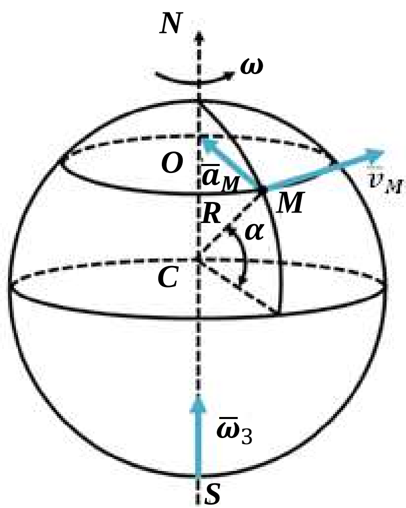
Звідси отримаємо

$$160\pi = \frac{800\pi^2}{\varepsilon} \to \varepsilon = 5\pi \text{ с}^{-2},$$

Підставимо до Т : $T = \dfrac{40\pi}{5\pi} = 8$ с.

Відповідь: $T = 8$ с.

Задача 13.12



Дано:

$R_{\text{Землі}} = 6370$ км;

$\varphi = 60°$ (широта міста Осло або Хельсінки).

Визначити: v_M, a_M -?

Визначити швидкість та прискорення точки, розташованої в цих містах.

$\omega_3 \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}$ – кутова швидкість Землі.

$v_M = \omega_З \cdot R_{\text{Землі}} \cdot \sin 30° = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 63{,}7 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5 = 232\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$

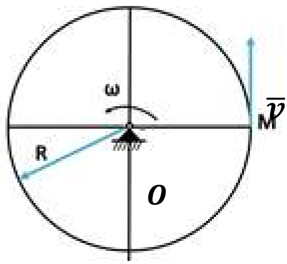
$a_M = {\omega_З}^2 \cdot R_{\text{Землі}} \cdot \sin 30° = 7{,}3^2 \cdot 10^{-10} \cdot 63{,}7 \cdot 10^5 \cdot 0{,}5 =$
$= 0{,}0169\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

$OM = R_{\text{Землі}} \cdot \sin 30°$ - відстань від т. M (наприклад, місто Осло) до осі Землі SN.

Відповідь:

$v_M = 232\,\frac{\text{м}}{\text{с}};\ a_M = 0{,}0169\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Задача 13.13



Дано:

$R = 0{,}5$ м; $\omega = const;$

$v_M = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = v.$

Визначити: n обертів за хвилину−?

Махове колесо обертається з постійною кутовою швидкістю

$\omega = const;\ \omega = \frac{2\pi n}{60}.$

Звідси $n = \frac{30\omega}{\pi}.$ (A)

Швидкість точки M на ободі маховика $v = \omega \cdot R$, звідси $\omega = \frac{v}{R}$, підставимо в (А):

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{v}{R} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{2}{0{,}5} = \frac{120}{\pi} = 38{,}2\,\frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Відповідь: $n = 38{,}2\,\frac{\text{об}}{\text{хв}}.$

Задача 13.14

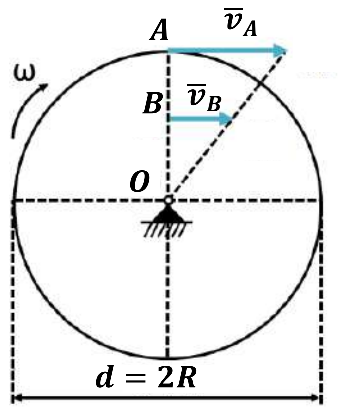
Дано:

$v_{\text{A}} = 50\frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$v_{\text{B}} = 10\frac{\text{см}}{\text{с}}$;

$AB = 20$ см.

Визначити: $\omega, d-?$



Кутова швидкість шківа:

$$\omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{v_B}{OB}. \qquad (1)$$

$OA = OB + AB$, підставимо до (1)

$$\frac{v_A}{OB + AB} = \frac{v_B}{OB} \rightarrow$$

$$v_A \cdot OB = v_B \cdot OB + v_B \cdot AB.$$

Звідси:

$$OB = \frac{v_B \cdot AB}{v_A - v_B} = \frac{10 \cdot 20}{50 - 10} = 5 \text{ см}.$$

Діаметр шкива $d = 2(OB + AB) = 2(5 + 20) = 50$ см.

$R = 25$ см.

Кутова швидкість шківа:

$$\omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{v_A}{R} = \frac{50}{25} = 2\ c^{-1}.$$

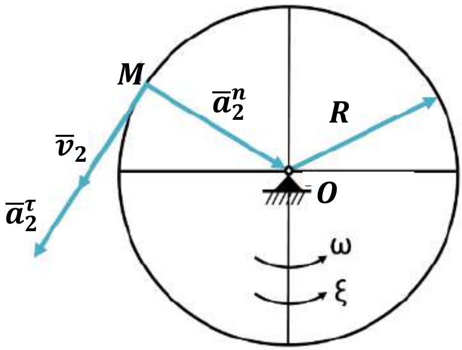
Відповідь:

$\omega = 2\ c^{-1}, \qquad d = 50$ см.

Задача 13.15

Дано:
$R \quad = 2$ м; $\varepsilon = const$;
$t_1 = 10\ c$; $v_1 = 100\frac{\text{м}}{\text{с}}$;
$t_2 = 15\ c$.

Визначити: $v_2,\ a_2^n,\ a_2^\tau -?$



За умовами задачі

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \varepsilon = const, \tag{1}$$

тобто махове колесо обертається рівноприскоренно.
Початкові умови:

$$t = 0;\ \varphi_0 = 0;\ \omega_0 = \dot{\varphi}_0 = 0. \tag{2}$$

З (1) маємо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon t + C_1; \\ \varphi &= \varepsilon\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Підставив в (3) початкові умови, визначаємо сталі інтегрування.
$C_1 = C_2 = 0$.
Тоді закон обертання маховика та кутова швидкість будуть мати вигляд:

$\varphi = \varepsilon \dfrac{t^2}{2}$; $\omega = \varepsilon t$.

Швидкість точки *M* на ободі маховика:

$v = \omega R = \varepsilon t R \to \varepsilon = \dfrac{v}{tR}$.

При

$t_1 = 10\ c, v_1 = 100 \dfrac{м}{с} \to \varepsilon = \dfrac{100}{10 \cdot 2} = 5\ с^{-2}$.

При

$t_2 = 15\ c \quad \omega_2 = 5 \cdot 15 = 75\ с^{-1}; \quad v_2 = \omega_2 R = 75 \cdot 2 = 150\ \dfrac{м}{с}$;

$a_2^{\tau} = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10\ \dfrac{м}{с^2}$; $a_2^n = \ {\omega_2}^2 \cdot R = 75^2 \cdot 2 = 11250\ \dfrac{м}{с^2}$.

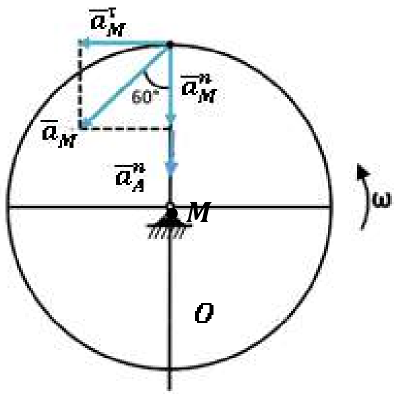
(тангенціальне та нормальне прискорення)

Вектор $\bar{a}_2^n$ напрямлений від точки *M* до центру маховика, вектор $\bar{a}_2^{\tau}$ напрямлений по дотичній в т. *M* як вектор швидкості, тому що обертання прискорене.

Відповідь:

$v_2 = 150\ \dfrac{м}{с}$; $a_2^{\tau} = 10\ \dfrac{м}{с^2}$; $a_2^n = 11250\ \dfrac{м}{с^2}$.

Задача 13.17



Дано:

$a_{\tau} = 10\sqrt{3}\,\frac{м}{с^2}$;

$(\widehat{\bar{a};R}) = \alpha = 60°$;

$R = 1$ м.

Визначити: $\boldsymbol{a_n}$–?

при $R = 0{,}5$ м (в точці *A*).

Визначимо повне прискорення
т. M на ободі шківа

$$a = \frac{a_\tau}{cos30°} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Нормальне прискорення точки M

$$a_n = a \cdot cos60° = 20 \cdot 0{,}5 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

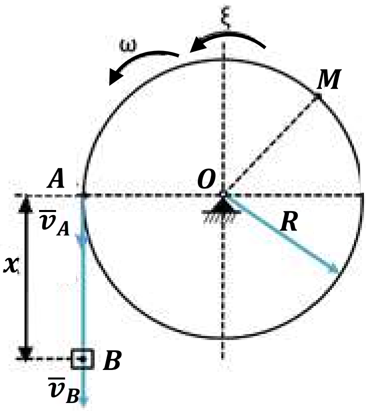
З урахуванням, що $a_n = \omega^2 \cdot R = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (прискорення пропорційне радіусу), отримаємо, $a_A^n = 0{,}5 \cdot a_M^n = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $a_n = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 13.18

Дано:
$R = 10$ см;
$x = 100t^2$, см.

Визначити: ω, ε, a_M—?
в момент часу t



Швидкість точки A на ободі вала:
$v_A = \omega \cdot R$ дорівнює швидкості вантажу B
$v_\text{В} = \dot{x} = 200t = v_A$.
$\omega \cdot R = 200t \rightarrow$

$$\omega = \frac{200t}{R} = 20t\ \text{с}^{-1}.$$

Кутове прискорення валу визначаємо за формулою (2.10):
$\varepsilon = \dot{\omega} = 20\ c^{-2}$.

$$a_M = R\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)} = 10\sqrt{20^2 + (20t)^4}$$
$$= 200\sqrt{1 + 400t^2}\ \frac{см}{с^2} -$$

прискорення т. *M.*

Відповідь:

$\omega = 20t\ с^{-1}$; $\varepsilon = 20\ c^{-2}$;

$$a_M = 200\sqrt{1 + 400t^2}\ \frac{см}{с^2}.$$

2.2 Перетворення простіших рухів твердого тіла

Під перетворенням простіших рухів слід розуміти:

а) перетворення обертального руху в поступальний (і навпаки);

б) перетворення обертання навколо однієї нерухомої осі до обертання навколо іншої нерухомої осі;

в) перетворенні одного поступального руху в інший поступальний рух.

При рішенні таких задач використовують сумісно формули кінематики точки та формули обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Передача обертальних рухів здійснюється за рахунок зубчастого або фрикційного зчеплення, або за допомогою ремінної передачі. При внутрішньому зчепленні та ремінних передачах, які не перехрещуються, напрями обертів співпадають. Величині швидкостей на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зчепленні, та на шківах ремінної передачі (за відсутністю ковзання) рівні.

Кутові швидкості коліс зворотньо-пропорційні числам зубців, радіусам або діаметрам:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = i_{1,2}\,, \qquad \text{(A)}$$

де ω_1, ω_2 – кутові швидкості;

r_1, r_2, d_1, d_2 –радіуси та діаметри початкових кіл;

z_1, z_2 – число зубців першого та другого коліс;

$i_{1,2}$ – передаточне відношення.

Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки у механізмі з одним ступенем волі називається передаточним відношенням $i_{1,2}$.

Взяте за модулем передаточне відношення називається передаточним числом $u_{1,2}$.

Задача 14.1

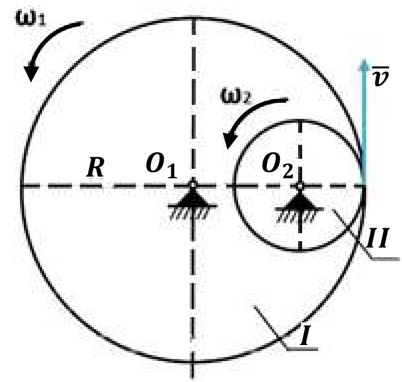
(перетворення обертального в обертальний рухи)

Дано:

$d_1 = 360$ мм;

$\omega_1 = 10\frac{\pi}{3}$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 3\omega_1$.

Визначити: d_2 –?



Шестерні знаходяться во внутрішньому зчепленні. В місці торкання коліс швидкості першого і другого колеса рівні.

Величина швидкості точки торкання колеса *I* дорівнює:

$v = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{d_1}{2}\omega_1.$

Модуль швидкості точки торкання колеса *II*:

$v = \omega_2 \cdot r_1 = \frac{d_2}{2}\omega_2 = \frac{d_2}{2}3\omega_1.$

Прирівнявши швидкості, визначимо d_2:

$$\frac{d_1}{2}\omega_1 = \frac{d_2}{2}3\omega_1 \to d_2 = \frac{d_1}{3} = \frac{360}{3} = 120 \text{ мм}.$$

Або користуючись співвідношенням (А):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} \to d_2 = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{3\omega_1} = \frac{d_1}{3} = \frac{360}{3} = 120 \text{ мм}.$$

Відповідь: $d_2 = 120$ мм.

Задача 14.2

(перетворення обертального в обертальний рухи)

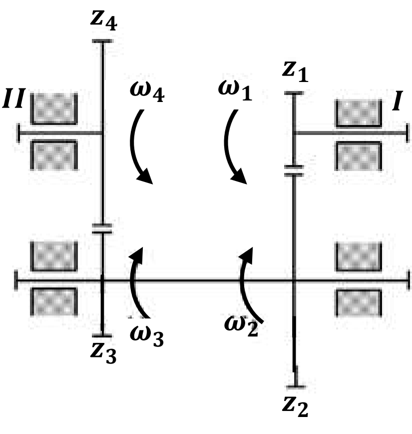
Дано:

Кількість зубців

$z_1 = 10$; $z_2 = 60$;

$z_3 = 12$; $z_4 = 70$.

Визначити: $i_{I,II}$–? (передаточне відношення механізму)



Редуктор складається з чотирьох шестерень. Визначим передаточне відношення механізму $i_{I,II}$.

З рівняння швидкостей точок торкання шестерень маємо:

$r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2;\ \ r_3 \cdot \omega_3 = r_4 \cdot \omega_4 = \ r_4 \cdot \omega_{II}.$

Передаточне відношення:

$i_{I,II} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_I}{\omega_2}; i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3} = i_{3,II}$; ($\omega_2 = \omega_3 -$ один вал).

Передаточне відношення механізму:

$$i_{I,II} = i_{I,2} \cdot i_{3,II} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3}. \qquad (A)$$

В (А) радіуси замінимо на число зубців:

$$i_{I,II} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{60 \cdot 75}{10 \cdot 12} = 35.$$

Відповідь: $i_{I,II} = 35$.

Задача 14.4

(перетворення поступального в обертальний рухи)

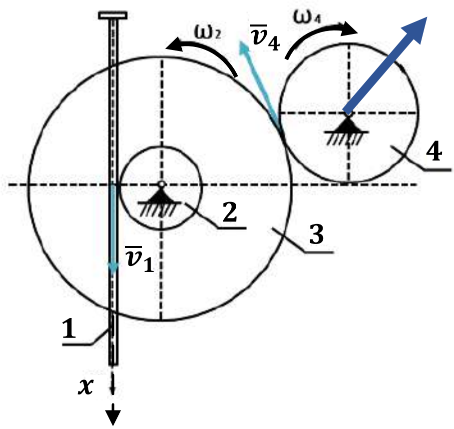
Дано:

$x = asinkt$ – закон руху штифта;

r_2, r_3, r_4 – радіуси зубчастого колеса.

Визначити:

$\omega_4 -?$ кутову швидкість стрілки (стрілка обертається сумісно з колесом 4)



Штифт 1 переміщується вертикально за законом $x = asinkt$, швидкість штифта та точки торкання штифта і колеса 2:

$v = \dot{x} = akcoskt.$

Кутова швидкість коліс 2-3

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{akcoskt}{r_2}\,. \qquad (A)$$

Швидкість точки торкання коліс 3-4 $v_4 = \omega_2 \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4$, звідси кутова швидкість колеса 4 зі стрілкою: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} \cdot akcoskt$.

Відповідь:

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} \cdot akcoskt.$$

Задача 14.9

(перетворення обертального в обертальний рухи)

Дано:

$r_1 = 10$ см;

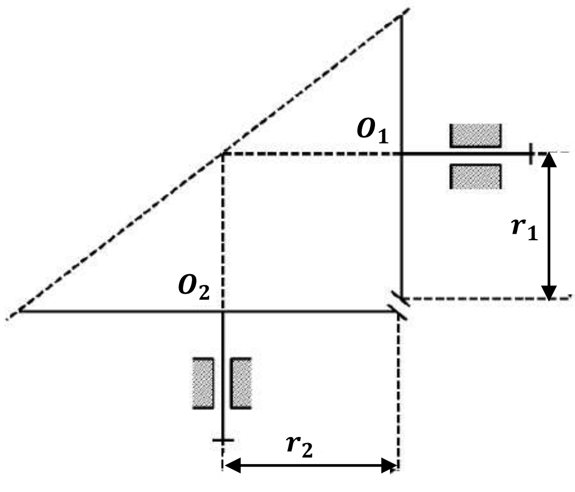
$r_2 = 15$ см;

$\varepsilon_2 = 4\,\pi$ с$^{-2} = const$.

Початкові умови: при $t_0 = 0$, $\omega_{20} = 0$; $\varphi_{20} = 0$.

Визначити:

$T-$? (час коли колесо O_1 буде мати кутову швидкість $\omega_1 = 144\,\pi$ с$^{-1}$.



Обертання колеса O_2 при $t_0 = 0$ починається зі стану спокою з сталим кутовим прискоренням ε_2.

Кут повороту колеса O_2 визначається за формулою:

$\varphi_2 = \frac{\varepsilon_2 t^2}{2}$.

Кутова швидкість колеса O_2 $\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \varepsilon_2 t$. (A)

Швидкості коліс O_1 і O_2 в точці торкання K рівні

$v_1 = v_2 \rightarrow$

$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \quad \omega_1 \cdot r_1 = \varepsilon_2 t \cdot r_2$.

При $t = T$, коли $\omega_1 = 144\,\pi$ с$^{-1}$.

$$T = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{\varepsilon_2 \cdot r_2} = \frac{144\,\pi \cdot 10}{4\pi \cdot 15} = 24 \text{ с.}$$

Відповідь: $T = 24$ с.

Задача 14.10

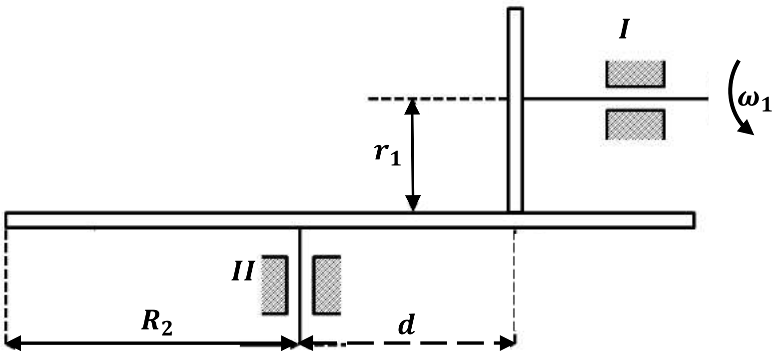
(перетворення обертального в обертальний рухи)

Дано:

$r_1 = 5$ см; $R_2 = 15$ см;

$\omega_1 = 20\pi\ c^{-1}$; $d = (10 - 0{,}5t)$ см.

Визначити: $\varepsilon_2 = f(d) -?$ $a_B -?$ при $d = r_1$.



1) Швидкість точки *A* торкання коліс *I* і *II* дорівнюють:

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot d_2.$$

Звідси

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{d_2} = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{10 - 0{,}5t}. \qquad (A)$$

Кутове прискорення колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{-(-0{,}5)\omega_1 \cdot r_1}{(10 - 0{,}5t)^2} = \frac{0{,}5 \cdot 20\pi \cdot 5}{d^2} = \frac{50\pi}{d^2}\ c^{-2}.$$

2) При $d = r_1$ маємо з виразу (A): $\omega_2 = \omega_1 = 20\pi$ с$^{-1}$,

$$\varepsilon_2 = \frac{50\pi}{5^2} = 2\pi\ \text{с}^{-2}.$$

Прискорення точки *B* на ободі колеса II:

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{({\omega_2}^2 \cdot R_2)^2 + (\varepsilon \cdot R_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(20^2\pi^2 \cdot 15)^2 + (2\pi \cdot 15)^2} = 30\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1}\ \text{см/с}^2.$$

Відповідь: $\varepsilon_2 = \frac{50\pi}{d^2}\ c^{-2}$; $a_B = 30\pi\sqrt{40000\pi^2 + 1}$ см/с^2.

Задача 14.18

Дано:

$r = 30$ см; $v = 5$ см$/c$;

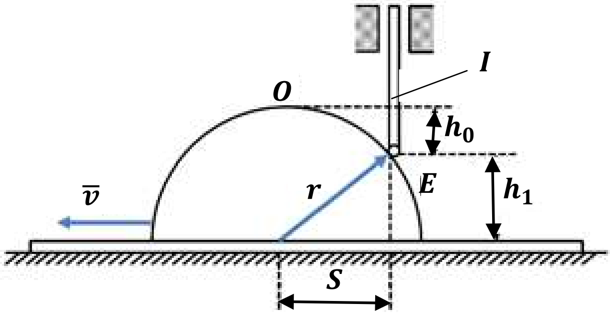
$t = 3\ c$; при $t = 0, h = 0.$

Визначити: $h-$? при $t = 3\ c$.

Коловий кулачок рухається з постійною швидкістю $v = 5$ см$/c$.

Визначимо закон руху кулачка:

$$v = \frac{dS}{dt} = 5;\ dS = 5dt, \text{ звідси } S = 5t + C_1. \qquad (1)$$



Початкові умови задачі: при $t = 0, S = 0$ (стержень I опирається на вершину кулачка в т. O). Підставимо початкові умови в (1) та отримаємо $C_1 = 0$, закон руху кулачка має вигляд $S = 5t$.

Визначимо вертикальне переміщення h точки E стержня 1:

$$h = r - h_1 = r - \sqrt{r^2 - S^2} = r - \sqrt{r^2 - (5t)^2}.$$

Підставимо вихідні дані:

$$h = 30 - \sqrt{30^2 - (5 \cdot 3)^2} = 30 - \sqrt{900^2 - 25 \cdot 9} = 4{,}02 \text{ см}$$

Відповідь: $h = 4{,}02$ см.

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток

3. ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1 Рівняння руху плоскої фігури

Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називають такий його рух, коли всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

При такому русі всі точки тіла, які лежать на перпендикулярі до цієї площини, мають однакові траєкторії, швидкості та прискорення. Тому при вивченні плоского руху достатньо дослідити рух плоскої фігури S, яка є перерізом тіла площиною, паралельною нерухомій. Для цього введемо систему координат, в котрій розглянемо рух плоского перерізу S (Рис. 3.1).

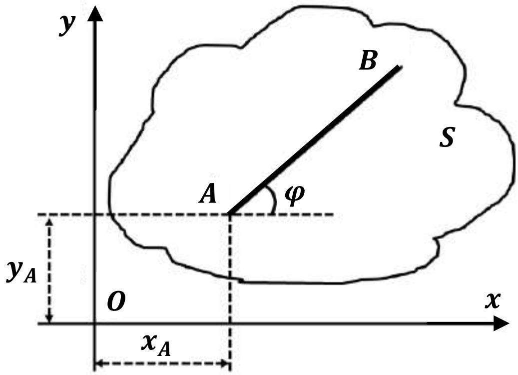


Рисунок 3.1

Положення плоскої фігури в площині xOy повністю визначається положенням довільної прямої AB цієї фігури, а положення прямої AB можна визначити, задавши координати $X_A, У_A$ точки A (полюса) і кут між AB та віссю x. Під час руху тіла величини $X_A, У_A$ і φ будут змінюватися, тобто вони є функціями часу t:

$$X_A = f_1(t);\ У_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t). \qquad (3.1)$$

Рівняння (3.1) визначають закон руху плоскої фігури.

Висновок. Рух плоскої фігури в її площині **завжди можна розкласти на два рухи: 1) поступальний рух, в**

якому всі точки цієї фігури рухаються так як довільна точка цієї фігури обрана за полюс; 2) обертальний рух фігури навколо полюса.

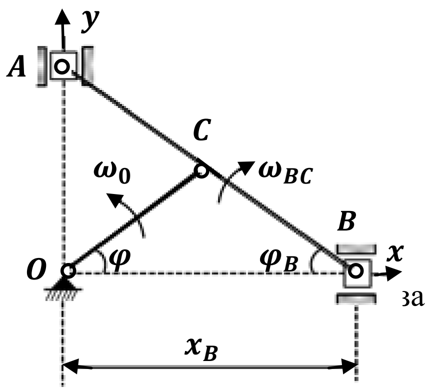
Основними кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість і прискорення поступального руху ($\bar{v}_{\text{пост}} = \bar{v}_A$, $\bar{a}_{\text{пост}} = \bar{a}_A$), а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ε обертального руху фігури навколо полюса.

Кутові швидкість і прискорення визначаються за формулами: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Увага! Кутова швидкість і кутове прискорення тіла не залежать від вибору полюса.

Задача 15.1

Дано:
$\omega_{OC} = \omega_0 = const.$
$OC = BC = AC = r;$
При $t = 0,$
AC – горизонтальна.



Визначити: рівняння плоского за полюс повзун B.

Прийняв за полюс повзун B, запишемо рівняння плоского руху ланки AB:
$x_B = f_1(t),\ \ y_B = f_2(t), \varphi = f_3(t).$
$x_B = OC \cdot cos\varphi + CB \cdot cos\varphi = 2rcos\varphi = 2r\cos\omega_0 t.$
$\varphi = \omega_0 t$ – кут повороту кривошипа OC.

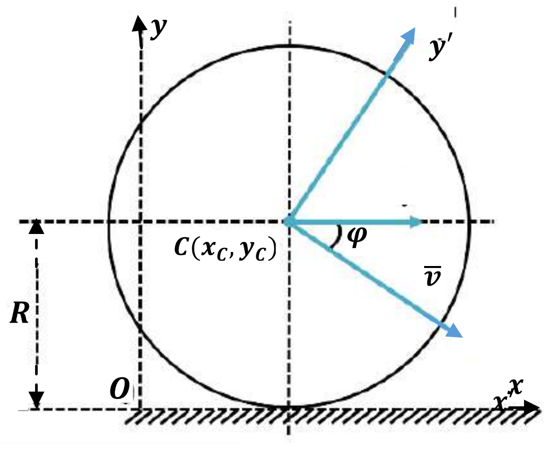
Повзун B рухається вздовж осі Ox, тому $y_B = 0$. Ланка еліпсографа AB обертається навколо полюса B з кутом повороту $\varphi_{AB} = \varphi_B = -\omega_0 t$. Знак (-) вказує, що ланка BC обертається в напрямі, протилежному зміні кута φ. OC обертається навколо т. O проти годинникової стрілки (ω_0 – додатне); ланка BC обертається навколо т. B за годинниковою стрілкою (ω_0 – від'ємне).

Відповідь: $x_B = 2r\cos\omega_0 t,\ \ y_B = 0, \varphi_B = -\omega_0 t$.

Задача 15.2

Дано:
Колесо радіуса R котиться без ковзання.
$v_C = v = const$. При $t = 0$ точка C лежала на осі Oy. Вісь Cy була напрямлена вертикально.

Визначити: рівняння руху колеса, прийняв C за полюс.



Колесо здійснює плоский рух, який складається з поступального руху колеса разом з полюсом C та обертального руху навколо полюса C.

1) поступальний рух колеса описується рівняннями:
$x_C = x_C(t);\ y_C = y_C(t)$,

де x_C, y_C – координати полюса C в осях нерухомої системи координат xOy.

Так як рух полюса C рівномірний і прямолінійний, то $x_C = vt$, а $y_C = R$.

Обертальний рух колеса навколо полюса C має вигляд: $\varphi = \varphi(t)$, де φ – кут повороту колеса навколо полюса C.

Так як колесо котиться без ковзання, то дуга, яку описує точка на ободі, буде дорівнювати відстані x_C, яку пройде точка C.

Звідси,

$$\varphi = \frac{x_C}{R} = \frac{vt}{R}.$$

Таким чином, рух колеса описує система рівнянь:

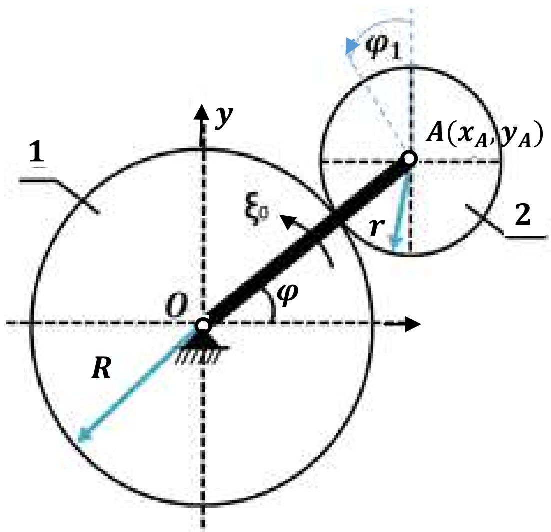
$$x_C = vt, \ \ y_C = R, \varphi = \frac{vt}{R}.$$

Відповідь: $x_C = vt, \ \ y_C = R, \varphi = \frac{vt}{R}$.

Задача 15.3

Дано:
$R, r,$
$\varepsilon_{OA} = \ \varepsilon_0 = const.$
При $t = 0,$
$\omega_0 = \varphi_0 = 0.$

Визначити: **рівняння руху малої шестерні 1, прийняв за полюс** її центр A.



Шестерня 1 здійснює рух в вертикальній площині (поступальний разом з полюсом і обертальний навколо полюса. Поступальний рух шестерні 1 з центром *A* має вигляд:

$$x_A = f_1(t),\ \ y_A = f_2(t), \qquad \text{(A)}$$

де $x_A,\ \ y_A$ – координати полюса в декартовій системі координат xOy. Так як кривошип $OA = (R + r)$ обертається рівноприскорено, то його кут повороту визначаємо за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

де ε_0 – кутове прискорення кривошипу.

Таким чином, за умовами задачі при $t = 0\ \ \omega_0 = \varphi_0 = 0,$ то кут:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \qquad \text{(B)}$$

Рівняння руху полюса мають вигляд:

$$x_A = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},\ \ y_A = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Кут повороту шестерні 1 навколо полюса *A* запишеться як залежність $\varphi_1 = f_3(t)$. Шестерня 1 не просковзує на нерухомій шестерні 2, тому дуга S_1, яку опише будь яка точка, розташована на ободі шестерні 1, буде дорівнювати дузі S, яку опише центр *A* шестерні 1. Так як точка *A* є загальною для кривошипу та шестерні 1, знаходимо: $S_1 = r\varphi_1;\ \ S = (R + r)\varphi$.

Так як $S_1 = S$, маємо $r\varphi_1 = (R + r)\varphi$ або

$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\varphi$, а з урахуванням (B) $\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$.

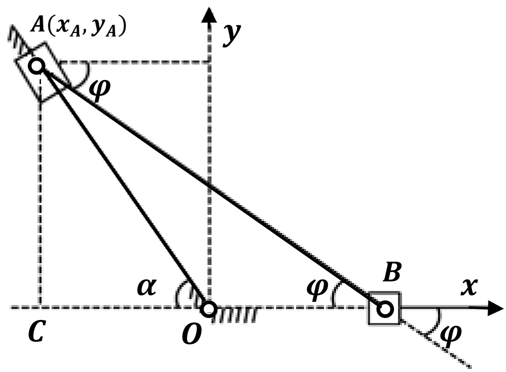
Відповідь: $x_A = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},\ \ y_A = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$

$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}.$$

Задача 15.6

Дано:
$\ell_{AB} = \ell; v_A = const.$
При $t = 0$ муфта A знаходилася в точці O (початок координат)
$\angle BOA = \pi - \alpha.$

Визначити: рівняння руху стержня AB, прийняв за полюс точку A.



Стержень AB має плоский рух в вертикальній площині, який складається з поступального руху разом з полюсом A та обертального навколо полюса A. Поступальний рух описується рівняннями виду: $x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$, де x_A, y_A – координати полюса A в системі координат $x0y$.

В даному випадку $x_A = -OA\cos\alpha$, $y_A = OA\sin\alpha$, (1)

За умовами задачі муфта А рухається з постійною швидкістю v_A, звідси $OA = v_A \cdot t$. Рівність (1) прийме вигляд: $x_A = -v_A \cdot t\cos\alpha$, $y_A = v_A \cdot t\sin\alpha$.

Обертальний рух стержня AB навколо полюса A має вид

$$\varphi = f_3(t).$$

Для визначення закону, за яким змінюється кут φ за часом, розглянемо трикутник ABC . З трикутника знаходимо

$$\sin\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{У_A}{AB} = \frac{v_A \cdot t}{\ell}\sin\alpha,$$

звідси

$$\varphi = arc\sin\left[\frac{v_A \cdot t}{\ell}\sin\alpha\right].$$

Таким чином плоский рух стержня описуємо системою рівнянь: $x_A = -v_A \cdot t\cos\alpha$, $y_A = v_A \cdot t\sin\alpha$,

$\varphi = arc\sin\dfrac{v_A \cdot t\sin\alpha}{\ell}$.

Відповідь: $x_A = -v_A \cdot t\cos\alpha$,

$y_A = v_A \cdot t\sin\alpha$, $\qquad \varphi = arc\sin\left[\left(\frac{v_A \cdot t}{\ell}\right)\sin\alpha\right]$.

3.2. Швидкості точок тіла при плоскому русі. Миттєвий центр швидкостей. План швидкостей.

3.2.1 Теорема про швидкість точки плоскої фігури

Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса і швидкості цієї точки в її обертальному русі навколо полюса.

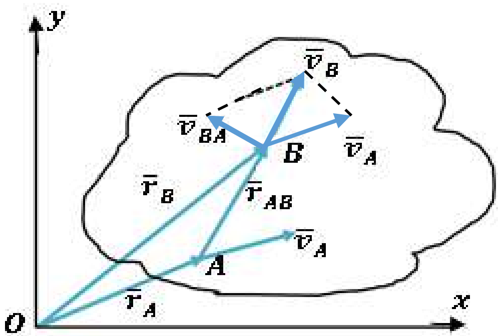


Рисунок 3.2

Закон руху точки в векторній формі:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}. \tag{3.3}$$

Диференціюючи (3.3) за часом:

$$\dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{AB},$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB} \ (\ \bar{v}_{AB} \perp \ AB, v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB), \tag{3.4}$$

де $\bar{v}_{AB} = \bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{AB}$, або за модулем $v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB$.

3.2.2 Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла

Проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка з'єднує ці точки, дорівнюю одна одній.

$$v_A \cdot \cos\alpha = v_B \cdot \cos\beta. \tag{3.5}$$

Увага! У випадку, коли вектори $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$ перпендикулярні до *AB*, ця теорема не дає результату, треба використовувати інші методи.

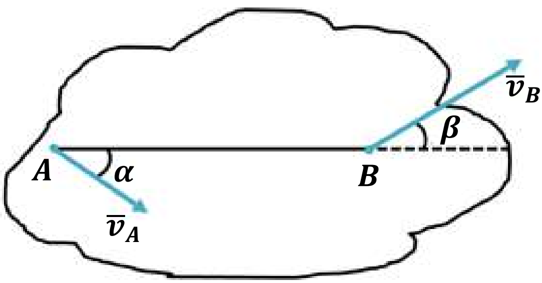


Рисунок 3.3

3.2.3 Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

В плоскому русі точка *P*, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається миттєвим центром швидкостей.

В загальному випадку МЦШ є точкою перетину перпендикулярів, проведених **в точках до векторів** швидкостей цих точок (Рис. 3.4).

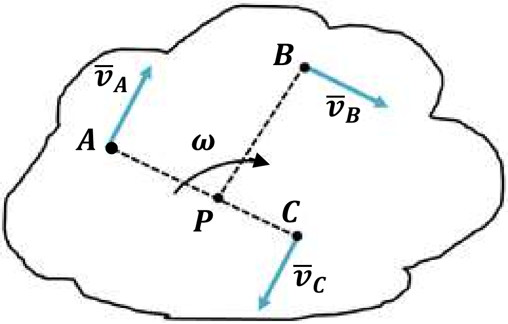


Рисунок 3.4

В кожній момент руху плоскої фігури швидкості точок можна визначати так, як при обертальному русі цієї фігури навколо МЦШ: $v_A = \omega \cdot AP$; $v_B = \omega \cdot BP$; $v_C = \omega \cdot CP$.

3.2.4. Окремі випадки визначення (МЦШ)

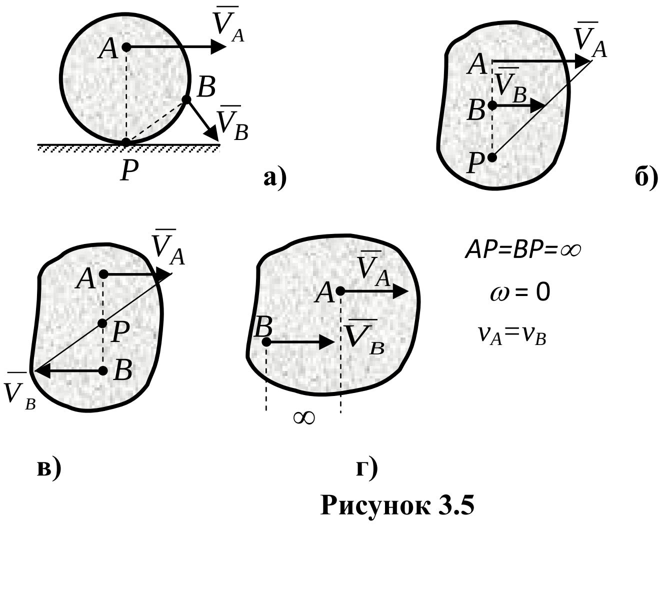


Рисунок 3.5

У випадку, показаному на Рис. 3.5 г) $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ і перпендикуляри до цих швидкостей не перетинаються.

Швидкості точок A і B та всіх інших точок в даний момент **однакові**, **кутова швидкість** фігури **дорівнює нулю**. Рух плоскої фігури в даний момент часу називають **миттєво поступальним.**

Зауваження! При розрахунку механізмів, які складаються з декількох тіл, МЦШ і кутові швидкості треба визначати окремо для кожного тіла, яке рухається плоскопаралельно.

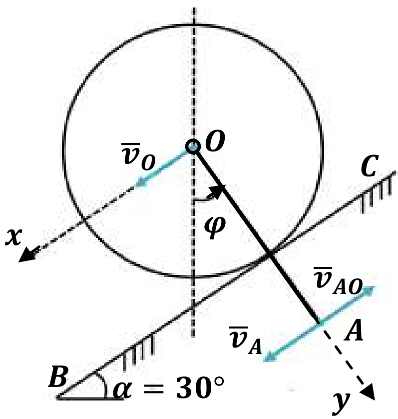
3.2.5. План швидкостей (ПШ).

Планом швидкостей називають графічне зображення (в масштабі) векторів швидкостей точок плоскої фігури у фіксований момент її руху.

Розв'язуючи графічно рівняння (3.4), визначають окремі швидкості точок плоских фігур і кутові швидкості ланок механізму (величини та напрям ω).

Задача 16.2

Дано:
$\alpha = 30°,\ x = 10t^2$, см
(закон руху центра колеса).
$OA = 36$ см,
$\varphi = \frac{\pi}{3} sin \frac{\pi}{6} t$, рад –
закон коливання стержня
OA навколо т. O. $t = 1\ c$.



Визначити: v_A при $t = 1\ c$.

1) Визначим положення стержня OA при $t = 1\ c$.

$$\varphi = \frac{\pi}{3} sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

тобто кут $\varphi = \alpha = 30°$, звідси $OA \perp Ox$ та $\perp$ до нахиленої площині BC.

2) Візьмемо за полюс т. O. Тоді $\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$.

$v_O = \dot{x}_O = 20t|_{t=1} = 20$ см/с.

Швидкість $v_{AO} = \omega_{AO} \cdot AO$ – швидкість кінця A стержня OA навколо полюса O.

$$v_{AO} = \dot{\varphi} \cdot AO = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot cos\frac{\pi}{6} t \cdot AO|_{t=1} = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 36 =$$
$$= \pi^2 \cdot \sqrt{3} \text{ см/с.}$$

Вектор $\bar{v}_{AO} \perp AO$ та напрямлений праворуч.

Швидкості $\bar{v}_O$ та $\bar{v}_{AO}$ при $t = 1\ c$ напрямлені по одній прямій в протилежні боки. Тому

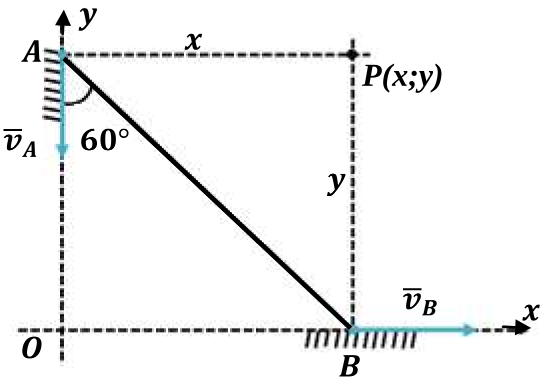
$$v_A = v_O - v_{AO} = 20 - \pi^2\sqrt{3} = 20 - 1{,}73 \cdot 9{,}87 = 20 - 17{,}07 =$$
$$= 2{,}93 \text{ см/с.}$$

Відповідь: $v_A = 2{,}9$ см/с. $v_A \parallel Ox$, напрямлений до низу.

Задача 16.7

Дано:
$AB = 1$ м;
$\alpha = \angle OAB = 60°$,

Визначити:
координати МЦШ



Точка A стержня AB сковзає по осі Oy до низу, а точка B по осі Ox вправо. МЦШ знаходиться **на перетині перпендикулярів, встановлених в точках A і B до векторів $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$.** Це точка P.

$$x = AB \cdot sin\,60° = 1 \cdot 0{,}866 = 0{,}866\ \text{м}.$$

$$y = AB \cdot cos\,60° = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\ \text{м}.$$

Відповідь: $x = 0{,}866$ м; $y = 0{,}5$ м.

