

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни

„ВАКУУМНА ТА ПЛАЗМОВА ЕЛЕКТРОНІКА“

для студентів спеціальності

176 „Мікро- та наносистемна техніка“

(освітня програма: „Мікро- та нанoeлектронні прилади і пристрої“)
денної й заочної форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни „Вакуумна та плазмова електроніка“ для студентів спеціальності 176 „Мікро- та наносистемна техніка“ (освітня програма: „Мікро- та нанoeлектронні прилади і пристрої“) денної й заочної форм навчання / Укл.: Валентин ПОГОСОВ, Андрій КОРОТУН, Ніна НАГОРНА. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 64 с.

Укладачі: Валентин ПОГОСОВ, проф., д-р фіз.-мат. наук,
Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-мат. наук,
Ніна НАГОРНА, старший викладач

Рецензент: Валерій КУРБАЦЬКИЙ, доц., канд.фіз.-мат. наук

Відповідальний за випуск: Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-мат. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
інформаційної безпеки та
нанoeлектроніки

Протокол №1
від “ 08 “ серпня 2024 р.

на засіданні НМК ФІБЕК
Протокол №1
від “ 15 “ серпня 2024 р.

ЗМІСТ

1 Фізика і техніка вакууму	4
1.1 Основні формули і визначення	4
1.1.1 Елементи кінетичної теорії та газові закони	4
1.1.2 Закон Дальтона	5
1.1.3 Явища переносу	8
1.1.4 Критерій визначення меж режимів протікання газу в трубопро- водах.	10
1.1.5 Пропускна здатність отворів	11
1.1.6 Перехідний режим протікання	13
1.1.7 Пропускна здатність трубопроводів	14
1.1.7.1 Молекулярний режим	14
1.1.7.2 В'язкісний режим	16
1.1.7.3 Вибір форвакуумного насосу для дифузійного насосу	18
1.2 Приклади розв'язування задач	18
1.3 Задачі для самостійного розв'язування	26
2 Рух заряджених частинок в електричних і магнітних полях	29
2.1 Основні формули та визначення	29
2.1.1 Рух електрона в однорідних полях	29
2.1.2 Однорідне магнітне поле	30
2.1.3 Рух електрона в схрещених полях	32
2.2 Приклади розв'язування задач	35
2.3 Задачі для самостійного розв'язування	44
3 Електричний розряд у газах	46
3.1 Основні формули і визначення	46
3.1.1 Акти взаємодії частинок в газі	48
3.2 Приклади розв'язування задач	50
3.3 Задачі для самостійного розв'язування	58
Рекомендована література	60
Додаток А Параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу . .	61
Додаток Б Параметри електронного газу	62
Додаток В Ефективні перерізи іонізації атомів деяких парів і газів . .	63
Додаток Г Потенціали йонізації і ефективні перерізи йонізації молекул і атомів деяких газів	64

1 ФІЗИКА І ТЕХНІКА ВАКУУМУ

1.1 Основні формули і визначення

1.1.1 Елементи кінетичної теорії та газові закони

Ідеальні гази підкоряються *рівнянню стану Менделєєва – Клапейрона*:

$$PV = Nk_B T, \quad (1.1)$$

де P – тиск газу; V – об'єм газу; N – кількість частинок газу в об'ємі, T – абсолютна температура.

Константи: $R = k_B N_A = 8,314$ Дж / моль · К – універсальна газова стала; стала Больцмана $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж / К = $8,617 \cdot 10^{-5}$ еВ/К ; число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

Загальна кількість молекул у v молях дорівнює

$$N = vN_A, \quad (1.2)$$

$$PV = vRT. \quad (1.3)$$

Уведемо поняття *мольного об'єму*

$$v_\mu = \frac{V}{v}, \quad (1.4)$$

тоді рівняння (1.3) матиме вигляд:

$$Pv_\mu = RT. \quad (1.5)$$

У багатьох випадках доречно представити рівняння (1.3) з використанням значення маси газу в явному вигляді:

$$PV = \frac{m_r}{M} RT, \quad (1.6)$$

де m_r – маса газу; $M = \frac{m_r}{v}$ – маса одного моля газу.

1.1.2 Закон Дальтона

Повний тиск суміші газів, які хімічно не взаємодіють, дорівнює сумі парціальних тисків окремих газів.

Парціальним тиском газу, який входить у суміш, називають тиск, під яким перебував би цей газ, якщо б із суміші були видалені всі інші гази, а об'єм і температура збереглися попередніми.

$$P_{\Sigma} = P_1 + P_2 + \dots + P_n, \quad (1.7)$$

де P_{Σ} – повний тиск суміші; $P_1, P_2, \dots, P_n$ – парціальні тиски.

Кількість молекул в одиниці об'єму

$$n = \frac{P}{k_B T}. \quad (1.8)$$

Основне рівняння кінетичної теорії газів має вигляд:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{KB}}^2}{2}, \quad (1.9)$$

де m – маса молекули; v_{KB} – середня квадратична швидкість молекули.

При зіткненнях одна з одною або із стінками вакуумної камери молекули газу змінюють свої швидкості як за величиною, так і за напрямком, через що виникло поняття функції розподілу молекул за швидкостями, введене Максвеллом.

Закон розподілу молекул за швидкостями (закон Максвелла)

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN_v}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad (1.10)$$

де dN_v – кількість молекул, швидкості яких обмежені від v до $v + dv$.

Найімовірніша швидкість – швидкість, за якої спостерігається максимум функції розподілу (рис. 1.1):

$$v_n = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (1.11)$$

Якщо ввести позначення $u = \frac{v}{v_n}$, то (1.10) запишеться у вигляді

$$\frac{1}{N} \frac{dN_v}{du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 v^2 e^{-u^2}. \quad (1.12)$$

