УДК 539.3

Антоненко Н.М.[1], Горбань А.М.[2]
[1] канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»
[2] студ. гр. М-119сп НУ «Запорізька політехніка»

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПЛИТИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

Розглянемо двошарову плиту, що складається з двох пружних однорідних невагомих шарів. На нижній та верхній поверхнях плити задано теплове навантаження. На спільній межі шарів виконуються умови неідеального теплового контакту. Необхідно знайти розподіли температури в шарах плити.

У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат так, як показано на рис. 1.

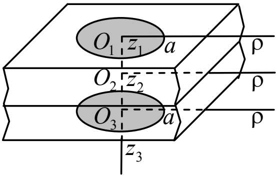

Рисунок 1 – Двошарова плита.

Крайові умови: $T_1(\rho,0)=\begin{cases}Q_1, \rho\le a,\\ 0,\ \rho>a,\end{cases}$ $T_2(\rho,h_2)=\begin{cases}Q_2, \rho\le a,\\ 0,\ \rho>a,\end{cases}$.

Умови на спільній межі шарів плити:

$$k_{T1}\frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho,h_1)=\frac{1}{R}\left[T_2(\rho,0)-T_1(\rho,h_1)\right],\ k_{T2}\frac{\partial T_2}{\partial z}(\rho,0)=k_{T1}\frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho,h_1), \quad (1)$$

де R – коефіцієнт теплового опору, k_{Tk} – коефіцієнти теплопровідності, h_k – товщини шарів, $k=1,2$.

У просторі трансформант Ханкеля температуру в точках окремого шару можна представити у такому вигляді:

$$\overline{T}_k(p,z)=\cosh pz\,\eta_k+\sinh pz\,\varepsilon_k, \quad (2)$$

де

$$\eta_k = \overline{T}_k(p,0),\ \varepsilon_k = \frac{1}{p}\frac{d\overline{T}_k}{dz}(p,0),\ k = 1,2. \qquad (3)$$

Із першої крайової умови знаходимо $\eta_1 = \overline{T}_1(p,0)$. Застосувавши до умов (1) пряме інтегральне перетворення Ханкеля нульового порядку та формули (2), (3), отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно трьох невідомих функцій ε_1, η_2, ε_2. Для побудови третього рівняння введемо третій фіктивний шар. Вважатимемо, що тепловий контакт на межі другого та третього шарів ідеальний, тобто $T_3(\rho,0) = T_2(\rho,h_2)$. Остаточно, отримуємо систему:

$$\begin{cases} \eta_3 = C_2\,\eta_2 + S_2\,\varepsilon_2, \\ \eta_2 = (C_1 + L_1 p S_1)\eta_1 + (S_1 + L_1 p C_1)\varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 = \Delta(S_1\,\eta_1 + C_1\,\varepsilon_1), \end{cases}$$

де η_3 – відома функція, $L_1 = R\,k_{T1}$, $\Delta = k_{T1}/k_{T2}$, $S_k = \mathrm{sh}\,p_k$, $C_k = \mathrm{ch}\,p_k$, $p_k = ph_k$, $k = 1,2$.

Розв'язуємо систему відносно функцій ε_1, η_2, ε_2, підставляємо їх у (2) та застосовуємо до отриманого виразу для трасформанти температури обернене перетворення Ханкеля.

Чисельні розрахунки виконано для плити з таким тепловим навантаженням: $T_1(\rho,0) = \begin{cases} 1, & \rho \le h_1, \\ 0, & \rho > h_1, \end{cases}$ $T_2(\rho,h_2) = 0$. Вплив коефіцієнта теплового опору на розподіл температури в точках нижньої межі верхнього шару плити $T_1(\rho,h_1)$ досліджено для трьох типів плит: 1 – $k_{T1}/k_{T2} = 0.1$; 2 – $k_{T1}/k_{T2} = 1$; 3 – $k_{T1}/k_{T2} = 10$. Зроблено такі висновки: збільшення коефіцієнта теплового опору призводить до збільшення $T_1(\rho,h_1)$; найменш суттєвий вплив на розподіл температури $T_1(\rho,h_1)$ спостерігається для плити, у якої коефіцієнт теплопровідності верхнього шару більше ніж нижнього.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Величко І. Г. Осесиметрична мішана задача термопружності для багатошарової основи / І. Г. Величко, І. Г. Ткаченко // Динамические системы. – 2009. – Вып. 26. – С. 3–12.