Задача 16.9

Дано:
$AB = \ell$; $\alpha = 30°$;
$v_A = 180$ см/с;
$\bar{v}_B$ співпадає з напрямом AB.

Визначити: v_B –?

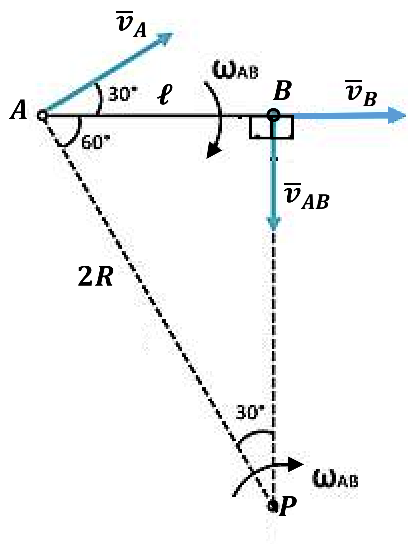
Стержень AB виконує плоский рух в площині рисунка.

І. Визначимо швидкість точки B за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок тіла:

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB},$$

$$v_A \cdot \cos 30° = v_B\,;$$

$$v_B = 180 \cdot 0{,}866 = 156\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$



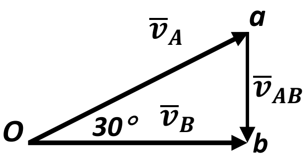
ІІ. Визначимо швидкість $\bar{v}_B$ за допомогою МЦШ. МЦШ ланки AB знаходиться на перетині перпендикулярів з

точок A і B до векторів $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$. Це точка P.
В трикутнику APB: сторона $AP = 2\ell$. Сторона $BP = 2\ell \cdot cos30°$.

Кутова швидкість стержня AB: $\omega_{AB} = \frac{v_A}{2\ell}$; швидкість точки B:

$$v_B = \omega_{AB} 2\ell \cdot cos30° = \frac{v_A}{2\ell} 2\ell \cdot cos30° = v_A \cdot cos30° = 156 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

III. Визначим v_B за допомогою плана швидкостей. Масштабний коефіцієнт для плану швидкостей:



$$\mu_V = \frac{v_A}{Oa} = \frac{180 \frac{\text{см}}{\text{с}}}{36 \text{ мм}} = 5 \frac{\text{см}}{\text{с} \cdot \text{ мм}}.$$

$Oa = 36$ мм;

$Ob = 31$ мм; $ba = 18$ мм;

Швидкість т. B, (за полюс приймаємо т. A):

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{\text{AB}} \left(\bar{v}_{\text{AB}} \perp \text{AB}, v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB\right). \qquad (1)$$

Будуємо в масштабі μ_V векторне рівняння (1). Від точки O відкладаємо відрізок $Oa = 36$ мм ($Oa = v_A$). З точки a плану швидкостей проводимо лінію перпендикулярну до AB, а з точки O - лінію паралельну $\bar{v}_B$ до перетину їх в точці b плану швидкостей. Відрізок Ob в масштабі μ_V дорівнює v_B, а відрізок ab дорівнює v_{AB}. На плані швидкостей: $Ob = 31$ мм, тоді

$$v_B = Ob \cdot \mu_V = 31 \cdot 5 = 155 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Кутова швидкість $\omega_{AB} = \frac{v_{\text{AB}}}{\text{AB}}$;

$$v_{\text{AB}} = ab \cdot \mu_V = 18 \cdot 5 = 90 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$\omega_{AB} = \frac{ab \cdot \mu_V}{\text{AB}} = \frac{90}{\ell} \; c^{-1}.$$

Швидкість $\bar{v}_{AB}$ - це швидкість обертання точки B навколо полюса A. За напрямом $\bar{v}_{AB}$ визначаємо напрям ω_{AB}, тобто напрям обертання відрізка AB навколо полюса A.

Відповідь:

$$v_B = 156\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

P.S. Похибка між графічним методом (план швидкостей) і аналітичним складає: $\Delta\% = \frac{156-155}{156}\cdot 100\% = 0{,}641\%$.

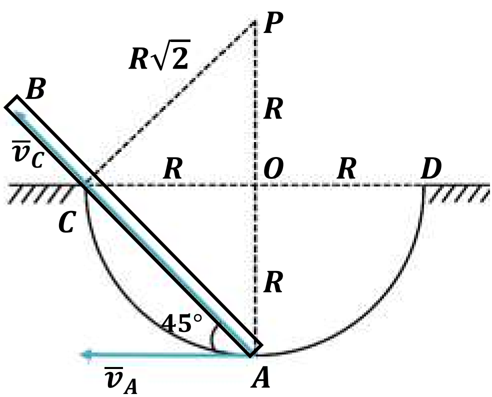
Задача 16.10

Дано:

$v_A = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$OA \perp CD$.

Визначити: v_C–?



1) Використовуємо теорему о проекціях швидкостей двох точок тіла при плоскому русі.

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_C)_{AB};$$

$$v_A \cdot \cos 45° = v_C = 4 \cdot 0{,}707 = 2{,}828 = 2{,}83\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2) Точка P – МЦШ. Кутова швидкість стержня AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{2R}.$$

Швидкість точки C

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = \frac{v_A}{2R} \cdot R\sqrt{2} = v_A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}83\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_C = 2{,}83\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 16.11

Дано:
$AB = 0{,}5$ м;
$v_A = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$;

Визначити: $v_B - ?$; $\omega_{AB} - ?$

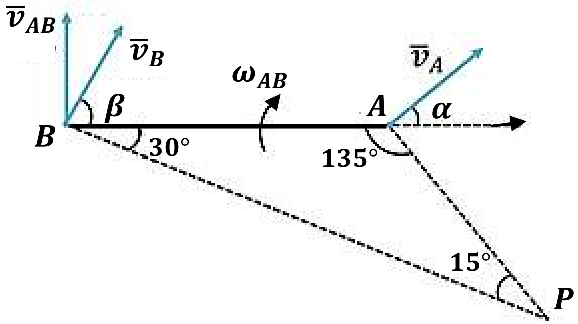


Рисунок А

1) Для визначення швидкості v_B використовуємо **теорему про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури**:

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_C)_{AB}$$

$$v_A \cdot \cos 45° = v_B \cdot \cos 60°.$$

$$v_B = \frac{v_A \cdot cos45°}{cos60°} = \frac{2 \cdot 0{,}707}{0{,}5} = 2{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2) Для визначення кутової швидкості ω_{AB} **використовуємо МЦШ**. МЦШ лежить на перетині

перпендикулярів до векторів швидкостей в точках A і B – це точка P(див. рис. А).

З трикутника ABP за теоремою синусів визначаємо AP:

$$\frac{AP}{sin\,30°} = \frac{AB}{sin\,15°};\ AP = \frac{AB\,sin\,30°}{sin\,15°} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}259} = 0{,}965\ \text{м}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{2}{0{,}965} = 2{,}06\ \text{с}^{-1}.$$

3) Для визначення швидкості точки B та кутової швидкості ланки AB використовуємо **план швидкостей**.

За полюс приймаємо точку A $\left(v_A = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}; (\bar{v}_{AB} \perp AB; v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB). \qquad (1)$$

Довжину вектору $\bar{v}_A$ визначаємо рівною $Oa = 40$ мм.
$\angle aOx = 45°$; $\angle bOx = 60°$.

Масштабний коефіцієнт для швидкостей:

$$\mu_v = \frac{v_A}{Oa} = \frac{2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{40\ \text{мм}} = 0{,}05\ \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

v_{AB} – швидкість точки B в обертанні ланки AB навколо полюса A.

Будуємо рішення векторного рівняння (1) (див. рис. Б).

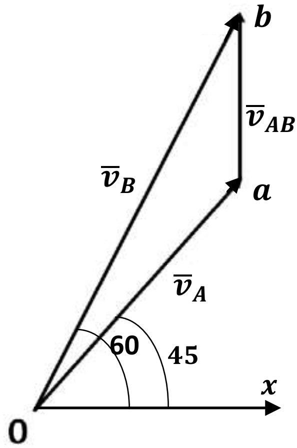


Рисунок Б

З довільної точки O відкладемо в масштабі μ_v відрізок $Oa = 40$ мм, який дорівнює швидкості v_A. Швидкість точки B дорівнює геометричної сумі швидкості полюса A та обертальної швидкості точки B навколо полюса. Проведемо через точку O пряму паралельну швидкості $\bar{v}_B$, а з точки a пряму перпендикулярну до AB, до їх перетину в точці b.

Відрізок $\boldsymbol{Ob}$ визначає швидкість швидкість точки B.

Вимірюючи Ob в мм та домноживши на μ_v, знайдемо:

$v_B = Ob \cdot \mu_v = 56{,}5 \cdot 0{,}05 = 2{,}825 = 2{,}82 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Відрізок ab визначає обертальну швидкість $\bar{v}_{AB}$:

$v_{AB} = ab \cdot \mu_v = 20{,}5 \cdot 0{,}05 = 1{,}025 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

Звідки кутова швидкість ланки AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{1{,}025}{0{,}5} = 2{,}05\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2{,}05\ \text{с}^{-1}.$$

За напрямом $\bar{v}_{AB}$ визначаємо напрям ω_{AB} (див. рис. А).

Примітка: Кутову швидкість будь якої ланки визначають за допомогою плану швидкостей за таким правилом: ділимо однойменний відрізок з плану швидкостей і механізму

$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB}$.

Відповідь: $v_B = 2{,}82 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \omega_{AB} = 2{,}05\ \text{с}^{-1}$.

Задача 16.15

Дано:

Кривошип OA.

$OA = 40$ см $= 0{,}4$ м;

Шатун $AB = 2$ м;

$\omega_{OA} = 6\pi c^{-1}$;

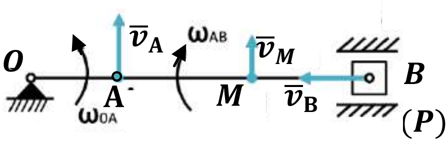
$AM = MB$.

Визначити: $v_M - ?$; $\omega_{AB} - ?$

при чотирьох положеннях кривошипу,

для яких кут $\alpha = \angle AOB = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi$.

1) Зобразимо механізм в першому положенні $\alpha_1 = \angle AOB = 0°$.



Точка B в цьому положенні є МЦШ, тобто $v_B = v_P = 0$.
Кутова швидкість ланки AB:

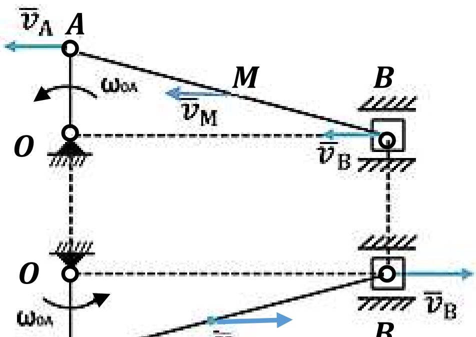
$$\omega_{AB} = -\frac{v_A}{AB} = -\frac{\omega_{OA} \cdot 0{,}4}{2} = -\frac{2{,}4\pi}{2} = -1{,}2\pi, c^{-1}.$$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 6\pi \cdot 0{,}4 = 2{,}4\pi, \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_M = \omega_{AB} \cdot \frac{1}{2} AB = 1{,}2\pi \cdot 1 = 3{,}77 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2) Друге положення механізму:

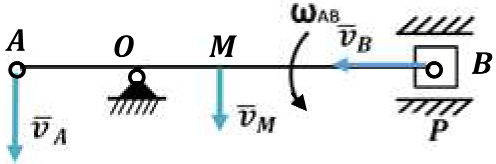
$$\alpha_2 = \angle AOB = \frac{\pi}{2}\text{ ; також } \alpha_4 = \angle AOB = \frac{3\pi}{2}.$$



МЦШ ланки AB в цих положеннях механізму знаходиться в ∞, ланка AB в даний момент часу рухається миттєво-поступально, тобто $\omega_{AB} = 0$, швидкості всіх його точок $v_A = v_B = v_M = 2{,}4\pi = 7\ 54\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3) Третє положення механізму:

$\alpha_3 = \angle AOB = \pi.$



Точка B - МЦШ ланки AB.

$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = 1{,}2\pi, c^{-1}$. ω_{AB} - додатна.

$v_{\text{M}} = \omega_{AB} \cdot \frac{1}{2} AB = 3{,}77 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Відповідь:

1)$(\alpha_1 = 0)$: $\omega_{AB} = -1{,}2\pi, c^{-1}, v_M = 3{,}77 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

2) $\left(\alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_4 = \frac{3\pi}{2}\right)$: $\omega_{AB} = 0, c^{-1}, v_M = 7{,}54 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

3) $(\alpha_3 = \pi)$: $\omega_{AB} = 1{,}2\pi, c^{-1}, v_M = 3{,}77 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Задача 16.16

Дано:

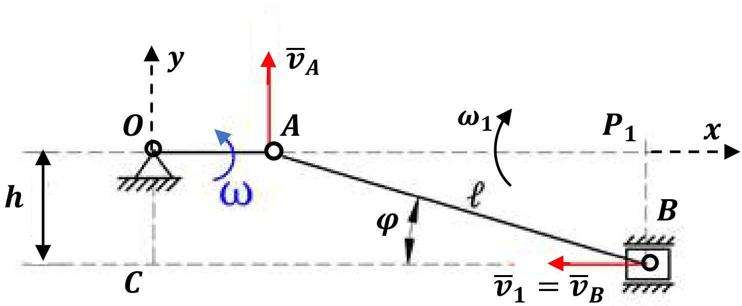
$OA = r = 40$ см; $OC = h = 20$ см;

$AB = \ell = 200$ см;

$\omega_{OA} = 1{,}5$ рад/с=*const*; $\angle AOx = \alpha$.

Визначити: $v_B -$? при $\alpha_1 = 0°, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_4 = 2\pi.$

Нецентральний кривошипний механізм виконує плоский рух в площині рисунка. Потрібно визначити швидкість повзуна B при заданих кутах α.



I. Механізм в положенні $\alpha_1 = 0°$. МЦШ в даному положенні знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$. Це точка P_1. З трикутника AP_1B

$$sin\varphi = \frac{h}{\ell} = \frac{20}{200} = 0{,}1;$$

$$\varphi = 5{,}74°; cos\varphi = 0{,}995;$$

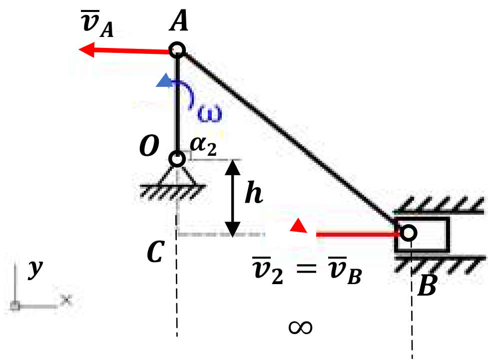
$$AP_1 = \ell \cdot cos\varphi = 200 \cdot 0{,}995 = 199 \text{ см}.$$

$$v_A = \omega \cdot r = 1{,}5 \cdot 40 = 60 \frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP_1} = \frac{60}{199} = 0{,}3015\ c^{-1};$$

$$v_1 = v_B = \omega_1 \cdot h = 0{,}3015 \cdot 20 = 6{,}03\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

II. Зобразимо механізм в положенні $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

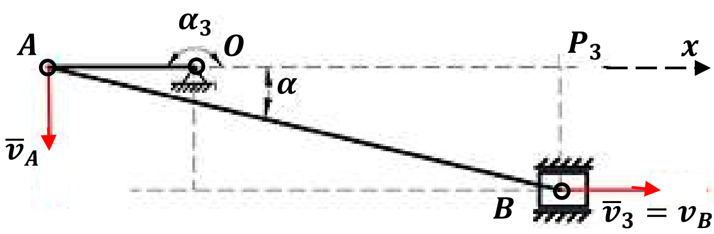


В цьому положенні МЦШ ланки AB лежить в ∞, так як $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$ і перпендикуляри до цих векторів перетинаються у ∞. Тобто шатун AB в цьому положенні виконує миттєво-поступальний рух: $\omega_2 = 0;\ v_2 = v_B = v_A = 60\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

III. Зобразимо механізм в положенні $\alpha_3 = \pi$. МЦШ ланки AB знаходиться в точці P_3. Відстань AP_3=199 см;

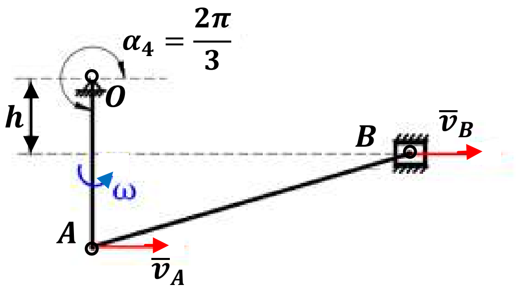
$BP_3 = h = 20\text{см}; \omega_3 = 0{,}3015\ \text{с}^{-1}$;

$v_3 = v_B = \omega_3 \cdot P_3B = 6{,}03\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.



IV. Зобразимо механізм в положенні $\alpha_4 = \frac{2\pi}{3}$. В цьому випадку, так же як і у випадку (II) МЦШ знаходиться в ∞,

$\omega_4 = 0;\ v_4 = v_B = v_A = 60\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

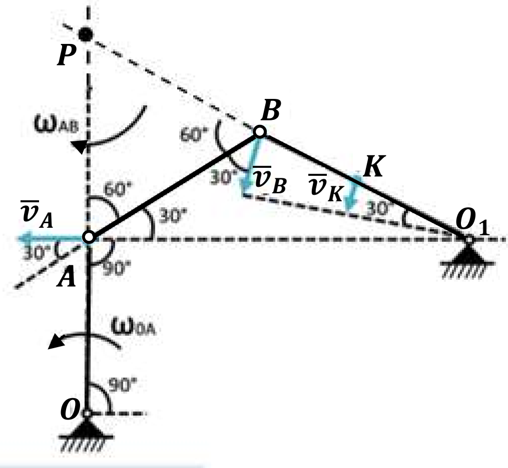


Відповідь: $v_1 = v_3 = 6{,}03\ \frac{\text{см}}{\text{с}}; v_2 = v_4 = 60\frac{\text{см}}{\text{с}}.$

Задача 16.17

Дано:
$OA = 20$ см;
$\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$;
Точка K – середина стержня BO_1

Визначити: $v_{\text{К}}$–?
$\bar{v}_A \perp OA, \bar{v}_K \perp O_1B.$



МЦШ ланки AB в точці P. Трикутник APB рівносторонній, $PA = PB$.

Швидкість точки A: $v_{\text{A}} = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40$ см/с.

Кутова швидкість ланки AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP}.$$

Швидкість точки B:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = \frac{v_A}{AP} \cdot BP = v_\text{A}.$$

Кутова швидкість ланки O_1B:

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B}.$$

Швидкість точки K (точка K середина ланки O_1B:

$$v_K = \omega_{O_1B} \cdot \frac{1}{2} O_1B = \frac{v_B}{O_1B} \cdot \frac{1}{2} O_1B = \frac{v_B}{2} = \frac{v_A}{2} = 20 \text{ см/с}.$$

v_K можна визначити іншим способом (за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури):

$$(\bar{v}_\text{A})_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB}, \qquad \text{звідси}$$

$$v_\text{A} \cdot cos30° = v_B \cdot cos30° \rightarrow v_B = v_\text{A}.$$

Відповідь: $v_K = 20$ см/с.

Задача 16.18

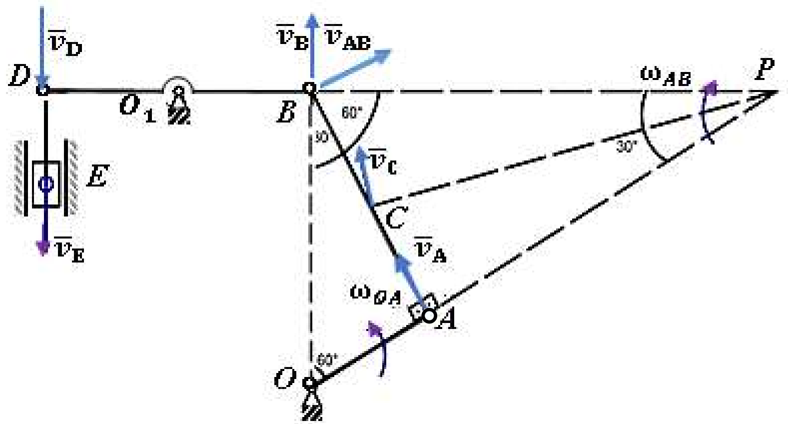
Дано:
$OA = 20$ $с$м; $O_1D = O_1B$;
$\omega_{OA} = 2\ c^{-1}$.

Визначити: v_E в положенні на рисунку

I. Рішення за допомогою МЦШ.

Розглянемо рух кожної ланки окремо. Кривошип OA обертається навколо т. O з постійною кутовою швидкістю ω_{OA}, швидкість точки A $v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}}$; $\bar{v}_A \perp OA$.

Рух стержня AB – плоский. Точка B належить до стержня AB та коромисла BO_1D, яке обертається навколо точці O_1, тому вектор $\bar{v}_B \perp O_1B$. МЦШ ланки AB лежить на перетині перпендикулярів, проведених в точках A і B до векторів $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$.



Це точка P. З трикутників OAB, OPB та ABP визначаємо відстані:

$$OB = 2OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см};$$

$$OP = 2OB = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см};$$

$$AB = OB \cdot \cos 30° = 40 \cdot 0{,}866 = 34{,}64 \text{ см};$$

$$AP = OP - OA = 80 - 20 = 60 \text{ см};$$

$$BP = OP \cdot \cos 30° = 80 \cdot 0{,}866 = 69{,}28 \text{ см або}$$

$$BP = 2AB = 2 \cdot 34{,}64 = 69{,}28 \text{ см}.$$

Кутова швидкість ланки AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67\ c^{-1}.$$

Швидкість точки B:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0{,}67 \cdot 69{,}28 = 46{,}2 \frac{\text{см}}{\text{с}};\ \bar{v}_B \perp BP. \qquad (A)$$

Коромисло BD обертається навколо нерухомої точки O_1.

Так як $O_1D = O_1B$, то $v_B = v_D = 46{,}2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

В даному положенні механізму шток $DE \perp O_1D$. В такому положенні $\bar{v}_E \parallel \bar{v}_D$. Звідси шток DE виконує миттєво-поступальний рух і швидкості точок D і E – однакові:

$$v_E = v_D = 46{,}2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

ІІ. Рішення за допомогою плану швидкостей

Визначим масштабний коефіцієнт для швидкостей. Довжину вектору $\bar{v}_A$ призначимо рівною $Oa = 40$ мм, тому масштабом плану швидкостей буде

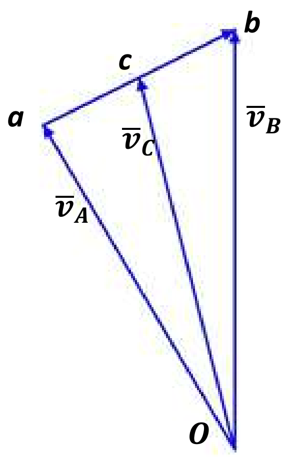
$$\mu_V = \frac{v_A}{Oa} = \frac{40}{40} = 1\ \ \frac{\text{см}}{\text{с} \cdot \text{мм}}, \qquad (1)$$

План швидкостей для точки *B* будуємо за векторним рівнянням:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}, \qquad (\bar{v}_{AB} \perp AB, v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB), \qquad (2)$$

де $\bar{v}_A$ – швидкість полюса *A*, спрямована перпендикулярно до ОА;

$\bar{v}_B$ – швидкість точки *B*, спрямована перпендикулярно до O_1B;



$\bar{v}_{AB}$ – швидкість точки *B* в обертанні ланки *AB* відносно полюса *A*, за модулем невідома і спрямована перпендикулярно до *AB*. Будуємо рішення векторного рівняння (2).

Із довільної точки *O* відкладаємо в масштабі (1) відрізок Oa, який дорівнює швидкості $\bar{v}_A$.

Швидкість точки *B* шатуна *AB* дорівнює геометричній сумі швидкості полюса *A* та обертальної швидкості точки *B* навколо полюса.

$Ob = 46$ мм;

$ab = 23$ мм.

Проведемо через точку O пряму паралельну швидкості $\bar{v}_B$, а з точки $\boldsymbol{a}$ плану швидкостей пряму, перпендикулярну до AB, до їх перетину в точці b. Відрізок Ob визначає швидкість точки B.

Вимірів Ob та помноживши на масштабний коефіцієнт μ_V, знайдемо:

$$v_B = Ob \cdot \mu_v = 46 \cdot 1 = 46\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Відрізок ab визначає обертальну швидкість точки B навколо полюса A:

$$v_{BA} = ab \cdot \mu_v = 23 \cdot 1 = 23\frac{\text{см}}{\text{с}},$$

звідки кутова швидкість ланки AB (ділимо однойменні відрізки з плану швидкостей та схеми механізму)

$$\omega_{AB} = \frac{ab \cdot \mu_v}{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{23}{34{,}64} = 0{,}664\ c^{-1}.$$

Визначення швидкості т. E див. в (А).

Примітки:

1) Перша схема виконана в масштабі

$$\mu_{\text{С}} = \frac{OA}{\ell_{OA}} = \frac{20\text{ см}}{20\text{ мм}} = 1\frac{\text{см}}{\text{мм}},$$

усі розміри можна виміряти на схемі, помножити на μ_C і отримати їх величину

$$OP = \ell_{OP} \cdot \mu_{\text{С}} = 80\text{ мм} \cdot 1\frac{\text{см}}{\text{мм}} = 80\text{ см};$$

$$AP = \ell_{AP} \cdot \mu_{\text{С}} = 60\text{ мм} \cdot 1\frac{\text{см}}{\text{мм}} = 60\text{ см}.$$

2) Якщо необхідно визначити швидкість точки C (середина AB), то на плані швидкостей визначаєм середину

відрізка ab (точка $\boldsymbol{c}$), з'єднуємо її з т. O. Відрізок Oc в масштабі дорівнює $\bar{v}_C$:

$$v_C = Oc \cdot \mu_V = 42{,}0\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

За допомогою МЦШ:

$$v_C = CP \cdot \omega_{AB} = 62 \cdot 0{,}67 = 41{,}54\frac{\text{см}}{\text{с}},$$

де $CP = \ell_{CP} \cdot \mu_\text{C} = 62\ \text{мм} \cdot 1\frac{\text{см}}{\text{мм}} = 62\ \text{см}.$

Відповідь:

$$v_\text{E} = 46{,}2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Задача 16.21

Дано:

$\omega_{AB} = \omega_O = 6\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} = const;$

$BC = 3AB.$

Визначити:

$\omega_{\text{BC}}; \omega_{CD}$ в момент, коли точки A, B, C на одній прямій.

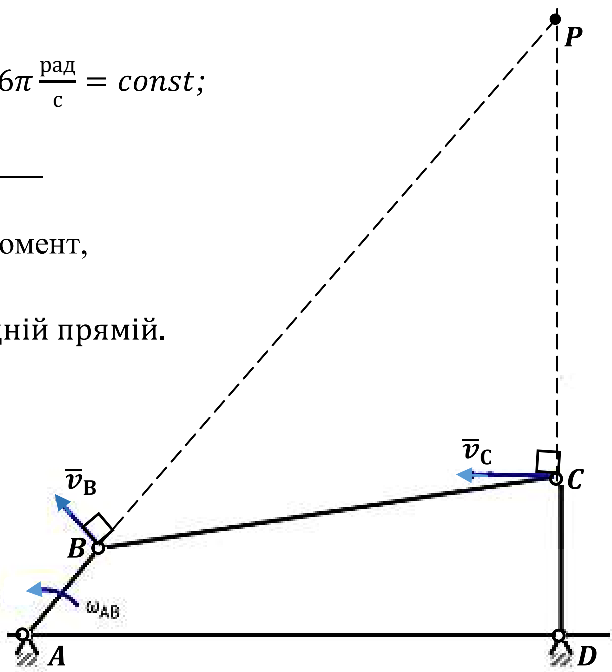


Рисунок а)

В першому положенні швидкість точки B (Рис. а):

$$v_{\text{В}} = \omega_O \cdot AB, \bar{v}_{\text{В}} \perp AB;$$

швидкість точки C:

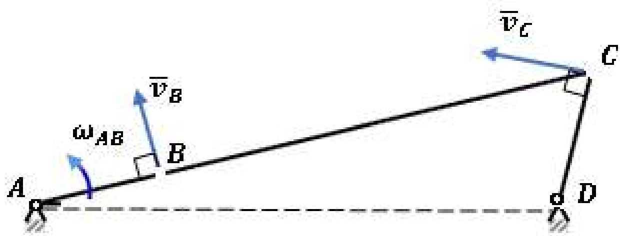
$$v_C = \omega_{CD} \cdot CD, \bar{v}_C \perp CD.$$

МЦШ ланки BC знаходиться на перетині перпендикулярів до $\bar{v}_{\text{В}}$ і $\bar{v}_C$, встановлених в точках B і C.

В момент руху, коли кривошип AB та шатун BC створюють пряму лінію, перпендикуляри до $\bar{v}_{\text{В}}$ і $\bar{v}_C$ будуть перетинатися в точці C, тобто точка C – МЦШ ланки BC (Рис. б),

$$v_C = 0, \text{і } \omega_{CD} = \frac{v_C}{CD} = 0.$$

Ланка BC обертається навколо МЦШ, (навколо точки C). Кутова швидкість ланки BC



$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{\omega_O \cdot AB}{3 \cdot AB} = \frac{\omega_O}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi, \text{рад/с}.$$

Рисунок б)

Це схема нульового положення ланки CD, подальший рух – тільки поворот вліво.

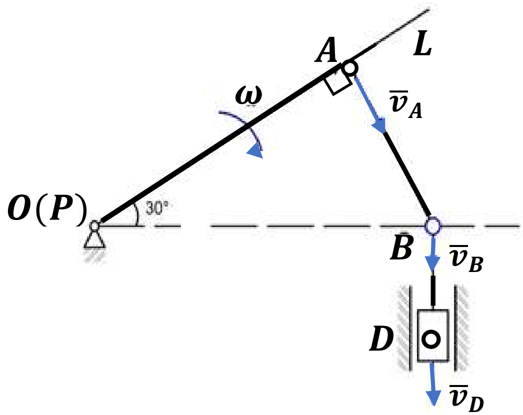
Відповідь:

$\omega_{CD} = 0;\qquad \omega_{BC} = 2\pi, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Задача 16.24

Дано:
$OA = 15$ см;
$\omega_{OA} = \omega = 2$ рад/с.

Визначити: $\omega_{AB}, v_D -?$



Механізм працює в площині креслення. Швидкість точки A кривошипу OA перпендикулярна до OA

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 15 = 30\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Поршень D зі стержнем BD виконує вертикально поступальний рух (миттєво-поступальний). $\bar{v}_B$ напрямлений по BD до низу. МЦШ ланки AB знаходиться в точці O (перетинів перпендикулярів до $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$.

Кутова швидкість AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AO} = \frac{30}{15} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

З трикутника PAB:

$$PB = \frac{PA}{cos30°} = \frac{15}{0{,}866};$$

Швидкість точки B ланки AB:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 2 \cdot \frac{15}{0{,}866} = \frac{30}{0{,}866} = 34{,}6\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

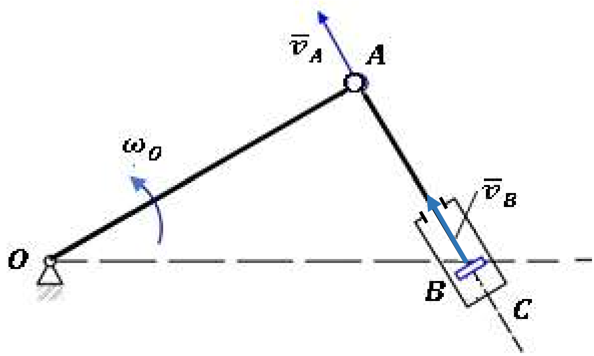
Так як ланка BD разом з поршнем D рухається миттєво-поступально, то $v_D = v_B = 34{,}6\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Відповідь: $\omega_{AB} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}, v_D = 34{,}6\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Задача 16.27

Дано:
$OA = 15$ см;
$\omega_{OA} = \omega_0 = 15$ рад/с=*const*;
$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$.

Визначити: $\omega_{\text{Ц}}, v_B$ – ?



В циліндрі, який коливається, повзун B переміщується по осі циліндра AC, яка співпадає з шатуном AB.

Якщо $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$, то $\bar{v}_A \parallel \bar{v}_B$, МЦШ ланки AB і циліндра знаходиться в ∞. $AP = BP = \infty$.

Звідси: $v_A = v_B = \omega_{OA} \cdot OA = 15 \cdot 15 = 225 \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Кутова швидкість ланки AB та циліндра B:

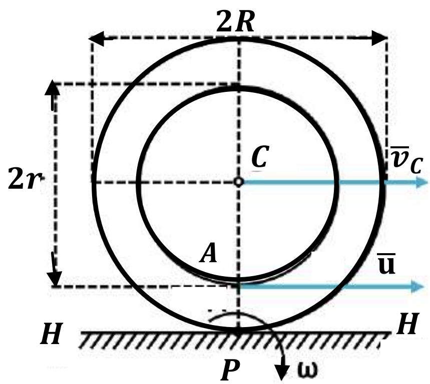
$$\omega_{AB} = \omega_{ц} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$

Відповідь: $v_B = 225 \frac{\text{см}}{\text{с}}$; $\omega_{Ц} = 0$.

Задача 16.29

Дано:
R, r, u – котиться без ковзання

Визначити: $\boldsymbol{v = v_C}$–?



Коток котиться без ковзання, т. P – МЦШ. Точка A має швидкість $\bar{u}$, тобто $v_A = u$.

Кутова швидкість котка :

$$\omega = \frac{u}{AP} = \frac{u}{R - r}.$$

Швидкість v_C (центра котка):

$$v = v_C = \omega \cdot CP = \frac{u}{R - r} \cdot R.$$

Швидкість $v = v_C$ напрямлена вправо.

Відповідь:

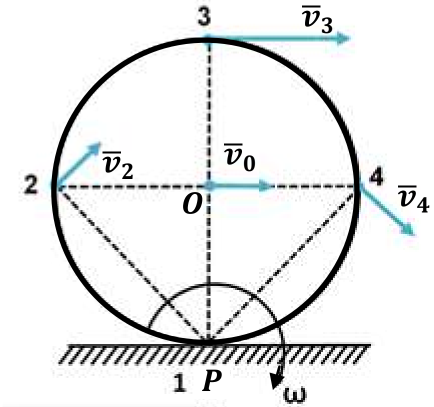
$$v_C = \frac{u}{R-r} \cdot R.$$

Задача 16.31

Дано:
$R = 0{,}5$ м; $v_O = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = const$ – котиться без ковзання.

Визначити: $v_1; v_2; v_3; v_4$–?

Так як колесо котиться без ковзання то, точка 1 є МЦШ, її швидкість



$$v_1 = v_P = 0.$$

Кутова швидкість колеса:

$$\omega = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0{,}5} = 20\ c^{-1}.$$

Колесо обертається навколо МЦШ. Тоді швидкості $\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \perp$ відстаням до МЦШ.

Відстані $\ell_{12} = \ell_{14} = R\sqrt{2} = 0{,}5 \cdot 1{,}414 = 0{,}707$ м.

$$\ell_{13} = 2\,R = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ м}.$$

$$v_2 = v_4 = \omega \cdot \ell_{12} = \omega \cdot \ell_{14} = 20 \cdot 0{,}707 = 14{,}14\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_3 = \omega \cdot \ell_{13} = 20 \cdot 1 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_1 = 0; v_2 = v_4 = 14{,}14\,\frac{\text{м}}{\text{с}}; v_3 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 16.33

Дано:
$x = 2t^2$, м; $t_1 = 1\ c; r_1 = 0{,}2$ м.

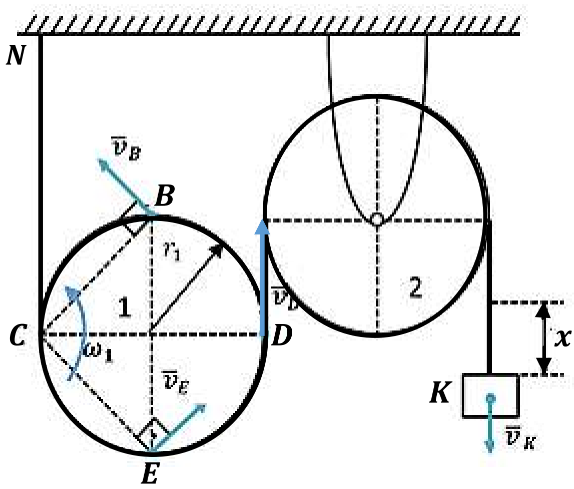
Визначити: ω_1; $v_C; v_B; v_D; v_E$—?

За заданим законом руху вантажа K визначаємо швидкість $v_{\text{К}}$:
$v_{\text{К}} = \dot{x} = 2t \cdot 2 = 4t$.
При $t_1 = 1\ c$, $v_{\text{К}} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Так як нить нерозтяжна, то швидкість точки *D* блока 1

$$v_D = v_{\text{К}} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Рух блоку 1 – плоский. Блок 1 котиться по нерухомій ниті *CN* без ковзання, тому точка *C* - МЦШ для блока 1, $v_C = 0$.



Кутова швидкість блока 1 ($CD = 2r_1$):

$$\omega_1 = \frac{v_D}{CD} = \frac{4}{0{,}2 \cdot 2} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} = 10\ \text{с}^{-1}.$$

Швидкості $v_B = v_\text{E} = \omega_1 \cdot CB = \omega_1 \cdot CE = \omega_1 \cdot r_1\sqrt{2} =$

$$= 10 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}41 = 2{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тут $\bar{v}_B \perp CB; \bar{v}_E \perp CE$.

Відповідь:

$$\omega_1 = 10\ \text{с}^{-1};\ v_B = v_\text{E} = 2{,}82\,\frac{\text{м}}{\text{с}};\ v_C = 0;\ v_D = v_K = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 16.34

Дано:

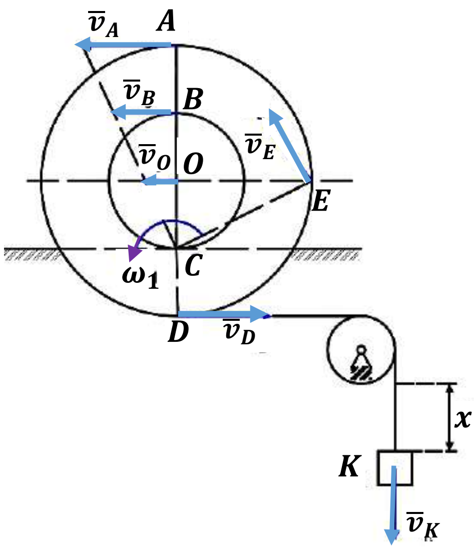
$x = t^2$м; $OC = 0{,}1$ м; $OD = 0{,}2$ м.

$AD \perp OE$; $t_1 = 1\ c$.

$OD = 2OC = 0{,}2$ м;

$CA = 0{,}3$ м; $OE = 0{,}2$ м.

Визначити: швидкості точок C, A, B, O, E і ω_1–?



1) Вантаж K опускається за законом $x = t^2$ м, зі швидкістю $v_K = \dot{x} = 2t$, при $t_1 = 1\ c$, $v_K = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

По ниті ця швидкість передається до точки D

$$v_D = v_K = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Коток малим ободом котиться по нерухомому рельсу без ковзання, точка C – МЦШ. $v_C = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1) Кутова швидкість котка:

$$\omega_1 = \frac{v_D}{CD} = \frac{v_D}{OD - OC} = \frac{2}{0{,}1} = 20\ c^{-1}.$$

Коток обертається навколо МЦШ (т. C) з кутовою швидкістю ω_1.

Швидкості: $v_O = \omega_1 \cdot CO = 20 \cdot 0{,}1 = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$v_B = \omega_1 \cdot CB = 20 \cdot 0{,}2 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$v_A = \omega_1 \cdot CA = 20 \cdot 0{,}3 = 6\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$v_E = \omega_1 \cdot CE = 20 \cdot \sqrt{OC^2 + OE^2} = 20 \cdot \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} =$$

$$20 \cdot \sqrt{0{,}05} = 20 \cdot 0{,}2236 = 4{,}47\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь:

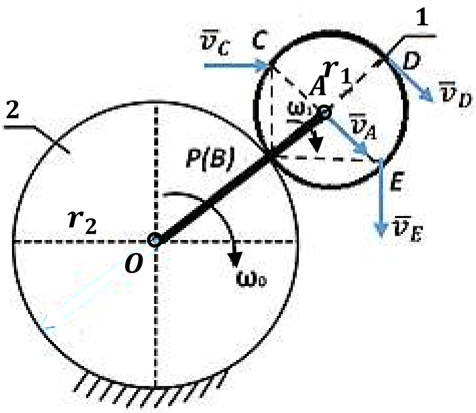
$$v_A = 6\frac{\text{м}}{\text{с}};\ v_B = 4\frac{\text{м}}{\text{с}}; v_C = 0\frac{\text{м}}{\text{с}}; v_D = v_K = 2\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_E = 4{,}47\frac{\text{м}}{\text{с}};\ \omega_1 = 20\ c^{-1}.$$

Задача 16.35

Дано:
$\omega_{OA} = \omega_O = 2{,}5\ c^{-1}$;
$r_1 = 5$ см; $r_2 = 15$ см;
$CE \perp BD$.

Визначити: v_A–? v_B–? v_C–? v_D–? v_E–?
ω_1–?



Механізм складається з двох рухомих ланок: кривошип *OA* і шестерня 1, а також з нерухомої шестерні 2. Кривошип *OA* обертається навколо нерухомої осі *O* (шестерня 2) та котить шестерню 1 по ободу без ковзання. Точка *B* співпадає з точкою *P* - МЦШ шестерні 1 ($v_B = 0$).