Середня квадратична швидкість молекули

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (1.13)$$

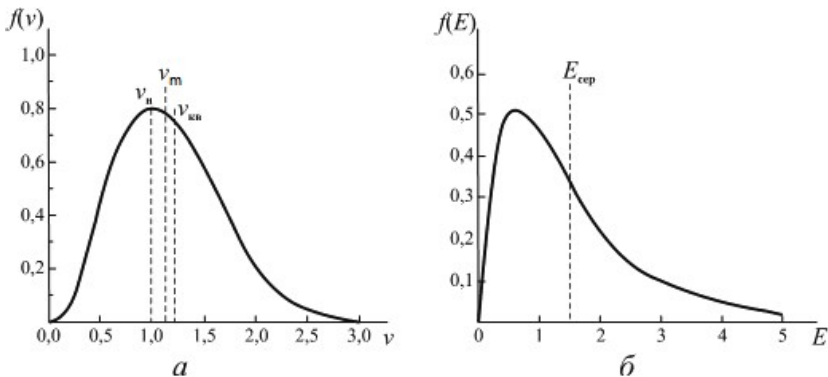
Середня арифметична швидкість

$$v_a = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}. \quad (1.14)$$

Розподіл молекул за енергіями має вигляд (рис. 1.1)

$$\frac{1}{N} \frac{dN_E}{dE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (k_B T)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{k_B T}} \sqrt{E}, \quad (1.15)$$

де E – енергія поступального руху молекули; dN_E – кількість молекул, енергія яких лежить в інтервалі від E до $E + dE$.



a – за швидкостями; $б$ – за енергіями;

Рисунок 1.1 – Функції розподілу Максвелла у безрозмірних одиницях

Надалі ми будемо зазвичай користуватись середньою арифметичною швидкістю і лише при розрахунку кінетичної енергії – середньою квадратичною швидкістю.

Середня довжина вільного пробігу визначається як відстань, при проходженні якої частинка в середньому зіштовхується з однією молекулою середовища. Зіткнення може виникати, якщо відстань між центрами молекул не більше діаметра молекули d (рис. 1.2.).

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}, \quad \sigma = \pi d^2, \quad (1.16)$$

де σ – переріз зіткнення; d – ефективний діаметр молекули (рис. 1.2).

Середня довжина вільного пробігу молекули з урахуванням залежності перерізу зіткнення від температури:

$$\lambda_T = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma\left(1 + \frac{C}{T}\right)}, \quad (1.17)$$

де λ_T – середня довжина вільного пробігу при температурі T ; C – стала Сезерленда.

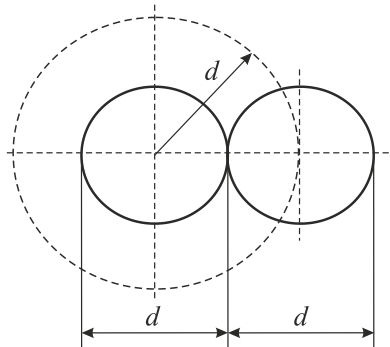


Рисунок 1.2 - Зіткнення двох однакових молекул

Середня кількість молекул, які зіштовхуються із стінкою:

$$Z = \frac{1}{4} n v = \frac{P}{\sqrt{2 \pi m k_B T}}. \quad (1.18)$$

1.1.3 Явища переносу

Коефіцієнт динамічної в'язкості:

$$\eta = \frac{1}{3} n m v \lambda, \quad (1.19)$$

або

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda, \quad (1.20)$$

де $\rho = n m$ – густина газу.

Коефіцієнт теплопровідності газу:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho v \lambda C_V, \quad (1.21)$$

де C_V – питома теплоємність газу при $V = \text{const}$.

Коефіцієнт самодифузії газів:

$$D = \frac{1}{3} v \lambda. \quad (1.22)$$

Зв'язок між коефіцієнтами переносу:

$$\kappa = \eta C_V, \quad (1.23)$$

$$D = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1.24)$$

Кількість молекул, які пройшли шлях x без зіткнень:

$$n = n_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (1.25)$$

Кількість молекул, середній пробіг яких обмежений x і $x + dx$:

$$dn = \frac{1}{\lambda} n_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx. \quad (1.26)$$

Швидкістю відкачування посудини або ефективною швидкістю дії насосу називають об'єм газу, який поступає в одиницю часу із судини в трубопровід при даному тиску у відкачуваній судині.

Швидкістю дії насосу при даному впускному тиску називають об'єм газу, який поступає в працюючий насос в одиницю часу при цьому тискові.

Кількість газу, який протікає в одиницю часу в будь-якому перерізі трубопроводу, визначається як добуток тиску P_1 в цьому перерізі на об'єм газу $V_1 = S_1 \cdot t$, який проходить через нього в одиницю часу:

$$Q = P_1 S_1. \quad (1.27)$$

Потік газу, який протікає у вхідному перерізі вакуумного насосу, називають продуктивністю насосу при даному впускному тиску P_i

$$Q = P_n S_n. \quad (1.28)$$

Провідність трубопроводу (будь-якого елемента вакуумної системи) визначається як

$$U = \frac{Q}{P_1 - P_2}, \quad (1.29)$$

де U – провідність; Q – потік газу; $(P_1 - P_2)$ – різниця тисків на кінцях трубопроводу.

Результуюча провідність послідовного з'єднання трубопроводів:

$$U_{\text{посл}}^{-1} = \sum_i U_i^{-1}. \quad (1.30)$$

Результуюча провідність паралельно з'єднаних трубопроводів:

Основне рівняння вакуумної техніки:

$$S_{\text{сф}} = \frac{S_n U}{S_n + U}, \quad (1.31)$$

де $S_{\text{эф}}$ – ефективна швидкість дії наносу (швидкість відкачування су-
дини); S_i – швидкість дії наносу; U – провідність трубопроводу.

Адіабатичний процес

$$PV^x = \text{const}, \quad (1.32)$$

де $x = C_{P, \text{num}} / C_{V, \text{num}}$ – показник адіабати і питомі теплоємності газу
відповідно при постійному тиску і об'ємі.

Температура, густина газу і тиск при адіабатичному розширенні
взаємопов'язані наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1}; \quad \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^x, \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{x-1}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{(x-1)}{x}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

де індекси 1 і 2 відповідають початковим і кінцевим значенням відпо-
відних параметрів.

Для одноатомного газу $x = 5/3$, для двоатомного $x = 7/5$, для ба-
гатоатомного $x = 4/3$.

На практиці зазвичай мають справу з проміжним процесів, коли
між газом і стінками є неповний теплообмін. У цьому разі стан газу
описують рівнянням

$$PV^n = \text{const}, \quad (1.34)$$

де n – показник політропи: $1 < n < x$.

1.1.4 Критерій визначення меж режимів протікання газу в трубопроводах

Режим протікання газу в трубопроводі визначають співвідно-
шенням середньої довжини вільного пробігу молекул газу з діаметром
трубопроводу.

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$

$$\lambda = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{P} \text{ (м)}, \quad (1.35)$$

де P – тиск у мм рт.ст.

В'язкісний режим: $Pd > 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м}$.

Молекулярний режим: $Pd < 0,02 \text{ Па} \cdot \text{м}$.

Молекулярно-в'язкісний режим: $0,02 < Pd < 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м}$.

1.1.5 Пропускна здатність отворів

Розглянемо *молекулярний режим протікання газу*. Отвором називають канал, у якого товщина стінок набагато менше діаметра. Якщо поверхня, в якій є отвір, не нескінченна, а має обмежену площу S_0 , то провідність отвору S збільшується із зменшенням $\frac{S_0}{S}$.

У випадку циліндричного резервуара з отвором в основі циліндра (рис. 1.3) збільшення провідності отвору викликано деякою мірою фокусуючою дією циліндра на молекули, що рухаються в резервуарі у напрямку отвору S .

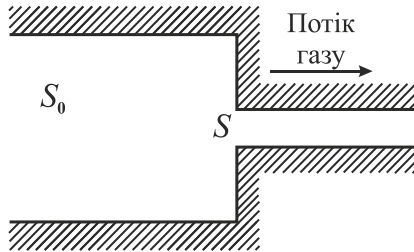


Рисунок 1.3 – Циліндричний резервуар з отвором в основі циліндра

Якщо відношення $S_0/S < 1$, то площу отвору S замінюють на ефективну площу $S_{\text{еф}}$, і такий отвір називають великим:

$$S_{\text{еф}} = \frac{S}{1 - S_0/S}. \quad (1.36)$$

З цією поправкою можна не рахуватися, якщо відношення $\frac{S_0}{S}$ значно менше одиниці (разів у 10). Навпаки, коли це відношення дорівнює 1, провідність отвору стає рівною нескінченності, тобто в цьому крайньому разі отвір вже не виправдовує свою назву і перестає відігравати роль окремого елемента трубопроводу.

Провідність малого отвору

$$U = 36,4S\sqrt{T/M} \quad (1.37)$$

або для повітря при 293 К

$$U = 116S.$$

Провідність великого отвору

$$U = 36,4S\sqrt{T/M} \frac{S}{1 - S_0/S} \quad (1.38)$$

або для повітря при 293 К

$$U = 116 \frac{S}{1 - S_0/S}.$$

Розглянемо **в'язкісний режим протікання газу**. Провідність отвору у в'язкісному режимі протікання залежить від перепаду тиску $\tau = P_1/P_2$, де P_1 – тиск у судині, із якої витікає газ.

Провідність малого отвору: із зменшенням тиску $\tau \leq 1$ провідність зростає до певного значення, відповідного критичному відношенню

$$\tau_{кр} = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (1.39)$$

Для одноатомного газу $\tau_{кр} = 0,437$; для двоатомного газу і повітря $\tau_{кр} = 0,528$; для багатоатомного газу $\tau_{кр} = 0,526$.

При відношеннях тиску $\frac{P_1}{P_2} < \tau_{\text{кр}}$ кількість газу, який перетікає, залишається незмінною. При $\tau > \tau_{\text{кр}}$ провідність отвору визначається виразом

$$U = S \frac{\tau^{\frac{1}{x}}}{1 - \tau} \sqrt{\left(1 - \tau^{\frac{x-1}{x}}\right) \frac{2x}{x-1} \frac{RT}{M}}. \quad (1.40)$$

Для повітря ($M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$) і кімнатної температури ($T = 293 \text{ К}$):

$$- \text{при } 0,528 \leq \tau < 1 \quad U = 766 \tau^{0,714} \frac{S}{1 - \tau} \sqrt{1 - \tau^{0,286}}, \quad (1.41)$$

$$- \text{при } \tau < 0,528 \quad U = 200 \frac{S}{1 - \tau}. \quad (1.42)$$

$$- \text{при } \tau < 0,1 \quad U = 200S. \quad (1.43)$$

Провідність більшого отвору визначається за формулами для провідності малого отвору із врахуванням поправочного коефіцієнта $\frac{S}{1 - S_0/S}$.

1.1.6 Перехідний режим протікання

У разі перехідного молекулярно-в'язкісного режиму зручного розрахунку для пропускної здатності не існує. Користуються зазвичай формулою, запропонованою Кнудсенем:

$$U = U_{\text{в}} + bU_{\text{м}}, \quad (1.44)$$

де b – коефіцієнт, який враховує середній тиск у трубопроводі

$$b = \frac{1 + D \langle P \rangle \sqrt{\frac{M}{RT}}}{\eta} \cdot \frac{\eta}{1 + 1,24 D \langle P \rangle \sqrt{\frac{M}{RT}}}, \quad (1.45)$$

де $\langle P \rangle = \frac{P_1 + P_2}{2}$ – середнє значення тиску.

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$b = \frac{1 + 1,25(D/\lambda)}{1 + 1,55(D/\lambda)}. \quad (1.46)$$

У широкому діапазоні тисків коефіцієнт b змінюється від 0,8 до 1,0. Для технічних розрахунків середнє значення $b = 0,9$ може бути прийнято постійним.

1.1.7 Пропускна здатність трубопроводів

1.1.7.1 Молекулярний режим

Провідність довгого ($l > 20D$) прямолінійного циліндричного трубопроводу має вигляд

$$U = 38,1 \frac{D^3}{l} \sqrt{\frac{T}{M}}. \quad (1.47)$$

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$U = 121 \frac{D^3}{l}. \quad (1.48)$$

Розглянемо провідність короткого трубопроводу. Із вищенаведених формул для провідності довгого трубопроводу виходить, що із зменшенням довжини каналу його провідність зростає, і при $l = 0$ має прямувати до нескінченності. Природно, що це неможливо, оскільки залишається отвір, провідність якого кінцева

$$\frac{1}{U_{\text{кор}}} = \frac{1}{U_{\text{довг}}} + \frac{1}{U_{\text{отв}}} . \quad (1.49)$$