Швидкість т. A:

$$v_A = OA \cdot \omega_O = (r_1 + r_2) \cdot \omega_O = 20 \cdot 2{,}5 = 50\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Кутова швидкість шестерні 1:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AB} = \frac{v_A}{r_1} = \frac{50}{5} = 10\ c^{-1}.$$

Швидкість т. D: $v_D = \omega_1 \cdot 2r_1 = 2v_A = 100\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Швидкості т. C і E: $v_C = v_E = \omega_1 \cdot BC = \omega_1 \cdot BE =$

$$= 10 \cdot r_1\sqrt{2} = 10 \cdot 5 \cdot 1{,}414 = 70{,}71\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Шестерня 1 знаходиться в зовнішньому зчепленні з рухомою шестернею 2.

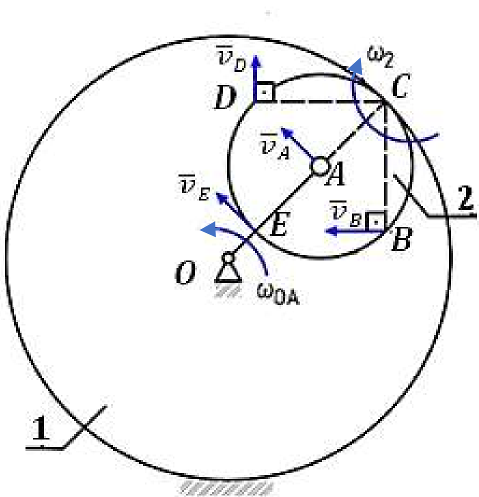
Відповідь: $v_A = 50\,\frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_B = 0; v_D = 100\,\frac{\text{см}}{\text{с}}; \omega_1 = 10\ c^{-1};$

$$v_C = v_E = 70{,}71\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Задача 16.37

Дано:
$OA = 20$ см;
$\omega_{OA} = \omega = 2$ рад/с;
$r_2 = 10$ см.
Точка E лежить на ободі шестерні 2.

Визначити:
v_B, v_C, v_D, v_E -?
При $BD \perp OC$



Механізм складається з двох рухомих ланок: кривошипа OA і шестерні 2, а також з нерухомої шестерні 1.

Кривошип OA обертається навколо нерухомої осі O і котить шестерню 2 по внутрішньому обводу шестерні 1 без ковзання. Точка C – МЦШ шестерні 2, тобто $v_C = 0$.

Шестерня 2 обертається навколо точки C.

Швидкість точки A: $v_A = \omega_{OA} \cdot 2r_2 = 2 \cdot 20 = 40\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Кутова швидкість шестерні 2:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_A}{CA} = \frac{40}{10} = 4\ c^{-1}.$$

Швидкість точки E на обводі шестерні 2:

$$v_E = \omega_2 \cdot CE = \omega_2 \cdot 2r_2 = 4 \cdot 20 = 80\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$v_B = \omega_2 \cdot CB = \omega_2 \cdot r_2\sqrt{2} = 40\sqrt{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$v_D = \omega_2 \cdot CD = \omega_2 \cdot r_2\sqrt{2} = 40\sqrt{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$CB = CD = r_2\sqrt{2}$ – відстані від точок B і D до МЦШ точки C.

Відповідь: $v_C = 0; v_E = 80\,\frac{\text{см}}{\text{с}};\ v_B = 40\sqrt{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}; v_D = 40\sqrt{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$.

3.3 Прискорення точок плоскої фігури. Миттєвий центр прискорень.

3.3.1 Теорема про прискорення точок плоскої фігури.

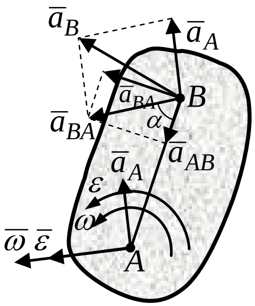


Рисунок 3.6

Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса та прискорення точки в її обертальному русі разом з фігурою навколо полюса.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}, \tag{3.8}$$

або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau, \tag{3.9}$$

де
$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB; \;\; a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB\ . \tag{3.10}$$

- нормальне і тангенціальне прискорення точки B при обертальному русі фігури навколо полюса A. Вектор $\bar{a}_{AB}^\tau$ напрямлений у бік дугової стрілки кутового прискорення ε, а вектор $\bar{a}_{BA}^n$ завжди напрямлений від точки В до полюса. Тому що $\bar{a}_{BA}^n \perp \bar{a}_{AB}^\tau$, то модуль повного прискорення обертального руху:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^\tau)^2 + (a_{BA}^n)^2} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{3.11}$$

Кут α, який утворює вектор $\bar{a}_{BA}$ з відрізком BA визначають із співвідношення:

$$tg\alpha = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^{n}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (3.12)$$

З формули (3.12) випливає, що кут α не залежить від вибору полюсу і в даний момент часу має однакове значення для всіх точок плоскої фігури.

3.3.2 Миттєвий центр прискорення (МЦП).

В плоскому русі точка $\boldsymbol{Q}$, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається миттєвим центром прискорень ($\bar{a}_Q = 0$). Якщо відомо $\bar{a}_A$, ω і ε, то МЦП знаходиться на промені, проведеному з точки A під кутом $\alpha = arctg\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, який відкладено від вектору $\bar{a}_A$ в напрямку ε на відстані:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}; \qquad (3.13)$$

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (3.14)$$

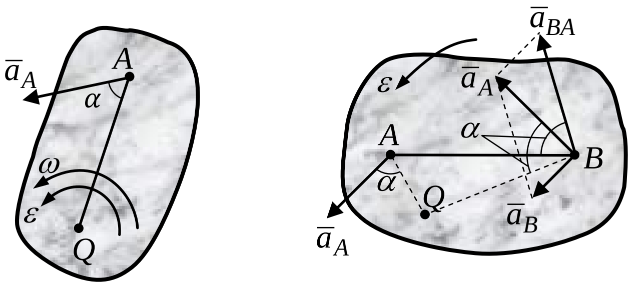
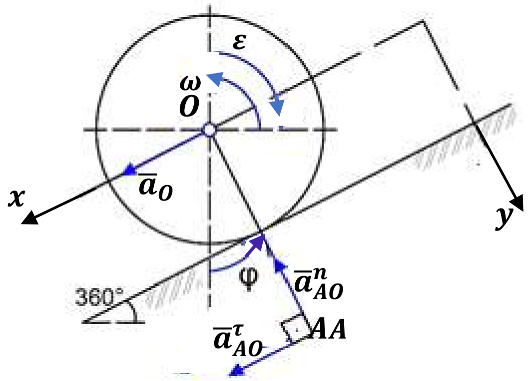


Рисунок 3.7

Задача 18.1

Дано:
$x_O = 10t^2$см;
$\varphi = \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ рад;
$OA = \ell = 36$ см.

Визначити: a_A–? при $t = 1\ c$.



Стержень OA виконує плоский рух в вертикальній площині. Обираємо в якості полюса центр колеса т. O, для вектору прискорення точки A стержня OA запишемо:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}, \qquad (1)$$

де $\bar{a}_O$ – прискорення полюса O,

$\bar{a}_{AO}$ – прискорення точки А при обертанні її разом зі стержнем OA навколо полюса O.

Прискорення полюса O визначаєм як прискорення центра колеса $a_O = \frac{d^2x_O}{dt^2} = \frac{d^2(10t^2)}{dt^2} = 20\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Вектор $\bar{a}_O$ напрямлений по осі Ox.

Прискорення $\bar{a}_{AO} = \bar{a}^n_{AO} + \bar{a}^\tau_{AO}$, а (1) прийме вигляд:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{AO}^n + \bar{a}_{AO}^\tau, \qquad (2)$$

де $\bar{a}_{AO}^n, \bar{a}_{AO}^\tau$ – нормальне і тангенціальне складові прискорення точки *A* в обертанні навколо полюса *O*:

$$a_{AO}^n = \omega^2 \cdot OA; \; a_{AO}^\tau = \varepsilon \cdot OA, \qquad (3)$$

ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення стержня OA.

Вектор $\bar{a}_{AO}^n$ напрямлений вздовж стержня *OA* до точки *O*, а $\bar{a}_{AO}^\tau$ перпендикулярно до *AO*. За заданим рівнянням зміни φ, визначаємо ω, ε.

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{3} cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} cos\left(\frac{\pi}{6} t\right);$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = -\frac{\pi^3}{108} \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right).$$

При $t = 1$ с, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ рад; $\omega = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{36} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon = -\frac{\pi^3}{216} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Підставив ω та ε до (3), отримаємо:

$a_{AO}^n = \frac{\pi^4}{12} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; $a_{AO}^\tau = \frac{-\pi^3}{6} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Знак (-) враховано на рисунку.

Спроектував рівняння (2) на осі *x*, *y*, отримаємо:

$$a_{Ax} = a_O + a_{AO}^\tau \, cos(\varphi - 30°) + a_{AO}^n sin(\varphi - 30°) = 20 + \frac{\pi^3}{6} =$$
$$= 25{,}16 \; \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_{Ay} = -a_{AO}^n \, cos(\varphi - 30°) + a_{AO}^\tau sin(\varphi - 30°) = -\frac{\pi^4}{12} =$$
$$= -8{,}1 \; \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

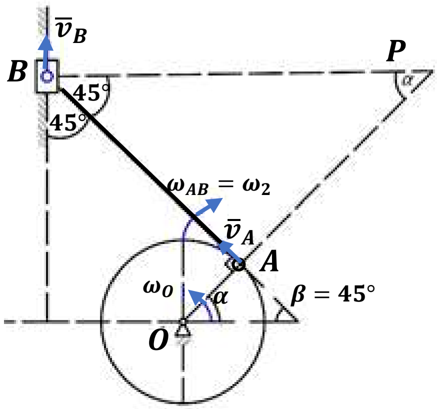
$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + \left(a_{Ay}\right)^2} = \sqrt{(25{,}16)^2 + (8{,}1)^2} = 26{,}43 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_A = 26{,}43 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Задача 18.11

Дано:
$OA = \ell_1 = 20$ см=0,2 м;
$AB = \ell_2 = 100$ см=1,0 м;
$\omega_0 = \omega_{OA} = 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} = const;$
$\alpha = \beta = 45°;\ \varepsilon_0 = 0.$

Визначити: a_B—? $\omega_{AB} = \omega_2$—?
$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_2$—?



Визначаємо кутову швидкість шатуна AB.

$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_0 \cdot \ell_1 = 10 \cdot 20 = 200$ см/с.

$\bar{v}_A$ – напрямлений вгору. МЦШ ланки AB лежить на перетині перпендикулярів до $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$ – це точка P. З трикутника APB: $AP = AB = \ell_2 = 100$ см.

Кутова швидкість ланки AB:

$$\omega_{AB} = \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{200}{100} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

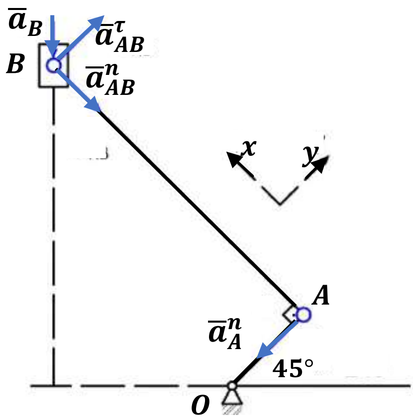
Прискорення точки B визначаємо за формулою (3.9), прийняв за полюс точку A.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau, \qquad (1)$$

напрям	+	+	+	+	+
модуль	-	+	+	+	-

Нормальне і тангенціальне прискорення точки А.

$a_A^n = {\omega_0}^2 \cdot \ell_1 = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20\frac{\text{м}}{\text{с}};\ a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot \ell_1 = 0,$ -



$$a_{\text{AB}}^n = {\omega_2}^2 \cdot AB == {\omega_2}^2 \cdot \ell_1 = 2^2 \cdot 1 = 4\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

- напрямлений по BA.

$$a_{\text{AB}}^\tau = \varepsilon_2 \cdot AB = \varepsilon_2 \cdot \ell_1, \qquad (2)$$

- напрямлений перпендикулярно до BA. Модуль a_{AB}^τ – невідомий. Як показує аналіз, в (1) невідомі модулі $\bar{a}_B$ і $\bar{a}_{AB}^\tau$.

Для визначення $\bar{a}_B$ спроєцюємо векторне рівняння (1) на вісь AB, паралельну осі x.

$X: -a_B \cdot cos45° = -a_{\text{AB}}^n;$

$a_B = \frac{a_{\text{AB}}^n}{cos45°} = \frac{4}{0{,}707} = 5{,}655\frac{\text{м}}{\text{с}} = 565{,}3\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$

Для визначення $\bar{a}_{AB}^\tau$ спроєцюємо векторне рівняння (1) на вісь y.

$$\text{У}: -a_B \cdot sin45° = a^{\tau}_{AB} - a^{n}_{A};\ a^{\tau}_{AB} = a^{n}_{A} - a_B \cdot sin45°$$
$$= 20 - 5{,}655 \cdot 0{,}707 =$$
$= 20 - 4 = 16\ \text{м/с}^2$.

З (2) $\varepsilon_2 = \varepsilon_{AB} = \frac{a^{\tau}_{AB}}{AB} = \frac{16}{1} = 16\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $\omega_2 = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $a_B = 565{,}3\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{AB} = 16\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Задача 18.13

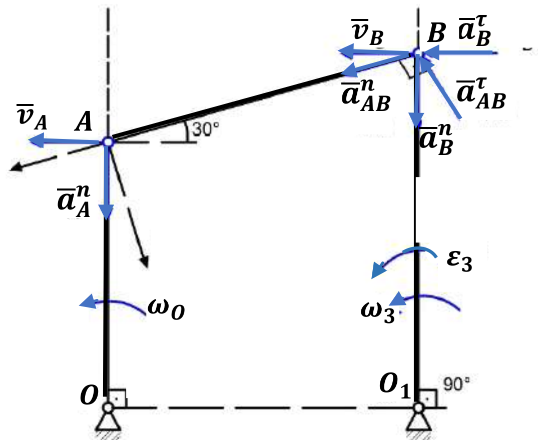
Дано:
$\varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_{OA}$;
$\omega_0 = \omega_{OA} = const$
$AB = 2 \cdot OA = 2a$;
$OA = a$.

Визначити: a_B–? ; $\omega_{AB} = \omega_2$–?;
$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_2$–?

1) Визначаємо кутову швидкість ланки AB. Точки A і B рухаються по колам з радіусами OA і O_1B.

Вектори $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$ перпендикулярні відповідно до OA і O_1B.

МЦШ ланки AB лежить в ∞. Ланка AB в даний момент часу здійснює миттєво-поступальний рух і його $\omega_{AB} = \omega_2 = 0$.



$$v_A = v_B = \omega_0 \cdot a.$$

2) Визначаємо прискорення точки B та кутове прискорення ланки AB за формулою (3.9).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau, \qquad (1)$$

де $a_A^n = {\omega_{OA}}^2 \cdot OA = {\omega_2}^2 \cdot a;\ a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0,-$ нормальне і тангенціальне прискорення точки A.

$a_{AB}^n = {\omega_{AB}}^2 \cdot AB = 0;\ a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_2 \cdot 2a$ – напрям $\bar{a}_{AB}^\tau \perp AB,\ \varepsilon_2$ потрібно визначити.

Визначаємо кутову швидкість ланки O_1B:

Ланка $O_1B = OA + AB \cdot \sin 30° = a + 2a \cdot 0{,}5 = 2a$.

$$\omega_{O_1B} = \omega_3 = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{v_A}{OA + AB \cdot \sin 30°} = \frac{v_A}{a + 2a \cdot 0{,}5} =$$

$$= \frac{\omega_0 \cdot a}{2a} = \frac{\omega_0}{2};$$

$$a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot O_1B = \varepsilon_3 \cdot 2a;$$

$$a_B^n = {\omega_3}^2 \cdot O_1B = {\omega_0}^2 \cdot \frac{a}{2}.$$

Спроектуємо (1) на вісь x:

$$a_B^n \cdot \sin 30° + a_B^\tau \cdot cos30° = a_A^n \cdot cos60°, \text{звідси}$$

$$\frac{{\omega_0}^2 a}{2} \cdot \frac{1}{2} + \varepsilon_3 \cdot 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{{\omega_0}^2 a}{2},\ \varepsilon_3 = \frac{\sqrt{3}}{12}{\omega_0}^2,$$

$$a_B^\tau = \frac{\sqrt{3}}{12}{\omega_0}^2 \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{6}{\omega_0}^2 \cdot a.$$

Прискорення точки B: $a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2}$.

$$a_B = \sqrt{\left({\omega_0}^2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}{\omega_0}^2 \cdot a\right)^2} = {\omega_0}^2 \cdot a\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}{\omega_0}^2 a.$$

Перепишемо (1):

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^\tau, \qquad (2)$$

та спроєцюємо (2) на вісь у:

$$a_B^n \cdot cos30° - a_B^\tau \cdot \sin 30° = a_A^n \cdot sin60° - a_{AB}^\tau.$$

$$a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot 2a = a_A^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a_B^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a_B^\tau \frac{1}{2}.$$

Підставив значення всіх прискорень, отримаємо:

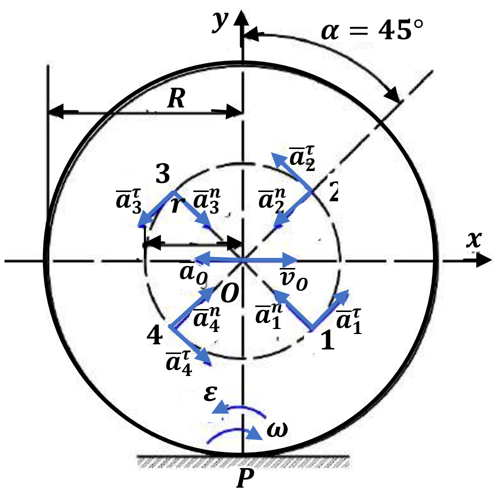
$\varepsilon_{AB} \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0{}^2 a$, звідси $\varepsilon_{AB} = \omega_0{}^2 \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Відповідь: $\omega_2 = 0$; $\varepsilon_2 = \omega_0{}^2 \frac{\sqrt{3}}{6}$ рад/с^2; $a_B = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_0{}^2 a$.

Задача 18.22

Дано:
$v_0 = 1$ м/с;
$a_0 = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $\alpha = 45°$;
$R = 0{,}5$ м; $r = 0{,}25$ м.
Кочення без ковзання.

Визначити: a_1, a_2, a_3, a_4–?



1) Колесо трамвая котиться без ковзання, точка P – МЦШ, тоді кутова швидкість і кутове прискорення колеса будуть:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{R}\right) = \frac{\dot{v}_0}{R} = \frac{a_0}{R} = \frac{2}{0{,}5} = 4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}, \dot{v}_0 = a_0.$$

2) Прийняв за полюс точку O (центр колеса), визначаємо нормальне і тангенціальне прискорення точок 1, 2, 3, 4 в обертанні разом з колесом навколо полюса.

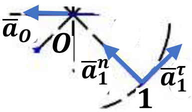
$$a^n_{O1} = a^n_{O2} = a^n_{O3} = a^n_{O4} = \omega^2 \cdot r = 2^2 \cdot 0{,}25 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a^\tau_{O1} = a^\tau_{O2} = a^\tau_{O3} = a^\tau_{O4} = \varepsilon \cdot r = 4 \cdot 0{,}25 = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ці прискорення однакові за модулем, але мають різні напрями.

3) Визначимо прискорення точок 1-4 за формулою (3.9)

<u>Для точки 1</u>:



$$\bar{a}_1 = \bar{a}_0 + \bar{a}^n_1 + \bar{a}^\tau_1, \qquad (1)$$

Спроектуємо рівняння (1) на осі координат x, y:

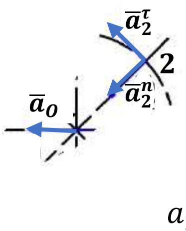
$$a_{1x} = -a_O - a^n_1 \cdot sin45° + a^\tau_1 \cdot sin45° =$$
$$= -a_O = -2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{1y} = (a^n_1 + a^\tau_1) \cdot cos45° = 2 \cdot 0{,}707 = 1{,}414\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Модуль прискорення a_1:

$$a_1 = \sqrt{(a_{1x})^2 + \left(a_{1y}\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1{,}414)^2} = 2{,}449\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

<u>Для точки 2</u>:



$$\bar{a}_2 = \bar{a}_0 + \bar{a}^n_2 + \bar{a}^\tau_2, \qquad (2)$$

Спроектуємо рівняння (2) на осі координат x, y:

$$a_{2x} = -a_O - a^n_2 \cdot sin45° - a^\tau_2 \cdot sin45° =$$
$$= -2 - 1{,}414 = -3{,}414\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

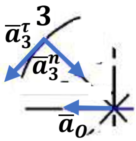
$$a_{2y} = -a^n_2 \cdot cos45° + a^\tau_2 \cdot cos45° = 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Модуль прискорення a_2:

$$a_2 = \sqrt{(a_{2x})^2 + \left(a_{2y}\right)^2} = 3{,}414\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для точки 3:

$$\bar{a}_3 = \bar{a}_0 + \bar{a}_3^n + \bar{a}_3^\tau, \qquad (3)$$



Спроектуємо рівняння (3) на осі координат x, y:

$$a_{3x} = -a_O + a_3^n \cdot sin45° - a_3^\tau \cdot sin45° =$$

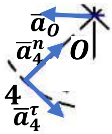
$$= -a_O = -2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{3y} = (-a_3^n - a_3^\tau) \cdot cos45° = -1{,}414\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Модуль прискорення a_3:

$$a_3 = \sqrt{(a_{3x})^2 + \left(a_{3y}\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1{,}414)^2} = 2{,}449\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для точки 4:



$$\bar{a}_4 = \bar{a}_0 + \bar{a}_4^n + \bar{a}_4^\tau, \qquad (4)$$

Спроектуємо рівняння (4) на осі координат x, y:

$$a_{4x} = -a_O + (a_4^n + a_4^\tau) \cdot sin45° =$$

$$= -2 + 1{,}414 = -0{,}586\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{4y} = a_4^n \cdot cos45° - a_4^\tau \cdot cos45° = 0\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль прискорення a_4:

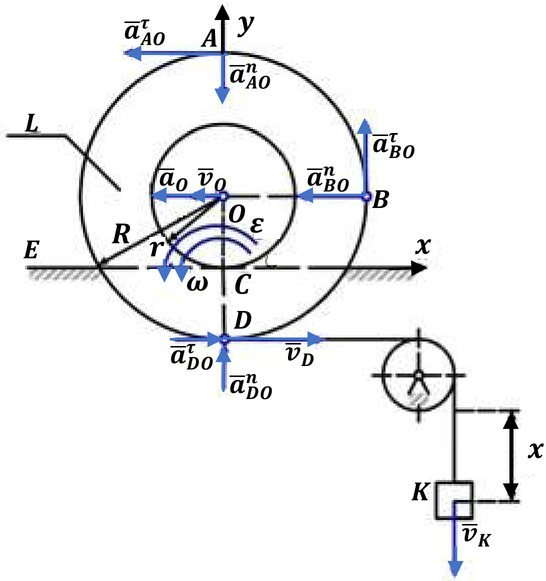
$$a_4 = \sqrt{(a_{4x})^2 + \left(a_{4y}\right)^2} = 0{,}586\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_1 = 2{,}449\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. $a_2 = 3{,}414\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_3 = 2{,}449\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_4 = 0{,}586\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 18.26

Дано:
$x = t^2$ м; $t = 0{,}5\ c$;
$R = 2 \cdot r = 0{,}2$ м;
$r = 0{,}1$ м;
$OD = 2 \cdot OC = 0{,}2$ м;
$OB \perp AD$.
Кочення без ковзання.

Визначити:
a_A, a_B, a_D – ? ; ω і ε котушки L – ?



1) Нить, на якій підвішений вантаж K, нерозтяжна, тому швидкість вантажу v_1 і швидкість точки D котка будуть рівні. $v_D = v_K = \dot{x} = 2t$, при $t = 0{,}5\ c$ $v_D = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Коток L котиться по нерухомій рейці EE без ковзання. Тому точка C – МЦС. Усі точки котка обертаються навколо МЦС (точки C).

Кутова швидкість і кутове прискорення котка:

$$\omega = \frac{v_D}{DC} = \frac{2t}{0{,}1} = 20t;\ \varepsilon = \dot{\omega} = 20\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2},$$

При $t = 0{,}5\ c$: $\omega = 10\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\varepsilon = 20\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

2) Коток здійснює плоский рух. Оберемо за полюс центр котка O. Швидкість точки O

$$v_O = \omega \cdot CO = 20t \cdot 0{,}1 = 2t.$$

Прискорення полюса *O* - $a_0 = \frac{dv_0}{dt} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Точка *O* здійснює прямолінійний рух, тому $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$.

<u>Прискорення точки *A*</u> визначаємо за формулою (3.9):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_0 + \bar{a}_{OA}^n + \bar{a}_{OA}^\tau, \qquad (1)$$

$$a_{OA}^n = \omega^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0{,}2 = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{OA}^\tau = \varepsilon \cdot OA = 20 \cdot 0{,}2 = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

- нормальне і тангенціальне прискорення точки *A* в обертальному русі навколо полюса *O*.

Спроектуємо (1) на осі координат x, y:

$$a_{Ax} = -a_O - a_{AO}^\tau = -2 - 4 = -6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\;\; a_{Ay} = -a_{AO}^n = -20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль прискорення a_A:

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + \left(a_{Ay}\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-20)^2} = 20{,}88 \approx 20{,}9\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

<u>Прискорення точки *B*</u> визначаємо за формулою:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_0 + \bar{a}_{OB}^n + \bar{a}_{OB}^\tau, \qquad (2)$$

$$a_{OB}^n = \omega^2 \cdot OB = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{OB}^\tau = \varepsilon \cdot OB = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

- нормальне і тангенціальне прискорення точки *B* в обертальному русі навколо полюса *O*.

Спроектуємо (2) на осі координат x, y:

$$a_{Bx} = -a_O - a_{BO}^n = -2 - 20 = -22\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\;\; a_{By} = a_{BO}^\tau = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль прискорення a_B:

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + \left(a_{By}\right)^2} = \sqrt{(-22)^2 + (4)^2} = \sqrt{500} = 22{,}36\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

<u>Прискорення точки *D*</u> визначаємо за формулою:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_0 + \bar{a}_{OD}^n + \bar{a}_{OD}^\tau, \tag{3}$$

$$a_{OD}^n = \omega^2 \cdot OD = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{OD}^\tau = \varepsilon \cdot OD = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

- нормальне і тангенціальне прискорення точки D в обертальному русі навколо полюса O.

Спроектуємо (3) на осі координат x, y:

$$a_{Dx} = -a_O + a_{DO}^\tau = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\;\; a_{By} = a_{DO}^n = 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль прискорення a_D:

$$a_D = \sqrt{(a_{Dx})^2 + \left(a_{Dy}\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + (20)^2} = \sqrt{404} =$$

$$= 20{,}099 \approx 20{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь:

$a_A = 20{,}9\frac{\text{м}}{\text{с}^2}; a_B = 22{,}36\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\; a_D = 20{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \omega = 10\;\frac{\text{рад}}{\text{с}};$

$\varepsilon = 20\;\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$

Задача 18.28

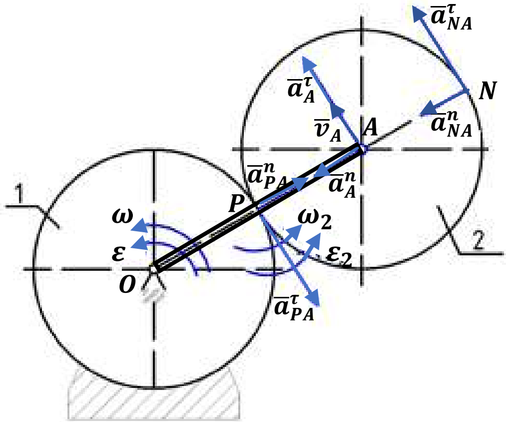
Дано:

$\varepsilon_{OA} = \varepsilon = 8$ рад/с^2;

$\omega_{OA} = \omega = 2$ рад/с;

$R_2 = R_1 = R = 12$ $с$м.

Визначити: a_P, a_N, МЦП−?



Механізм складається з двох рухомих ланок: кривошипу *OA* і шестерні 1 радіуса *R*.

Кривошип *OA* обертається навколо нерухомої осі *O* та котить шестерню 2 по шестерні 1 без ковзання. Точка торкання *P* між шестернями - це МЦШ шестерні 2. Швидкість точки *A*:

$$v_A = \omega \cdot 2R = 48\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Кутова швидкість шестерні 2: $\omega_2 = \frac{v_A}{PA} = \frac{48}{12} = 4\ \text{с}^{-1}$.

<u>За полюс</u> шестерні 2 приймаємо <u>точку *A*</u>.

<u>Прискорення точки *A*</u>:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau, \qquad (1)$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 24 = 96\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 8 \cdot 24 = 192\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

Модуль прискорення a_A:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(96)^2 + (192)^2} = 214{,}66\,\frac{см}{\text{с}^2}.$$

Кутове прискорення шестерні 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{PA} = \frac{192}{12} = 16 \text{ рад/с}^2$$

$$\sqrt{(\varepsilon_2)^2 + (\omega_2)^4} = \sqrt{(16)^2 + (4)^4} = 22{,}63.$$

Прискорення точки *N* (за полюс обрана точка *A*)

$$\bar{a}_N = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{NA}^n + \bar{a}_{NA}^\tau, \qquad (1)$$

де $a_{NA}^n = (\omega_2)^2 \cdot NA = 4^2 \cdot 12 = 192 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

$$a_{NA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot NA = 16 \cdot 12 = 192 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

Модуль $a_N = \sqrt{(a_A^\tau + a_{NA}^\tau)^2 + (a_A^n + a_{NA}^n)^2} =$

$$= \sqrt{(192 + 192)^2 + (96 + 192)^2} = 480 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Прискорення точки *P* шестерні 2 (*P* – МЦШ шестерні 2, *A* - полюс)

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{PA}^n + \bar{a}_{PA}^\tau,$$

де $a_{PA}^n = (\omega_2)^2 \cdot PA = 4^2 \cdot 12 = 192 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

$a_{PA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot PA = 16 \cdot 12 = 192 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$

Модуль $a_P = \sqrt{(a_{PA}^n - a_A^n)^2 + (a_A^\tau - a_{PA}^\tau)^2} =$

$$= \sqrt{(192 - 96)^2 + (192 - 192)^2} = 96 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Визначимо положення МЦП (т.Q) шестерні 2

$tg\mu = \frac{\varepsilon_2}{(\omega_2)^2} = \frac{16}{4^2} = 1;\ \mu = 45° -$

кут між прискоренням $\bar{a}_A$ та AQ;

$tg\beta = \frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \frac{192}{96} = 2;\ \beta = 63°26'05'' -$

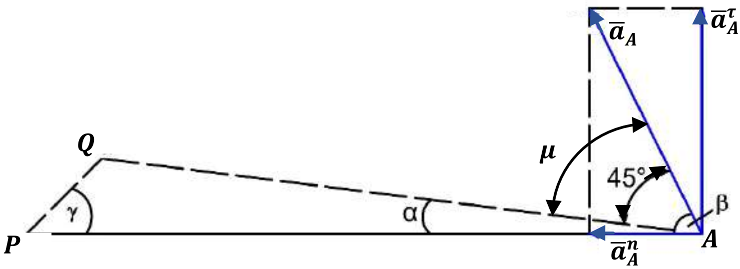
кут між прискоренням $\bar{a}_A$ та *AP*.

Відстань від точки *A* до точки Q(МЦШ):

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + {\omega_2}^2}} = \frac{214{,}66}{22{,}63} = 9{,}486 \text{ см.}$$

Відстань від т. P до т. Q:

$$PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2 - 2 \cdot AQ \cdot AP \cdot cos\alpha} = 4{,}24 \text{ см.}$$



Кут $QPA = \gamma$ визначаємо за теоремою синусів:

$$\frac{AQ}{sin\gamma} = \frac{PQ}{sin\alpha}; sin\gamma = \frac{AQ \cdot sin\alpha}{PQ} = \frac{9{,}486 \cdot 0{,}316}{4{,}24} = 0{,}707;$$

$$\angle\gamma = 45°.$$

$$\angle\alpha = \beta - 45° = 63°26' - 45° = 18{,}43°.$$

Відповідь:

$a_P = 96 \frac{см}{с^2}$; $a_N = 480 \frac{см}{с^2}$; $PQ = 4{,}24$ см ; $\angle QPA = 45°$.

Задача 18.35

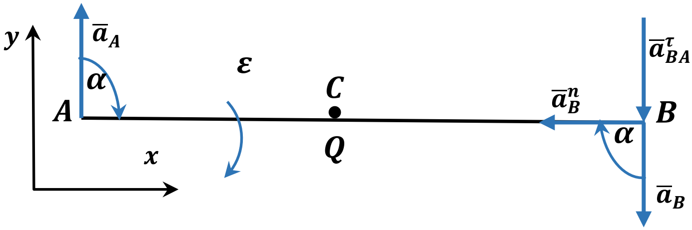
Дано:

$AB = 0{,}2$ м;

$a_A = -a_B = 2$ м/с^2;

$AC = CB = 0{,}1$ м.

Визначити: ω; ε , a_C, $-$?



Стержень AB здійснює плоский рух в площині рисунка. Прийняв за полюс точку A, запишемо прискорення точки B.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^{\tau}, \qquad (1)$$

де $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$; $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y, та визначимо миттєву кутову швидкість та миттєве кутове прискорення стержня AB:

X: $0 = -a_{BA}^n; \rightarrow a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA = 0;\ \omega = 0.$

У: $-a_B = a_A - a_{BA}^{\tau}; \rightarrow\ a_{BA}^{\tau} = a_A + a_B = 4;\ \varepsilon = \dfrac{a_{BA}^{\tau}}{AB} =$

$= \dfrac{4}{0{,}2} = 20\ \text{с}^{-2}.$

Напрям ε визначаємо за напрямом $\bar{a}_{BA}^{\tau}$.

Визначимо кут α між вектором $\bar{a}_A$ і лінією AQ до МЦП та між $\bar{a}_B$ і BQ:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{20}{0} = \infty, \alpha = 90°.$$

Відстані від точок A і B до МЦП (до Q):

$$QA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{20} = 0{,}1\ \text{м}.$$

$$QB = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{20} = 0{,}1\ \text{м}.$$

Промені до МЦП відкладаємо від точки A (B) під кутом

$\alpha = 90°$. Кути α відкладаємо за напрямом стрілки ε (від векторів $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$).

Промені AQ і BQ зустрінуться посередині AB в точці C. Точка С -МЦП – прискорення $a_C = 0$ (за визначеням МЦП).

Відповідь:

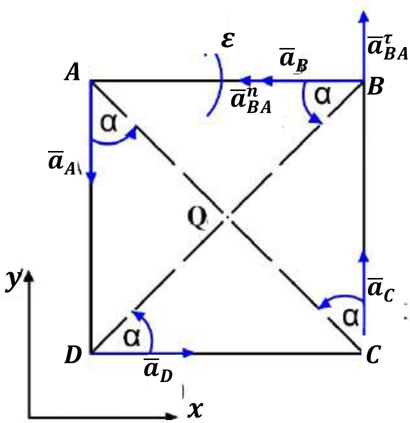
$$\omega = 0; \varepsilon = 20\ \text{с}^{-2};\ a_C = 0\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Задача 18.37

Дано:
a – сторони квадрата;
$a_A = a_B = 10\ \text{см/с}^2$;
Напрямлені по сторонам квадрата.

Визначити: a_C, a_D, МЦП–?

Квадрат $ABCD$ здійснює плоский рух в площині рисунка. Прийняв точку A за полюс, напишемо формулу (3.9) для точки B:



$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A + \bar{a}^{n}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA}, \quad (1)$$

де $a^{n}_{BA} = \omega^2 \cdot BA = \omega^2 \cdot a$;

$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA = \varepsilon \cdot a;$ - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y:

$X: -a_B = -a_{BA}^{n};$

$Y: 0 = -a_A + a_{BA}^{\tau}.$

Звідси

$$\omega^2 = \frac{a_B}{AB} = \frac{10}{a}; \quad \varepsilon = \frac{a_A}{AB} = \frac{10}{a}.$$

Напрям ε визначаємо по напряму $\bar{a}_{BA}^{\tau}$.

Визначимо кут α, який складають прискорення $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$ з напрямом на МЦП Q: $tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1, \alpha = 45°$.

МЦП Q знаходиться на перетині променів, проведених з точок A і B під кутом α, який відкладається від векторів $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$, в напрямку кутового прискорення ε. Проведені промені є діагоналями квадрату. Тому МЦП квадрата Q розташований в точці перетину його діагоналей, а вектори $\bar{a}_C$ і $\bar{a}_D$ вершин C і D напрямлені вздовж сторін CB і DC.

Відстань від точки A до МЦП Q визначаємо за формулою:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{10}{a}\right)^2 + \left(\frac{10}{a}\right)^4}} = \frac{10}{\frac{10}{a}\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відстань $BQ = CQ = DQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, см.

Прискорення a_C і a_D визначаються за формулою (3.14):

$$a_C = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{a}\sqrt{2} = 10\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_D = DQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{a}\sqrt{2} = 10\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

Вектори $\bar{a}_C$ і $\bar{a}_D$ побудовані під кутом α на відстанях CQ і DQ і напрямлені відповідно по CB і DC.

Відповідь:

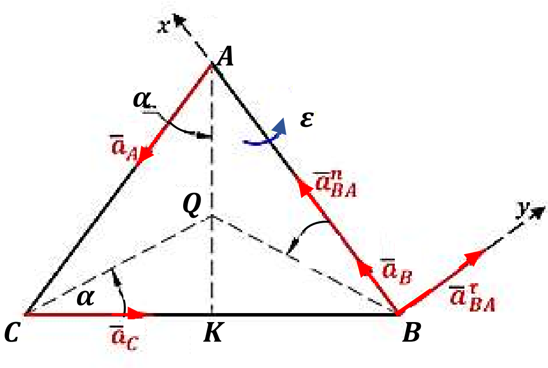
$$a_{\text{C}} = a_D = 10\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Тому МЦП квадрата Q розташований в точці перетину його діагоналей.

Задача 18.38

Дано:
a – сторона трикутника;
$a_A = a_B = 16\ \text{см/с}^2$;
Напрямлені по сторонам рівностороннього трикутника .

Визначити: a_C –?



Рівносторонній трикутник ABC здійснює плоский рух в площині рисунка. Прийняв за полюс точку A, напишемо прискорення для точки B.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \tag{1}$$

де $a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot BA = \omega^2 \cdot a$;

$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA = \varepsilon \cdot a$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y:

$X: a_B = -a_A \cos 60° + a_{BA}^{n}; \rightarrow a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot BA = a_B + a_A \cos 60°$;

$\omega^2 = \dfrac{24}{BA} = \dfrac{24}{a}$.

$Y: 0 = -a_A \sin 60\,° + a_{BA}^{\tau}; \rightarrow a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA = a_A \sin 60\,° =$

$= 16\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3};\ \varepsilon = \dfrac{8\sqrt{3}}{BA} = \dfrac{8\sqrt{3}}{a}$.

Розрахуємо кут α (кут між прискоренням $\bar{a}_A$ та лінією AQ до МЦП):

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8\sqrt{3}}{a} \cdot \frac{24}{} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \alpha = 30°.$$

Відхилений від прискорення $\bar{a}_A$ кут $\alpha = 30°$ в напрямі ε, дає напрям лінії AQ до МЦП. Це – бісектриса. Перетин цих ліній - точка Q – МЦП.

Відстань

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{16}{\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{a}\right)^2 + \left(\frac{24}{a}\right)^4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = BQ = CQ, \text{см}.$$

Прискорення a_C : $a_C = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A = 16\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

PS. В рівносторонньому трикутнику відстані від точки перетину бісектрис до вершин - однакові і дорівнюють 2/3 АК.

$$AK = a \cdot sin\, 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AQ = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Відповідь: $a_C = 16\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$; вектор напрямлений від C до B.

Задача 18.39

Дано:
$AB = 0{,}2$ м;
$a_A = 2$ м/с^2; $a_B = 4{,}42$ м/с^2;
$\angle B = 60°$; $\angle A = 45°$.

Визначити: ω; ε стержня AB , a_C, −?

1) Визначення прискорень за допомогою МЦП.

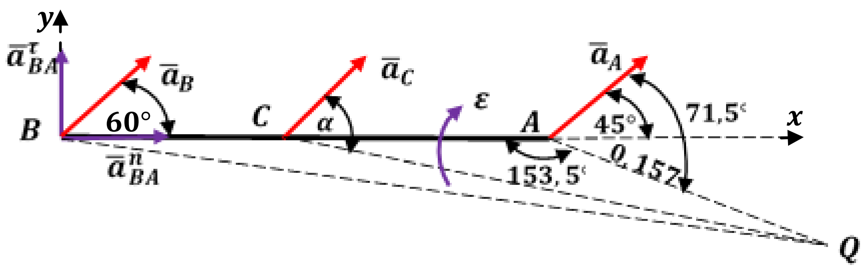


Рисунок 1

Стержень AB здійснює плоский рух в площині рисунка. Прийняв за полюс точку A, запишемо для точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau}, \qquad (1)$$

де $a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot BA$; $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y:

X: $a_B \cdot cos60° = a_A \cos 45° + a_{BA}^{n}; \rightarrow a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot BA =$
$= a_B \cos 60° - a_A \cos 45° = 4{,}42 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0{,}707 = 0{,}796$ м/с^2;

$$\omega^2 = \frac{0{,}796}{AB} = 3{,}98 = 4;\ \omega = 2\ c^{-1}.$$

У: $a_B \cdot sin60° = a_A \sin 45° + a_{BA}^{\tau};\ \rightarrow a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA =$
$= a_B \sin 60° - a_A \sin 45° = 2{,}41$ м/с^2;

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{BA} = \frac{2{,}41}{0{,}2} = 12{,}05\ c^{-2}.$$

Розрахуємо кут α, який складають прискорення $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$ з напрямом до МЦП -

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{12{,}05}{4} = 3{,}0125, \alpha = 71{,}5°.$$

Відстань від точки A до МЦП (т.Q):

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} = \sqrt{12{,}05^2 + 2^2}.$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{\sqrt{12{,}05^2 + 2^4}} = \frac{2}{\sqrt{161{,}2}} = \frac{2}{12{,}69} = 0{,}157 \text{ м.}$$

З ΔCAQ за теоремою косинусів визначимо відстань CQ:

$$CQ = \sqrt{AC^2 + AQ^2 - 2 \cdot AC \cdot AQ \cdot \cos 153{,}5°} =$$

$$= \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}157^2 - 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}157 \cdot (-0{,}895)} = 0{,}2507, \text{м.}$$

Тоді прискорення

$$a_C = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}2507 \cdot 12{,}69 = 3{,}18\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

Відповідь:

$$\omega = 2\ c^{-1};\ \varepsilon = 12{,}05\ c^{-2}; a_C = 3{,}18 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2) Аналітичне рішення.