Більш точні результати отримують при використанні *формули Клаузінга*, яка враховує опір вхідного отвору:

$$U = 36,4SK \sqrt{T/M} , \quad (1.50)$$

де K – множник, який є функцією відношення $\frac{l}{D}$ (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Поправочний коефіцієнт K у рівнянні (1.50)

l/D	K	l/D	K	l/D	K
0	1	0,85	0,5518	4,0	0,2316
0,05	0,9524	0,90	0,5384	4,5	0,2131
0,10	0,9092	0,95	0,5256	5,0	0,1973
0,15	0,8699	1,00	0,5136	6,0	0,1719
0,20	0,8341	1,1	0,4914	7,0	0,1523
0,25	0,8013	1,2	0,4711	8,0	0,1367
0,30	0,7711	1,3	0,4527	9,0	0,1240
0,35	0,7434	1,4	0,4359	10,0	0,1135
0,40	0,7177	1,5	0,4205	15	0,0997
0,45	0,6940	1,6	0,4062	20	0,0613
0,50	0,6720	1,7	0,3931	25	0,0499
0,55	0,6514	1,8	0,3809	30	0,0420
0,60	0,6320	1,9	0,3695	35	0,0363
0,65	0,6139	2,00	0,3589	40	0,0319
0,70	0,5970	2,5	0,3146	45	0,0285
0,75	0,5810	3,0	0,2807	50	0,0258
0,80	0,5659	3,5	0,2537	500	0,002658
				Понад 500	$\frac{4}{3} \frac{d}{l}$

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$U_{\text{кор}} = 36,4SK . \quad (1.51)$$

У випадку коротких трубок поправка не має застосовуватись, якщо елемент трубопроводу попереду трубки має діаметр, рівний діаметру трубки або менший за нього.

Вплив локального опору при молекулярному режимі протікання газу враховують деяким збільшенням розрахункової довжини трубопроводу проти фактичної. Так, вплив вигину трубопроводу під кутом 90° враховується подовженням трубопроводу на $1,33$ діаметра, тобто:

$$l_{\text{розр}} = l_{\text{факт}} + 1,33Dn, \quad (1.52)$$

де n – кількість вигинів під кутом 90° .

1.1.7.2 В'язкісний режим

Провідність циліндричного довгого трубопроводу ($l > 20D$) круглого перерізу:

$$U = \frac{\pi R^4 \langle P \rangle}{8\eta l}, \quad (1.53)$$

де R – радіус трубопроводу; η – динамічна в'язкість;
 $\langle P \rangle = \frac{P_1 + P_2}{2}$ – середнє значення тиску в трубопроводі.

Для повітря при $T=293$ К:

$$U = 1360 \frac{D^4 \langle P \rangle}{l}. \quad (1.54)$$

Провідність трубопроводу при протіканні по ньому будь-якого газу визначають за формулою:

$$U_1 = \beta_1 U, \quad (1.55)$$

де U – провідність трубопроводу при протіканні по ньому повітря; β – коефіцієнт, що враховує різницю динамічних в'язкостей досліджуваного газу η_1 і повітря η (табл. 1.2):

$$\beta_1 = \frac{\eta_1}{\eta} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 \sqrt{\frac{M_1}{M}}, \quad (1.56)$$

де σ , σ_1 – діаметри молекул повітря і досліджуваного газу; M , M_1 – молекулярна маса повітря і досліджуваного газу.

Таблиця 1.2 – Значення β_1 для деяких газів

Газ	Повітря	H ₂	He	H ₂ O	Ne	N ₂	O ₂	Ar	CO ₂
β_1	1	2,06	0,93	1,94	0,58	1,04	0,9	0,84	1,24

Провідність коротких трубопроводів ($l < 20D$) визначають за емпіричними залежностями

$$U = \frac{\pi D^4 \langle P \rangle}{128 \eta l \left[1 + 4,54 \cdot 10^{-2} \frac{MC}{1 + 0,03 \cdot Q/l} \right]}. \quad (1.57)$$

Для повітря при $T = 293$ К :

$$U = 1360 \frac{\langle P \rangle}{l} \frac{D}{1 + 1 + 0,03(Q/l)}. \quad (1.58)$$

Якщо потік Q невідомий, то в це рівняння підставляють довільне значення Q і розрахунок ведуть методом послідовних наближень до тих пір, поки різниця між прийнятим значенням і значенням $Q = U \Delta P$ не стане меншою за задану точність розрахунку.

Протікання газу в перехідному режимі описують в основній емпіричній залежності для вузьких діапазонів λ/D .

Провідність довгого циліндричного трубопроводу ($l > 20D$) визначають за емпіричними залежностями (1.44).

Провідність коротких трубопроводів ($l < 20D$) при молекулярно-в'язкісному режимі слід розраховувати за формулою (1.44), підставляючи в неї значення провідності досліджуваного короткого трубопроводу, розраховані відповідно рекомендаціям для в'язкісного і молекулярного режимів протікання газу.

1.1.7.3 Вибір форвакуумного насосу для дифузійного насосу.

Параметри форвакуумного насосу, який відповідає даному дифузійному насосу, визначають, виходячи із рівняння нерозривності протікання газу

$$P_p S_p = P_{\text{дифуз}} S_{\text{дифуз}}, \quad (1.59)$$

де P_p – тиск на вході ротаційного насосу (тобто на виході дифузійного насосу або тиску форвакууму P_0); $P_{\text{дифуз}}$ – тиск на вході у дифузійний насос (або ж робочий тиск P).

Для надійності в роботі має виконуватись нерівність

$$P_0 S_p = P S_{\text{дифуз}}. \quad (1.60)$$

Оскільки S_p і $S_{\text{дифуз}}$ є функціями тиску, то умова (1.59) має виконуватися навіть в більш несприятливому разі, а саме

$$P_{0\min} S_{p\min} = P_{\max} S_{\text{дифуз}\max}, \quad (1.61)$$

де $P_{\max}$ – максимальний робочий тиск дифузійного насосу; $P_{0\min}$ – мінімальний тиск форвакууму; $S_{\text{дифуз}\max}$ – максимальна швидкість відкачування дифузійного насосу; $S_{p\min}$ – швидкість відкачування ротаційного насосу при $P_{0\min}$.

В умові (1.59) враховано деякий запас, пов'язаний із тим, що $P_{\max}$ і $S_{\text{дифуз}\max}$ не мають місця одночасно.

Отже, швидкість відкачування форвакуумного насосу має визначатися з умови:

$$S_{p\min} > \frac{P_{\max}}{P_{0\min}} S_{0\max}. \quad (1.62)$$

1.2 Приклади розв'язування задач

1.2.1 Яку максимальну концентрацію молекул CO_2 , газокінетичний діаметр яких $d = 3,2 \cdot 10^{-10}$ м, можна утворити в сферичній посудині

з $D = 1$ м, щоб середня довжина вільного пробігу перевищувала діаметр?

Розв'язання

За умовою задачі $\lambda \geq D$. Середня довжина вільного пробігу, згідно (1.16),

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

тому
$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_{\max}} \geq D.$$

Звідси отримуємо

$$n_{\max} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D} = \frac{1}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1} = 2,3 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

1.2.2 Чому дорівнює середня квадратична швидкість молекул ідеального газу, який підлягає розподілу Максвелла?

Розв'язання

Середня квадратична швидкість за означенням

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}},$$

де $\overline{v^2}$ – середнє значення квадрата швидкості, яке дорівнює

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^4 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv = \frac{3}{2} \alpha^2,$$

де

$$\alpha^2 = \frac{2k_B T}{m}, \text{ звідки } v_{\text{кв}} = \alpha \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m} \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

1.2.3 Вважаючи, що газокінетичний діаметр молекули CO_2 $d = 3,2 \cdot 10^{-10}$ м, визначте середню довжину її вільного пробігу за температури 50°C і тиску $133,3$ Па.

Розв'язання

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії маємо $n = \frac{p}{k_B T}$, тоді середня довжина вільного пробігу, згідно з (1.16),

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 323}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 133,3} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

1.2.4 Чому дорівнює середня арифметична швидкість молекул ідеального газу, який підлягає розподілу Максвелла?

Розв'язання

Згідно означення середня арифметична швидкість

$$v_a = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \quad (1)$$

де $f(v)$ – функція розподілу молекул за модулем швидкості.

Підставляючи $f(v)$ в (1), матимемо

$$v_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv. \quad (2)$$

Уводячи позначення $\frac{mv^2}{2k_B T} \equiv x$, $dv = \frac{k_B T}{mv} dx$, з (2) отримаємо

$$v_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2k_B T}{m} \frac{k_B T}{m} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

1.2.5 Знайдіть середню частоту зіткнень в умовах прикладу 1.2.3.

Розв'язання

Оскільки $v_a = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ то для частоти зіткнень ν знаходимо

$$v = \frac{v_a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{1}{7,4 \cdot 10^{-5}} \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 323}{3,14 \cdot 44 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = 4,9 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

1.2.6 Дві посудини A і B , що містять повітря, з'єднані між собою капіляром із краном. Посудина A занурена у водяну ванну з температурою $t_1 = 100^\circ \text{C}$, а посудина B – в охолоджуючу суміш з температурою $t_2 = -20^\circ \text{C}$. Об'єм посудини A дорівнює 250 см^3 , а посудини B – 400 см^3 . Спочатку при закритому крані і роз'єднаних посудинах тиск повітря в посудинах A і B дорівнював відповідно $P_1 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ і $P_2 = 0,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Знайдіть тиск повітря, який встановиться в посудинах після того, як відкриють кран.

Розв'язання

Після того, як відкрили кран, тиск повітря в посудинах A і B буде однаковий і рівний P . Оскільки температури повітря в посудинах A і B різні, то деяка частина газу перейде з однієї посудини в іншу. Нехай v_1 і v_2 – число молів повітря в посудинах A і B до їх з'єднання, а v'_1 і v'_2 – після їх з'єднання. Запишемо рівняння стану для повітря в посудинах A і B до і після їх з'єднання:

$$P_1 V_1 = v_1 R T_1, \quad P_2 V_2 = v_2 R T_2, \quad P V_1 = v'_1 R T_1, \quad P V_2 = v'_2 R T_2.$$

Звідси маємо

$$v_1 + v_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} \right), \quad v'_1 + v'_2 = \frac{P}{R} \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right).$$

Загальна кількість повітря в посудинах є сталою, тобто

$$v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2.$$

Тому остаточно маємо

$$P = \frac{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1} = \frac{0,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 253 + 0,2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 373}{2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 253 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 373} = 0,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

1.2.7 Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту (N_2) за температури $0^\circ C$ дорівнює $\eta = 1,68 \cdot 10^{-4} \frac{\Gamma}{\text{см} \cdot c}$. Визначте значення середньої довжини вільного пробігу молекул азоту за нормального тиску.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу пов'язана з коефіцієнтом внутрішнього тертя співвідношенням (1.20):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda, \quad (1)$$

$$\text{де } v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} - \text{середня арифметична швидкість молекул}; \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} - \text{середня довжина вільного пробігу}; \quad (3)$$

ρ – густина газу при заданих умовах.

З рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \quad (4)$$

Враховуючи співвідношення (2) – (4), з (1) отримаємо

$$\lambda = \frac{3\eta}{\rho} = \frac{3\eta}{P} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}} = \frac{3 \cdot 1,68 \cdot 10^{-5}}{1,013 \cdot 10^5} \cdot \sqrt{\frac{3,14 \cdot 8,31 \cdot 273}{8 \cdot 0,028}} = 8,87 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

1.2.8 Коефіцієнт дифузії водню (H_2) за нормальних умов $D = 1,31 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$. Визначте коефіцієнт внутрішнього тертя водню за цих умов.

Розв'язання

З виразів для коефіцієнтів дифузії та внутрішнього тертя:

$$D = \frac{1}{3} v \lambda, \quad \eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda \quad (1)$$

$$\text{випливає} \quad \eta = D \rho, \quad (2)$$

де
$$\rho = \frac{MP}{RT} . \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), маємо

$$\eta = D \frac{MP}{RT} = 1,34 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0,002 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,31 \cdot 273} = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} .$$

1.2.9 Повітря в посудині об'ємом V відкачують за допомогою насоса зі швидкістю C , яка не залежить від тиску. Початковий тиск повітря в посудині дорівнює P_0 . Вважаючи процес відкачування ізотермічним, знайдіть швидкість відкачування як функцію часу.

Розв'язання

Швидкістю відкачування називатимемо об'єм газу, який відкачує насос за одиницю часу, причому цей об'єм вимірюється за тиску, існуючому в цей момент. За умовою задачі

$$C = \frac{dV}{dt} = \text{const} . \quad (1)$$

Виразимо зміну об'єму dV газу через dP . Оскільки процес відкачування ізотермічний, то

$$PdV + VdP = 0 ,$$

звідки

$$dV = -\frac{V}{P} dP . \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо

$$C = -\frac{V}{P} \frac{dP}{dt} ,$$

або

$$\frac{dP}{P} = -\frac{C}{V} dt . \quad (3)$$

За умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ тиск повітря в посудині дорівнює P_0 , а в момент часу t він становить P . Інтегруючи вираз (3), знаходимо швидкість відкачування

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{C}{V} \int_0^t dt,$$

Звідки $C = \frac{V}{t} \ln \frac{P_0}{P}$.