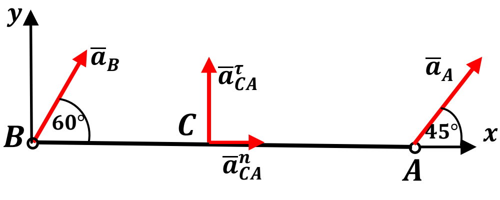


Рисунок 2

Прийняв за полюс точку A для точки C запишемо:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^{\tau}, \qquad (2)$$

де $a_{CA}^{n} = \omega^2 \cdot CA$; $a_{CA}^{\tau} = \varepsilon \cdot CA$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки C в обертальному русі навколо полюса A, а ω і ε визначені в 1).

Для визначення модуля $a_С$ спроектуємо (2) на осі координат x, y:

X: $a_{Cx} = a_A \cos 45° + a_{CA}^{n} =$

$= 2 \cdot 0{,}707 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}814 \frac{м}{с^2}$ (ω і ε визначено раніше);

У: $a_{Cy} = a_A \sin 45° + a_{CA}^{\tau} = 2 \cdot 0{,}707 + 12{,}05 \cdot 0{,}1 = 2{,}619 \frac{м}{с^2}$.

$$a_С = \sqrt{(a_{Cx})^2 + \left(a_{Cy}\right)^2} = \sqrt{(1{,}814)^2 + (2{,}619)^2} =$$

$$= \sqrt{10{,}149} = 3{,}18 \ \frac{м}{с^2}.$$

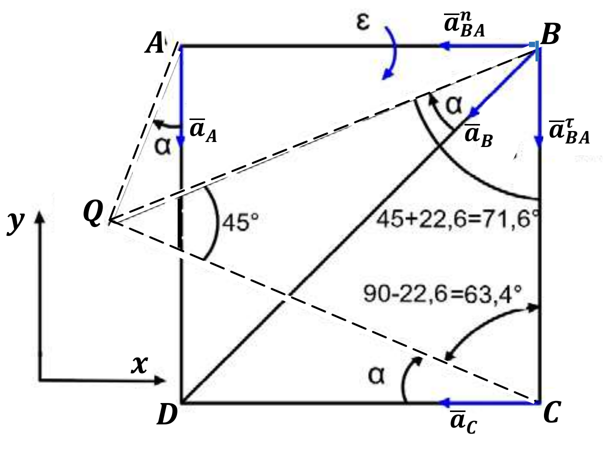
Відповідь: $a_С = 3{,}18 \frac{м}{с^2}$.

Задача 18.40

Дано:

$a = 2$ $см$; $a_A = 2$ $см/с^2$; $a_B = 4\sqrt{2}$ $см/с^2$.

Визначити: ω; ε , a_C, –?



1) Визначення ω і ε.

Квадрат $ABCD$ здійснює плоский рух в площині рисунка. Сторони квадрата $a = 2\ с$м. Прискорення: $\bar{a}_A$ напрямлено по AD; $\bar{a}_B$ напрямлено по діагоналі BD. Для визначення миттєвих кутових швидкості та прискорення приймемо за полюс точку A та запишемо прискорення точки B.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \qquad (1)$$

де $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$; $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot BA$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y:

X: $-a_B \cdot cos45° = -a_{BA}^n; \rightarrow a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA =$

$$= a_B \cos 45° = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$\omega^2 = \frac{a_{BA}^n}{AB} = \frac{4}{2} = 2;\ \omega = \sqrt{2}\ c^{-1}.$$

У: $-a_B \cdot sin45° = -a_A - a_{BA}^\tau$;

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB = -2 + \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{2}{2} = 1\ c^{-2}.$$

Визначимо кут α, який відкладаємо від векторів прискорень $\bar{a}_A$ і $\bar{a}_B$ з напрямом стрілки ε (напрям ε визначаємо за напрямом $\bar{a}_{BA}^\tau$) .

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \alpha = 26{,}6°.$$

МЦП квадрата знаходиться на перетині променів AQ, BQ, CQ, які проведені з точок A, B, C під кутом α до векторів $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$ і $\bar{a}_\text{C}$. Знаходимо з початку точку Q – перетин променів AQ, BQ, потім точку Q з'єднуємо з точкою С і відкладаємо кут α. Напрям $\bar{a}_\text{C}$ співпадає з CD. З трикутника

BCQ визначаємо відстань CQ за теоремою синусів (кути показані на рисунку):

$$\frac{BC}{sin45°} = \frac{CQ}{sin71{,}6°} \rightarrow CQ = \frac{BC \cdot sin71{,}6°}{sin45°} = \frac{2 \cdot 0{,}95}{0{,}707} = 2{,}68 \text{ см}.$$

Модуль прискорення точки C:

$$a_C = CQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 2{,}68 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^4} = 2{,}68\sqrt{5} =$$

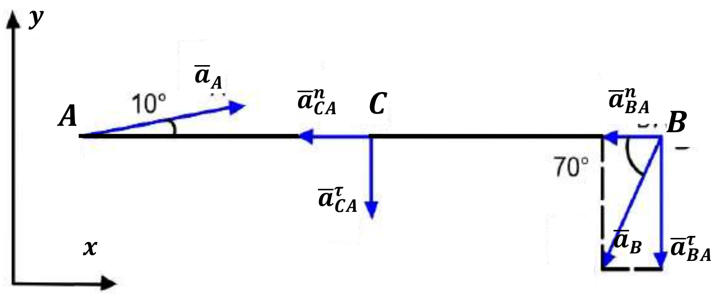
$$= 2{,}68 \cdot 2{,}84 = 6{,}003 \approx 6\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_C = 6\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \omega = \sqrt{2}\ c^{-1}, \varepsilon = 1\ c^{-2}$.

Задача 18.41

Дано:
$AB = a$;
$a_A = 10\ см/с^2; a_B = 20\ см/с^2$;
$\angle\alpha = 10°; \angle\beta = 70°$;
C – середина AB.

Визначити: a_C–?



Стержень AB здійснює плоский рух в площині рисунка. Прийняв за полюс точку A, запишемо прискорення точки B.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \qquad (1)$$

де $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA$; $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot BA$; - нормальне і тангенціальне прискорення точки B в обертальному русі навколо полюса A.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на осі координат x, y, та визначимо миттєву кутову швидкість та миттєве кутове прискорення стержня АВ:

$X: -a_B \cdot cos70° = a_A \cdot \cos 10° - a_{BA}^n; \rightarrow a_{BA}^n = \omega^2 \cdot BA =$

$= a_A \cdot \cos 10° + a_B \cos 70° = 10 \cdot 0{,}985 + 20{,}0342 = 16{,}69 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$

$\omega^2 = \dfrac{a_{BA}^n}{AB} = \dfrac{16{,}69}{a} c^{-2}$.

У$: -a_B \cdot sin70° = a_A \cdot sin10° - a_{BA}^\tau; \rightarrow$

$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB = a_A \cdot sin10° + a_B \cdot sin70° =$

$= 10 \cdot 0{,}174 + 20 \cdot 0{,}94 = 20{,}54 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$

$\varepsilon = \dfrac{a_{BA}^\tau}{AB} = \dfrac{20{,}54}{a} \ c^{-2}.$

Прийняв за полюс точку A, запишемо векторне рівняння для прискорення точки C:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau, \qquad (2)$$

де $a_{CA}^n = \omega^2 \cdot CA = \frac{16{,}69}{a} \cdot \frac{a}{2} = 8{,}34 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$

$a_{CA}^\tau = \varepsilon \cdot CA = \dfrac{20{,}54}{a} \cdot \dfrac{a}{2} = 10{,}27 \ \dfrac{\text{см}}{\text{с}^2};$

Спроектуємо векторне рівняння (2) на осі координат x, y, отримаємо модуль прискорення a_C.

$$a_{Cx} = a_A \cdot cos10° - a_{CA}^n = 9{,}85 - 8{,}34 = 1{,}51 \tfrac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_{Cy} = a_A \cdot sin10° - a_{CA}^\tau = 1{,}74 - 10{,}27 = -8{,}53 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Модуль прискорення точки С:

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + \left(a_{Cy}\right)^2} = \sqrt{(1{,}51)^2 + (8{,}53)^2} = 8{,}7\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_C = 8{,}7\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток

4. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

4.1 Основні поняття

4.1.1 Рівняння складного руху точки.

Складний рух точки - це рух точки відносно декількох систем відліку, одна з яких вважається умовно нерухомою (Рис. 4.1).

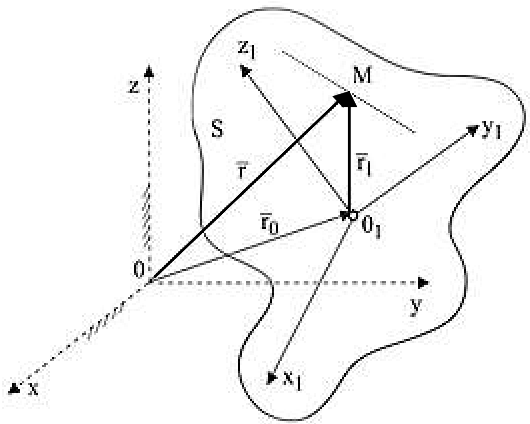


Рисунок 4.1

Відносний рух точки $\boldsymbol{M}$ – це її рух відносно рухомої системи відліку Ox_1, y_1, z_1 (радіус-вектор $\bar{r}_1$). Рівняння відносного руху точки:

$$x_1 = x_1(t);\ y_1 = y_1(t); z_1 = z_1(t).$$

Переносний рух точки $\boldsymbol{M}$ – це рух точки M разом з тілом S відносно нерухомої системи відліку Ox, y, z (радіус-вектор початку O_1 рухомої системи координат $\bar{r}_0$).

Абсолютний рух точки $\boldsymbol{M}$ – це рух точки відносно нерухомої системи відліку Ox, y, z (радіус-вектор $\bar{r}$). Рівняння абсолютного руху точки:

а) координатна форма $x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$;

б) векторна форма $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{r}_1$.

4.1.2 Швидкість і прискорення точки у складному русі

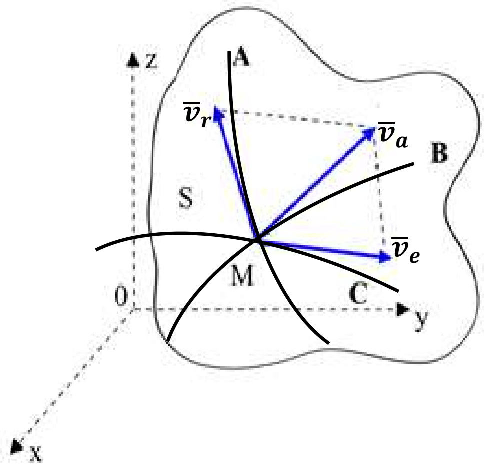


Рисунок 4.2

На рис. 4.2:

MA – відносна траєкторія точки *M*;

MC – переносна траєкторія;

MB – абсолютна траєкторія.

Теорема про додавання швидкостей.

Абсолютна швидкість $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}}$ точки $\boldsymbol{M}$ у складному русі дорівнює векторній сумі переносної $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}}$ і відносної $\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ швидкостей:

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{e}} + \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}. \tag{4.1}$$

Модуль абсолютної швидкості:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r \cdot v_e \cdot cos(\widehat{\bar{v}_r, \bar{v}_e})}. \qquad (4.2)$$

Теорема про додавання прискорень. Теорема Коріоліса. Абсолютне прискорення $\bar{a}_a$ точки M у складному русі дорівнює векторній сумі переносного $\bar{a}_e$, відносного $\bar{a}_r$ і коріолісова $\bar{a}_c$ прискорень (Рис.4.3):

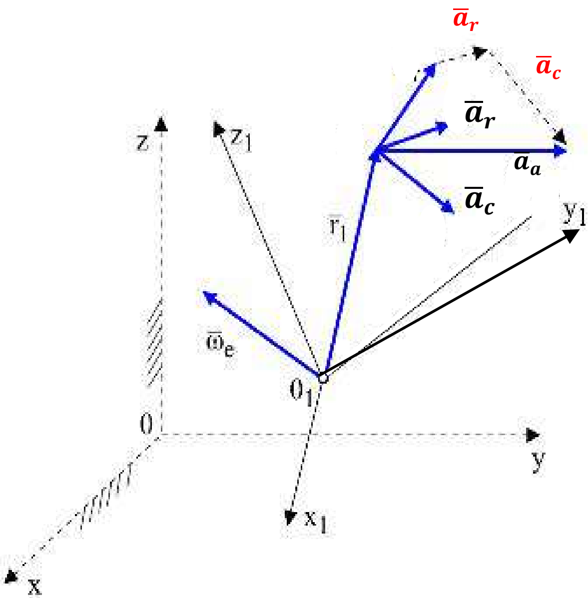


Рисунок 4.3

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \text{або } \bar{a}_a = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_c. \qquad (4.3)$$

Модуль абсолютного прискорення:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}, \tag{4.4}$$

де a_{ax}, a_{ay}, a_{az} - проекції абсолютного прискорення $\bar{a}_a$ на осі нерухомої системи координат.

4.1.3 Вектор і модуль прискорення Коріоліса.

Вектор $\qquad \bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r), \qquad (4.5)$

модуль $\qquad a_c = 2\omega_e \cdot v_r \cdot sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}). \qquad (4.6)$

Вектор прискорення Коріоліса дорівнює подвоєному векторному добутку вектора кутової швидкості переносного руху на вектор відносної швидкості точки.

Визначення напряму вектора $\bar{a}_c$.

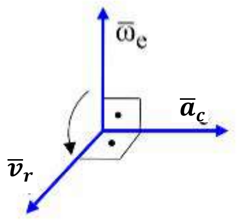


Рисунок 4.4

1) **За правилом векторного добутку** (Рис.4.4). Напрямлений вектор $\bar{a}_c$ перпендикулярно площині перемножених векторів $\bar{\omega}_e, \bar{v}_r$ в той бік, звідки найкоротше суміщення $\bar{\omega}_e$ до $\bar{v}_r$ відбувається проти ходу годинникової стрілки.

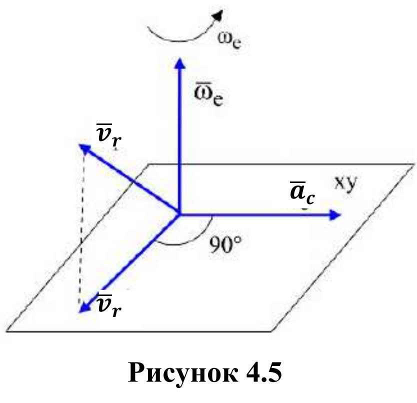


Рисунок 4.5

За правилом Жуковського. **Для визначення напряму прискорення $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c}}$ необхідно спроектувати вектор відносної швидкості $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ на площину $\boldsymbol{xy}$ перпендикулярну до осі переносного обертання $(\boldsymbol{xy} \perp \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{e}})$ і повернути цю проекцію $\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$ у площині $\boldsymbol{xy}$ на кут $\mathbf{90}°$ у бік переносного обертання $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{e}}$.**

Прискорення Коріоліса $\bar{a}_c$ дорівнює нулю у наступних випадках:

1) коли переносний рух є поступальним, тобто $\bar{\omega}_e = 0$;
2) коли $\bar{v}_r = 0$, тобто коли відносна швидкість в даний момент часу дорівнює нулю;
3) коли відносний рух відбувається за напрямом паралельним осі переносного обертання, тобто $\bar{v}_r \parallel \bar{\omega}_e$, $[sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) = 0]$. $\bar{v}_r \uparrow\uparrow \bar{\omega}_e$ або $\bar{v}_r \uparrow\downarrow \bar{\omega}_e$.

Якщо переносний рух (рух рухомої системи координат) поступальний $(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{e}} = \mathbf{0})$, то прискорення Коріоліса дорівнює нулю $\bar{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{c}} = \mathbf{0}$. Теорема про додавання прискорень сформулюється так: **абсолютне прискорення точки при поступальному переносному русі дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень.**

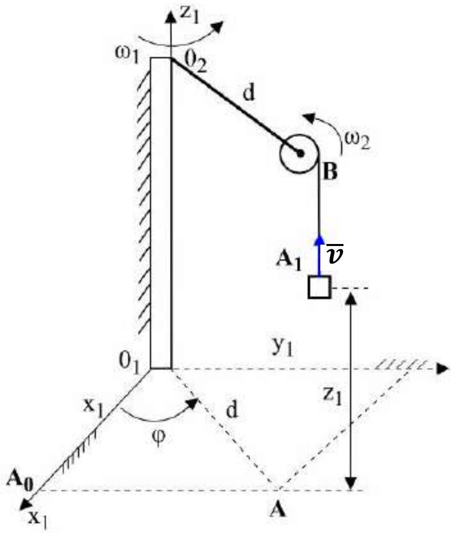
$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r. \tag{4.7}$$

4.2 Швидкості точок у складному русі

Задача 21.3

Дано:
$\omega_1 = const -$ кутова швидкість
повороту стріли крана навколо нерухомої осі O_1z_1;
$\omega_2 = const -$ кутова швидкість
барабану лебідки крану;
r – радіус барабана;
d – довжина стріли крану.

Визначити:
абсолютну траєкторію вантажу А (рівняння) -?



Нерухома система координат O_1, x_1, y_1, z_1. Стріла O_2B крана обертається з постійною кутовою швидкістю ω_1 навколо нерухомої осі O_1z_1. Кут повороту стріли навколо осі O_1z_1
$\varphi = \omega_1 t.$

Барабан лебідки B обертається з постійною кутовою швидкістю ω_2. Швидкість підйому вантажа A $v = \omega_2 \cdot r$.

Закон вертикального руху вантажу:

$$z_1 = v \cdot t = \omega_2 \cdot r \cdot t.$$

Час підйому вантажу

$$t = \frac{z_1}{\omega_2 \cdot r}. \quad (1)$$

Це означає, що при $t = 0$ вантаж знаходиться в положенні A_0 на осі O_1x_1. Запишемо координати вантажу A для цього положення в площині $O_1x_1y_1$.

$x_1 = dcos\varphi;\ y_1 = dsin\varphi,$ або $x_1 = dcos\omega_1 t;\ y_1 = dsin\omega_1 t.$ (2)

Підставив в (2) час t з (1), отримаємо:

$$x_1 = dcos\left(\frac{\omega_1 \cdot z_1}{\omega_2 \cdot r}\right);\ y_1 = dsin\left(\frac{\omega_1 \cdot z}{\omega_2 \cdot r}\right).$$

Відповідь: Гвинтова лінія, рівняння якої:

$$x_1 = dcos\left(\frac{\omega_1 \cdot z_1}{\omega_2 \cdot r}\right);\ y_1 = dsin\left(\frac{\omega_1 \cdot z_1}{\omega_2 \cdot r}\right).$$

Задача 21.5

Дано:

$\omega = const -$ кутова швидкість повороту стріли крана навколо нерухомої осі $O_1 z_1$;

$v_0 = const -$ швидкість візка *К* по горизонтальній стрілі від *А* до *В*;

при $t = 0$ візок *К* знаходився в т. *А* на осі $O_1 z_1$.

Визначити: абсолютну траєкторію візка *К* (рівняння руху) -?

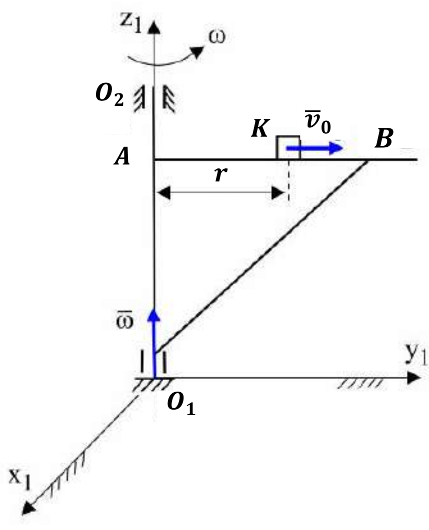


Рисунок 1

Нерухома система координат O_1, x_1, y_1, z_1. Стріла O_2B крана обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі O_1z_1.

Кут повороту стріли навколо осі O_1z_1 :

$$\varphi = \omega t, \text{ час повороту } t = \frac{\varphi}{\omega}\,. \qquad (1)$$

В початковий момент часу візок *K* знаходиться в положенні *A*. Закон зміни відстані r від *A* до *K* має вигляд:

$$r = v_0 t. \qquad (2)$$

Підставив в (2) час з (1) отримаємо:

$r = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\varphi$ – спіраль Архімеда (φ в радіанах).

Вид спіралі на рис. 2.

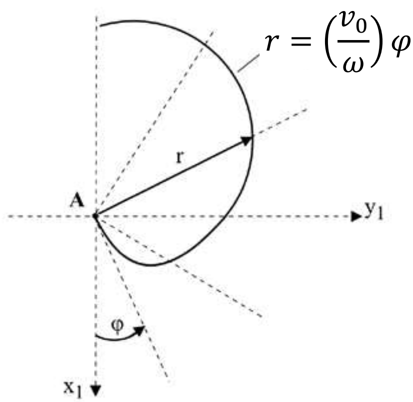


Рисунок 2

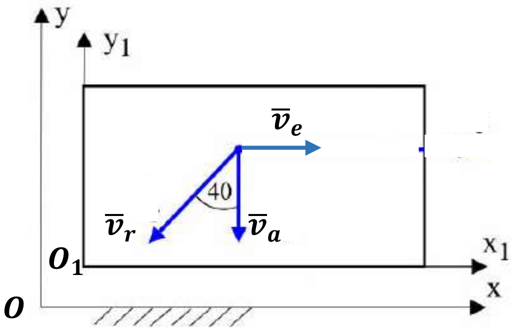
Відповідь:

$r = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\varphi$ – спіраль Архімеда.

Задача 22.9

Дано:
$v_e = 72$ км/год=20м/с; (це швидкість автомобіля);
$\alpha = 40$ °; (слід краплі на боковому склі).

Визначити: v_a – вертикальну швидкість краплі дощу?



На рисунку:

1) нерухому систему відліку спрямуємо вздовж дороги (Oxy);
2) рухома система відліку – автомобіль$(O_1x_1y_1)$;
3) $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r,$ (1)

$\bar{v}_e$ - горизонтальна швидкість краплі, дорівнює швидкості авто,

$\bar{v}_r$ – нахилена швидкість краплі на склі вікна,

$\bar{v}_a$ – абсолютна вертикальна швидкість краплі.

Спроектуємо (1) на вісь x: $0 = -v_r \cdot sin40° + v_e$;

$$v_e = v_r \cdot sin40°, \qquad v_r = \frac{v_e}{sin40°}. \tag{2}$$

Спроектуємо (1) на вісь y: $-v_a = -v_r \cdot cos40°$;

$$v_a = v_r \cdot cos40°; \;\; v_a = \frac{v_e cos40°}{sin40°}.$$

Звідси

$$v_a = \frac{v_e}{tg40°} = v_e ctg40° = 20 \cdot 1{,}19 = 23{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

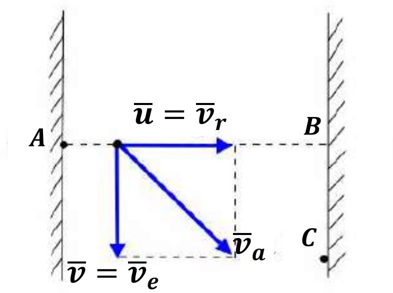
Відповідь:

$$v_a = v_e ctg40° = 23{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 22.10

Дано:
$t_1 = 10$ хв; $t_2 = 12{,}5$ хв;
$BC = 120$ м.

Визначити:
$\ell = AB$ – ширину річки;
u – відносну швидкість човна;
v – швидкість течії річки.



Згідно до теореми про додавання швидкостей, абсолютна швидкість човна визначається за формулою:

$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e,$

де $\bar{v}_r = \bar{u}$ – відносна швидкість човна відносно води;

$\bar{v}_e = \bar{v} -$ швидкість течії; обидві швидкості сталі.

Човен, який йшов перпендикулярно до берегу, за час t_1 перемістився зі швидкістю v вниз за течією на відстань BC. Тому швидкість течії річки

$$v = \frac{BC}{t_1} = \frac{120}{10} = 12\,\frac{\text{м}}{\text{хв}}.$$

За той же час t_1 човен зі швидкістю u дійшов до протилежного берегу, тобто пройшов відстань $\ell = AB$.

Тому відносна швидкість човна:

$$u = \frac{AB}{t_1} = \frac{\ell}{t_1}. \qquad (1)$$

При русі назад в точку A, човен витратив час t_2, пройшовши відстань AC, а відстань $BC = v \cdot t_2$. Тоді відносна швидкість визначиться як

$$u = \frac{AC}{t_2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{t_2} = \frac{\sqrt{\ell^2 + (v \cdot t_2)^2}}{t_2}. \qquad (2)$$

Дорівняємо праві частини (1), (2) та отримаємо

$$\frac{\ell}{t_1} = \frac{\sqrt{\ell^2 + (v \cdot t_2)^2}}{t_2}, \text{звідси } \ell = \frac{v \cdot t_1 \cdot t_2}{\sqrt{(t_2)^2 - (t_1)^2}} =$$

$$= \frac{12 \cdot 12{,}5 \cdot 10}{\sqrt{12{,}5^2 - 12^2}} = 200 \text{ м}.$$

З (1) визначимо відносну швидкість човна

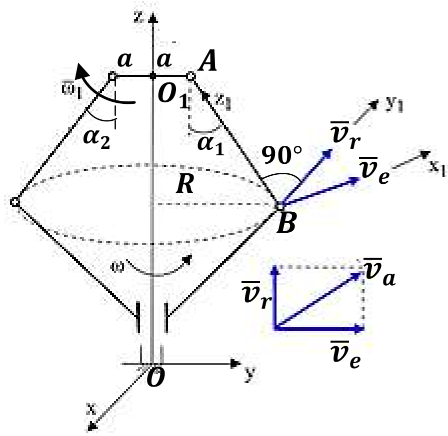
$$u = \frac{\ell}{t_1} = \frac{200}{10} = 20 \frac{\text{м}}{\text{хв}}.$$

Відповідь: $\ell = 200$ м, $v = 12 \frac{\text{м}}{\text{хв}}, u = 20 \frac{\text{м}}{\text{хв}}$.

Задача 22.14

Дано:
$\alpha = 30°$; $\omega = 10$ с$^{-1}$;
$\omega_1 = 1{,}2$ с$^{-1}$;
$\ell = 50$ см $= 0{,}5$ м $= AB$;
$a = e = 5$ см $= 0{,}05$ м;
$\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$.

Визначити: v_a—?



В регуляторі Уайта нерухому систему координат з'єднаємо з віссю регулятора OO_1 (вісі xyz).

1) Рухома система координат $x_1y_1z_1$ пов'язана зі стержнем підвісу AB.

Абсолютна швидкість кулі B $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$,

де $v_r = \omega_1 \cdot \ell = 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – відносна швидкість кулі B в обертанні навколо шарніра підвісу A.

$\bar{v}_r \perp AB,$ і спрямована вздовж осі y_1.

$v_e = \omega \cdot R = \omega \cdot (a + \ell sin30°) = 10 \cdot (0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}5) = 3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ – переносна швидкість кулі в обертанні навколо осі OO_1 ; $\bar{v}_c$ спрямована $\perp$ площині zOy вздовж осі x_1.

$$\bar{v}_r \perp \bar{v}_e;\ \bar{v}_e \perp R.$$

Модуль абсолютної швидкості:

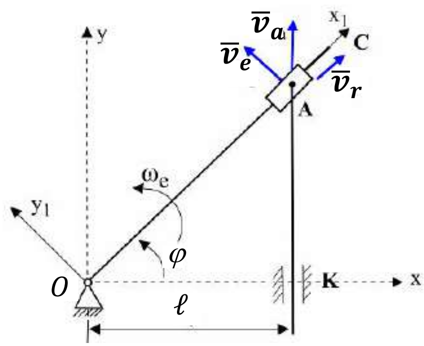
$$v_a = \sqrt{(v_e)^2 + (v_r)^2} = \sqrt{3^2 + 0{,}6^2} = 3{,}06\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_a = 3{,}06\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 22.17

Дано:
$\angle COK = \varphi$;
$\omega_{OA} = \omega_e = \omega$; $OK = \ell$.

Визначити: v_r–? (швидкість повзуна A відносно кривошипу OC)
$v_r = f(\omega, \varphi)$;
x_1y_1 – рухома система координат, xy – нерухома система координат.



Абсолютна швидкість повзуна A (вертикальний рух по AK) складається з швидкості відносного руху вздовж кривошипу OC та швидкості переносного обертального руху разом з кривошипом навколо осі O з кутовою швидкістю ω_e

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \qquad (1)$$

Переносним рухом повзуна A є коло з центром в точці O і радіусом $R = OA = \frac{\ell}{cos\varphi}$. Переносна швидкість

$$v_e = \omega_e \cdot OA = \frac{\omega\ell}{cos\varphi}. \qquad (2)$$

Для визначення v_r спроектуємо (1) на вісь x:

$0 = -v_e \cdot sin\varphi + v_r cos\varphi; \rightarrow \quad v_r cos\varphi = v_e \cdot sin\varphi;$

$v_r = v_e \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = v_e tg\varphi$, з урахуванням (2) $v_r = \frac{\omega\ell}{cos\varphi} tg\varphi$.

Відповідь: $v_r = \frac{\omega\ell}{cos\varphi} tg\varphi$.

Задача 22.18

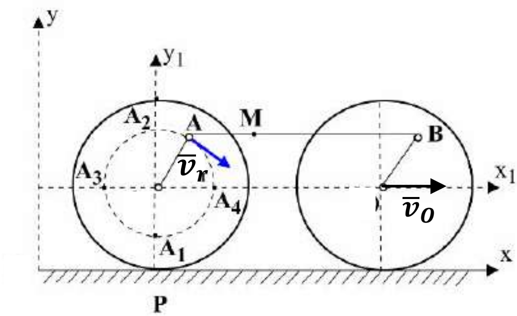
Дано:

$R = 1$ м;

$OA = OB = 0{,}5$ м;

$v_o = v_e = 20$ м/с.

Визначити: v_a будь якої точки спарника AB для двох вертикальних та двох горизонтальних положень кривошипів O_1A та OB.



$x_1O_1y_1$ - відносна система координат;

xOy - абсолютна система координат.

Так як спарник $AB \parallel Ox$, то швидкість довільної точки M на спарнику в переносному русі дорівнюватиме швидкості $\bar{v}_e$ точки A.

Абсолютна швидкість точки A в будь якому положенні дорівнює:

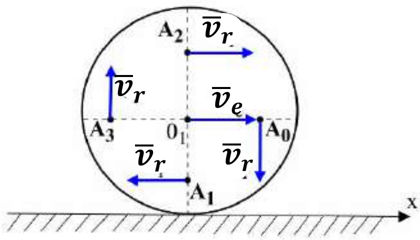
$$\bar{v}_a = \bar{v}_i = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

За умовами задачі $v_e = v_o = 20$ м/с. $\bar{v}_r$ є відносною лінійною швидкістю точки A при її обертанні навколо осі O_1 колеса, тому $v_r = \omega \cdot O_1A, \quad (O_1A \perp \bar{v}_r)$.

Кутову швидкість кривошипу O_1A, (та колеса) визначаємо з умови, що колесо котиться без ковзання, тобто точка P (точка торкання колеса та рейки) є миттєвим центром швидкостей для колеса.

$$\omega = \frac{v_e}{O_1P} = \frac{v_o}{R} = \frac{20}{1} = 20\ c^{-1}.$$

Відносна швидкість точки A: $v_r = \omega \cdot O_1A = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ м/с.



Напрями відносної швидкості в точках A_1, A_2, A_3, A_4 показані на рис. Відносні швидкості точки A в цих положеннях будуть дорівнювати:

1) В т. A_1 так як $\bar{v}_e \parallel \bar{v}_r$ та напрямлені в різні сторони

$$v_{A_1} = v_e - v_r = 20 - 10 = 10\ \text{м/с};$$

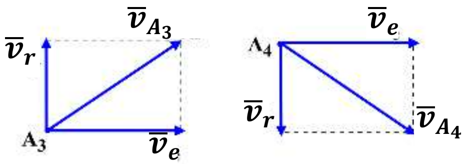
2) В т. A_2 так як $\bar{v}_e \parallel \bar{v}_r$ та напрямлені в одну сторону

$$v_{A_2} = v_e + v_r = 20 + 10 = 30\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3) і 4) В т. A_3 та т. A_4 так як $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$

$$v_{A_3} = v_{A_4} = \sqrt{{v_e}^2 + {v_r}^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}36\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Напрями $\bar{v}_a$ в т. A_3 та т. A_4 показані на рисунку.

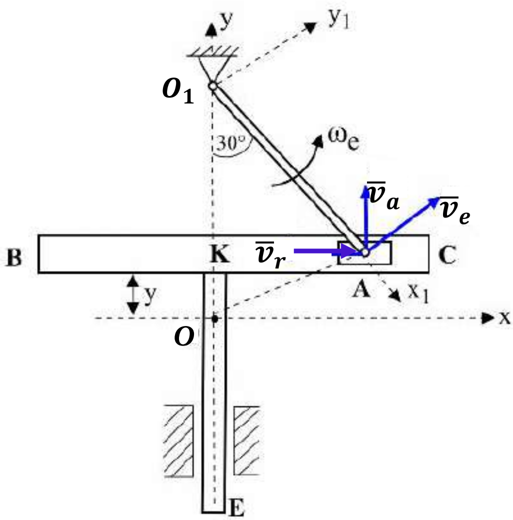


Відповідь: $v_{A_1} = 10$ м/с; $v_{A_2} = 30\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $v_{A_3} = v_{A_4} = 22{,}36\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 22.25

Дано:
$O_1A = \ell = 0{,}2$ м;
$\omega_e = \omega_{OA} = 3\pi$ рад/с;
$\alpha = \omega t = 30°$.

Визначити: $\bar{v}_a -$? (швидкість куліси BC або швидкість точки K вертикальної).



1) Вирішуємо задачу за допомогою теореми про додавання швидкостей. xOy – нерухома система координат (т. O в нижньому положенні).

$x_1O_1y_1$ – рухома система координат. Абсолютна швидкість каменю A (з кулісою BC)

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r\,. \qquad (1)$$

$v_e = \omega_e \cdot O_1A = 3\pi \cdot \ \ell -$ переносна швидкість каменю A в обертальному русі кривошипу O_1A навколо т. O_1 з кутовою швидкістю ω_e.

v_r - відносна швидкість каменю A з кулісою BC – вертикальне переміщення штока KE.

Для визначення абсолютної швидкості куліси спроектуємо (1) на вісь Oy:

$v_a = v_e \cdot sin30° = 3\pi \cdot \ \ell \cdot sin30° = 3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 =$ 0,942 м/с.

2) Вирішуємо задачу за допомогою рівняння руху куліси. Поступальне вертикальне переміщення точки K (з кулісою) відбувається за законом:

$$y = \ell - \ell cos\omega t \qquad (2)$$

- закон руху т. K (з кулісою).

Швидкість точки K: $v_K = v_a = \dot{y} = \ell\omega sin\omega t$.

При $\omega t = 30°$ $v_K = v_a = 0{,}2 \cdot 3\pi \cdot 0{,}5 = 0{,}942$ м/с.

Відповідь: Швидкість точки K: $v_K = v_a = 0{,}942$ м/с.

Задача 22.26

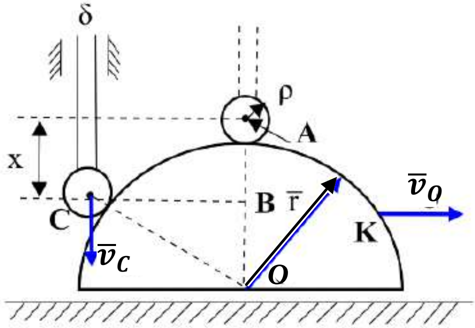
Дано:

$r -$ радіус напівциліндра K;

$\rho -$ радіус роліка C;

$v_0 = const -$ швидкість горизонтальна напівциліндра K(при $t = 0$ ролік С знаходиться в т. A).

Визначити: $v_c -$?



Абсолютне переміщення штока CD (вертикальне до низу) описується координатою x. З початку шток знаходиться в т. A. запишемо рівняння руху $x = f(t)$.

$x = AO - BO$. $AO = r + \rho$. З трикутника OCB:

$BO = \sqrt{CO^2 - CB^2;}$ $CO = OA = r + \rho; CB = v_o t -$ це відстань, яку пройшов напівциліндр за час t зі швидкістю v_o. З урахуванням цього

$x = (r + \rho) - \sqrt{(r + \rho)^2 - (v_o t)^2}.$

Абсолютна швидкість т. C

$$v_a = v_c = \dot{x} = \frac{{v_o}^2 t}{\sqrt{(r + \rho)^2 - (v_o t)^3}}, \text{см/с}.$$

Відповідь:

$$v_c = \frac{{v_o}^2 t}{\sqrt{(r + \rho)^2 - (v_o t)^3}}, \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

4.3 Прискорення точок у складному русі

Задача 23.1

Дано:

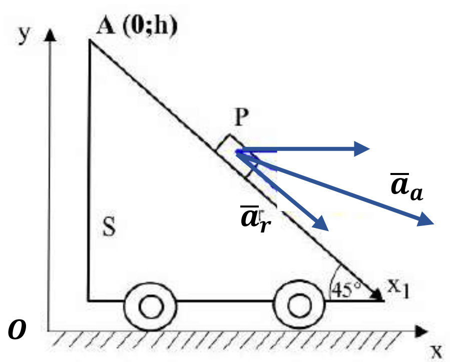
$a_e = 0{,}1\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} = const;$

$a_r = 0{,}1\sqrt{2}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} = const;$

Початкові умови (положення тіла P при t = 0):

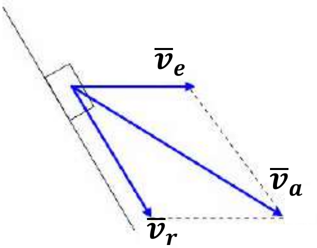
при t= 0: $v_e = v_r = 0;$

$x_0 = 0;\ y_0 = h.$



Визначити:

v_a, a_a − абсолютні швидкість та прискорення тіла P; рівняння траєкторії абсолютного руху тіла P.



Переносний рух тіла S − рух вздовж нерухомої осі Ox з прискоренням $\bar{a}_e$ (поступальний рух). Відносний рух тіла P – рух паралельний до рухомої осі Ax_1 з прискоренням $\bar{a}_r$.

Так як переносний рух є поступальним, то прискорення Коріоліса $\overline{a_c} = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = 0.$ Тому що $\bar{\omega}_e = 0$ при поступальному русі.

Абсолютне прискорення

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r. \qquad (1)$$

Проекції $\bar{a}_a$ на координатні осі (проекції (1) на осі x та y):

$$\begin{cases} a_{ax} = \ddot{x} = a_e + a_r \cdot cos45°; \\ a_{ay} = \ddot{y} = -a_r \cdot sin45°; \end{cases} \begin{cases} \ddot{x} = 0{,}1 + 0{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \ddot{y} = -0{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0{,}2; \\ \ddot{y} = -0{,}1. \end{cases} \qquad (2)$$

Модуль абсолютного прискорення:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}{}^2 + a_{ay}{}^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}1^2} = 0{,}1\sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для визначення абсолютної швидкості проінтегруємо вираз (2):

$\begin{cases} \dot{x} = v_{ax} = 0{,}2t + C_1; \\ \dot{y} = v_{ay} = -0{,}1t + C_2. \end{cases}$ З початкових умов при $t = 0$ $v_{ax} = v_{ay} = 0$. Отримаємо $C_1 = C_2 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{ax} = 0{,}2t; \\ \dot{y} = v_{ay} = -0{,}1t. \end{cases} \qquad (3)$$

Модуль абсолютної швидкості

$$v_a = \sqrt{v_{ax}{}^2 + v_{ay}{}^2} = \sqrt{(0{,}2t)^2 + (-0{,}1t)^2} = 0{,}1t\sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для визначення абсолютної траєкторії проінтегруємо вираз (3):

$\begin{cases} x = 0{,}1t^2 + C_3; \\ y = -0{,}05t^2 + C_4. \end{cases}$ З початкових умов при $t = 0$ отримаємо $C_3 = 0, C_4 = h$.

$$\begin{cases} x = 0{,}1t^2; \\ y = -0{,}05t^2 + h. \end{cases} \qquad (4)$$

Виключивши з (4) t, отримаємо рівняння траєкторії абсолютного руху тіла P:

$$t^2 = \frac{x}{0{,}1}; \;\; y = h - 0{,}05\frac{x}{0{,}1} = h - 0{,}5x;$$

$y = h - 0{,}5x$ – абсолютна траєкторія тіла P.

Відповідь: $a_a = 0{,}1\sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $v_a = 0{,}1t\sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $y = h - 0{,}5x$.

Задача 23.4

Дано:
$R; v_e = v_o; a_e = a_o$ -
швидкість та прискорення трактора
на прямолінійному шляху без ковзання.