1.2.10 Визначте пропускну здатність трубки, що має розміри $D = 3$ мм та $l = 150$ мм, при тиску у відкачуваному приладі 10 мм рт. ст. Газ – повітря за температури 27°C .

Розв'язання

Пропускна здатність довгої ($l > 20D$) циліндричної трубки для в'язкісного режиму, оскільки

$$Pd = 1333,2 \cdot 0,003 = 4 \text{ Па} \cdot \text{м} > 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м},$$

визначається виразом (1.47):

$$U = 38,1 \frac{D^3}{l} \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Тому

$$U = 38,1 \cdot \frac{(3 \cdot 10^{-3})^3}{0,15} \cdot \sqrt{\frac{300}{0,029}} = 6,97 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

1.2.11 Визначте пропускну здатність трубопроводу довжиною $0,8$ м і діаметром $0,3$ м при середньому тиску в ньому $\langle P \rangle = 10$ Па. Газ, що відкачується, – повітря за $T = 293$ К.

Розв'язання

Внаслідок того, що $Pd = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ Па} \cdot \text{м} > 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м}$ – режим течії в'язкісний.

Для повітря при $T = 293$ К провідність

$$U = 36,4 SK,$$

де коефіцієнт $K = 0,31$ при $\frac{l}{d} = \frac{0,8}{0,3} \approx 2,66$. Тому

$$U = 36,4 \cdot 0,31 \cdot \frac{3,14}{4} \cdot (0,3)^2 = 0,8 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

1.2.12 Визначте провідність трубопроводу за повітрям при 293 K діаметром $d = 40 \text{ мм}$ і довжиною 1 м при тисках на його кінцях $P_1 = 2003 \text{ Па}$ і $P_2 = 2000 \text{ Па}$.

Розв'язання

Для визначення режиму течії газу розрахуємо добуток середнього тиску на діаметр трубопроводу:

$$\langle P \rangle d = \frac{P_1 + P_2}{2} d = \frac{2003 + 2000}{2} \cdot 0,04 = 80,12 \text{ Па} \cdot \text{м},$$

тому режим течії є в'язкісним.

Провідність трубопроводу для повітря при 293 K визначається формулою (1.53):

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\pi R^4 \langle P \rangle}{8 \eta l} = \frac{\pi}{128 \eta} \frac{d^4}{l} \frac{P_1 + P_2}{2} = 1,36 \cdot 10^3 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})^4}{1} \cdot \frac{2003 + 2000}{2} = \\ &= 6,97 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Потік повітря в трубопроводі

$$Q = U_1 (P_1 - P_2) = 6,97 \cdot (2003 - 2000) = 20,91 \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\text{с}}.$$

$$\text{Число Рейнольдса } \text{Re} = \frac{4 m_0}{\pi k_B T \eta} \frac{Q}{d},$$

де для повітря $m_0 = 4,811 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$, $\eta = 1,808 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$, тому

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot 4,811 \cdot 10^{-26}}{3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 1,808 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{20,91}{4 \cdot 10^{-2}} = 604,5.$$

Внаслідок того, що $Re < 2200$, режим течії – в'язкісний. Знаходимо добуток

$$0,029d Re = 0,029 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 604,5 = 0,7 \text{ м.}$$

Для розрахунку провідності для в'язкісного режиму течії скористаємось формулою (повітря при 293 K):

$$U_2 = \frac{0,68 \cdot 10^3 d^4 (P_1 + P_2)}{l \left(1 + 2,15 \cdot 10^{-3} \frac{Q}{l} \right)} = \frac{0,68 \cdot 10^3 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot (2003 + 2000)}{1 \cdot \left(1 + 2,15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20,91}{1} \right)} = 6,66 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Внаслідок того, що різниця між U_1 та U_2 складає менше, ніж 10% , то приймаємо $U = 6,66 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$.

1.3 Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1 Знайдіть середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш ймовірну швидкості молекул газу, густина якого за тиску 300 мм рт.ст. дорівнює $\rho = 0,3 \text{ г/л}$.

1.3.2 За якої температури середня квадратична швидкість молекул азоту більше їхньої найбільш ймовірної швидкості на 50 м/с ?

1.3.3 Середня енергія молекул гелію дорівнює $3,92 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$. Визначте середню швидкість молекул гелію.

1.3.4 Скільки молекул зіштовхується за 1 с із 1 м^2 стінки посудини, в якій міститься азот при тиску 1 атм і температурі 20°C ?

1.3.5 У сферичній посудині з внутрішнім радіусом 5 см міститься водень при температурі 300 K і тиску 10^5 Па . Скільки молекул ударяється об стінку за 1 с ?

1.3.6 Яким може бути найменший об'єм балона, що вміщує $6,4 \text{ кг}$ кисню, якщо його стінки при 20°C витримують тиск у 160 кг-с/см^2 ?

1.3.7 У посудині перебуває 14 г азоту і 9 г водню за температури 10°C і тиску 10^6 Па. Розрахуйте об'єм посудини і масу одного кіломоля суміші.

1.3.8 Знайдіть середню квадратичну швидкість молекул повітря при 17°C , вважаючи повітря однорідним газом, маса одного кіломоля якого дорівнює 29 кг/моль .

1.3.9 Визначте середню довжину вільного пробігу молекул повітря за нормальних умов. Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8}\text{ см}$.

1.3.10 Знайдіть середню кількість зіткнень за 1 с молекул CO_2 при 100°C , якщо середня довжина вільного пробігу за цих умов дорівнює $8,7 \cdot 10^{-2}\text{ см}$.

1.3.11 Знайдіть коефіцієнт дифузії водню. За нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу молекул за цих умов дорівнює $1,6 \cdot 10^{-7}\text{ см}$.

1.3.12 Знайдіть кількість азоту, який проник внаслідок дифузії через площадку 100 см^2 за 10 с, якщо градієнт густини в напрямку, перпендикулярному до площадки, дорівнює $1,26\text{ кг/м}^4$. Температура азоту 27°C ; середня довжина вільного пробігу молекул азоту 10^{-5} см .

1.3.13 При якому тиску відношення коефіцієнта внутрішнього тертя деякого газу до коефіцієнту його дифузії дорівнює $0,3\text{ г/л}$, а середня квадратична швидкість його молекул дорівнює 620 м/с ?