Визначити: v_a, a_a чотирьох точок гусениці трактора
$M_1; M_2; M_3; M_4$.

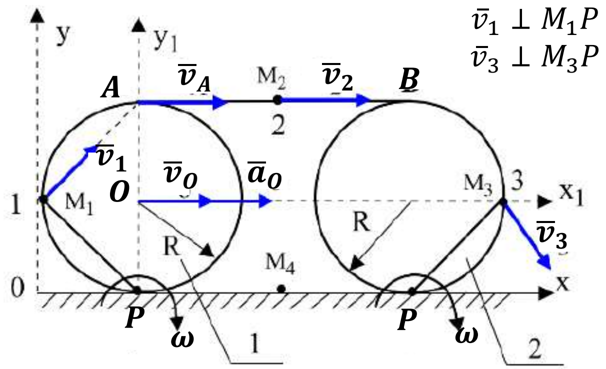


Рисунок 1

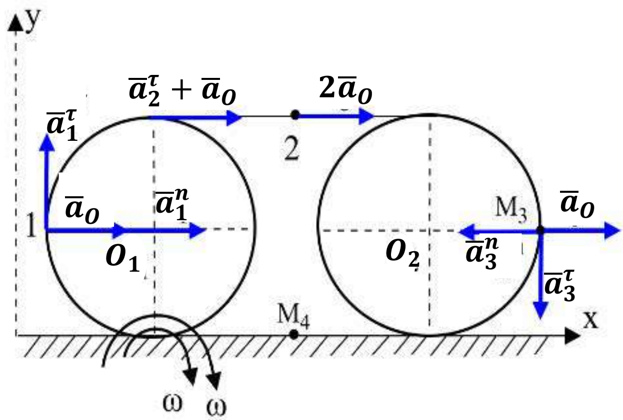


Рисунок 2

Нерухома система xoy. Рухома система координат x_1Oy_1 – переміщується разом з трактором поступально. Переносний рух поступальний $\omega_e = 0; a_c = 0$. Колеса 1 і 2 виконують плоский рух. МЦШ – точка P. Кутова швидкість коліс

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \frac{v_0}{R};$$

Кутове прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv_0}{dt}\frac{1}{R} = \frac{a_o}{R}.$$

I. <u>Швидкість і прискорення точки M_1 гусениці</u> (Рис.1).

Швидкість $v_1 = \omega \cdot R\sqrt{2} = \frac{v_0}{R} \cdot R\sqrt{2} = v_0\sqrt{2};\ \bar{v}_1 \perp PM_1;$

$$\left(PM_1 = R\sqrt{2}\right).$$

Прийняв точку O_1 (центр лівого колеса) за полюс (Рис.2), отримаємо прискорення точки M_1.

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_e + \bar{a}_{r1}, \text{ де } \bar{a}_{r1} = \bar{a}_1^n + \bar{a}_1^\tau; \quad a_1^n = \omega^2 R = \frac{{v_0}^2}{R};$$

$$a_1^\tau = \varepsilon R = a_o.$$

Модуль прискорення a_1:

$$a_1 = \sqrt{(a_1^\tau)^2 + (a_o + a_1^n)^2} = \sqrt{(a_o)^2 + \left(a_o + \frac{{v_0}^2}{R}\right)^2}.$$

II. <u>Швидкість і прискорення точки M_2 гусениці</u>.

Швидкість точки 2 гусениці дорівнює швидкості т. A і т. B, тому що ділянка AB рухається поступально.

$v_2 = v_A = \omega \cdot 2R = 2v_0.$

Прискорення т. M_2дорівнює поступальному прискоренню т. A.

$\bar{a}_2 = \bar{a}_A = \bar{a}_o + \bar{a}_2^\tau;\ \ a_2^\tau = \ a_1^\tau = a_o;\ \ a_2 = a_o + a_o = 2a_o.$

III. <u>Швидкість і прискорення точки M_3 гусениці</u>.

$v_3 = \omega \cdot PM_3 = \omega \cdot R\sqrt{2} = v_0\sqrt{2};\ \bar{v}_3 \perp PM_3.$

Прискорення т. M_3 $\quad \bar{a}_3 = \bar{a}_e + \bar{a}_{r3}$, де $\bar{a}_{r3} = \bar{a}_3^n + \bar{a}_3^\tau;$

$$a_3^n = \omega^2 R = \frac{{v_0}^2}{R};$$

$$a_3^\tau = \varepsilon R = a_o.$$

Модуль прискорення a_3:

$$a_3 = \sqrt{(a_3^\tau)^2 + (a_o - a_3^n)^2} = \sqrt{(a_o)^2 + \left(a_o - \frac{{v_0}^2}{R}\right)^2}.$$

IV. <u>Швидкість і прискорення точки M_4 гусениці</u> дорівнюють нулю, тому що гусениця не ковзає на ділянці $P - P$, вона нерухома. $v_4 = a_4 = 0$.

Відповідь:

$v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}; v_2 = 2v_0\ ;\ v_4 = 0$.

$a_1 = \sqrt{(a_o)^2 + \left(a_o + \frac{{v_0}^2}{R}\right)^2}\ ;\ a_3 = \sqrt{(a_o)^2 + \left(a_o - \frac{{v_0}^2}{R}\right)^2}\ ;$

$a_2 = 2a_o;\ a_4 = 0.$

Задача 23.5

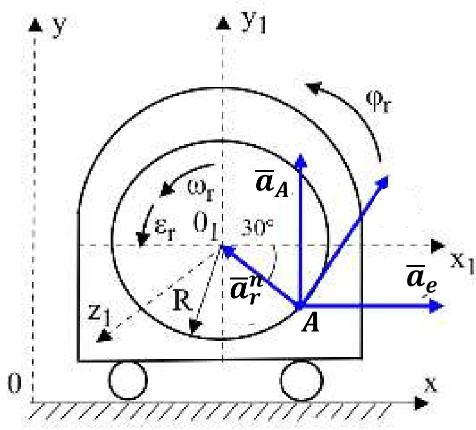
Дано:

$a_e = a = 0{,}492\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};\ \ \omega_e = 0;$

$\varphi_r = t^2$ рад – закон відносного обертання ротора;

$O_1A = R = 0{,}2$ м - радіус ротора; $t = 1$с; $\alpha = 30°$.

Визначити: a_a–? точки A ротора при $t = 1$с.



Переносний рух – <u>поступальний</u> рух візка з прискоренням $a_e = const$ відносно нерухомої системи координат xOy. Відносний рух – обертання ротора навколо осі O_1z рухомої системи

координат $x_1O_1y_1$ за законом
$\varphi_r = t^2$ рад.
Кутова швидкість і кутове прискорення відносного обертання:
$\omega_r = \dot{\varphi}_r = 2t;\ \varepsilon_r = \dot{\omega}_r = 2,$ при $t = 1$с
$\omega_r = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}};\ \varepsilon_r = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$
$a_r^n = {\omega_r}^2 \cdot R = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$
$a_r^\tau = \varepsilon_r \cdot R = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$
Абсолютне прискорення т. A на ободі ротора для кута $\alpha = 30°$
($\bar{a}_\text{с} = 0, \omega_e = 0 -$ переносний рух, поступальний)

$$\bar{a}_a = \bar{a}_\text{А} = \bar{a}_e + \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau, \qquad (1)$$

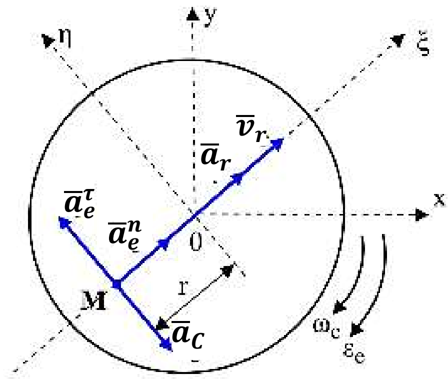
Для визначення $\bar{a}_a = \bar{a}_\text{А}$ запишемо проекції (1) на осі x і y:
на ось x: $a_{ax} = a_e - {a_r}^n \cos 30° + {a_r}^\tau \cos 60° =$
$= 0{,}492 - 0{,}8 \cdot 0{,}866 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0;$
на ось y: $a_{ay} = {a_r}^n \sin 30 + {a_r}^\tau \sin 60° =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}866 = 0{,}746\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$
Абсолютне прискорення т. A $a_a = a_{ay} = 0{,}746\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, напрямлене вертикально вгору, так як $a_{ax} = 0$.

Відповідь: $a_a = 0{,}746\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Задача 23.14

Дано:
$\varepsilon_e = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = const;$
при $t = 0$ $\omega_e = 0$; $\xi = sin(\pi t)$, м - рух точки по діаметру;
$t_1 = t = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}\ c.$

Визначити: $a_{a\xi}, a_{a\eta} -$?(проекції $\bar{a}_a$ на осі ξ і η) при $t = \frac{5}{3}\ c.$



Диск обертається навколо нерухомої осі (т. O) – переносний рух (ω_e, ε_e). Осі $\xi O \eta$ – обертаються разом з диском – рухома система координат. По осі ξ рухається точка M (відносний рух). Закон відносного руху $\xi = sin(\pi t)$, м.

1) Визначаємо положення точки M на діаметрі (ось ξ) при

$$t = \frac{5}{3} c; r = sin\pi\frac{5}{3} = -0{,}866 \text{ м.}$$

Точка M знаходиться зліва від центру O, $r = 0{,}866$ м.

2) Абсолютне прискорення

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c \qquad (1)$$

3) Визначаємо відносну швидкість та прискорення т. M.

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{\xi} = \pi cos\pi t; \\ a_r &= \ddot{\xi} = -\pi^2 sin\pi t; \end{aligned}\right\} \qquad \text{при } t = \frac{5}{3}\ c$$

$$v_r = \pi cos\pi\frac{5}{3} = 0{,}5\,\pi; \quad v_r = 1{,}57\frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_r = -\pi^2 sin\pi\frac{5}{3} = -3{,}14^2(-0{,}866); \ a_r = 8{,}547\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектора $\bar{a}_r$ і $\bar{v}_r$ напрямлені від точки M вправо по осі ξ.

4) Визначаємо переносні кутову швидкість ω_e, нормальне $\bar{a}_e^n$ та тангенціальне $\bar{a}_e^\tau$ прискорення т. *M*. З урахуванням того, що диск обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon_e = 1\text{с}^{-2} = const$, визначаємо $\omega_e, \bar{a}_e^n, \bar{a}_e^\tau$, $\omega_e = \omega_o + \varepsilon_e t$.
При $t = 0$ $\omega_o = 0$, $\omega_e = \varepsilon_e t; a_e^n = \omega_e^2 \cdot r;\ a_e^\tau = \varepsilon \cdot r$.
При $t = \dfrac{5}{3}$ с,

$\omega_e = \varepsilon_e \dfrac{5}{3}; a_e^n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 \cdot 0{,}866 = 2{,}4 \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

$a_e^\tau = 1 \cdot 0{,}866 = 0{,}866 \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

5) Визначення прискорення Коріоліса
$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$.
Модуль $a_c = 2\omega_e \cdot v_r \cdot sin 90° = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1{,}57 = 5{,}23 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Напрям $\bar{a}_c$: вектор $\bar{\omega}_e$ напрямлений по осі z перпендикулярно від нас; тоді кут $\angle \bar{\omega}_e \text{M} \bar{v}_r = 90°$; прискорення $\bar{a}_c$ напрямлено перпендикулярно до площини $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$, тобто $\perp$ осі ξ (див. рис.).

6) Абсолютне прискорення визначаємо за формулою (1).

7) Спроектуємо (1) на осі ξ і η:

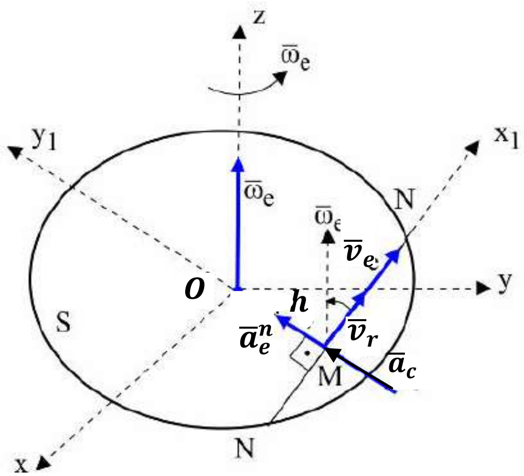
$$a_{a\xi} = a_r + a_e^n = 8{,}547 + 2{,}4 = 10{,}95\text{м}/c^2;$$
$$a_{a\eta} = a_e^\tau - a_c = 0{,}866 - 5{,}23 = -4{,}364\ \text{м}/c^2$$

Відповідь: $a_{a\xi} = 10{,}95 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; a_{a\eta} = -4{,}37\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 23.15

Дано:
$v_r = const$;
$\omega_e = const$;
$h = min$.

Визначити: a_a, v_a–? при $OM = h_{\min}$.



Диск S обертається навколо осі Oz нерухомої системи координат з постійною кутовою швидкістю ω_e (вісь $Oz \perp$ площині диска S). По хорді NN рухається з постійною відносною швидкістю v_r точка M. Рухома система координат x_1My_1 обертається разом з диском з кутовою швидкістю $\omega_e = const$. Напрями ω_e переносного обертання і відносного руху т. M співпадають.

Визначимо a_a, v_a при $OM = h_{\min}$.

1) Абсолютні швидкості $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$; $v_r = v_e$ – рух по хорді NN. $v_e = \omega_e \cdot h$ - переносна швидкість т. M напрямлена вздовж NN як $\bar{v}_r$.

Модуль $v_a = v_r + \omega_e \cdot h$.

2) Абсолютне прискорення т. M

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (1)$$

При цьому відносне прискорення $a_r = \frac{dv_r}{dt} = \dot{v}_r = 0$, так як $v_r = const$ (за умовою задачі).

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h$ - переносне нормальне прискорення т. M, напрямлено від M до O.

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h = 0$, так як $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0$ $(\omega_e = const)$ - переносне тангенціальне прискорення т. M.

Прискорення Коріоліса $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$. Вектор $\bar{\omega}_e$ розташований вздовж осі Oz, напрямлений вертикально до гори (див. рис). Якщо $\bar{\omega}_e$ подумки перенести в т. M, то кут між $\bar{\omega}_e$ і $\bar{v}_r$ буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$. Вектор $\bar{a}_c$ напрямлений $\perp$ площині векторів $\bar{\omega}_e$ і $\bar{v}_r$, лежить на осі y_1 та співпадає з вектором $\bar{a}_e^n$.

Модуль $a_c = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2\,\omega_e v_r$, $(\sin\frac{\pi}{2} = 1)$.

Так як вектори $\bar{a}_e^n$ і $\bar{a}_e^\tau$ лежать на одній лінії і напрямлені в одну сторону , то модуль $a_a = a_e^n + a_c = \omega_e^2 \cdot h \; +2\omega_e v_r$.

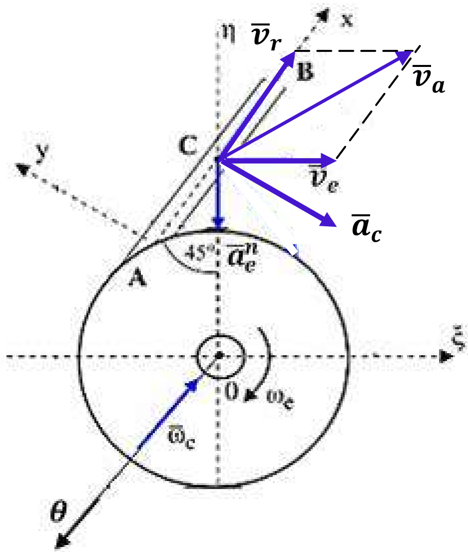
Відповідь: $v_a = v_r + \omega_e \cdot h$, $a_a = \omega_e^2 \cdot h \; +2\omega_e v_r$.

Задача 23.18

Дано:

$\alpha = 45°$;
$\omega_e = 4\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} = const$;
$v_r = 2\frac{\text{м}}{\text{с}} = const$;
OC=0,5 м.

Визначити: $v_{a\xi}-?\; v_{a\eta}-?$
$a_{a\xi}-?\; a_{a\eta}-?$



Обертання компресора відносно осі $O\theta$ нерухомої системи координат $\xi\eta O$ є переносною кутовою швидкістю ω_e. Рух точки C

повітря по каналу AB (рухома ось Ax) з відносною швидкістю $v_r = const$.

Абсолютна швидкість

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \qquad (1).$$

$v_e = \omega_e \cdot OC = 4\pi \cdot 0{,}5 = 2\pi = 6{,}28$ м/с

$\bar{v}_e \perp OC$, (див. рис) – переносна швидкість точки C повітря.

Запишемо вирази для проекцій абсолютної швидкості $\bar{v}_a$ на осі ξ і η:

$$v_{a\xi} = v_r \cos 45° + v_e = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 6{,}28 = 1{,}41 + 6{,}28 =$$
$$= 7{,}69 \approx 7{,}7\text{м/с}$$

$$v_{a\eta} = v_r \sin 45° = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Абсолютне прискорення (в т. C):

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c, \qquad (2)$$

де $a_r -$ відносне прискорення руху часток повітря по каналу AB з постійною швидкістю v_r, $a_r = \frac{dv_r}{dt} = 0$ (відносний рух прямолінійний).

$a_e^n = {\omega_e}^2 \cdot OC = (4\pi)^2 \cdot 0{,}5 = 8\pi^2 = 78{,}956$ м/с^2 – нормальне переносне прискорення т. C повітря, напрямлене по CO.

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot\ OC = 0,$ так як $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0$ $(\omega_e = const)$ – тангенціальне прискорення т. C повітря;

прискорення Коріоліса:

$a_c = 2\omega_e v_r sin 90° = 2 \cdot 4\pi \cdot 2 = 16\pi = 50{,}265 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} -$

напрямлене $\perp$ $\bar{v}_r$ і $\bar{\omega}_e$, лежить в площині $\xi O \eta$ (див. рис.).

Запишемо рівняння проекцій (2) на осі ξ і η:

$$a_{a\xi} = a_c\ sin 45° = 50{,}265 \cdot 0{,}707 = 35{,}54\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{a\eta} = -a_e^n - a_c\ cos 45° = -78{,}956 - 35{,}54 = -114{,}5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

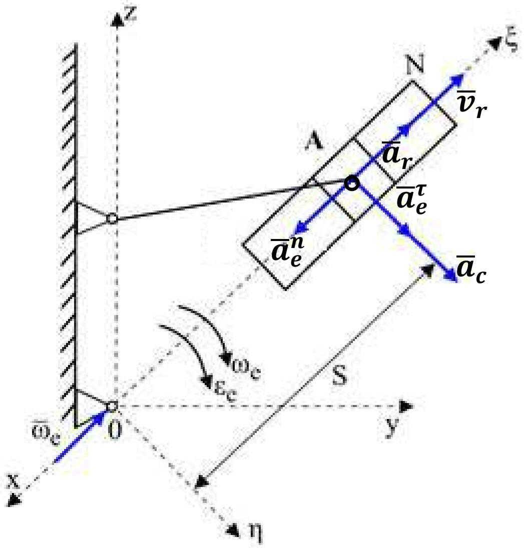
Відповідь:

$v_{a\xi} = 7{,}7$м/с; $v_{a\eta} = 1{,}414 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_{a\xi} = 35{,}54\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_{a\eta} = -114{,}5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 23.21

Дано:
Переносний:
$\omega_e = \omega$; $\varepsilon_e = \varepsilon$ - кутова швидкість
та прискорення куліси.
Відносний: $\bar{v}_r, \bar{a}_r$ (вздовж OA),
$OA = S$ (переміщення).

Визначити: $a_{a\xi}$–? $a_{a\eta}$–? (як функції переміщення S)



Так як камінь A бере участь в складному русі (відносний поступальний рух вздовж куліси N та переносний обертальний рух разом з кулісою навколо т. O, то абсолютне прискорення т. A:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c, \qquad (1)$$

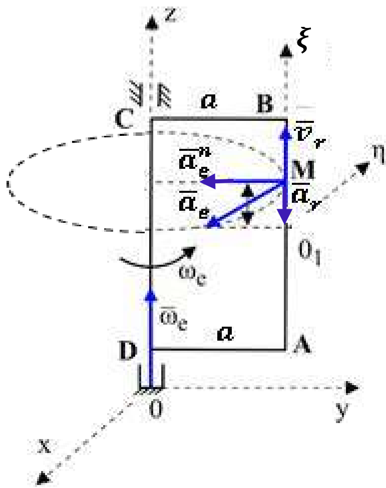
Визначаємо переносний рух:
$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot S;$

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OA = \varepsilon \cdot S$.
Вектор переносної кутової швидкості $\overline{\omega}_e$ лежить на осі x перпендикулярно площині yoz, напрямлений від нас.
Прискорення Коріоліса: $a_c = 2\omega_e v_r = 2\omega v_r$.
Вектор $\bar{a}_c$ перпендикулярний до векторів $\overline{\omega}_e$ і $\bar{v}_r$, напрямлений як вектор $\bar{a}_e^\tau$, $\bar{a}_c \parallel o\eta$.
Визначимо проекції $\bar{a}_a$ на осі $o\xi$ і $o\eta$.
На ось $o\xi$: $a_{a\xi} = -a_e^n + a_r = -\omega^2 S + a_r$.
На ось $o\eta$: $a_{a\eta} = a_e^\tau + a_c = \varepsilon S + 2\omega v_r$.
Відповідь: $a_{a\xi} = -\omega^2 S + a_r, a_{a\eta} = \varepsilon S + 2\omega v_r$.

Задача 23.28

Дано:
$\xi = a sin\frac{\pi}{2}t$, м;
$\omega_e = \frac{\pi}{2}$ рад/с $= const$;
$CB = \mathrm{DA} = a$.

Визначити: a_a–? при $t = 1c$.



Пластина $ABCD$ обертається навколо осі Oz нерухомої системи координат xyz з кутовою швидкістю $\omega_e = const$. По стороні AB т. M здійснює відносний рух (вісь ξ) за законом

$\xi = a \cdot sin\frac{\pi}{2}t,$ м.

Переносний рух – обертання з кутовою швидкістю $\omega_e = const$ та кутовим прискоренням $\varepsilon_е = \dot{\omega}_e = 0$.

Абсолютне прискорення т. M:

$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c,$ (1)

Відносні швидкість та прискорення:

$v_r = \dot{\xi} = \dot{\frac{a\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}t$;

$a_r = \ddot{\xi} = \dot{v_r} = -\frac{\pi^2}{4}a \cdot sin\frac{\pi}{2}t.$

При $t = 1$с

$v_r = \frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \left(cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$;

$a_r = -\frac{\pi^2}{4}a \cdot sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}a, \left(sin\frac{\pi}{2} = 1\right).$

Вектор $\bar{a}_r$ напрямлений вздовж осі $O_1\xi$ вниз.

Переносне прискорення: $a_e^n = \omega_e^2 \cdot a$ (нормальне коріолісове прискорення напрямлено вздовж MK).

$a_e^n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot a;\quad a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot a = 0,$ так як $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0.$

Прискорення Коріоліса $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) = 0,$ так як $\bar{v}_r = 0$ і $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$.

Абсолютне прискорення $a_a = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_r)^2},$ так як $\bar{a}_r \perp \bar{a}_e^n$.

$a_a = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{4}a\right)^2} = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ м/с^2.

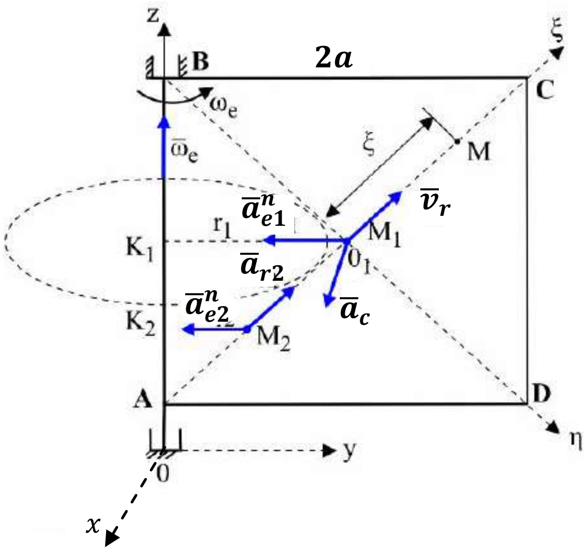
Відповідь: $a_a = \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\pi^2}{4}a\right)^2} = \frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ м/с^2.

Задача 23.29

Дано:
$\xi = a \cdot cos\frac{\pi}{2}t$, м;
$\omega_e = \pi\sqrt{2}$ рад/с;
$2a$ - сторона квадрата, м.

Визначити: a_a–? при $t_1 = 1c$ і $t_2 = 2c$.

Квадратна пластина обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_e = \pi\sqrt{2}$ рад/с, кутове прискорення $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0$. Вектор $\overline{\omega}_e$ лежить на осі Oz, спрямований вгору. Рухома система координат $\xi O_1 \eta$ обертається разом з квадратом. За діагоналлю з т. O_1, точка здійснює відносний рух за законом $\xi = f(t)$.



Визначимо положення точки на діагоналі при t_1 і t_2:
при t_1 $\xi_1 = a \cdot cos\frac{\pi}{2}1 = 0$; точка M_1 знаходиться в точці O_1.

при $t_1 = 2\ c$

$\xi_2 = a \cdot cos\frac{\pi}{2}2 = -a; O_1M_2 = -a.$

Відстань від точок M_1і M_2 до осі z:

$(AM_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2)}$

$r_1 = K_1M_1 = \frac{2a}{2} = a;\ r_2 = K_2M_2 = (AM_1 - O_1M_2)\sin 45\,° =$

$= \left(a\sqrt{2} - a\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}293a.$

Швидкість та прискорення **відносного руху**

$v_r = \dot{\xi} = -\frac{a\pi}{2}\ \ \sin\frac{\pi}{2}t;$

$a_r = \ddot{\xi} = \dot{v_r} = -\frac{a\pi^2}{4} \cdot cos\frac{\pi}{2}t;$

<u>При $t_1 = 1$ с</u>

$v_{r1} = -\frac{a\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{a\pi}{2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

$a_{r1} = -\frac{a\pi^2}{4} \cdot cos\frac{\pi}{2}1 = 0$

<u>При $t_2 = 2$ с</u>

$v_{r2} = -\frac{a\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} \cdot 2 = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

$a_{r2} = -\frac{a\pi^2}{4} \cdot cos\frac{\pi}{2}2 = \frac{a\pi^2}{4}.$

Переносний рух точки по колам з радіусами r_1 і r_2 навколо осі z:

$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau;\ \ a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot r = 0;$

$a_e = a_e^n = \omega_e^2 \cdot r.$

При $t_1 = 1\ c$ $\quad a_{e1}^n = \omega_e^2 \cdot r_1 = (\pi\sqrt{2})^2 \cdot a = 2\pi^2a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

При $t_2 = 2\ c$ $\quad a_{e2}^n = \omega_e^2 \cdot r_2 = (\pi\sqrt{2})^2 \cdot 0{,}293a = 0{,}586\pi^2a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Прискорення Коріоліса $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r)$;

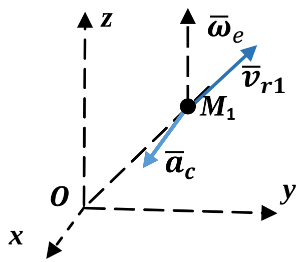
$a_c = 2\omega_e v_r \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r})$.

При $t_1 = 1\ c \quad a_{c1} = 2\omega_e \cdot r_1 \cdot sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{v}_r}) =$

$= 2\pi\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\pi a}{2}\right) sin135° = 2\pi\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\pi a}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi^2 a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

При $t_2 = 2\ c \quad \bar{a}_{c2} = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_{r2}) = 0, \quad v_{r2} = 0$.

$\bar{a}_{c1}$ напрямлений до нас перпендикулярно площині $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_{r1})$, прикладений в т. M_1. $\bar{a}_{c1} \parallel O$x .



Абсолютне прискорення точки при переносному обертальному русі

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (1)$$

При $t_1 = 1\ c$ в т. M_1, існує два прискорення: $\bar{a}_e^n$ і $\bar{a}_{c1}$. Вони перпендикулярні $\bar{a}_e^n \perp \bar{a}_{c1}$, тому модуль абсолютного прискорення $a_{a1} = \sqrt{(a_{e1}^n)^2 + (a_{c1})^2} = \sqrt{(2\pi^2 a)^2 + (\pi^2 a)^2} =$ $= \pi^2 a\sqrt{5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

При $t_2 = 2\ c$ в т. M_2, існує два прискорення: $\bar{a}_{r2}$ і $\bar{a}_{e2} = \bar{a}_{e2}^n$. Кут між ними 135° (див. рис.).

Для визначення модуля $\bar{a}_{a2}$ спроектуємо (1) на осі z і y

$a_{a2y} = a_{r2}cos45° - a_{e2}^n = \frac{a\pi^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}586a\pi^2 = -0{,}4a\pi^2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

$$a_{a2z} = a_{r2}cos45° = \frac{a\pi^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}177a\pi^2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Модуль абсолютного прискорення

$$a_{a2} = \sqrt{(a_{a2z})^2 + \left(a_{a2y}\right)^2} = 0{,}44a\pi^2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь:

$$a_{a1} = \pi^2 a\sqrt{5}\ \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\, a_{a2} = 0{,}44a\pi^2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Задача 23.30

Дано:

$\omega_e = 5$ рад/с;

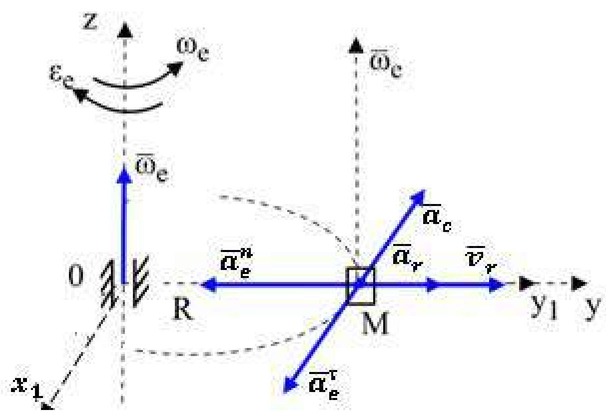
$\varepsilon_e = 10\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$;

$OM = R = 0{,}6$ м;

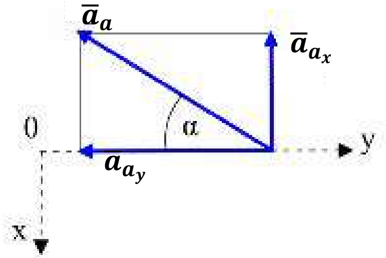
$v_r = 1{,}2\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$;

$a_r = 0{,}9\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Визначити: $a_a -?\ \alpha -?\ \ \alpha -$кут між OM і $\bar{a}_a$.



$xyzO$ – нерухома система координат.
x_1Oy_1 - рухома система координат, яка обертається навколо осі z.
Відносний рух – шайба M рухається поступально по осі Oy_1.
Переносний рух – обертання т. M разом зі стержнем OA навколо осі Oz.
Абсолютне прискорення т. M: $\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c$, (1)
Переносне прискорення т. M: $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$, де
$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R = 5^2 \cdot 0{,}6 = 15$ м/с^2;
$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ м/с^2.
Напрями вказані на рисунку.
Прискорення Коріоліса $a_c = 2\omega_e v_r = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}2 = 12$ м/с^2 – напрямлений паралельно осі Ox, перпендикулярно площині креслення, від нас.
Для визначення a_a спроецюємо (1) на осі x та y:



$a_{ax} = -a_c + a_e^\tau = -12 + 6 = -6$ м/с^2;
$a_{ay} = a_r - a_e^n = 0{,}9 - 15 = -14{,}1$ м/с^2;
Модуль $a_a = \sqrt{(a_{ax})^2 + \left(a_{ay}\right)^2} == \sqrt{6^2 + 14{,}1^2} = 15{,}32$ м/с^2.
Кут α між OM і $\bar{a}_a$

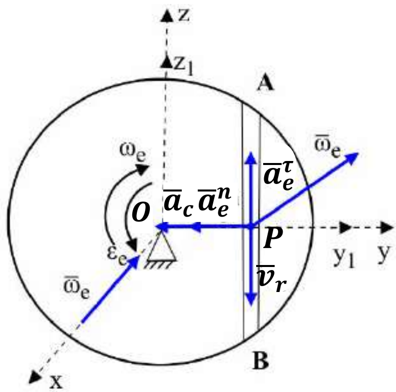
$$tg\alpha = \frac{a_{ax}}{a_{ay}} = 0{,}4255;\ \alpha = 23°.$$

Відповідь: $a_a = 15{,}32\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \alpha = 23°$.

Задача 23.36

Дано:
$h = 0{,}3$ м $= OP$ (найкоротша відстань від O до AB) ;
$\omega_e = 3$ с$^{-1}$;
$\varepsilon_e = 8$ с$^{-2}$; (сповільнення)
$v_r = 1{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = const.$

Визначити: a_a—?



Диск обертається відносно осі Ox - нерухомої системи координат xyz з переносними ω_e і ε_e. Вектор $\bar{\omega}_e$ напрямлений вздовж осі Ox від нас. Рухома система координат y_1Oz_1 обертається разом з диском. Точка P переміщується по AB з відносною швидкістю $v_r = const$. Абсолютне прискорення т. P

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (1)$$

Відносне прискорення $a_r = \frac{dv_r}{dt} = 0$ $(v_r = const)$.

Складові переносного прискорення:

$a_e^n = {\omega_e}^2 \cdot h = 3^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}7\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Прискорення Коріоліса:

$a_c = 2\omega_e v_r sin90° = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}2 \cdot 1 = 7{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – вектор $\bar{a}_c$ лежить на осі Oy; $\bar{a}_c \perp \bar{v}_r$ і $\bar{\omega}_e$, $\bar{a}_c$ напрямлений від P до O.

<u>Модуль абсолютного прискорення:</u>

$$a_a = \sqrt{(a_e^\tau)^2 + (a_e^n + a_c)^2} = \sqrt{2{,}4^2 + (2{,}7 + 7{,}2)^2} =$$
$$= \sqrt{5{,}76 + 98{,}01^2} = \sqrt{103{,}77} = 10{,}18\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $a_a = 10{,}18\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 23.45

Дано:

$v_r = 2\frac{\text{м}}{\text{с}} = const -$ відносна швидкість точки по ободу диска;

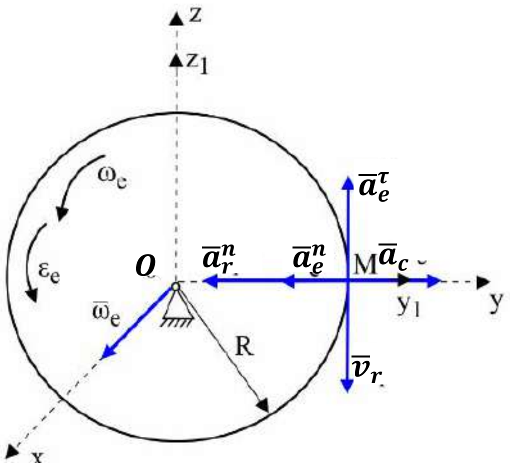
$d = 4$ м; ($R = 2$ м);

$\left.\begin{array}{l} \omega_e = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}; \\ \varepsilon_e = 4\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \end{array}\right\}$

- обертання самого диска відносно осі Ox (переносний рух).

Визначити: $a_a -? \; \alpha -?$

α – кут між $\bar{a}_a$ і R .



Нерухома система координат xyz. Диск в площині yz обертається навколо осі Ox. Разом з ним обертається рухома система координат z_1Oy_1. Відносно неї по ободу переміщується т. M зі швидкістю $v_r = const$. Точка M у відносному русі рухається по колу. Вектор $\bar{\omega}_e$ переносного руху лежить на осі ox.

Абсолютне прискорення т. M:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c, \qquad (1)$$

Відносне прискорення:

$$a_r^n = \frac{{v_r}^2}{R} = \frac{2^2}{2} = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

напрямлено від M до O.

$a_r^\tau = \dot{v}_r = 0$, так як $v_r = const$.

Переносне прискорення т. M:

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R = 2^2 \cdot 2 = 8$ м/с^2; напрямлене від M до O.

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R = 4 \cdot 2 = 8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, напрямлене по дотичній в т. M.

Коріолісове прискорення:

$a_c = 2\omega_e v_r \cdot \sin 90° = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ м/с^2 – вектор $\bar{a}_c$ напрямлений паралельно осі Oy вправо $\bar{a}_c \perp \bar{\omega}_e$, $\bar{a}_c \perp \bar{v}_r$.

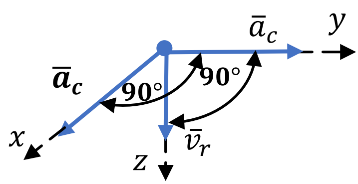
Усі вектори лежать в площині yz.

Напишемо проекції рівняння (1) на осі y та z:

$$a_{az} = a_e^\tau = 8\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_{ay} = -a_r^n - a_e^n + a_c =$$

$$= -2 - 8 + 8 = -2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

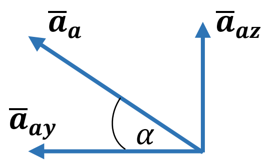


Модуль $a_a = \sqrt{(a_{az})^2 + \left(a_{ay}\right)^2} =$

$= \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}24$ м/с^2.

Кут α між OM і $\bar{a}_a$

$$tg\alpha = \frac{a_{az}}{a_{ay}} = \frac{8}{2} = 4;\ \alpha = 76°.$$



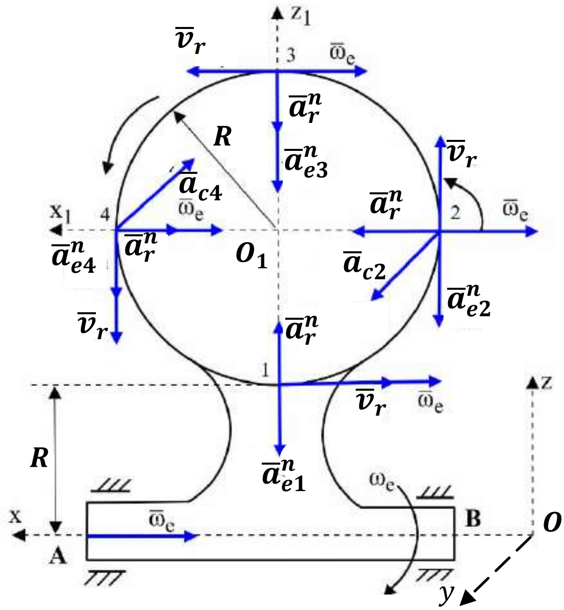
Відповідь: $a_a = 8{,}24\frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \alpha = 76°$.

Задача 23.47

Дано:

$\omega_e = \omega$;
$u = v_r = const$ – відносна швидкість частинок рідини (точки) по кільцю (напрям вказаний на рисунку);
R- радіус кільця;
$\omega_e = const$ – кутова швидкість кільця в обертанні навколо валу AB (напрям вказаний на рисунку);
R –відстань від осі AB до точки 1.

Визначити: a_a–? в положеннях 1, 2, 3, 4.



Нерухома система координат xyz. Весь пристрій обертається зі сталою переносною кутовою швидкістю ω_e. Вектор $\bar{\omega}_e$ напрямлений по осі вала AB (ось x).
Рухома система координат $x_1y_1z_1$ зв'язана з кільцем. Частки рідини переміщуються по кільцю з відносною швидкістю
$v_r = u = const$.
Абсолютне прискорення часток рідини в положеннях 1, 2, 3, 4 визначаємо за формулою:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (1)$$

<u>Відносне прискорення</u>:

$$a_r^n = \frac{{v_r}^2}{R} = \frac{u^2}{R} \ ,$$

для всіх точок вектор $\bar{a}_r^n$ напрямлений до центра кільця O_1 (див.рисунок); так як рух рідини по кільцю відбувається зі сталою відносною швидкістю $v_r = u = const$; $a_r^\tau = \dot{v}_r = 0$.

<u>Переносне прискорення:</u> $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$.

Тангенціальне переносне прискорення

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R = 0,$ так як $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0, \omega_e = const,$

для всіх шуканих положень.

Нормальне переносне прискорення: для т.1

$a_{e1}^n = {\omega_e}^2 \cdot h = \omega^2 R;$

для т. 2,4 $a_{e2}^n = {\omega_e}^2 \cdot 2R = \omega^2 2R = a_{e4}^n;$

для т. 3 $a_{e3}^n = {\omega_e}^2 \cdot 3R = \omega^2 \cdot 3R.$

<u>Коріолісове прискорення</u>:

для т.1 $a_{c1} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin 0° = 0,$ так як $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$;

для т.2 $a_{c2} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin 90° = 2\omega u,$ напрямлений $\parallel Oy$ до нас;

для т.3 $a_{c3} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin 180° = 0,$

для т.4 $a_{c4} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin 90° = 2\omega u,$ напрямлений $\parallel Oy$ від нас.

<u>Модуль абсолютного прискорення:</u>

Т.1: $a_{a1} = a_1 = |a_{e1}^n - a_r^n| = \left|\omega^2 R - \frac{u^2}{R}\right|, \frac{м}{с^2}$

Т. 2, 4: $a_{a2} = a_{a4} = a_2 = a_4 = \sqrt{(a_r^n)^2 + \left(a_{e2,4}^n\right)^2 + \left(a_{c2,4}\right)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{u^2}{R}\right)^2 + (2\omega^2 R)^2 + (2\omega u)^2}.$

Прискорення a_{a2} і a_{a4} рівні за модулем, але не однакові за напрямом. За напрямом вони є діагоналями паралелепіпедів, побудованих на векторах $\bar{a}_e^n$, $\bar{a}_r^n$ і $\bar{a}_c$ як на сторонах.

Модуль прискорення $a_{a3} = a_3 = a_{r3}^n + a_{e3}^n = \frac{u^2}{R} + 3\omega^2 R.$

P.S. в a_2, a_4 під коренем

$$\left(\frac{u^2}{R} + 2\omega^2 R\right)^2 - \text{ квадрат суми!!!}$$

Відповідь:

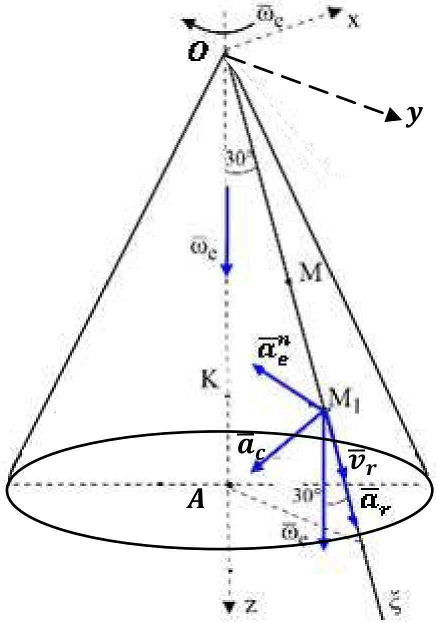
$$a_1 = \omega^2 R - \frac{u^2}{R}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$a_2 = a_4 = \sqrt{(a_r^n)^2 + \left(a_{e2,4}^n\right)^2 + \left(a_{c2,4}\right)^2} = \frac{u^2}{R} + 2\omega^2 R;$$

$$a_3 = \frac{u^2}{R} + 3\omega^2 R.$$

Задача 23.50

Дано:



Круговий конус з кутом $\angle MOA =$
$= \alpha = 30°$;
$v_r = 0$; $\omega_e = 1\ \text{с}^{-1}$;
$a_r = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = const$;
При $t = 0$ $OM = a =$ 15 м.

Визначити: $a_a -?$ при $t = 1$ с.

Нерухома система координат xyz. Навколо осі Oz конус обертається з <u>постійною кутовою швидкістю</u> ω_e (переносний рух). Вектор $\overline{\omega}_e$ – лежить на осі z, напрямлений вниз. Рухома ось $O\xi$ обертається разом з конусом.

Відносне прискорення т. M $a_r = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = const$.

Абсолютне прискорення т. M:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_c. \qquad (1)$$

При $t = 0$ точка знаходилася в положенні M, за час $t = 1$ с точка пройшла шлях

$$S = MM_1 = \frac{a_r t^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

$OM_1 = OM + S = 15 + 5 = 20$ м.

Відносна швидкість точки при $t = 1$ с

$v_r = a_r \cdot t = 10 \cdot 1 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ (в положенні M_1).

Відстань $h = KM_1 = OM_1 \cdot \sin 30° = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ м.

1) Переносне прискорення

$a_e^n = {\omega_e}^2 \cdot h = 1^2 \cdot 10 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, –напрямлено до осі z по KM_1;

$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h = 0\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, так як $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 0, \omega_e = const$.

2) Коріолісове прискорення:

$a_\text{с} = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin 30° = 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ($\bar{a}_\text{с} \parallel$ осі x).

3) Для визначення a_a визначимо проекції рівняння (1) на осі $x, y,\ z$.

$a_{ax} = -a_\text{с} = -10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

$a_{ay} = a_r \cdot \sin 30° - a_e^n = 10 \cdot 0{,}5 - 10 = -5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

$a_{az} = a_r \cdot \cos 30° = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Модуль $a_a = \sqrt{(a_{ax})^2 + \left(a_{ay}\right)^2 + (a_{az})^2} =$

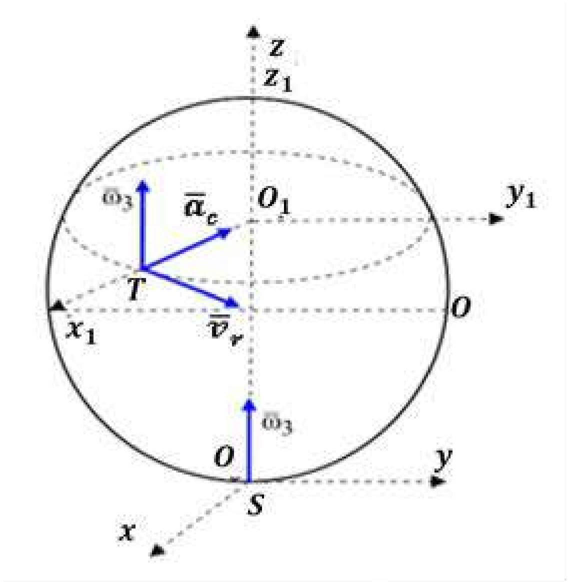
$= \sqrt{100 + 25 + 75} = \sqrt{200} = 14{,}14\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $a_a = 14{,}14\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 23.54

Дано:

$v_r = 20\frac{\text{м}}{\text{с}} -$ швидкість тепловоза вздовж паралелі північної широти (напрям захід-схід).



Визначити: $a_c -$? прискорення Коріоліса.

Умови нерухомої системи координат xyz (z – ось Землі, вздовж неї напрямлений вектор кутової швидкості Землі

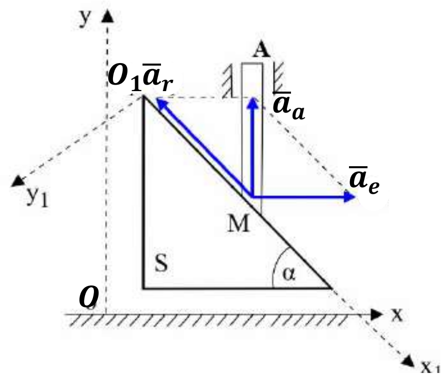
$$\omega_з = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-1}.$$

Рухома система координат, пов'язана із Землею - $x_1 y_1 z_1$.
Відносний рух – рух тепловоза по меридіану зі швидкістю v_r.
Переносний рух – обертання Землі з кутовою швидкістю $\omega_з$.
Прискорення Коріоліса:

$a_c = 2\omega_з \cdot v_r \cdot sin90° =$
$= 2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 1 = 2{,}91 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.
Напрямлено $\bar{a}_c$ вздовж радіуса TO_1.
Відповідь: $a_c = 2{,}91 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Задача 23.71

Дано:



$a_e = a_0 = const$.
Гладка поверхня під кутом α.

Визначити: a_a–?

Переносний рух - поступальний рух клина S вздовж осі Ox- нерухомої системи координат xOy.
Відносний рух - рух т. M кінця стержня AM вздовж осі O_1x_1- рухомої системи координат $x_1O_1y_1$ з прискоренням $\bar{a}_r$. Так як переносний рух поступальний $\omega_e = 0$, то прискорення Коріоліса $\bar{a}_c = 0$.
Абсолютне прискорення точки M (і всього стержня AM):

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e, \qquad (1)$$

Складемо вирази проекцій рівняння (1) на осі x і y:
на ось x: $0 = a_e - a_r \cos\alpha$; $a_r = \frac{a_e}{\cos\alpha}$;
на ось y: $a_a = a_r \sin\alpha = \frac{a_e}{\cos\alpha}\sin\alpha = a_e tg\alpha = a_0 tg\alpha$,
де $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Відповідь: $a_a = a_0 tg\alpha$.

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток

5. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Складний рух твердого тіла відбувається тоді, коли тіло рухається в системі координат $O_1x_1y_1z_1$, яка здійснює рух в нерухомій системі координат $Oxyz$.

Рух тіла **відносно нерухомої** системи координат називається **абсолютним рухом**.

Рух тіла **відносно рухомої** системи координат називається **відносним рухом**.

Рух **рухомої системи** координат (разом з тілом) **відносно нерухомої системи координат** називається **переносним рухом**.

А) Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей.

При додаванні обертань твердого тіла, які відбуваються навколо паралельних осей, мають місце три випадки:

1. Переносна $\overline{\omega}_e$ та відносна $\overline{\omega}_r$ **кутові швидкості мають однаковий напрям.**

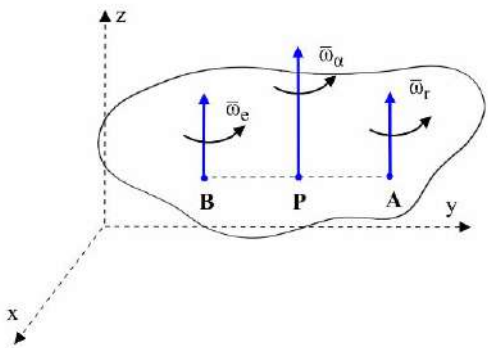


Рисунок 5.1

В даному випадку значення **абсолютної кутової швидкості** дорівнює сумі модулей додаваємих кутових швидкостей і напрямлена в ту ж сторону (Рис.5.1).

Абсолютний миттєвий центр обертання P поділяє відстань між $\overline{\omega}_e$ та $\overline{\omega}_r$ (точками B і A) на частини зворотно пропорційні величинам ω_r та ω_e:

$$\omega_a = \omega_e + \omega_r; \quad \frac{BP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \qquad (5.1)$$

2. Переносна $\overline{\omega}_e$ та відносна $\overline{\omega}_r$ **кутові швидкості напрямлені в різні сторони** (Рис. 5.2) (для визначеності $\omega_r > \omega_e$).

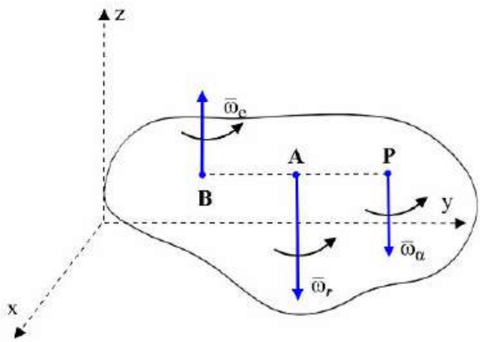


Рисунок 5.2

В даному випадку величина абсолютної кутової швидкості ω_a дорівнює модулю різниці між ω_r і ω_e, лежить зовні відрізка AB з боку більшої кутової швидкості і напрямлена в сторону більшої кутової швидкості. Абсолютний миттєвий центр обертання P поділяє відстань між $\overline{\omega}_e$ та $\overline{\omega}_r$ на частини зворотньо пропорційні значенням ω_r і ω_e:

$$\omega_a = |\omega_r - \omega_e|; \quad \frac{BP}{AP} = \frac{\omega_r}{\omega_e}. \qquad (5.2)$$

3. Переносна та відносна **кутові швидкості рівні за модулем та напрямлені в різні сторони** $\omega_e = -\omega_r$ (Рис. 5.3).

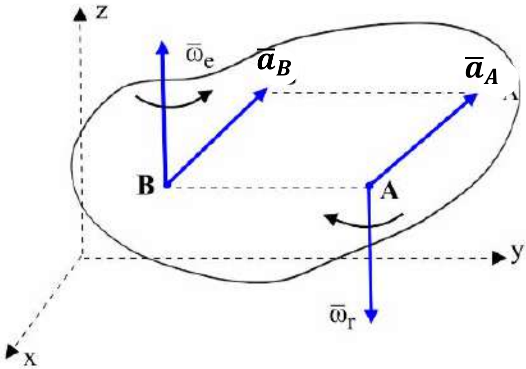


Рисунок 5.3

В даному випадку абсолютна кутова швидкість $\omega_a = 0$, тіло здійснює поступальний рух, швидкості всіх точок однакові та напрямлені перпендикулярно до AB , їх модуль

$$v_A = v_B = v = \omega_e \cdot BA = \omega_r \cdot AB \quad . \tag{5.3}$$

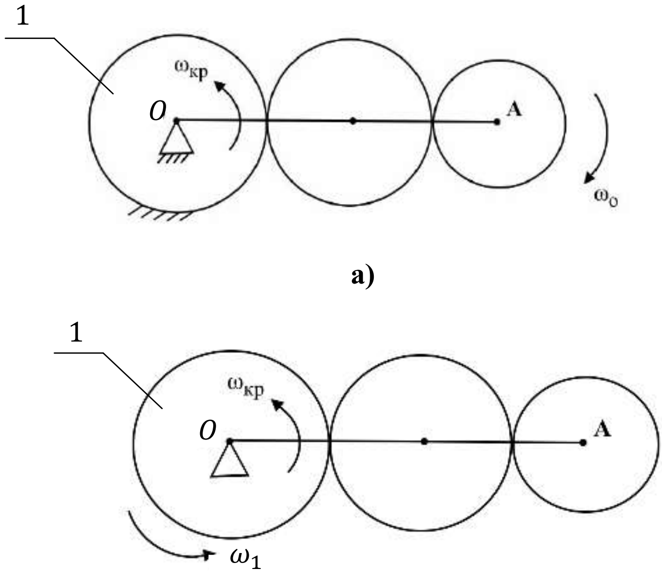
P.S.: Таку сукупність обертальних рухів називають **парою обертання**; вектори $\overline{\omega}_e$ та $\overline{\omega}_r$ утворюють пару кутових швидкостей. Швидкість $\overline{v}$ поступального руху дорівнює моменту пари кутових швидкостей.

В) Планетарні і диференціальні механізми. Метод Вілліса.

Планетарними і диференціальними механізмами (передачами) називають механізми, які мають у своєму складі зубчасті колеса з рухомими осями. Ці механізми складаються з трьох груп елементів (ланок): центральних коліс, сателітів (колеса з рухомими осями) і кривошипа (водила).

Планетарна передача – сателітний механізм (Рис. 5.4, а), в якому центральне колесо 1 нерухомо, а сателіти обертаються водилом OA навколо осі центрального колеса.

Диференціальна передача – це планетарна передача, в якій центральне колесо теж обертається (Рис. 5.4, б).



б)

Рисунок 5.4

Кінематичний розрахунок таких передач виконують за допомогою миттєвих центрів швидкостей або **способом уявної зупинки кривошипа (способом Вілліса)**. Цей спосіб полягає у тому, що умовно зупиняють рух кривошипа OA. Для цього всьому механізму надається обертальний рух навколо осі O з кутовою швидкістю $\omega_O = -\omega_{кр}$. Тоді кривошип і осі, закріплених на ньому коліс стануть нерухомими ($\omega_{кр} - \omega_O = 0$), а механізм стає звичайним зубчастим механізмом з нерухомими осями, який називають **оберненим механізмом**.

Кутові швидкості всіх коліс (рухомих) відносно водила дорівнюють $\omega_{ir} = \omega_i - \omega_o$, де ω_{ir} – відносна кутова швидкість і-го колеса відносно водила; ω_i – абсолютна кутова швидкість і-го колеса; ω_o – кутова швидкість водила.

Знаючи кутові швидкості коліс для звичайної передачі запишемо:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_o}{\omega_2 - \omega_o} = (-1)^k \frac{r_2}{r_1};\ \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = \frac{\omega_2 - \omega_o}{\omega_3 - \omega_o} = (-1)^k \frac{r_3}{r_2}\ , (5.4)$$

де k – число зовнішніх зачеплень.

Записав вирази (5.4) для всіх пар коліс, які знаходяться в зачепленні, та перемноживши рівняння, складених для кожної пари коліс, знайдемо кутову швидкість крайнього колеса (значення ω_{ir} проміжних коліс скорочуються).

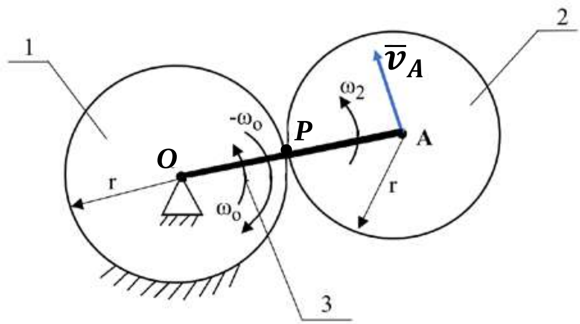
5.1 Планетарні і диференціальні механізми. Метод Вілліса

Задача 24.2

Дано:

$r_2 = r_1 = r$;
$\omega_3 = \omega_{OA} = \omega_0$;
$\omega_1 = 0$.

Визначити:
$\omega_2 -?; \omega_{2r} -?$;



1) Рішення за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Швидкість точки A кривошипа OA:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2\omega_0 \cdot r\ \ (\bar{v}_A \perp\ OA).$$

Точка A також належить колесу 2, яке обертається навколо миттєвого центра швидкостей P з абсолютною кутовою швидкістю

$$\omega_2 = \frac{v_A}{PA} = \frac{2\omega_0 \cdot r}{r} = 2\omega_0.$$

Абсолютна кутова швидкість ω_2 колеса 2 дорівнює сумі відносної швидкості ω_{2r} обертання відносно водила OA і переносної кутової швидкості ω_0 водила відносно центра O:
$\omega_2 = \omega_{2r} + \omega_0$.

Звідки $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0 = 2\omega_0 - \omega_0 = \omega_0$.

2) Рішення за допомогою метода Вілліса.

Задаємо всьому механізму обертальний рух навколо осі O, кутова швидкість якого дорівнює кутовій швидкості водила OA, але напрямлений в протилежний бік ($\omega_{OA} = -\omega_0$). Тоді планетарний механізм перетворюється в механізм з нерухомими осями (рядовий зубчастий механізм), тобто
$\omega_{3r} = \omega_{OA} - \omega_0 =$
$= \omega_0 - \omega_0 = 0$, а кутові швидкості рухомих ланок відносно водила OA – відносні кутові швидкості рухомих ланок дорівнюють:
$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$,
де $\omega_1, \omega_2, \omega_3 -$ абсолютні кутові швидкості коліс 1, 2 та кривошипа OA.
В даному випадку $\omega_1 = 0$.
Запишемо вирази (5.4) для даного механізму:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{\omega_1 - \omega_o}{\omega_2 - \omega_o} = (-1)^k \frac{r_2}{r_1} = -1 \rightarrow \omega_1 - \omega_o = -(\omega_2 - \omega_o).$$

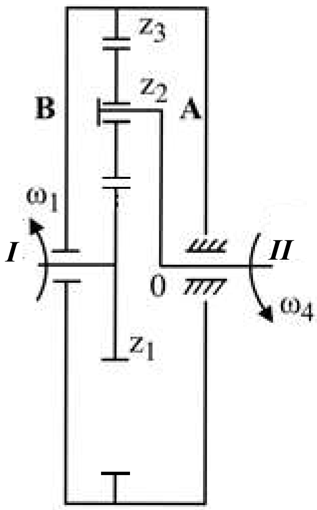
$k = 1 -$ одне зовнішне зачеплення.
Звідси: $\omega_2 = 2\omega_0$.
Відносна кутова швидкість колеса 2:
$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_o = 2\omega_0 - \omega_o = \omega_{o.}$
Відповідь: $\omega_2 = 2\omega_0, \omega_{2r} = \omega_{o.}$

Задача 24.6

Дано:

$z_1 = 20$ зубців;
$z_2 = 25$ зубців;
$z_3 = 70$ зубців;
$n_1 = 4500$ об/хв.

Визначити: $n_2-?, n_4-?$



Редуктор швидкостей з вхідним валом I робить 4500 об/хв, на нього насаджена шестерня 1 (число зубців z_1). Кутова швидкість $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}$. Шестерня-сателіт 2 (число зубців z_2) вільно насаджена на ось AB водила OB. Шестерня 2 знаходиться во внутрішньому зачепленні з шестернею 3 (число зубців z_3). Визначити число обертів валу II з водилом $\omega_{\text{II}} = \omega_4$.

1) <u>Метод Вілліса</u>.

Задаємо всьому редуктору обертальний рух навколо валу II з кутовою швидкістю водила OA, але напрямлений в протилежний бік ($\omega_{OA} = -\omega_4$).

Відносні кутові швидкості:

$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_4$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_4$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_4$,

де $\omega_1, \omega_2, -$ абсолютні кутові швидкості шестерень 1, 2 , $\omega_3 = 0$;

$\omega_4 -$ вала II з водилом OA. Запишемо вираз (5.4) для всього редуктора:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^{k_1}\frac{z_2}{z_1};\ \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = (-1)^{k_2}\frac{z_3}{z_2};\ k_1 = 1;\ k_2 = 0. \qquad \text{(A)}$$

Перемножимо ліві та праві частини цих рівнянь (А):

$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} \cdot \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)$, звідси $\omega_{1r} = -\omega_{3r}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) \rightarrow$

$\omega_1 - \omega_4 = -\frac{z_3}{z_1}(\omega_3 - \omega_4), \omega_3 = 0.$

Звідси визначаємо

$$\omega_4 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{\omega_1}{4{,}5}.$$

Підставимо замість ω число обертів n :

$n_4 = \frac{n_1}{4{,}5} = \frac{4500}{4{,}5} = 1000$ об/хв.

Кутову швидкість сателіта 2 визначимо з першої рівності (А).

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{z_2}{z_1};\ \omega_1 - \omega_4 = -(\omega_2 - \omega_4)\frac{z_2}{z_1}.$$

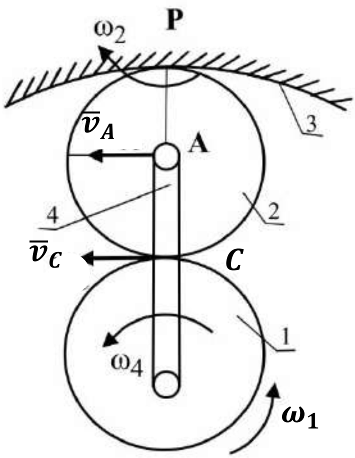
Підставимо n_i замість ω_i:

$$n_1 - n_4 = -(n_2 - n_4)\frac{25}{20} \rightarrow 4500 - 1000 = -(n_2 - 1000)\frac{25}{20};$$

$\rightarrow n_2 = -1800$ об/хв.

2) <u>Метод миттєвого центра швидкостей</u>

За заданою кутовою швидкістю $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}$ ведучого валу та шестерні 1 визначимо швидкість точки торкання C шестерень 1 і 2: $v_C = \omega_1 \cdot r_1$.



Друге колесо котиться по нерухомому третьому без ковзання. Точка P - миттєвий центр швидкостей колеса 2. Кутова швидкість

$\omega_2 = \frac{v_C}{2r_2} = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{2r_2}$ або $n_2 = \frac{n_1 \cdot r_1}{2r_2}$,

$(\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60})$.

З урахуванням пропорційності радіусів r_1 і r_2 з чисельністю зубців z_1 і z_2

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot z_1}{2z_2} = \frac{4500 \cdot 20}{2 \cdot 25} = 1800 \text{ об/хв.}$$

Швидкість точки *A* (центр колеса 2 і початок кривошипу *OA*) $v_A = \omega_2 \cdot z_2$. Тоді кутова швидкість кривошипа *OA* (ω_4) і вала II (ω_{II}) дорівнюють

$$\omega_4 = \omega_{\text{II}} = \frac{v_A}{\text{O}A} = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{r_2 + r_1},$$

або

$$n_4 = \frac{n_2 \cdot z_2}{z_1 + z_2} = \frac{1800 \cdot 25}{20 + 25} = 1000 \text{ об/хв.}$$

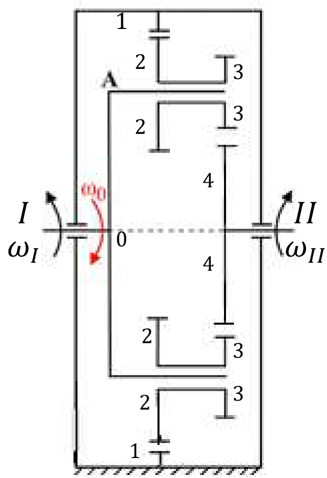
P.S. Кутові швидкості ω_2 і ω_1 напрямлені в різні сторони (зовнішнє зчеплення), тому $n_2 = -1800$ об/хв.

Відповідь:
$n_4 = 1000$ об/хв, $n_2 = -1800$ об/хв.

Задача 24.7

Дано:

$n_0 = n_I = 1200$ об/хв;
$\omega_2 = \omega_3; \omega_1 = 0$;
$z_1 = 180; z_2 = 60;$
$z_3 = 40$; $z_4 = 80$;
z - кількість зубців.



Визначити: $\omega_{II} = \omega_4 -? \; n_{II} = n_4 -?$
Вал I з водилом *OA* обертається з n_I об/хв.

$$\left(\omega_I = \omega_0 = \frac{2\pi n_I}{60}\right).$$

Задамо редуктору обертання з кутовою швидкістю $(-\omega_0)$. Відносні кутові швидкості усіх шестерень редуктора:

$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$;

$\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$,

де $\omega_1 = 0, \omega_2$, ω_3, ω_4 $-$абсолютні кутові швидкості шестерень 2, 3,4.

Запишемо вираз (5.4) для всього редуктора:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^0 \frac{r_2}{r_1}; \text{(зовнішнього зачеплення немає)}; \quad (1)$$

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = (-1)^1 \frac{r_4}{r_3}; \text{ (одне зовнішне зачеплення)}. \quad (2)$$

Перемножимо (1) на (2) з урахуванням, що $\omega_{2r} = \omega_{3r}, \omega_1 = 0$:

$$\frac{\omega_{1r}}{\cancel{\omega_{2r}}} \cdot \frac{\cancel{\omega_{3r}}}{\omega_{4r}} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} \rightarrow \frac{\omega_{1r}}{\omega_{4r}} = -\frac{r_2}{r_1}\frac{r_4}{r_3} \rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_4 - \omega_0} = -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \rightarrow$$

$\omega_0 = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \cdot (\omega_4 - \omega_0)$ $\rightarrow$замінимо кутові швидкості на кількість обертів n_i, а радіуси на кількість зубців z_i, отримаємо:

$$n_0 = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \cdot (n_4 - n_0) \rightarrow 1200 = \frac{60 \cdot 80}{180 \cdot 40} \cdot (n_4 - 1200);$$

$n_4 = 3000$ об/хв.

Відповідь: $n_4 = n_{II} = 3000$ об/хв.

Задача 24.8

Дано:

$r_1 = 40$ см;

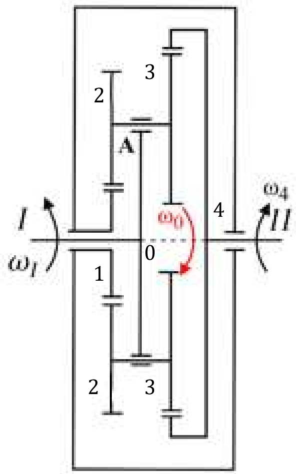
$r_2 = 20$ см;

$r_3 = 30$ см;

$r_4 = 90$ см;

$n_I = 1800$ об/хв $= n_0$.

Визначити: $n_{II} = n_4 -?$



Вал I з водилом OA обертається з n_I об/хв $\left(\omega_I = \omega_0 = \frac{2\pi n_1}{60}\right)$.
Задамо редуктору обертання навколо вала I з кутовою швидкістю $(-\omega_0)$. Відносні кутові швидкості усіх шестерень редуктора, :

$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$;

$\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$, де $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – абсолютні кутові швидкості шестерень 2, 3, 4.

Запишемо вираз (5.4) для всього редуктора:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^1 \frac{r_2}{r_1}; \text{(одне зовнішне зачеплення);} \qquad (1)$$

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = (-1)^0 \frac{r_4}{r_3}; \ \text{(зовнішнього зачеплення немає).} \qquad (2)$$

Перемножимо (1) на (2) з урахуванням, що $\omega_{2r} = \omega_{3r}, \omega_1 = 0$:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} \cdot \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \to \omega_0 = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \cdot (\omega_4 - \omega_0).$$

Замінив кутові швидкості ω_i на кількість обертів n_i, отримаємо:

$$n_0 = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \cdot (n_4 - n_0) \to 1800 = \frac{20 \cdot 90}{40 \cdot 30} \cdot (n_4 - 1800) \to$$

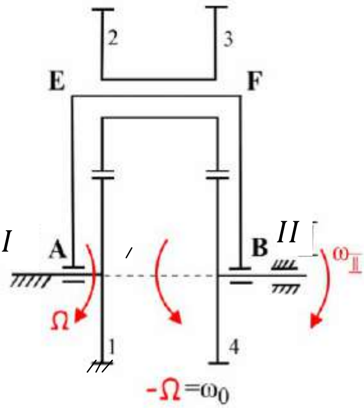
$$1800 = \frac{3}{2}(n_4 - 1800) \to 1200 = n_4 - 1800;$$

$n_4 = 3000$ об/хв.

Відповідь: $n_4 = n_{II} = 3000$ об/хв.

Задача 24.9

Дано:
$\omega_0 = \Omega$,
$z_1 = 49$;
$z_2 = 50$;
$z_3 = 51$;
$z_4 = 50$.
Колесо 1 – нерухоме.



Визначити: $\omega_{II}/\Omega-?$
$\omega_0 = \Omega$ – кутова швидкість рамки $AEFB$.
$\omega_{II} = \omega_4$ - кутова швидкість вала *II* з колесом 4.
Визначимо відношення кутових швидкостей вала $\omega_4 = \omega_{II}$ та рамки $\omega_0 = \Omega$.
Задамо редуктору обертання з кутовою швидкістю рамки , але напрямлене в зворотній бік відносно осі *I-II* $(-\omega_0)$. Відносні кутові швидкості усіх шестерень редуктора:
$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$;
$\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$, де $\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega_3, \omega_{2r} = \omega_{3r}$, де
ω_1, $\omega_2 = \omega_3, \omega_4$ – абсолютні кутові швидкості шестерень 1, 2, 3, 4.
Запишемо вираз (5.4):

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^1 \frac{r_2}{r_1}; (\text{ одне зовнішне зачеплення}); \quad (1)$$

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = (-1)^1 \frac{r_4}{r_3}; \ (\text{ одне зовнішне зачеплення}). \quad (2)$$

Перемножимо (1) на (2) :

$$\frac{\omega_{1r}}{\cancel{\omega_{2r}}} \cdot \frac{\cancel{\omega_{3r}}}{\omega_{4r}} = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \to \frac{\omega_{1r}}{\omega_{4r}} = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \to \quad \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_4 - \omega_0} = \frac{50 \cdot 50}{49 \cdot 51} \to$$

$$\frac{-\omega_0}{\omega_4 - \omega_0} = \frac{2500}{2499}, \text{звідси } \frac{\omega_4}{\omega_0} = \frac{1}{2500}.$$

Відповідь:

$\frac{\omega_{II}}{\Omega} - \frac{1}{2500}.$

Задача 24.10

Дано:

$\omega_{\mathrm{I}} = \omega_0 = 120\ \mathrm{с}^{-1}$;

$\omega_1 = 180\ \mathrm{с}^{-1}$; -обертаються в один бік;

$z_1 = 80$;

$z_2 = 20$;

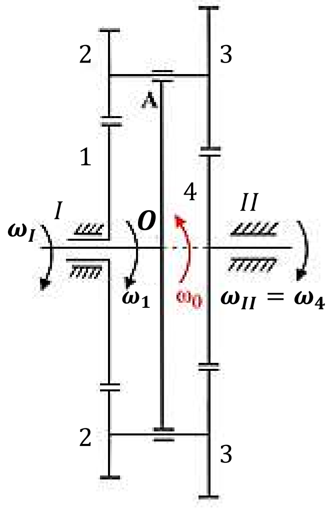
$z_3 = 40$;

$z_4 = 60$;

(z - кількість зубців).

Визначити: $\omega_4 = \omega_{II}$–?,

$\omega_2 = \omega_3 = \omega_{23}$–?



Водило OA обертається разом з валом I з кутовою швидкістю $\omega_{\mathrm{I}} = \omega_0$. Задамо всьому редуктору обертальний рух навколо осі *I-II* з кутовою швидкістю водила OA, але напрямленою в протилежний бік ($\omega_{0\mathrm{A}} = -\omega_0 = -\omega_{\mathrm{I}}$). Тоді <u>диференціальний механізм</u> перетворюється в рядовий механізм з нерухомими осями ($\omega_{0\mathrm{A}} = 0$) і відносні кутові швидкості будуть дорівнювати:

$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$;

$\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$, де ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 абсолютні кутові швидкості шестерень.

Запишемо вираз (5.4) для нашого редуктора:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^1 \frac{z_2}{z_1}; \text{(одне зовнішне зачеплення);} \qquad (1)$$

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = (-1)^1 \frac{z_4}{z_3}; \quad \text{(одне зовнішне зачеплення).} \qquad (2)$$

Перемножимо (1) на (2) з урахуванням, що ω_{2r}=ω_{3r}=ω_{23} :

$$\frac{\omega_{1r}}{\cancel{\omega_{2r}}} \cdot \frac{\cancel{\omega_{3r}}}{\omega_{4r}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \to \frac{\omega_{1r}}{\omega_{4r}} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \to$$

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \cdot (\omega_4 - \omega_0)$$

$$\omega_4 = \omega_0 + (\omega_1 - \omega_0) \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} =$$

$$= 120 + |(180 - 120) \frac{80 \cdot 40}{20 \cdot 60} = 280\ c^{-1}.$$

Визначимо $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{23}$:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{z_2}{z_1} \to \omega_2 = \omega_0 - (\omega_1 - \omega_0) \cdot \frac{z_1}{z_2} = -120\ \text{с}^{-1}.$$

$\omega_2 = \omega_3 = \omega_{23}$ − шестерні 2 і 3 насаджені на одну втулку.

Відповідь: $\omega_{\text{II}} = \omega_4 = 280\ \text{с}^{-1}$; $\omega_2 = -120\ \text{с}^{-1} = \omega_{23}$.

Задача 24.11

Дано:

$n_1 = 160$ об/хв; $n_{\text{I}} = n_0 = 1200$ об/хв ,

(I і 1 обертаються в різні сторони);

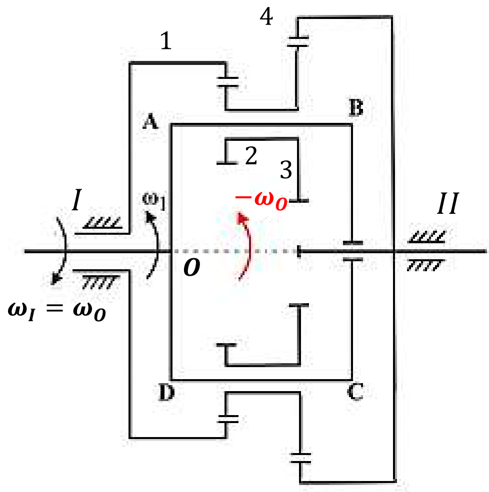
$z_1 = 70$;

$z_2 = 20$;

$z_3 = 30$;

$z_4 = 80$; зубців.

Визначити: $n_{II} = n_4$−?



Вал *I* разом з водилом *OA* (рамка *OABCD*) обертаються з кутовою швидкістю $\omega_{\mathrm{I}} = \omega_0$. Задамо всьому диференціальному редуктору обертальний рух навколо осі *I*-*II* з кутовою швидкістю водила *OA*, але напрямленою в протилежний бік ($\omega_{0\mathrm{A}} = -\omega_0 = \omega_{\mathrm{I}}$). Тоді диференціальний механізм перетворюється в рядовий механізм з нерухомими осями ($\omega_{0\mathrm{A}} = 0$) і відносні кутові швидкості будуть дорівнювати:

$\omega_{1r} = -\omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$; $\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$, де $\omega_1, \ldots, \omega_4$ абсолютні кутові швидкості шестерень.

Запишемо залежності між кутовими швидкостями зубчастих колес (5.4):

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = (-1)^0 \frac{z_2}{z_1} \text{(зовнішніх зачеплень немає);} \qquad (1)$$

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = (-1)^0 \frac{z_4}{z_3} \text{ (зовнішніх зачеплень немає).} \qquad (2)$$

Перемножимо (1) на (2) з урахуванням, що ω_{2r}=ω_{3r}=ω_{23} так як шестерні 2 і 3 насаджені на одну втулку:

$$\frac{\omega_{1r}}{\cancel{\omega_{2r}}}\cdot\frac{\cancel{\omega_{3r}}}{\omega_{4r}}=\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\rightarrow\quad \omega_4=\omega_0-(\omega_1+\omega_0)\cdot\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

Враховуючи, що

$$\omega_{\mathrm{i}}=\frac{2\pi n_{\mathrm{i}}}{60},\text{отримаємо:}$$

$$n_4=1200-(160+1200)\frac{70\cdot 30}{20\cdot 8}=-585\,\frac{\text{об}}{\text{хв}}=n_{II}.$$

Відповідь:

$n_{\text{II}}=n_4=-585\,\frac{\text{об}}{\text{хв}}$.

Задача 24.12

Дано:

$\omega_{\text{I}}=\omega_0=1200\ \frac{\text{об}}{\text{хв}}$,

$\omega_1=0\ \text{с}^{-1}$; (нерухома);

$z_1=30$;

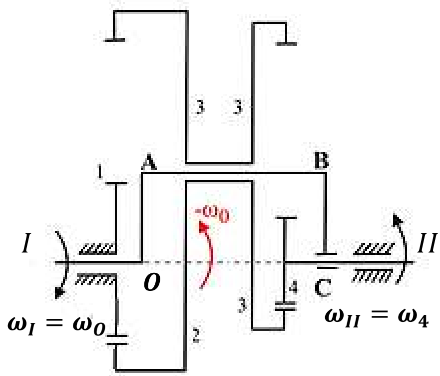
$z_2=80$;

$z_3=70$;

$z_4=20$;

z - кількість зубців.

Визначити: $n_{II}=n_4-?$



Редуктор має одну нерухому шестерню 1. Механізм планетарний. Вал *I* разом з водилом *OA* (рамка *OABC*) обертається з кутовою швидкістю $\omega_{\text{I}}=\omega_0$. Задамо валу планетарного механізму обертальний рух навколо осі

I-II з кутовою швидкістю водила *OA*, але спрямованою в протилежний бік ($\omega_{\mathrm{OA}} = -\omega_0$). Тоді планетарний механізм перетвориться в рядовий механізм з нерухомими осями і відносні кутові швидкості шестерень будуть дорівнювати: $\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0$; $\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0$; $\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0$; $\omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0$, де $\omega_1, \dots, \omega_4$ абсолютні кутові швидкості шестерень.

Запишемо залежності між кутовими швидкостями зубчастих колес (5.4):

$$\frac{\omega_{4r}}{\omega_{1r}} = (-1)^k \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}; \qquad (1)$$

($k = 0$, між $1 - 2$ та $3 - 4$ зовнішніх зачеплень немає);

$$\frac{\omega_4 - \omega_0}{\omega_1 - \omega_0} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \to \omega_4 = \omega_0 + (\omega_1 + \omega_0) \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4},$$

підставимо n_i замість ω_i

$$n_4 = 1200 + (0 - 1200) \frac{30 \cdot 70}{80 \cdot 20} = -375 \frac{\text{об}}{\text{хв}} = n_{II}.$$

Визначимо ω_3:

$$\frac{\omega_3 - \omega_0}{\omega_4 - \omega_0} = (-1)^0 \frac{z_4}{z_3} \to \omega_3 = \omega_0 + (\omega_4 - \omega_0) \cdot \frac{z_4}{z_3};$$

$$\omega_3 = n_3 \to n_3 = 1200 + (-375 - 1200) \quad \cdot \frac{20}{70} = 750 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

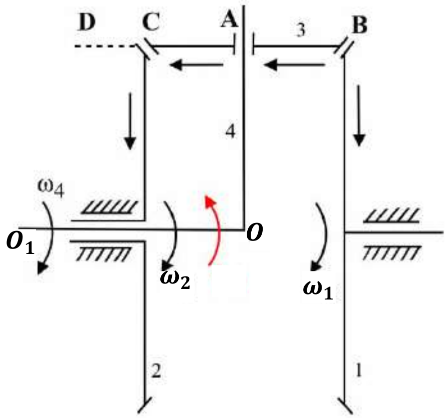
Відповідь:

$$n_{II} = -375 \frac{\text{об}}{\text{хв}}.$$

Задача 24.29

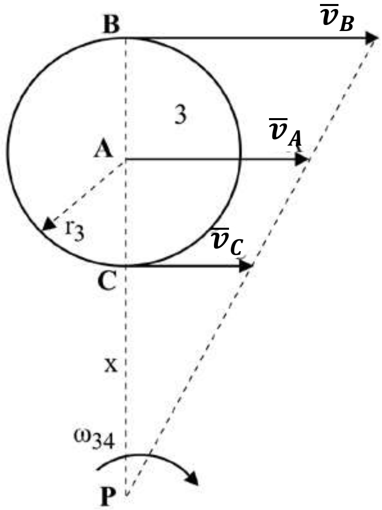
Дано:
$\omega_1 = 5\ \text{с}^{-1};\ \omega_2 = 3\ \text{с}^{-1}$,
ω_1 та ω_2 – мають однакові знаки;
$R_1 = R_2 = R = 7$ см;
$r_3 = 2$ см;

Визначити: $\omega_4 = \omega_0 - ?$
$v_A = ?$ ω_{34}- кутова швидкість сателіта 3 по відношенню до кривошипа OA.



Диференціальна передача складена з конічних колес. Увага! Для **механізмів з конічними колесами знак** передаточного співвідношення визначається за **правилом стрілок**: якщо стрілки, які визначають напрям обертання коліс напрямлені однаково, то знак буде «+», якщо протилежно – знак $\ll - \gg$.

1) Вирішуємо задачу способом МЦШ



Розглянемо рух сателіта 3 (див. рис.). Швидкості точок B і C в обертанні коліс 1 і 2:

$v_B = \omega_1 \cdot R;\quad v_C = \omega_2 \cdot R$.

МЦШ колеса 3 знаходиться в т. P $(CP = x)$.

З подібності трикутників знаходимо:

$$\frac{x}{v_C} = \frac{x + 2r_3}{v_B}, \text{звідси}$$

$$x = \frac{2r_3 \cdot \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 6\ \text{см}.$$

Відносна кутова швидкість сателіта 3 відносно кривошипа *OA* буде дорівнювати:

$$\omega_{34} = \frac{v_C}{x} = \frac{v_C}{CP} = \frac{\omega_2 \cdot R}{6} = \frac{3 \cdot 7}{6} = 3{,}5\ c^{-1}.$$

Швидкість т. *A*:

$v_A = (x + r_3) \cdot \omega_{34} =$

$= (6 + 2) \cdot 3{,}5 = 28$ см/с.