1.3.14 Знайдіть середню довжину вільного пробігу молекул гелію при 0°C і тиску 760 мм рт. ст. , якщо за цих умов коефіцієнт внутрішнього тертя для нього дорівнює $1,3 \cdot 10^{-4}\text{ г/см}\cdot\text{с}$.

1.3.15 Знайдіть діаметр молекули кисню, якщо відомо, що для кисню коефіцієнт внутрішнього тертя при 0°C дорівнює $1,8 \cdot 10^{-6}\text{ Па}\cdot\text{с}$.

1.3.16 Знайдіть коефіцієнт внутрішнього тертя азоту за нормальних умов, якщо коефіцієнт дифузії для нього за цих умов дорівнює $0,142\text{ см}^2/\text{с}$.

1.3.17 Знайдіть коефіцієнт дифузії і коефіцієнт внутрішнього тертя повітря при тиску 760 мм рт.ст. і температурі 10°C . Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8}\text{ см}$.

1.3.18 Коефіцієнти дифузії і внутрішнього тертя водню за деяких умов рівні, відповідно $1,42\text{ см}^2/\text{с}$ і $8,5 \cdot 10^{-6}\text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$. Знайдіть кількість молекул водню в 1 м^3 за цих умов.

1.3.19 Відстань між нагрітою і холодною поверхнями 10 м , тиск газу 750 мм рт.ст. . Як зміниться коефіцієнт теплопровідності газу, якщо тиск знизиться до 375 мм рт.ст. ? Газ – повітря.

1.3.20 Відстань між стінками дьюарівської посудини дорівнює 8 мм . При якому тиску теплопровідність повітря, яке перебуває між стінками судини, почне зменшуватись при відкачуванні? Температура повітря 17°C ; діаметр молекули повітря $3\cdot 10^{-8}\text{ см}$.

1.3.21 Знайдіть коефіцієнт теплопровідності водню, якщо відомо, що коефіцієнт внутрішнього тертя для нього за цих умов дорівнює $8,5\cdot 10^{-6}\text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$.

1.3.22 Знайдіть коефіцієнт теплопровідності повітря за температурі 10°C і тиску $10^5\text{ Н}/\text{см}^2$. Діаметр молекули повітря $3\cdot 10^{-8}\text{ см}$.

1.3.23 Визначте пропускну здатність трубки, що має розміри $d = 2,4\text{ мм}$ та $L = 100\text{ мм}$, при тиску у відкачуваному приладі $0,02$; 2 ; 5 і $12,5\text{ мм рт.ст.}$ Газ – повітря за температури 20°C .

1.3.24 Визначте пропускну здатність трубки довжиною 1 м і діаметром 40 мм при тисках на кінцях трубопроводу $P_1=1500\text{ Па}$ і $P_2=1530\text{ Па}$. Відкачуваний газ – повітря при $T=293\text{ К}$.

1.3.25 Визначте провідність трубопроводу довжиною $0,8\text{ м}$ і діаметром $0,3\text{ м}$ при середньому тиску в ньому $\langle P \rangle = 10\text{ Па}$. Відкачуваний газ – повітря при $T=293\text{ К}$.

1.3.26 Розрахуйте тривалість відкачування робочої камери технологічної установки об'ємом 50 л від атмосферного тиску до 5 Па . Швидкість дії насосу $S_n=5\text{ л/с}$ і не залежить від тиску. Граничний тиск насосу $P_{\text{гп}}=0,1\text{ Па}$.

2 РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ І МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

2.1 Основні формули та визначення

2.1.1 Рух електрона в однорідних полях

Розглянемо класичну задачу про рух електрона в однорідному електричному полі, у якого величина і напрям вектору напруженості у всіх точках континуального середовища сталі (рис. 2.1).

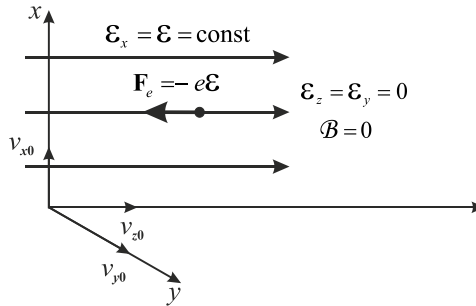


Рисунок 2.1 – Рух електрона в однорідному електричному полі

Силу, що діє на електрон в електростатичному полі, визначають тільки напруженістю поля в даній точці і не залежить від її швидкості.

Задамо початкові умови: при $t=0$ початкові координати $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; проекції вектора початкової швидкості $\mathbf{v}_0$ на вісі x , y , z : v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} – задані величини.

Запишемо систему рівнянь руху електрона: $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = m\mathbf{a}$, де $(-e)$ - заряд електрона. Тоді $\mathbf{a} = -\eta\mathbf{E}$, де $\eta = e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, і компоненти прискорення по осям можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\eta E. \quad (2.3)$$

Розв'язки рівнянь (2.1) – (2.3) мають вигляд:

$$x(t) = v_{x0}t, \quad y(t) = v_{y0}t, \quad z(t) = -\frac{\eta\mathcal{E}}{2}t^2 + v_{z0}t. \quad (2.4)$$

Вираз (2.4) є розв'язком рівнянь (2.1) – (2.3). Виключаючи t за допомогою співвідношення $t = x/v_{x0}$, отримаємо рівняння траєкторії:

$$z(x) = -\frac{\eta\mathcal{E}}{2v_{x0}^2}x^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x. \quad (2.5)$$

Отже, в площині (x, z) траєкторія електрона є *параболою*.

2.1.2 Однорідне магнітне поле

Під *однорідним* магнітним полем розумітимемо постійне за величиною і напрямком значення $\mathcal{B}$ (вектор магнітної індукції) в усіх точках середовища.

Сила, яка діє від магнітного поля на електрон називається *силою Лоренця* (векторний добуток векторів $\mathbf{v}$ і $\mathcal{B}$):

$$\mathbf{F}_E = -e[\mathbf{v}, \mathcal{B}].$$

Ця сила залежить від індукції $\mathcal{B}$ в даній точці і від швидкості електрона $\mathbf{v}$. Вона викликає прискорення $\mathbf{a}$, що визначається співвідношенням:

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}[\mathbf{v}, \mathcal{B}] = -\eta[\mathbf{v}, \mathcal{B}]. \quad (2.6)$$

Значення $\mathbf{a}$ можна розписати по координатам в скалярній формі:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta(v_y\mathcal{B}_z - v_z\mathcal{B}_y), \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\eta(v_z\mathcal{B}_x - v_x\mathcal{B}_z), \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\eta(v_x\mathcal{B}_y - v_y\mathcal{B}_x), \quad (2.9)$$

або, враховуючи зміст рівнянь, показаних на рис. 2.2, маємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \mathcal{B} \frac{dy}{dt}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\eta \mathcal{B} \frac{dx}{dt}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \quad (2.12)$$

Ці рівняння визначають траєкторію руху електрона в однорідному магнітному полі.