Кривошип *OA* обертається навколо осі *OO₁*, його кутова швидкість

$$\omega_4 = \frac{v_A}{OA} = \frac{v_A}{R} = \frac{28}{7} = 4\ \text{c}^{-1}.$$

2) Вирішуємо задачу способом Вілліса.

Задамо механізму обертання відносно осі OO_1 з кутовою швидкістю кривошипа ω_4, але з протилежним напрямом ($\omega_4 = -\omega_0$).

Відносні кутові швидкості коліс:

$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0;\ \ \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0;\ \ \omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0;$

де $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ абсолютні кутові швидкості коліс 1, 2, 3.

Запишемо залежності (5.4):

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{R_1};\ \ \frac{\omega_{3r}}{\omega_{2r}} = -\frac{R_2}{r_3}.$$

Перемножимо ці вирази та отримаємо:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{R_2}{R_1} = -1;\ \ \omega_{3r} = -\omega_{2r} \rightarrow$$

$$\omega_1 - \omega_0 = -(\omega_2 - \omega_0) \rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0,$$

звідки

$$\omega_0 = \omega_4 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{8}{2} = 4\ \text{c}^{-1}.$$

Відносна кутова швидкість колеса 3:

$$\frac{\omega_{3r}}{\omega_{2r}} = -\frac{R_2}{r_3} \rightarrow\ \ \omega_{3r} = -\omega_{2r}\frac{R_2}{r_3} = -(\omega_2 - \omega_0)\frac{7}{2} =$$

$$= -(3 - 4) \cdot 3{,}5 = 3{,}5\ \text{c}^{-1}.$$

Швидкість точки A (центр колеса 3) в обертанні навколо осі OO_1:

$$v_A = \omega_4 \cdot OA = \omega_4 \cdot R = 4 \cdot 7 = 28\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\omega_4 = 4\ \text{с}^{-1}$; $v_A = 28\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $\omega_{34} = \omega_{3r} = 3{,}5\ \text{с}^{-1}$.

5.2 Рух твердого тіла, яке має одну нерухому точку. Сферичний рух

А) Кути Ейлера. Рівняння сферичного руху.

Якщо тверде тіло рухається так, що одна його точка залишається весь час нерухомою, то такий рух називається обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки або сферичним рухом.

При сферичному русі тверде тіло має три ступені вільності. Три ступені вільності потрібні для визначення положення тіла відносно довільної системи координат трьох незалежних величин. Ці величини – **кути Ейлера**.

Через нерухому точку O твердого тіла проведено нерухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, відносно якої будемо розглядати рух тіла (Рис. 5.5).

Рухому систему координат $Oxyz$ зв'яжемо з тілом, яке обертається навколо нерухомої точки O. Положення тіла по відношенню до нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ визначається положенням рухомої системи до нерухомої. Взаємне положення цих систем визначається кутами Ейлера. Лінія перетину ON нерухомої площини Ox_1y_1 з рухомою Oxy називається **лінією вузлів**. Кут ψ між нерухомою віссю Ox_1 і лінією вузлів ON називається **кутом прецесії**. Для зміни кута ψ тіло повинно обертатися навколо нерухомої осі Oz_1, яка називається **віссю прецесії**.

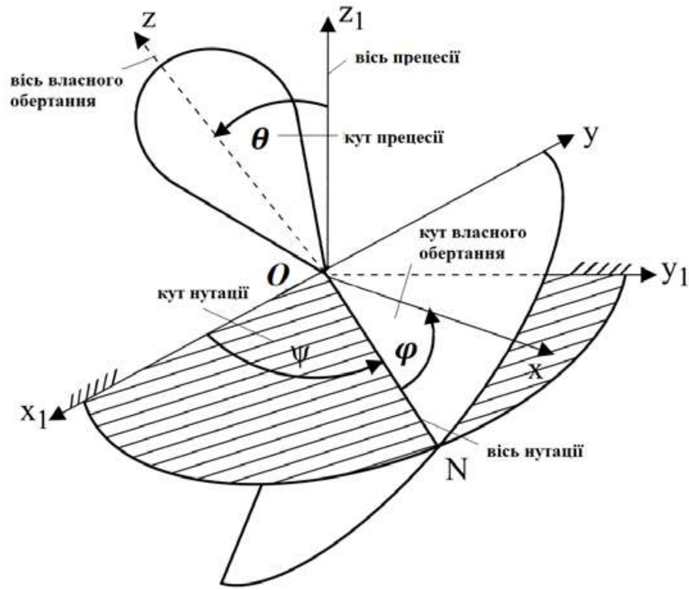


Рисунок 5.5

Кут між координатними площинами Ox_1y_1 і Oxy, який виміряється лінійним кутом θ між осями Oz_1 і $Oz,$ називається **кутом нутації**. Лінія вузлів ON, навколо якої обертається тіло при зміні кута θ, називається **віссю нутації**.

Кут φ між лінією вузлів ON і віссю Ox називається **кутом власного обертання**. Для зміни кута φ тіло повинно обертатися навколо рухомої осі Oz, яка носить назву **осі власного обертання**.

Кути Ейлера додатні, коли вони відкладені від осей Ox_1, Oz_1 і ON проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з кінців відповідних осей.

При русі тіла кути ψ, θ і φ безперервно змінюються, тобто є функціями часу:

$$\psi = \psi(t);\ \theta = \theta(t);\ \varphi = \varphi(t). \qquad (5.5)$$

Рівняння (5.5) називаються **рівняннями сферичного руху тіла**.

<u>В) Кутова швидкість і кутове прискорення при сферичному русі.</u>

Нехай сферичний рух описується рівняннями (5.5). Величини і напрями кутової швидкості і кутового прискорення в довільний момент часу обчислюються як функції кутів Ейлера та їх похідних по часу.

При зміні кутів ψ, θ і φ тіло обертається:

- навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю $\omega_1 = \dot{\psi}$ (прецесія);

- навколо лінії вузлів ON (нутація) з кутовою швидкістю $\omega_2 = \dot{\theta}$;

- навколо осі Oz (власне обертання) з кутовою швидкістю $\omega_3 = \dot{\varphi}$.

Напрям векторів $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$ показані на рис. 5.6.

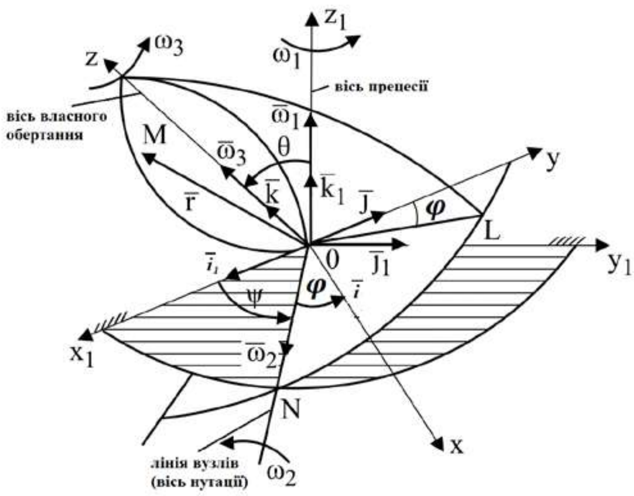


Рисунок 5.6

При обертанні тіла навколо осей, що перетинаються, результуючий рух буде миттєво-обертальним з кутовою швидкістю (абсолютна кутова швидкість):

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3. \qquad (5.6)$$

Проекції вектора $\overline{\omega}$ на осі:

1) рухомої системи координат $Oxyz$

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

2) нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Рівняння (5.7) і (5.8) називаються **кінетичними рівняннями Ейлера**.

Модуль і напрямні косинуси миттєвої кутової швидкості:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2} = \sqrt{\omega_{x_1}{}^2 + \omega_{y_1}{}^2 + \omega_{z_1}{}^2} = \\ &= \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}; \\ \cos\angle(\overline{\omega}, x) &= \frac{\omega_x}{\omega}; \quad \cos\angle(\overline{\omega}, y) = \frac{\omega_y}{\omega}; \quad \cos\angle(\overline{\omega}, z) = \frac{\omega_z}{\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Враховуючи, що $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}}$ визначимо проекції кутового прискорення на осі рухомої і нерухомої систем координат:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\omega_x}{dt}; \; \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \; \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}; \\ \varepsilon_{x_1} &= \frac{d\omega_{x_1}}{dt}; \varepsilon_{y_1} = \frac{d\omega_{y_1}}{dt}; \varepsilon_{z_1} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

Модуль вектора миттєвого кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ визначається за формулою:

$$\varepsilon = \sqrt{{\varepsilon_x}^2 + {\varepsilon_y}^2 + {\varepsilon_z}^2} = \sqrt{{\varepsilon_{x_1}}^2 + {\varepsilon_{y_1}}^2 + {\varepsilon_{z_1}}^2}. \quad (5.11)$$

Визначення миттєвого кутового прискорення (другий спосіб).

Кутове прискорення тіла є похідна від вектора кутової швидкості за часом

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Розглядаючи $\bar{\omega}$ як радіус вектор деякої точки, можливо визначати $\bar{\varepsilon}$ як швидкість кінця вектора $\bar{\omega}$ при русі по його годографу (траєкторія кінця вектора $\bar{\omega}$). Якщо позначити через $\bar{\omega}_0$ орт миттєвої осі ($\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{\omega}_0$), то кутове прискорення буде визначатися за формулою:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \bar{\omega}_0) = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{\omega}_0 + \omega \cdot \frac{d\bar{\omega}_0}{dt} \text{або } \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2, \qquad (5.11,\text{а})$$

де

$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{\omega}_0$ – перша складова кутового прискорення напрямлена вздовж миттєвої осі та характеризується зміною миттєвої кутової швидкості за величиною.

$\bar{\varepsilon}_2 = \omega \cdot \frac{d\bar{\omega}_0}{dt}$- друга складова кутового прискорення, яка характеризує зміну миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$ за напрямом;

Якщо позначити через $\bar{\omega}_1$ кутову швидкість обертання вектора $\bar{\omega}$, отримаємо:

$$\frac{d\bar{\omega}_0}{dt} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} \text{ і } \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}.$$

Тоді $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}.$ $\qquad (5.11,\text{б})$

<u>С) Швидкості точок тіла при сферичному русі. Визначення миттєвої вісі обертання.</u>

Сферичний рух тіла задано рівняннями (5.5). Якщо координати точки M $(x_1 y_1 z_1)$ і проекція вектора кутової швидкості $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ задані в нерухомій системі координат, то швидкість точки M визначається за відповідною формулою Ейлера:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\jmath}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \bar{\imath}_1 \left(\omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1 \right) +$$

$$+ \bar{\jmath}_1 \left(\omega_{z_1} \cdot x_1 -\cdot\, \omega_{x_1} z_1 \right) + \bar{k}_1 \left(\omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1 \right). \qquad (5.11^*)$$

З іншого боку, вектор швидкості точки можна визначити через його проекції на нерухомі вісі координат:

$$\bar{v} = \bar{\imath}_1 \cdot v_{x_1} + \bar{\jmath}_1 \cdot v_{y_1} + \bar{k}_1 \cdot v_{z_1}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових одиничних векторах отримаємо **проекції вектора швидкості точки тіла при сферичному русі на осі нерухомої системи координат**:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1; \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1; \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1. \end{aligned} \right\} \qquad (5.12)$$

Формули (5.12) мають назву **формул Ейлера**.

Якщо координати точки M і проекції вектора $\bar{\omega}$ задані в рухомій системі координат $Oxyz$, то **проекції вектора швидкості на осі рухомої системи координат** матимуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \\ v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \\ v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x. \end{aligned} \right\} \qquad (5.13)$$

Модуль і напрямні косинуси вектора швидкості довільної точки тіла при сферичному русі визначаються за формулами:

$$\left.\begin{aligned} v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{{v_{x_1}}^2 + {v_{y_1}}^2 + {v_{z_1}}^2}; \\ \cos\angle(\bar{v}, x) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos\angle(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos\angle(\bar{v}, z) = \frac{v_z}{v}; \\ \cos\angle(\bar{v}, x_1) = \frac{v_{x_1}}{v}; \quad \cos\angle(\bar{v}, y_1) = \frac{v_{y_1}}{v}; \quad \cos\angle(\bar{v}, z_1) = \frac{v_{z_1}}{v}. \end{aligned}\right\} \quad (5.14)$$

Швидкості кожної точки на миттєвій вісі обертання в даній момент часу дорівнює нулю, тобто: $v_{x_1} = v_{y_1} = v_{z_1} = 0$.
Враховуючи це, з формул (5.12) отримаємо:

$$\frac{\omega_{x_1}}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{y_1} = \frac{\omega_{z_1}}{z_1}. \quad (5.15)$$

Рівняння (5.15) є **рівнянням миттєвої вісі обертання в нерухомій системі координат**.
Рівняння миттєвої вісі обертання в рухомій системі координат визначається аналогічно:

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z}. \quad (5.16)$$

D) Визначення швидкостей і прискорень точок тіла при сферичному русі методом миттєвих осей.

Теорема Ейлера-Д'Аламбера

Будь яке елементарне переміщення тіла, що має одну нерухому точку, представляє собою елементарний поворот навколо миттєвої осі обертання, яка проходить через цю точку.

Оскільки в кожний момент часу тіло при сферичному русі має миттєву вісь обертання OP, навколо якої проходить елементарний поворот тіла з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ (Рис. 5.7), то вектор швидкості будь-якої точки M тіла буде визначатися за формулою Ейлера:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

де $\bar{r}$ −радіус-вектор, проведений в т. M із нерухомої точки O.

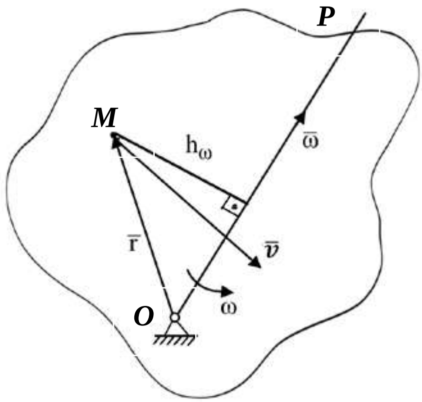


Рисунок 5.7

Напрям вектора $\bar{v}$ буде перпендикулярний до площини POM і напрямлений в бік миттєвого обертання тіла. Модуль вектора швидкості дорівнює:

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin\angle(\overline{\omega}, \bar{r}) = \omega \cdot h_\omega, \quad (5.17)$$

де $h_\omega = r \cdot \sin\angle(\overline{\omega}, \bar{r})$ – відстань від точки M до миттєвої осі обертання OP ($h \perp OP$).

Для визначення прискорення довільної точки тіла при сферичному русі в даний момент часу вважатиме відомими кутові швидкості $\overline{\omega}$ і прискорення $\bar{\varepsilon}$ (Рис. 5.8).

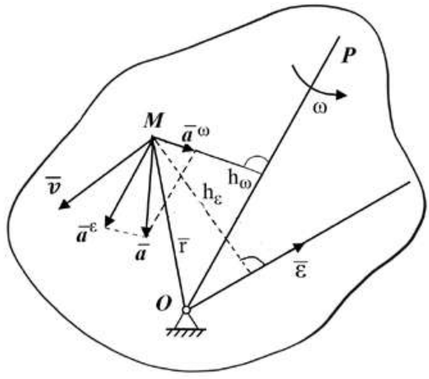


Рисунок 5.8

Вектор прискорення точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \omega \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

де $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$, $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, тоді

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{5.18}$$

або $\bar{a} = \bar{a}^\tau + \bar{a}^n \rightarrow \bar{a} = \bar{a}^\varepsilon + \bar{a}^\omega$. (5.19)

Тут $\bar{a}^\varepsilon = \bar{a}^\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ – обертальне (тангенціальне прискорення) прискорення точки *М*;

$\bar{a}^\omega = \bar{a}^n = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ – нормальне прискорення точки *М*.

Рівність (5.19) виражає **теорему Рівальса**:

Прискорення будь-якої точки тіла при сферичному русі дорівнює геометричній сумі обертального і нормального прискорення:

$$\boldsymbol{\bar{a} = \bar{a}^\varepsilon + \bar{a}^\omega}.$$

Вектор обертального прискорення $\bar{a}^\varepsilon \perp \bar{r} O \bar{\varepsilon}$ і напрямлений в той бік, звідки найкоротший поворот вектора $\bar{\varepsilon}$ до вектора $\bar{r}$ буде проти годинникової стрілки.

Модуль

$$a^\varepsilon = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\angle(\bar{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon, \tag{5.20}$$

де $h_\varepsilon = r \cdot \sin\angle(\bar{\varepsilon}, \bar{r})$ – відстань від точки *М* до лінії дії вектора $\bar{\varepsilon}$ ($h_\varepsilon \perp \bar{\varepsilon}$).

Вектор нормального прискорення $\bar{a}^\omega$ перпендикулярний до векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{v}$, тобто напрямлений вздовж перпендикуляра h_ω, опущеного з т. *М* на миттєву вісь OP (Рис. 5.8).

Модуль

$$a^\omega = \omega \cdot v \cdot \sin\angle(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_\omega, \tag{5.21}$$

де: $h_\omega = r \cdot \sin\angle(\bar{\omega}, \bar{v})$ – відстань від точки *М* до миттєвої осі OP;

$\sin\angle(\bar{\omega}, \bar{v}) = 1, \bar{\omega} \perp \bar{v}$.

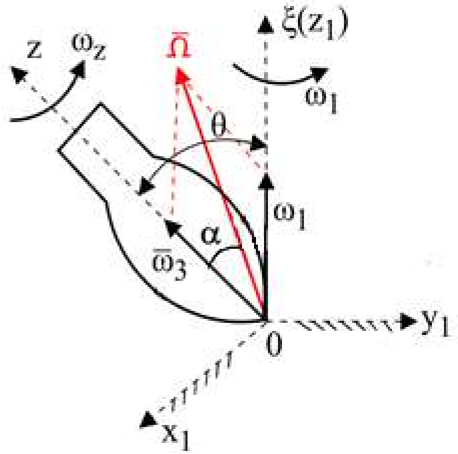
Модуль повного прискорення $\bar{a}$ обчислюється як діагональ паралелограма за формулою:

$$a = \sqrt{(a^\varepsilon)^2 + (a^\omega)^2 + 2a^\varepsilon \cdot a^\omega \cdot \cos\angle(a^\varepsilon, a^\omega)}. \tag{5.22}$$

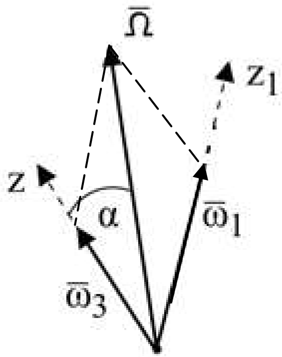
Задача 19.1

Дано:
Кути Ейлера
$\theta = 20°$;
$\omega_\xi = \omega_1$ (прецесії);
$\omega_z = \omega_3$
(власного обертання)

Визначити:
$\Omega = \omega - ?$ (абсолютну кутову швидкість)



Нерухомі осі $x_1 y_1 z_1$. Дзиґа обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю прецесії $\omega_1 = \omega_\xi = const$ (ось Oz рухома система координат, вісь дзиґи).



Власне обертання дзиґи навколо осі z відбувається з постійною кутовою швидкістю власного обертання $\omega_z = \omega_3$. Кут між вісями z і z_1 $\theta = 20°$.
Абсолютна кутова швидкість дзиґи визначається за формулою (5.6):

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3. \qquad (A)$$

Проекція (A) на вісь z:
$\omega_z = \omega_1 \cos\theta + \omega_3$.

Модуль
$\Omega = \omega = \sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_3}^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos\theta}$
(за теорією косинусів).
Напрямний косинус кута α між осями z і $\overline{\Omega}$:

$$\cos\angle(\,\overline{\Omega}; Oz\,) = \frac{\omega_z}{\omega} = \frac{\omega_1 \cos\theta + \omega_3}{\sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_3}^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos\theta}}\,. \qquad (B)$$

Звідси, абсолютна кутова швидкість $\overline{\Omega}$ дзиґи напрямлена вздовж миттєвої осі, яка складає з віссю власного обертання Oz нахил, косинус якого визначається за формулою (В).
Відповідь:
$\Omega = \omega = \sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_3}^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos\theta}$;

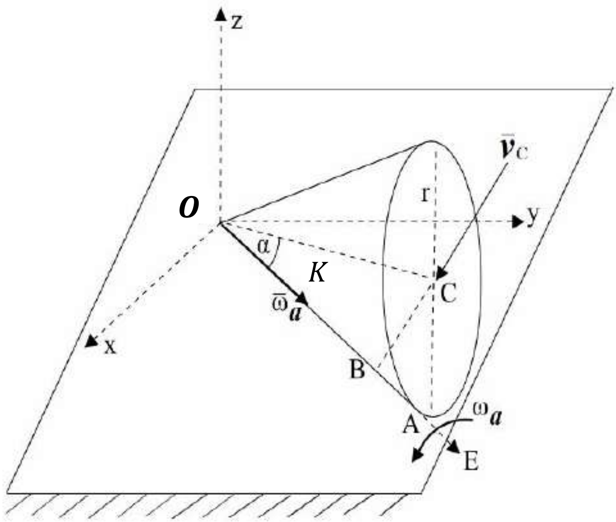
$$\cos\angle(\,\overline{\Omega}; Oz\,) = \frac{\omega_1 \cos\theta + \omega_3}{\sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_3}^2 + 2\omega_1\omega_3 \cos\theta}}.$$

Задача 19.3

Дано:
$h = OC = 4$ см;
$r = 3$ см; $v_C = 48\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = const$;
Кочення конуса без ковзання.

Визначити: $\omega_a -?\; \varepsilon_a -?$
Координати точки, яка окреслює годограф вектора $\overline{\omega}_a$ в нерухомій системі координат – ?

Конус котиться по нерухомій площині без ковзання, лінія торкання OE – миттєва вісь обертання (усі точки мають нульові швидкості).



Абсолютна кутова швидкість конуса:

$$\omega_a = \frac{v_C}{CB},$$

де $CB = OC \cdot \sin\alpha = h\sin\alpha = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ см.

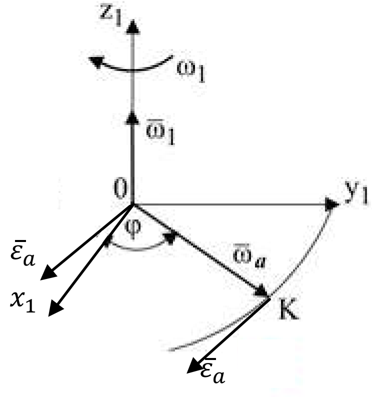
ΔOCA (єгипетський 3;4;5)), в ньому сторона $OA = 5$ см;

$\sin\alpha = \frac{CA}{OA} = \frac{r}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ см.

Тоді $\omega_a = \frac{48}{2{,}4} = 20\ c^{-1}$, а

$$\omega_a = \frac{48}{2{,}4} = 20\ \text{с}^{-1};$$

вектор $\overline{\omega}_a$ напрямлений вздовж миттєвої осі OE та обертається навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю ω_1. Тому координати кінця вектора $\overline{\omega}_a$, тобто точки K, яка викреслює годограф вектора $\overline{\omega}_a$, будуть визначатися рівностями (див. наступний рисунок)



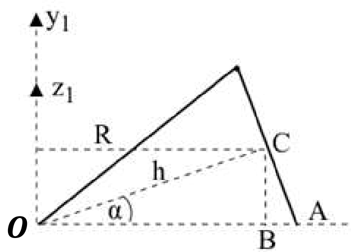
(кут $\varphi = \omega_1 t$).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_a \cdot cos\varphi = 20cos\omega_1 t; \\ y_1 &= \omega_a \cdot sin\varphi = 20sin\omega_1 t; \\ z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Кутова швидкість

$\omega_1 = \dfrac{v_C}{R}$,

де R – відстань від точки C до осі Oz_1.



$R = OB = \sqrt{OC^2 - CB^2} =$
$= \sqrt{h^2 - CB^2} = \sqrt{4^2 - 2{,}4^2} =$
$= \sqrt{16 - 5{,}76} = 3{,}2$см.

Тоді

$\omega_1 = \dfrac{v_C}{R} = \dfrac{48}{3{,}2} \approx 15\ \text{с}^{-1}$. (B)

Підставив (B) до (A), отримаємо

$x_1 = 20cos15t;$
$y_1 = 20sin15t;$
$z_1 = 0.$

Визначимо абсолютне кутове прискорення :

$\bar{\varepsilon}_a = \dfrac{d\overline{\omega}_a}{dt} = (\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_a);$

модуль $\varepsilon_a = \omega_1 \cdot \omega_a \cdot sin90° = 15 \cdot 20 \cdot 1 = 300\ \text{с}^{-2}$.

Напрямлений вектор $\bar{\varepsilon}_a$ перпендикулярно до площини $\overline{\omega}_a O \overline{\omega}_1$.

Примітка:

1) взагалі вектор $\bar{\varepsilon}_a = \frac{d\overline{\omega}_a}{dt}$ напрямлений по дотичній до годографа вектора $\overline{\omega}_a$, але звичайно його рисують в точці O;

2) в даному випадку годограф $\overline{\omega}_a$ (траєкторія кінця вектора $\overline{\omega}_a$) – це коло радіусом 20 см, яке розташоване в площині $y_1 O x_1$.

Відповідь:

$\omega_a = 20\ \text{с}^{-1};\ \varepsilon_a = 300\ \text{с}^{-2};\ x_1 = 20cos15t;\ y_1 = 20sin15t;$
$z_1 = 0.$

Задача 19.4

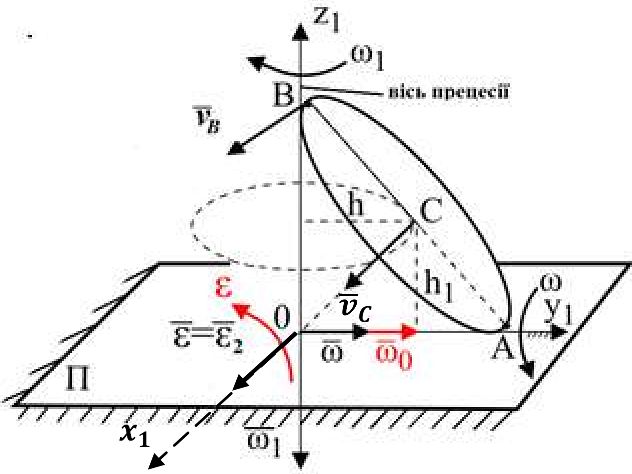
Дано:

$CO = 18$ см;

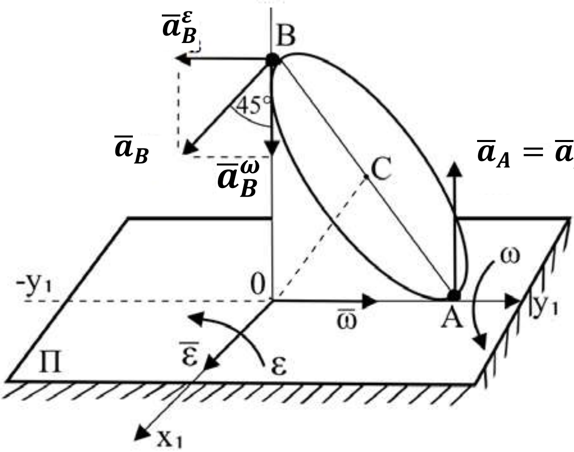
$\angle AOB = 90°$;т. C здійснює 1 оберт

навколо осі $Oz_1 = OB$ за 1 с, $n = 1\frac{\text{об}}{\text{с}} = 60$ об/хв.

Визначити: $v_B, \varepsilon_{\text{конуса}} = \varepsilon, a_A, a_B$ −?



а)



б)

Конус котиться по площині П без ковзання, тому на лінії торкання OA швидкість усіх точок дорівнює нулю. Це значить, що лінія OA (вісь Oy_1) є миттєвою віссю обертання конуса, навколо якої з кутовою швидкістю ω обертаються усі точки конуса. Кутова швидкість конуса в обертанні навколо осі Oz_1:
$\omega_1 = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{2\pi \cdot 60}{60} = 2\pi$ рад/с.
Вектор $\overline{\omega}_1$ напрямлений вздовж осі z_1 вниз.
Відстань від точки C до осей y_1 та z_1:

$$h = h_1 = OC \cdot \sin 45° = 18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2} \text{ см; (див. рис. } a).$$

Швидкість точки C конуса в обертанні навколо осі Oz_1:
$v_C = \omega_1 \cdot h = 2\pi \cdot 9\sqrt{2} = 18\pi\sqrt{2}\ \frac{\text{см}}{\text{с}},\ \ \bar{v}_C \parallel$ осі Ox_1.
Миттєва кутова швидкість конуса в обертанні навколо осі OA:

$$\omega = \frac{v_C}{h_1} = \frac{18\pi\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = 2\pi \text{ рад/с} = const.$$

Вектор $\overline{\omega}$ розташований вздовж осі Oy_1, напрямлений в бік додатного напряму осі.
Швидкість точки B конуса в обертанні навколо миттєвої осі Oy_1:

$$v_B = \omega \cdot OB = \omega \cdot 2h_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 9\sqrt{2} = 36\pi\sqrt{2} = 160\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$\bar{v}_B \parallel$ осі Ox_1, $\quad \bar{v}_B \perp OB$.
Кутове прискорення конуса $\bar{\varepsilon}$, яке характеризує зміну вектора миттєвої швидкості $\overline{\omega}$ за величиною та напрямом, визначається за формулою (5.11,б):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2,$$

де $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \bar{\omega}_0 = 0 \cdot \bar{\omega}_0 = 0$ – перша складова кутового прискорення, характеризує зміну миттєвої кутової швидкості за величиною (в даному випадку $\omega = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}} = const$), $\bar{\omega}_0$ – орт миттєвої осі Oy_1 (див. Рис. а).

Тоді $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}$, модуль $\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin\angle(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}) = 4\pi^2 =$

$= 39{,}48 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Кут $\angle(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}) = 90°, \sin 90° = 1$.

Напрямлений вектор $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_2$ (згідно до векторного добутку $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}$) вздовж осі Ox_1 в додатному напрямку (Рис. а і б).

Для визначення прискорення точок B і A конуса використаємо теорему Рівальса (5.19):

$$\bar{a} = \bar{a}^{\varepsilon} + \bar{a}^{\omega}.$$

Прискорення будь-якої точки тіла при сферичному русі дорівнює геометричній сумі обертального $\bar{a}^{\varepsilon}$ і нормального $\bar{a}^{\omega}$ прискорення.

Прискорення т. A: $\bar{a}_A = \bar{a}_A{}^{\varepsilon} + \bar{a}_A{}^{\omega}$,

$\bar{a}_A{}^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA}$; $a_A{}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OA \cdot \sin\angle(\bar{\varepsilon}; \overline{OA}) = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} \cdot 1 \approx$

≈ 1000 см/с^2; $a_A = a_A{}^{\varepsilon}$; $\angle(\bar{\varepsilon}; \overline{OA}) = \frac{\pi}{2}$.

$\bar{a}_A{}^{\omega} = \bar{\omega} \times \bar{v}_A = 0$, тому що $\bar{v}_A = 0$, точка A розташована на миттєвій осі обертання.

Вектор прискорення точки A паралельний до осі Oz_1 (перпендикулярний до площини x_1Oy_1).

Прискорення т. B: $\bar{a}_B = \bar{a}_B{}^{\varepsilon} + \bar{a}_B{}^{\omega}$,

$\bar{a}_B{}^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB}$; $a_B{}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OB \cdot \sin\angle(\bar{\varepsilon}; \overline{OB}) = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} \cdot 1 \approx$

≈ 1000 см/с^2; $a_A = a_A{}^{\varepsilon}$.

$\bar{a}_B{}^{\omega} = \bar{\omega} \times \bar{v}_B = \omega \cdot v_B \sin\angle\ (\bar{\omega}; \bar{v}_B)\ = 2\pi^2 \cdot 36\sqrt{2} \cdot 1 \approx$

≈ 1000 см/с^2.

Кут $\angle(\bar{\omega}; \bar{v}_B) = 90°, \sin 90° = 1$.

Вектор прискорення $\bar{a}_B{}^{\omega}$ належить осі z_1, напрямлений від т. B до низу.

Модуль прискорення

$a_B = \sqrt{(\bar{a}_B{}^{\varepsilon})^2 + (\bar{a}_B{}^{\omega})^2} = 1000\sqrt{2}$ см/с^2.

Вектор $\bar{a}_B$ розташований в площині $OB(-y_1)$ і напрямлений під кутом 45° до лінії OB.

Відповідь:

$v_B = 36\pi\sqrt{2}\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}} = 160$ см/с;

$\varepsilon = 39{,}48\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}$;

$a_A \approx 1000\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}^2}$;

$a_B = 1000\sqrt{2}$ см/с^2.

Задача 19.5

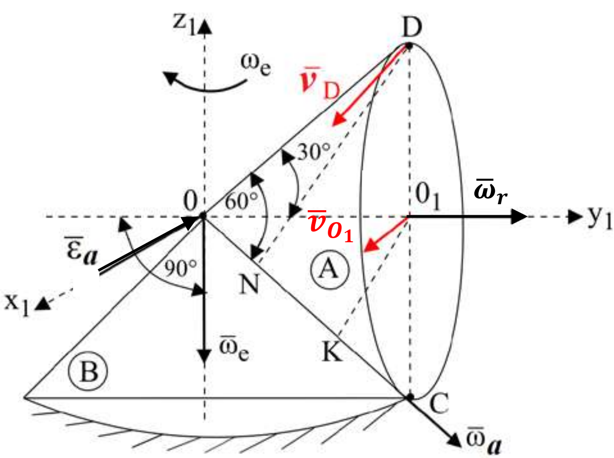
Дано:

$n = 120$ об/хв;

$OO_1 = h = 10$ см.

Визначити: ω_e−? (переносну кутову швидкість конуса навколо осі z_1); ω_r−?(відносну кутову швидкість навколо осі OO_1);

ω_a−? ε_a−?(абсолютні кутову швидкість та кутове прискорення).



Нерухома система координат $Ox_1y_1z_1$. Конус A оббігає конус B 120 разів за хвилину без ковзання. Переносна кутова швидкість конуса A при обертанні навколо нерухомої осі прецесії Oz_1 (вектор ω_e напрямлений вздовж осі Oz_1 вниз):

$$\omega_\text{e} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 120}{60} = 4\pi \text{ с}^{-1} .$$

Миттєва ось обертання - OC (швидкості всіх точок на ній дорівнюють нулю).

Швидкість т. $O_1 : v_{O_1} = \omega_\text{e} \cdot OO_1 = 4\pi \cdot 10 = 40\pi$ см/с.

Відносна кутова швидкість (кутова швидкість власного обертання навколо осі OO_1):

$$\omega_r = \frac{v_{O_1}}{O_1C} = \frac{40\pi}{OO_1 \cdot tg\, 30°} = \frac{40\pi}{10 \cdot 0{,}58} = 6{,}92\pi\ c^{-1}.$$

$O_1C = 5{,}8$ см, $OC = 2O_1C = 2 \cdot 5{,}8 = 11{,}6$ см.

Абсолютна кутова швидкість (обертання навколо миттєвої осі OC):

$$\omega_a = \frac{v_{O_1}}{O_1K} = \frac{40\pi}{OO_1 \cdot \sin 30°} = \frac{40\pi}{10 \cdot 0{,}5} = 8\pi\ c^{-1}.$$

Абсолютне кутове прискорення при сталій кутовій швидкості $\overline{\omega}_\text{e}$ (5.11,б):

$\bar{\varepsilon}_a = \overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_a$, за модулем:

$\varepsilon_a = \omega_r \cdot \omega_a \cdot \sin 30° = 6{,}92\pi \cdot 8\pi \cdot 0{,}5 = 27{,}68\ \pi^2$ с$^{-2}$.

Відповідь:

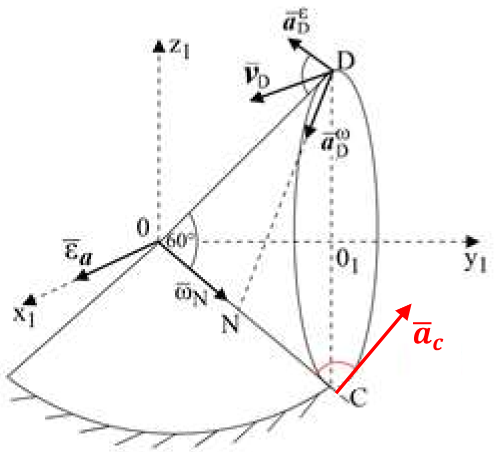
$\omega_\text{e} = 4\pi \text{ с}^{-1}$;

$\omega_r = 6{,}92\pi\ c^{-1}$; $\omega_a = 8\pi\ c^{-1}$; $\varepsilon_a = 27{,}68\ \pi^2 \text{ с} - 2$.

Задача 19.6

Дано:
$n = 120$ об/хв;
$OO_1 = h = 10$ см.

Визначити: $v_C -?, v_D -?, a_C -?, a_D -?$



Абсолютні ω_a і ε_a знайдені в задачі 19.5. Визначити швидкості точок C і D.

Точка C належить миттєвої осі обертання конуса, тому її швидкість дорівнює v_C=0.

Точка D обертається разом з конусом навколо миттєвої осі OC по колу з радіусом DN:
$v_D = \omega_a \cdot DN = \omega_a \cdot OO_1 = 80\pi$ см/с.

ΔCOD – рівнобічний, тому $DN = OO_1$.
Вектор $\bar{v}_D \parallel Ox_1$.
Прискорення точок C і D визначаємо за допомогою теореми Рівальса (5.19).
Для т. C: $\bar{a}_C = \bar{a}_C^{\varepsilon} + \bar{a}_C^{\omega}$. (A)

Обертальне прискорення:

$$\bar{a}_C^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_a \times \overline{OC};\ a_C^{\varepsilon} = \varepsilon_a \cdot OC \sin\angle(\bar{\varepsilon}_a; OC) =$$
$$= 27{,}62 \cdot 2 \cdot O_1C \cdot 1 \cdot \pi^2 = 320 \cdot \pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне прискорення:
$\bar{a}_C^{\omega} = \bar{\omega}_a \times \bar{v}_C$=0, тому що v_C=0. Звідси $\bar{a}_C = \bar{a}_C^{\varepsilon}$, вектор $\bar{a}_C \perp OC$ та належить до площини z_1Oy_1.
Прискорення точки D: $\bar{a}_D = \bar{a}_D^{\varepsilon} + \bar{a}_D^{\omega}$. (B)
Обертальне прискорення:

$$\bar{a}_D^{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_a \times \overline{OD};\ a_D^{\varepsilon} = \varepsilon_a \cdot OD \sin\angle(\bar{\varepsilon}_a; OD) = 27{,}68 \cdot 11{,}6 \cdot \pi^2 =$$
$$= 320\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_D^{\varepsilon} \perp OD$.
Нормальне прискорення:

$$\bar{a}_D^{\omega} = \bar{\omega}_a \times \bar{v}_D;$$
$$a_D^{\omega} = \omega_a \cdot v_D \cdot \sin\angle(\bar{\omega}_a; \bar{v}_D) = 8\pi \cdot 80\pi = 640\,\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

$\bar{a}_D^{\omega}$ по DN.
Напишемо проекції (B) на осі Oy_1 і Oz_1:

$$a_{Dy_1} = -(a_D^{\varepsilon} + a_D^{\omega}) \sin 30° = -(320\pi^2 + 640\,\pi^2) \cdot 0{,}5 =$$
$$= -480\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{Dz_1} = (a_D^{\varepsilon} - a_D^{\omega}) \cos 30° = (320\pi^2 - 640\,\pi^2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= -160\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

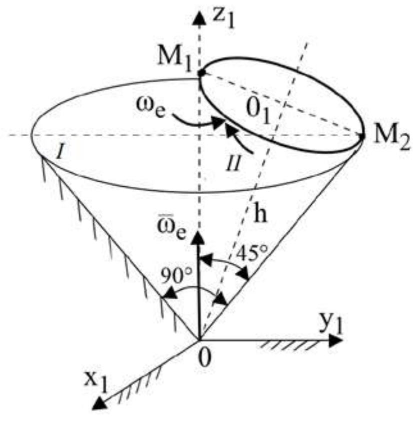
$$a_{Dx_1} = 0.$$

Відповідь:
v_C=0; $v_D = 80\pi$ см/с; $a_C = 320\pi^2$ см/с^2; $a_{Dy_1} = -480\pi^2$ см/с^2; $a_{Dz_1} - 160\sqrt{3}\pi^2$ см/с^2; $a_{Dx_1} = 0$.

Задача 19.7

Дано:
$\alpha_2 = 45°$; $\alpha_1 = 90°$; $OO_1 = h = 100$ см;
$n = 1$ об/0,5 с.
Конус *I* котиться по внутрішній стороні конуса *II* без ковзання

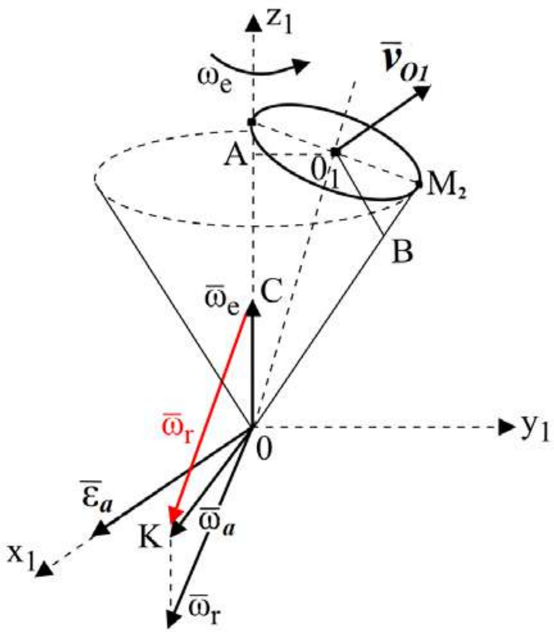
Визначити: $\omega_e = \omega_1 -?$ (навколо осі Oz_1)
$\omega_2 = \omega_3 -?$ (власне обертання навколо осі OO_1)
$\omega_a -?$ (навколо миттєвої осі).



Конус *II* котиться по внутрішній стороні конуса I без ковзання, тому миттєва вісь - OM_2
(всі $v_k = 0$).
Переносна кутова швидкість (кутова швидкість прецесії) ω_e:

$$\omega_e = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ c^{-1}.$$

Вектор $\overline{\omega}_e$ напрямлений вздовж осі Oz_1 вгору.



Точка O_1 обертається навколо осі Oz_1, описує при цьому коло з радіусом

$O_1A = h \cdot sin22{,}5° = 100 \cdot 0{,}38268 = 38{,}27$ см.

Швидкість т. O_1:

$v_{O_1} = \omega_e \cdot O_1A = 4\pi \cdot 38{,}27 = 153{,}1\pi$ см/с.

Точка O_1 обертається разом з конусом *II* навколо миттєвої осі OM_2 зі швидкістю:

$v_{O_1} = \omega_a \cdot O_1B,$ звідси

$$\omega_a = \frac{v_{O_1}}{O_1B} = \frac{153{,}1\pi}{38{,}27} = 4\pi\ \text{с}^{-1} -$$

абсолютна кутова швидкість конуса *II*.

Вектор абсолютної кутової швидкості напрямлений вздовж OM_2 вниз. Обертання конуса *II* навколо миттєвої осі OM_2 з кутовою швидкістю $\overline{\omega}_a$ складається з обертання переносного з

кутовою швидкістю $\overline{\omega}_e$ навколо осі Oz_1 та обертання навколо власної осі OO_1 з відносною кутовою швидкістю $\overline{\omega}_r$, яка напрямлена вздовж OO_1 вниз:
$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r$.
З трикутника OKC, який створений кутовими швидкостями $\overline{\omega}_a, \overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r$ за теоремою косинусів визначаємо ω_r:
$\omega_r = \sqrt{{\omega_a}^2 + {\omega_e}^2 - 2 \cdot \omega_a \cdot \omega_e \cdot cos135°} = 7{,}39\pi$ с$^{-1}$.
Для визначення абсолютного кутового прискорення конуса II, яке описує зміну $\overline{\omega}_a$ за величиною та напрямом, скористаємось формулою:
$$\bar{\varepsilon}_a = \frac{d\overline{\omega}_a}{dt} = (\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_a).$$
Тут враховано, що вектор $\overline{\omega}_a$ змінюється тільки за напрямом $\left(\frac{d\omega_a}{dt} = 0\right)$.
Модуль $\varepsilon_a = \omega_e \cdot \omega_a \cdot sin\angle(\overline{\omega}_e, \overline{\omega}_a) = \omega_e \cdot \omega_a \cdot sin135° =$
$= 11{,}31\pi^2$ с$^{-2}$.
Вектор $\bar{\varepsilon}_a$ напрямлений по осі Ox_1, тому що вектори $\overline{\omega}_e$ і $\overline{\omega}_a$ належать площині z_1Oy_1.
Відповідь:
$\omega_e = 4\pi\ c^{-1}; \omega_r = 7{,}39\pi$ с$^{-1}$; $\omega_a = 4\pi$ с$^{-1}$; $\varepsilon_a = 11{,}31\pi^2$ с$^{-2}$.

Задача 19.10

Дано:
$\omega_{x_1} = \sqrt{3};\ \omega_{y_1} = \sqrt{5}; \omega_{z_1} = \sqrt{7};$
$x_1 = \sqrt{12};\ y_1 = \sqrt{20}; z_1 = \sqrt{28}.$

Визначити: $v = v_M -?$

При сферичному русі проекції вектора кутової швидкості на осі нерухомої системи координат $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ задані. Визначити швидкість точки M тіла, яка в даний момент часу має координати $x_1; y_1; z_1$.
За формулою Ейлера швидкість:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\jmath}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \qquad \text{(A)}$$

Якщо розкрити визначник (A), отримаємо рівняння Ейлера (5.12):

$v_{x1} = \omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{28} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{20} =$
$= \sqrt{140} - \sqrt{140} = 0;$
$v_{y1} = \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{28} =$
$= \sqrt{84} - \sqrt{84} = 0;$
$v_{z1} = \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{20} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{12} =$
$= \sqrt{60} - \sqrt{60}$=0.

Модуль швидкості точки в даний момент часу :

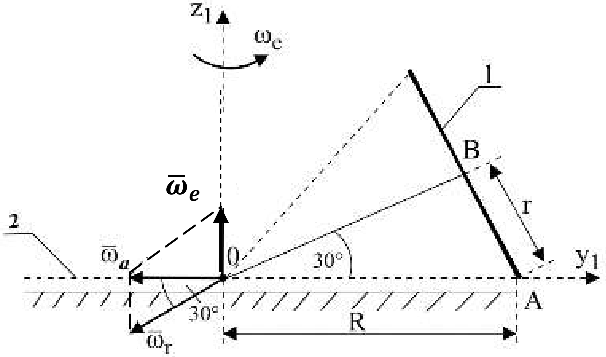
$$v = \sqrt{{v_{x1}}^2 + {v_{y1}}^2 + {v_{z1}}^2} = \sqrt{0 + 0 + 0} = 0.$$

Відповідь: $v = 0$.

Задача 19.11

Дано:
$R = 2r;$
$n = 5$ об/хв.

Визначити: $\omega_e, \omega_a -?$



Конічне зубчасте колесо 1 оббігає (без ковзання) колесо 2, яке лежить, 5 разів за 1 хвилину. Вісь OA – миттєва вісь обертання колеса 1. Абсолютна кутова швидкість колеса 1 напрямлена вздовж осі Oy_1.

Переносна кутова швидкість ω_e в обертанні конічного колеса 1 навколо нерухомої осі Oz_1, (вісь прецесії):

$$\omega_e = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 5}{60} = \frac{\pi}{6}\ c^{-1}.$$

Вектор $\overline{\omega}_e$ напрямлений вздовж осі Oz_1 вгору.

Вектор кутової швидкості обертання колеса навколо власної OB осі $\overline{\omega}_r$ напрямлений вздовж осі симетрії колеса BO (ω_r – кутова швидкість власного обертання).

Абсолютна кутова швидкість $\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r$. Кут між $\overline{\omega}_r$ і $\overline{\omega}_a$ визначаємо з трикутника OAB ($AB = \frac{1}{2}OA;\ \alpha = 30°$).

З трикутника, утвореного векторами $\overline{\omega}_a, \overline{\omega}_e, \overline{\omega}_r$ визначаємо:

$$\omega_r = \frac{\omega_e}{\sin 30°} = \frac{\pi}{6 \cdot 0{,}5} = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\ \text{с}^{-1}.$$

$$\omega_a = \omega_e \cdot tg60° = \frac{\pi}{6} \cdot 1{,}732 = 0{,}907\ c^{-1}.$$

Відповідь:

$$\omega_e = \frac{\pi}{6}\ c^{-1}; \omega_r = 1{,}047\ \text{с}^{-1};\ \omega_a = 0{,}907\ c^{-1}.$$

Задача 19.12

Дано:

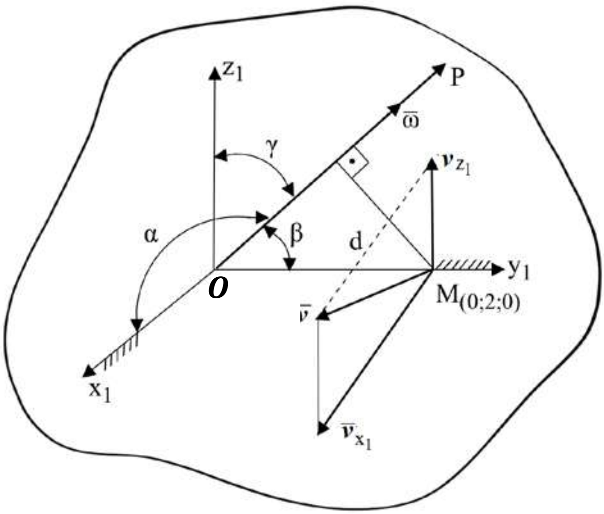
$\omega = 7\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; α, β, γ– кути між OP (миттєва ось) і осями нерухомої системи координат $x_1,\ y_1, z_1$;

$\cos\alpha = \frac{2}{7}$; $M(x_1,\ y_1, z_1)$; $\cos\gamma = \frac{6}{7}$;

$x_1 = 0$ м; $y_1 = 2$ м; $z_1 = 0$ м.

Визначити: $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$–?

$d =?$ – відстань від т. M до OP.



Швидкість будь-якої т. M тіла при сферичному русі визначається по формулі Ейлера (5.11*):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{\imath}_1 & \bar{\jmath}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Звідси для нерухомої системи координат маємо (5.12) (розкриваємо визначник):

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1} &= \omega_{y_1} \cdot z_1 - \omega_{z_1} \cdot y_1 = -\omega_{z_1} \cdot 2; \\ v_{y_1} &= \omega_{z_1} \cdot x_1 - \omega_{x_1} \cdot z_1 = 0; \\ v_{z_1} &= \omega_{x_1} \cdot y_1 - \omega_{y_1} \cdot x_1 = \omega_{x_1} \cdot 2. \end{aligned}\right\} \quad (\text{A})$$

По вихідним даним проекції $\bar{\omega}$ на x_1 і z_1 визначаються у вигляді:

$$\omega_{x_1} = \omega \cos\alpha = \omega \cdot \frac{2}{7} = 7 \cdot \frac{2}{7} = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\omega_{z_1} = \omega \cos\gamma = \omega \cdot \frac{6}{7} = 7 \cdot \frac{6}{7} = 6\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Тоді з (А) отримаємо:

$$v_{x_1} = -\omega_{z_1} \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ м/с};$$

$$v_{y_1} = 0;$$

$$v_{z_1} = \omega_{x_1} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Вектор $\bar{v} \perp$ до осі Oy_1.

Модуль швидкості точки M:

$$v = \sqrt{{v_{x_1}}^2 + {v_{y_1}}^2 + {v_{z_1}}^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 12{,}65 \text{ м/с}.$$

За формулою (5.17): $v = \omega \cdot h_\omega = \omega \cdot d$, визначаємо відстань від точки M до миттєвої осі OP.

$$d = \frac{v}{\omega} = \frac{12{,}65}{7} = 1{,}807 \text{ м}.$$

Відповідь:

$v_{x_1} = -12$ м/с; $v_{y_1} = 0$; $v_{z_1} = 4$ м/с, $d = 1{,}807$ м.

Задача 19.13

Дано:

Проекції вектора швидкості на осі рухомої системи координат: $v_{1x} \ = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}; v_{1y} \ = 2\frac{\text{м}}{\text{с}}; v_{1z} \ = 0$ м/с, (для т. M_1 (0;0;2). Напрям вектора швидкості $\bar{v}_2$ для т. M_2 (0;1;2) визначається косинусами кутів з осями x, y, z:

$\cos\alpha_2 = cos\angle(\bar{v}_2, x) = -\frac{2}{3}$; $\cos\beta_2 = cos\angle(\bar{v}_2, y) = \frac{2}{3}$;

$\cos\gamma_2 = cos\angle(\bar{v}_2, z) = -\frac{1}{3}$.

Визначити: 1) рівняння миттєвої осі;

2) Величину миттєвої кутової швидкості ω.

Рішення:

Рівняння миттєвої осі OP при сферичному русі тіла має наступний вигляд ($v_x = v_y = v_z = 0$) за (5.13):

$$\begin{gathered} \omega_y \cdot x - \omega_x \cdot y = 0; \\ \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z = 0; \\ \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x = 0. \end{gathered} \qquad (A)$$

Для отримання рівняння миттєвої осі OP необхідно визначити проекції вектора $\bar{\omega}$ на осі координат ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$). За умовою задачі надані проекції вектора швидкості т. M_1 (v_{1x}; v_{1y}; v_{1z}) на осі координат і координати т. M_1. Скористаємось знов формулою (5.13):

$$\left.\begin{aligned} v_{1x} = \omega_y \cdot z_1 - \omega_z \cdot y_1; \\ v_{1y} = \omega_z \cdot x_1 - \omega_x \cdot z_1; \\ v_{1z} = \omega_x \cdot y_1 - \omega_y \cdot x_1. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Підставимо дані:

$1 = \omega_y \cdot 2 - \omega_z \cdot 0 \rightarrow \omega_y = \frac{1}{2}\frac{\text{рад}}{\text{с}}$;

$2 = \omega_z \cdot 0 - \omega_x \cdot 2 \rightarrow \omega_x = -1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$;

$0 = \omega_x \cdot 0 - \omega_y \cdot 0 \rightarrow \omega_z$ визначити не можливо.

Для визначення ω_z скористаємось заданими координатами т. M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ та косинусами кутів $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Спочатку визначимо проекції вектора $\bar{v}_2$ на осі координат:

$$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\alpha_2 = -\frac{2}{3}v_2;$$

$$v_{2y} = v_2 \cdot \cos\beta_2 = \frac{2}{3}v_2;$$

$$v_{2z} = v_2 \cdot \cos\gamma_2 = -\frac{1}{3}v_2.$$

Потім, за допомогою (В) визначимо v_2 і ω_z:

$v_{2y} = \omega_z \cdot x_2 - \omega_x \cdot z_2;\ \frac{2}{3}v_2 = \omega_z \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \rightarrow v_2 = 3$ м/с.

$v_{2x} = v_2 \cdot \cos\alpha_2 = -\frac{2}{3}v_2 = \omega_y \cdot z_2 - \omega_z \cdot y_2 \rightarrow$

$-\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 - \omega_z \cdot 1 \rightarrow \omega_z = 3$ рад/с.

Модуль $\omega = \sqrt{{\omega_x}^2 + {\omega_y}^2 + {\omega_z}^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2 + 3^2}$=3,2 рад/с.

Підставимо в (А) чисельні значення ω_x, ω_y і ω_z та отримаємо шукане рівняння миттєвої осі:

$0{,}5x + 1y = 0;\ \ 3x + 1z = 0;\ -1y - 0{,}5x = 0$

або $x + 2y = 0$ та $3x + z = 0$.

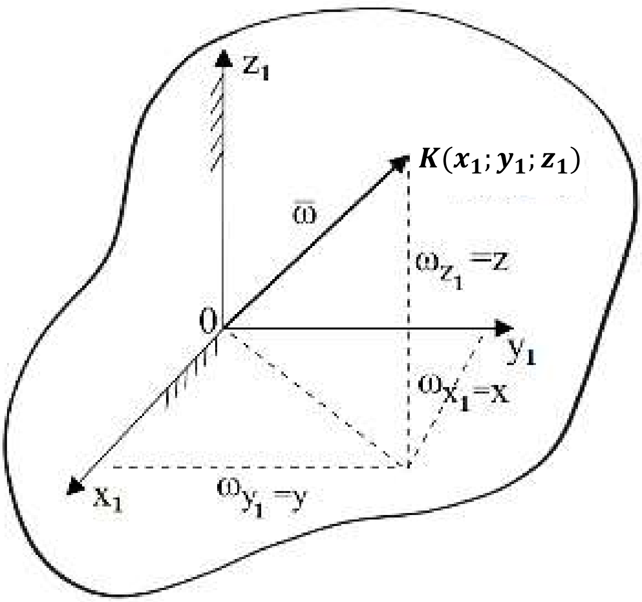
Відповідь:

1) $x + 2y = 0$; $3x + z = 0$;
2) ω =3,2 рад/с.

Задача 20.15

Дано:
Кути Ейлера
$\varphi = 4t;$
$\psi = \dfrac{\pi}{2} - 2t;$
$\theta = \dfrac{\pi}{3}.$

Визначити: координати точки, що креслить годограф вектора кутової швидкості; $\omega-?$ $\varepsilon-?$ відносно нерухомої системи координат $x_1 y_1 z_1$.



Проекції вектора кутової швидкості тіла при сферичному русі на осі нерухомої системи координат виражають через кінематичні рівняння Ейлера (5.8):

$$\left.\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi;\\ \omega_{y_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi;\\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.\end{aligned}\right\}$$

Підставимо в рівняння вихідні дані:

$\omega_{x_1} = 2\sqrt{3}\cos 2t;\ \ \omega_{y_1} = -2\sqrt{3}\,sin\,2t;\ \ \omega_{z_1} = 0.$

Годограф вектора кутової швидкості $\overline{\omega}$ – це крива, яку описує кінець вектора $\overline{\omega}$ (точка *К*). Тому координати $x_1y_1z_1$ точки *К* дорівнюють проекціям вектора $\overline{\omega}$ на осі координат:

$x_1 = \omega_{x_1} = 2\sqrt{3}\,\cos 2t;$

$y_1 = \omega_{y_1} = -2\sqrt{3}\,sin\,2t;\ \ z_1 = \omega_{z_1} = 0.$

Модуль $\omega = \sqrt{\left(\omega_{x_1}\right)^2 + \left(\omega_{y_1}\right)^2 + \left(\omega_{z_1}\right)^2} = 2\sqrt{3}$ рад/с.

Проекції вектора кутового прискорення на осі нерухомої системи координат:

$\varepsilon_{x_1} = \dot{\omega}_{x_1} = -4\sqrt{3}\sin 2t;\ \varepsilon_{y_1} = \dot{\omega}_{y_1} = -4\sqrt{3}\cos 2t;$

$\varepsilon_{z_1} = \dot{\omega}_{z_1} = 0.$

Модуль $\varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon_{x_1}\right)^2 + \left(\varepsilon_{y_1}\right)^2 + \left(\varepsilon_{z_1}\right)^2} = 4\sqrt{3}$ рад/с^2.

Відповідь:

$x_1 = \omega_{x_1} = 2\sqrt{3}\cos 2t;\quad y_1 = \omega_{y_1}$

$= -2\sqrt{3}\,sin\,2t;\ \ z_1 = \omega_{z_1} = 0.$

$\omega = 2\sqrt{3}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\ \varepsilon = 4\sqrt{3}$ рад/с^2.

<u>P.S.</u> годограф вектора $\overline{\omega}$ - це коло $R = 2\sqrt{3}$, яка належить площині x_1Oy_1

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1.Теоретична механіка : навчальний посібник /П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко, Л.Ф. Дзюба, В.Р. Пасіка, О.М. Поляков; за ред. П.К. Штанька. — Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. — 464 с.

2. Павловський М.А. Теоретична механіка (укр.). Видавництво „Техніка", Київ – 2002.-510 с.

3. Яскілко М.Б. Збірник задач для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.

4. Штанько П.К. Теоретична механіка. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт / Укл. П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко / за ред.. Штанька П.К. – Запоріжжя: НУ «ЗП», 2019.- 228 с.

5. Штанько П.К. Теоретична механіка. Контрольні питання та білети до рубіжних контролів / Укл. П.К. Штанько, В.Г. Шевченко / за ред.Штанька П.К. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018.- 228 с.

6. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2-х т.: Учеб. Пособие для студ. вузов / Н.В. Бутенин, Д.Р. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теретической механики. (В 2-х ч. для гос. Ун-тов). Перераб. И доп. С.М. Тарга. Ч. 1-3. – М., «Наука», -1973. – 467 с.

8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст]: учеб. / С.М. Тарг; 13-е узд. Стереотип. – М. Высш. Шк.., 2001. – 416 с.

9. Мещерський И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. Пособие для вузов. / Под ред.. В.А. Пальмова, Д.Р. Мерина. – 38-е узд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с. – (Ученики для вузов. Специальная література).

10. Яблонский А.А., ред.. Сборник заданий для курсових работ по теоретической механіка.: Учебное пособие для вузов. – 7-е узд. Испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2003. – 384 с.

11. ДСТУ 3008-95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки.- /Держстандарт України.- Київ.

ДОДАТОК А
Відомості з математики

1. *Найпростіші алгебраїчні формули*

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b); \qquad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right);$$

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right); \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2;$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3; \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

2. *Формула коренів квадратного рівняння*

Рівняння $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c - дійсні числа і $a\neq 0$ має такі корені:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Рівняння: $x^2+px+q=0$; $\qquad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

3. *Формули подвійного кута*

$$\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a; \qquad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a;$$

$$\cos 2a=2\cos^2 a-1; \qquad tg\,2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}.$$

4. *Формули ділення аргументу навпіл*

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}; \qquad \sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}; \qquad tg\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

5. *Формули зниження степеня*

$$sin^2 a = \frac{1 - cos\,2a}{2}; \qquad cos^2 a = \frac{1 + cos\,2a}{2}.$$

6. *Формули додавання аргументу*

$$sin(a \pm \beta) = sin\,a \cdot cos\,\beta \pm cos\,a \cdot sin\,\beta;$$

$$tg(a \pm \beta) = \frac{tga \pm tg\beta}{1 \mp tga \cdot tg\beta};$$

$$cos(a \pm \beta) = cos\,a \cdot cos\,\beta \mp sin\,a \cdot sin\,\beta.$$

7. *Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток*

$$sin\,a \pm sin\,\beta = 2\,sin\frac{a \pm \beta}{2} \cdot cos\frac{a \mp \beta}{2};$$

$$cos\,a + cos\,\beta = 2\,cos\frac{a + \beta}{2} \cdot cos\frac{a - \beta}{2};$$

$$cos\,a - cos\,\beta = -2\,sin\frac{a + \beta}{2} \cdot sin\frac{a - \beta}{2};$$

$$tga \pm tg\beta = \frac{sin(a \pm \beta)}{cos\,a \cdot cos\,\beta}.$$

8. *Значення тригонометричних функцій деяких кутів*

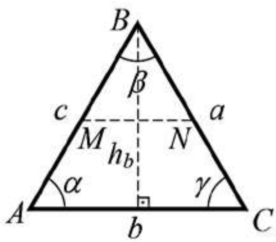
α град / рад	0 / 0	15 / $\frac{\pi}{12}$	30 / $\frac{\pi}{6}$	45 / $\frac{\pi}{4}$	60 / $\frac{\pi}{3}$	75 / $\frac{5\pi}{12}$	90 / $\frac{\pi}{2}$	180 / π
$sin\,\alpha$	0	0.26	0.50	0.71	0.87	0.97	1	0
$cos\,\alpha$	1	0.97	0.87	0.71	0.50	0.26	0	–1
$tg\,\alpha$	0	0.27	0.58	1.00	1.73	3.73	∞	0
$ctg\alpha$	∞	3.73	1.73	1.00	0.58	0.27	0	∞

9. *Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу*

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1; \quad tga = \frac{\sin a}{\cos a}; \qquad ctga = \frac{\cos a}{\sin a};$$

$$tga \cdot ctga = 1; \qquad 1 + tg^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}; \qquad 1 + ctg^2 = \frac{1}{\sin^2 a}.$$

10. *Співвідношення в довільному трикутнику*



Сума кутів трикутника

$$a + \beta + y = 180^\circ.$$

Нерівності трикутника

$$b - c < a < b + c;$$

$$a - c < b < a + c;$$

$$a - b < c < a + b.$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos a;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos \gamma.$$

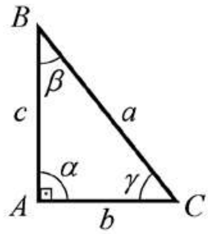
Площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin a;$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона,

де $p = (a+b+c)/2$ - півпериметр трикутника;
a, b, c - сторони трикутнику;
α, β, γ - внутрішні кути трикутника;
MN - середня лінія трикутника;
h_b - висота трикутника, що опущена на сторону b.

11. ***Співвідношення в прямокутному трикутнику***



$$\alpha=90^\circ; \qquad \beta+\gamma=90^\circ;$$

$S=\dfrac{1}{2}bc$ - площа трикутника;

$a^2=b^2+c^2$ - теорема Піфагора,

де b, c - катети; a - гіпотенуза.

Якщо $\beta=30^\circ$, то $b=\dfrac{a}{2}$.

$sin\,\gamma=\dfrac{c}{a}$; $\qquad ctg\gamma=\dfrac{b}{c}$; $\qquad tg\beta=\dfrac{b}{c}$;

$cos\,\gamma=\dfrac{b}{a}$; $\qquad sin\,\beta=\dfrac{b}{a}$; $\qquad ctg\beta=\dfrac{c}{b}$;

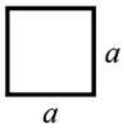
$tg\gamma=\dfrac{c}{b}$; $\qquad cos\,\beta=\dfrac{c}{a}$;

$c=a\cdot sin\,\gamma=a\cdot cos\,\beta$;

$b=a\cdot sin\,\beta=a\cdot cos\,\gamma$.

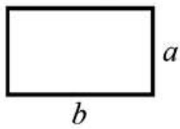
12. ***Площа (S) геометричних фігур***

Квадрат



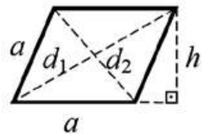
$S=a^2$

Прямокутник



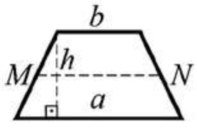
$S=a\cdot b$

Ромб



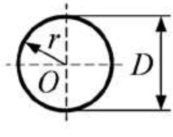
$S=h\cdot a=d_1\,d_2/2$

Трапеція



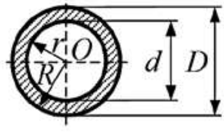
$S=h\cdot(a+b)/2$

Коло і круг



$S=\pi r^2=\pi D^2/4$

Кільце



$S=\pi R^2-r^2=\pi D^2-d^2=\pi/4$

Середня лінія

$MN=(a+b)/2.$

Довжина кола

$\Delta L=2\,\pi r=\pi D.$

13. *Об'ми і поверхі тіл*

Призма: пряма і похила; ***паралелепипед*** $V=S\cdot h.$	***Конус*** круговий, круглий і похилий $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{12}\pi d^2 h.$
Пряма призма $S_{бок}=p\cdot h.$	Конус круглий $S_{бок}=\frac{1}{2}pl=\pi rl=\frac{1}{2}\pi dl.$
Паралелепіпед прямокутний $V=a\cdot b\cdot c;$ $P=2(a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c).$	Усічений конус круговий, круглий і похилий $V=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)=\frac{1}{12}\pi h\left(d_1^2+d_1d_2+d_2^2\right);$
Куб $V=a^3;$ $P=6a^2.$	Усічений конус круглий $S_{бок}=\pi\left(r_1+r_2\right)l=\frac{1}{2}\pi\left(d_1+d_2\right)l.$
Піраміда правильна і неправильна $V=\frac{1}{3}Sh.$	***Куля*** $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3;$ $P=4\pi\cdot R^2=\pi\cdot D^2.$
Піраміда правильна $S_{бок}=\frac{1}{2}pA.$	***Півкуля*** $V=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{1}{12}\pi D^3;$ $S=\pi\cdot R^2=\frac{1}{4}\pi\cdot D^2;$ $S_{бок}=2\pi\cdot R^2=\frac{1}{2}\pi\cdot D^2;$ $P=3\pi\cdot R^2=\frac{3}{4}\pi\cdot D^2.$
Усічена піраміда правильна і неправильна $V=\frac{1}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)h.$	***Сегмент кулі*** $V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{6}\pi h\left(h^2+3r^2\right);$ $S_{бок}=2\pi R\,h=\pi\cdot(r^2+h^2);$ $P=\pi\,(2r^2+h^2)$
Усічена піраміда правильна $S_{бок}=\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)A.$	***Шар кулі.*** $V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)h;$ $S_{бок}=2\pi R\,h.$
Циліндр круговий, прямий і похилий $V=S\cdot h=\pi r^2 h=\frac{1}{4}\pi d^2 h.$	***Сектор кулі*** $V=\frac{2}{3}\pi R^2 h'.$
Циліндр круглий $S_{бок}=2\pi\cdot r\cdot h=\pi\cdot d\cdot h.$	***Порожняя куля*** $V=\frac{4}{3}\pi\left(R_1^3-R_2^3\right)=\frac{1}{6}\pi\left(D_1^3+D_2^3\right);$ $P=4\pi\left(R_1^2+R_2^2\right)+\pi\left(D_1^2+D_2^2\right).$

V - об'єм; S - площа підстави; $S_{бок}$ - бічна поверхня; P - повна поверхня; h - висота; a, b, c - виміри прямокутного паралелепіпеда; A - апофема правильної піраміди і правильної усіченої піраміди; l - утворюючао конуса; p - периметр або окружність підстави; r - радіус підстави; d - діаметр підстави; R - радіус кулі; D - діаметр кулі; h' - висота сегмента, що утримується в секторі; R_1, R_1 - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь кулі.

14. *Правила диференціювання функцій*

Якщо $c=const$ (стала величина), $u=u(x)$ та $v=v(x)$ - функції, які можуть бути здиференційовані по x, то

$$c'=0;\quad x'=1;\qquad (u\cdot v)'=u'\cdot v\pm u\cdot v';\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v';\qquad (c\cdot u)'=c\cdot u';$$

15. *Похідні та диференціали елементарних функцій*

Похідні	*Диференціали*	*Похідні*	*Диференціали*
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1}dx$	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x dx$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
		$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x).$	

Похідні	*Диференціали*
$(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0)$	$d(a^x) = a^x \ln a dx, (a > 0)$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}$
$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}$

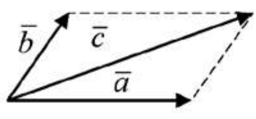
16. *Таблиця невизначених інтегралів*

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$
$\int ctgx dx = \ln\|\sin x\| + C$	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\| + C$	

17. *Додавання векторів*

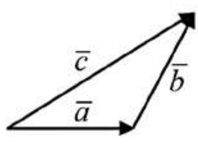
Вектори додаються за правилами:

паралелограма



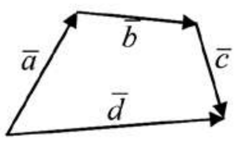
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

трикутника



$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$

замикаючої



$\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

18. *Віднімання векторів*

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, якщо $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$.

19. ***Координатна форма вектора***

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$$

де $\overline{i}$, $\overline{k}$, $\overline{j}$ - орти (взаємно перпендикулярні), які утворюю праву трійку координатних осей Ox, Oy, Oz;

a_x, a_y, a_z - проекції вектора на осі координат.

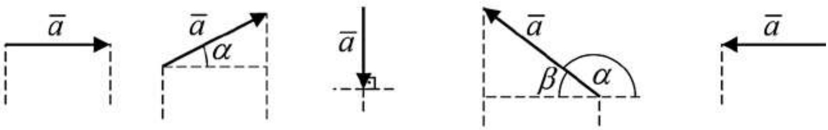
20. ***Проекції вектора на координатні осі***

Якщо задані кути α, β, γ, ($0 \le \alpha$, β, $\gamma \le \pi$), утворені вектором відповідно з координатними осями Ox, Oy, Oz, то

$$a_x = a\cos\alpha; \qquad a_y = a\cos\beta; \qquad a_z = a\cos\gamma.$$

Приклади

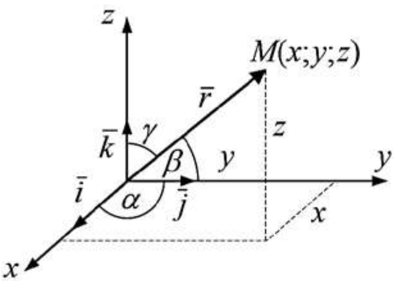
$\alpha = 0$ $\quad$ $0 < \alpha < 90^\circ$ $\quad$ $\alpha = 90^\circ$ $\quad$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\quad$ $\alpha = 180^\circ$



$a_x > a$ $\quad$ $a_x > a$ $\quad$ $a_x = 0$ $\quad$ $a_x < a$ $\quad$ $a_x < a$

$a_x = a$ $\quad$ $a_x = a\cos\alpha$ $\quad$ $a_x = a\cos\alpha = -a\cos\beta$ $\quad$ $a_x = -a$

21. ***Радіус-вектор точки, його модуль та напрямні косинуси***



$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\ .$$

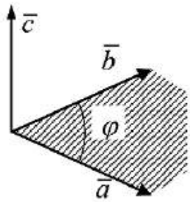
Напрямні косинуси

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{r}; \\ \cos\beta &= \frac{y}{r}; \\ \cos y &= \frac{z}{r}. \end{aligned}\right\}$$

Модуль-радіус вектор

$$r = |\overline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,$$

причому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



22. ***Скалярний добуток векторів (скаляр)***

$$\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=\overline{a}\cdot\overline{b}=ab\cos\varphi,\quad \text{де } \varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

23. ***Векторний добуток векторів***

$$\overline{a}\times\overline{b}=\left[\overline{a}\cdot\overline{b}\right]=\overline{c}\,.$$

Вектор $\overline{c}$ направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори, що перемножуються. Його напрям визначається за правилом правого гвинта: якщо обертати головку гвинта по найкоротшій відстані від першого множника до другого, то напрям руху самого гвинта дає напрям вектора $\overline{c}$.

Модуль векторного добутку

$$\left|\overline{c}\right|=c=a\cdot b\cdot \sin\varphi,\ \text{де } \varphi=\angle\left(\overline{a},\overline{b}\right).$$

24. ***Деякі фізичні сталі (константи)***

Швидкість світла у вакуумі	c=2.998·10^8 м/с
Відстань Земля-Місяць	*384400 км*
Гравітаційна стала	G=6.67·10^{-11} $м^3/(кг·с^2)$.
Прискорення вільного падіння (середнє)	g=9.807 $м/с^2$
Прискорення вільного падіння на Місяці	*1,62* $м/с^2$
Маса Землі	$M_З$=5.98·10^{24} кг
Середній радіус Землі	$R_З$=6.37·10^6 м
Швидкість звука в повітрі при t° С=0	331 м/с
1 *рад*	57.3° (57.29578°)
е	2.72 (2.7182818)

25. ***Гіперболічні функції***

гіперболічний синус | *гіперболічний косинус*

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\qquad ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Співвідношення гіперболічних функцій

$$ch^2x-sh^2x=1;\qquad thx\cdot cthx=1\,.$$

Формули диференціювання і інтегрування

$$dshx = chx \cdot dx\,; \qquad \int chx \cdot dx = shx + c\,;$$

$$dchx = shx \cdot dx\,; \qquad \int shx \cdot dx = chx + c\,;$$

$$dthx = \frac{dx}{ch^2 x}\,; \qquad \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c\,;$$

$$dcthx = -\frac{dx}{sh^2 x}\,; \qquad \int \frac{dx}{sh^2 x} = cthx + c.$$

26. *Диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами*

- *Лінійні однорідні рівняння*

$$\ddot{x} + p\dot{x} + gx = 0\,. \tag{E.1}$$

Підставивши $x{=}e^{\lambda t}$ в (E.1), отримаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + g = 0\,, \tag{E.2}$$

рішення якого має вигляд

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{E.3}$$

Загальне рішення рівняння (E.1) залежить від виду корнів λ_1 і λ_3.

Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0\,,$ то $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}\,,$

тоді загальне рішення (E.1)

$$x = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\frac{p}{2} \cdot t}\,. \tag{E.4}$$

Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = b^2 > 0\,;$ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = b\,;$ $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm b\,,$

то $$x = c_1 e^{\left(-\frac{p}{2}+b\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{p}{2}-b\right)}. \tag{E.5}$$

Якщо $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = -b^2 < 0$; $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = ib$; $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm ib$,

то $$x = e^{-\frac{p}{2}t}\left(c_1 \cos bt + c_2 \sin bt\right), \tag{E.6}$$

де c_1 і c_2 - постійні інтегрування визначаються з початкових умов задачі.

- *Лінійні неоднорідні рівняння*

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t). \tag{E.7}$$

Загальне рішення рівняння (E.7) складається із рішення однорідного рівняння $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ і часткове рішення даного рівняння (E.7), вид якого залежить від виду правої частини (E.7) $f(t)$

$$x = x_{од} + x_{част}. \tag{E.8}$$

♦ Якщо $f(t)=Q=const$, то $x_{част}=A$ (A - невизначений коефіцієнт). Підставляючи $x_{част}=A$ в (E.7), визначимо A, якщо

$$\ddot{x}_{част.} = 0; \qquad \dot{x}_{част.} = 0,$$

то $$q \cdot x_{част} = Q \rightarrow q \cdot A = Q \rightarrow A = \frac{Q}{q}, \tag{E.9}$$

звідки $$x_{част} = \frac{Q}{q}.$$

♦ Якщо $f(t)=at+b$, то $x_{част}=At^2+Bt+C$.

Підставляючи $x_{част}$ в (E.7) ($\dot{x}_{част} = 2At + B$; $\ddot{x}_{част} = 2A$), отримаємо

$$2A + P \cdot 2At + PB + qAt^2 + qBt + qc = at + b.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в лівій і правій частинах, отримаємо

$$t^2 : \to qA = 0 \to A = 0\,; \qquad t : \to 2PA + qB = 0 \to B = \frac{a}{q} \qquad (A{=}0);$$

$$t^0 : \to 2A + qC = b \to C = \frac{b}{q} \qquad (A{=}0).$$

Тоді
$$x_{част} = \frac{a}{q}t + \frac{b}{q}\,. \tag{E.10}$$

27. *Диференціальні рівняння руху точки під дією сили*

- Сила $F{=}const$

$$m\ddot{x} = F\,; \qquad \ddot{x} = \frac{F}{m} = Q = const\,; \tag{E.11}$$

$$\dot{x} = \int Q dt\,; \qquad \dot{x} = Qt + C_1\,.$$

Загальне рішення

$$x = Q\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,. \tag{E.12}$$

- Сила $F{=}f(t)$

$$m\ddot{x} = F\,; \qquad \ddot{x} = \frac{1}{m}f(t); \qquad \dot{x} = \int \frac{1}{m}f(t)dt + c_1\,.$$

Загальне рішення

$$x = \int\left[\int \frac{1}{m}f(t)dt + c_1\right]dt + c_2\,. \tag{E.13}$$

- Сила $\overline{F} = \alpha\overline{v}\ \left(F_x = \alpha v_x = \alpha\dot{x}\right)$

$$m\ddot{x} = F_x\,; \qquad \ddot{x} = \frac{\alpha}{m}v_x\,; \qquad \ddot{x} = \frac{\alpha}{m}\dot{x}\,;$$

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}; \qquad \frac{d\dot{x}}{\dot{x}}=\frac{\alpha}{m}dt \to ln|\dot{x}|=\frac{\alpha}{m}t+c_1;$$

Початкові умови: $t=0$; $\dot{x}_0=v_0$; $x_0=a$;

$$c_1=ln\,v_0; \qquad ln\left|\frac{\dot{x}}{v_o}\right|=\frac{\alpha}{m}t. \qquad \text{(E.14)}$$

Загальне рішення

$$\dot{x}=v_0\cdot e^{\frac{\alpha}{m}t} \to x=\frac{m v_0}{\alpha}\cdot e^{\frac{\alpha}{m}t}+c_2.$$

- Сила $F_x=\beta x$

$$m\ddot{x}=\beta x; \qquad \ddot{x}=\frac{\beta}{m}x. \qquad \text{(E.15)}$$

Якщо $\beta<0$, то $\ddot{x}+k^2x=0$; $\left(k^2=\frac{\beta}{m}\right)$; $\lambda_{1,2}=\pm ik$.

Загальне рішення $C_1 coskt+C_2 sinkt.$ (E.16)

Якщо $\beta>0$, то підставивши в (E.15) отримаємо

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}; \qquad \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}=\frac{\beta}{m}x \to \dot{x}d\dot{x}=\frac{\beta}{m}xdx;$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{\beta}{m}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1; \qquad \dot{x}=\sqrt{\frac{\beta}{m}x^2+2C_1}=\frac{dx}{dt}.$$

Звідси загальне рішення

$$x=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta}{m}x^2+2C_1}}=t+C_2. \qquad \text{(E.17)}$$

- Сила $F=\alpha v+\beta$ $\left(F_x=\alpha\dot{x}+b\right)$

$$m\ddot{x}=F_x; \qquad \ddot{x}=a\dot{x}+b, \qquad \text{(E.18)}$$

де $a = \dfrac{\alpha}{m}$; $b = \dfrac{\beta}{m}$.

$$\frac{d\dot{x}}{a\dot{x}+b} = dt \rightarrow \frac{1}{a} ln\left|a\dot{x}+b\right| = t + C_1 .$$

Початкові умови: $t = 0$; $\dot{x}_0 = v_0$;

$$C_1 = \frac{1}{\alpha} ln(\alpha v_0 + b);$$

$$ln\left|\frac{a\dot{x}+b}{\alpha v_0 + b}\right| = at \rightarrow a\dot{x} + b = (a v_0 + b)\cdot e^{at};$$

$$\dot{x} = \left[(a v_0 + b)\cdot e^{at} - b\right]\frac{1}{a}.$$

Загальне рішення $$x = \int\left[(a v_0 + b)e^{at} - b\right]\frac{dt}{a} + C_2 . \qquad \text{(E.19)}$$

Додаток Б
Вказівник задач

Для нотаток

Для нотаток

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ШТАНЬКО Петро Костянтинович
ОМЕЛЬЧЕНКО Ольга Станіславівна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА В РІШЕННЯХ ЗАДАЧ ІЗ ЗБІРНИКА І. В. МЕЩЕРСЬКОГО.

ЧАСТИНА ІІ. КІНЕМАТИКА

Навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей

Видавець:
ТОВ «Видавництво „СТАТУС“»
Адреса редакції: Україна, 69057, м. Запоріжжя,
Соборний просп., буд. 158, оф. 249.
моб. +38 (068) 448-11-28, mail@status.zp.ua
http://status.zp.ua

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5316 від 03.04.2017

Здано в набір 17•IV•2024. Підписано до друку 26•IV•2024. Формат 60x84 1/16.
Папір офсетний № 1. Гарнітура Таймз. Друк цифровий. Ум. друк. арк. 15,35.
Обл.-вид. арк. 7,85. Друк. арк. відбиток 4603,5. Наклад 300 прим.
Замовлення № 12 039/04.2024-А. Ціна договірна.
Термін придатності книжки *необмежений.*

Макет розроблений:
Ольга Станіславівна ОМЕЛЬЧЕНКО
Макет віддрукований:
поліграфічним підприємством ФОП Яндола О.В.
м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 51 , т. 067-270-6000, www.copy.zp.ua

ISBN 978-617-8040-64-2