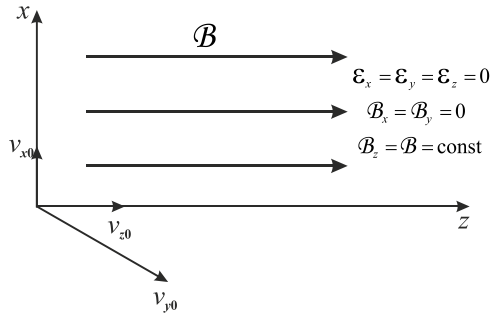


Рисунок 2.2 – Рух електрона в однорідному магнітному полі

Розв'язуючи систему рівнянь (2.10) – (2.12), можна знайти рівняння траєкторії руху електрона в магнітному полі:

$$\left(x + \frac{v_{y0}}{\omega} \right)^2 + \left(y - \frac{v_{x0}}{\omega} \right)^2 = R^2, \quad (2.13)$$

де $\omega = \eta \mathcal{B}$.

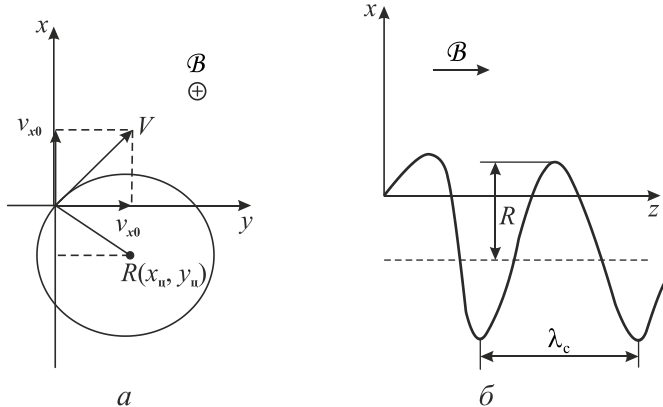
Формула (2.13) є рівнянням кола й інтерпретує собою проекцію траєкторії електрона на площину (x, y) , перпендикулярну магнітному полю.

Центр кола зміщений в точку з координатами (рис. 2.3, а):

$$x_{\text{ц}} = -\frac{v_{y0}}{\omega} = -\frac{v_{y0}}{\eta \mathcal{B}}, \quad y_{\text{ц}} = \frac{v_{x0}}{\eta \mathcal{B}}.$$

В площині (x,y) проекція траєкторії електрона є синусоїдою з амплітудою $R = \frac{v_{\perp}}{\eta B}$ (рис. 2.3, б).

Якщо розглядати просторовий образ траєкторії електрона в магнітному полі, то вона представляє собою спіраль або гвинтову лінію з кроком або періодом коливань T . Величину $\lambda_c = v_{z0}T = v_{z0} \frac{2\pi}{\omega}$ називають *циклотронною довжиною хвилі*.



а – на площину, перпендикулярну вектору магнітної індукції;
б – на площину вздовж силових ліній магнітного поля

Рисунок 2.3 – Проекції траєкторії руху електронів у однорідному магнітному полі

2.1.3 Рух електрона в схрещених полях

Під *схрещеними* полями розумітимемо накладені одне на одне електричні і магнітні поля, перпендикулярні одне одному в усіх точках континуального простору.

До першого типу схрещених полів віднесемо випадок, коли обидва поля однорідні й їхні вектори перпендикулярні.

Другий тип схрещених полів складається з однорідного магнітного поля й електричного поля, що володіє осовою симетрією. Таке електричне поле утворюється в зазорі між коаксіальними циліндрами.

На рис. 2.4 показана траєкторія руху електрона в схрещених електричному і магнітному полях.

Початкові умови запишемо у вигляді:

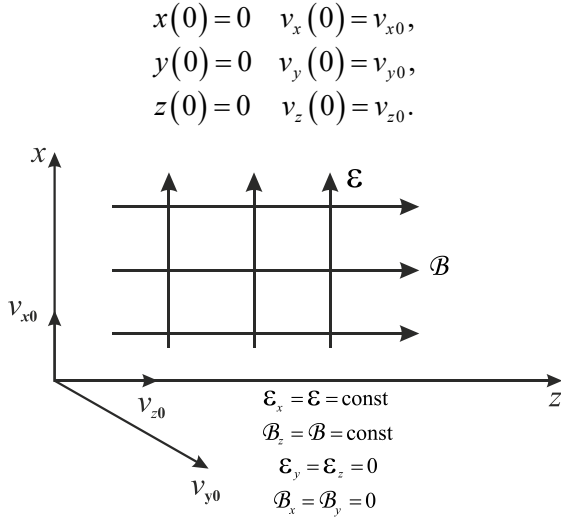


Рисунок 2.4 – Рух електрона в схрещених електричному і магнітному полях

У схрещених полях на електрон діють сили $\mathbf{F}$, що визначаються співвідношенням:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{\mathcal{E}} - e[\mathbf{v}, \mathbf{\mathcal{B}}], \quad (2.14)$$

і тоді електрон рухається з прискоренням

$$\mathbf{a} = -\eta\mathbf{\mathcal{E}} - \eta[\mathbf{v}, \mathbf{\mathcal{B}}]. \quad (2.15)$$

В декартовій системі координат рівняння (2.15) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\eta\mathcal{E}_x - \eta(v_y\mathcal{B}_z - v_z\mathcal{B}_y), \\
 \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\eta\mathcal{E}_y - \eta(v_z\mathcal{B}_x - v_x\mathcal{B}_z), \\
 \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\eta\mathcal{E}_z - \eta(v_x\mathcal{B}_y - v_y\mathcal{B}_x),
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

де $-\eta\mathcal{E}_z = 0$.

Тоді система рівнянь (2.16) набуває вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta\mathcal{E} - \omega \frac{dy}{dt}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega \frac{dx}{dt}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad (2.19)$$

де $\omega = \eta\mathcal{B}$.

Розв'язуючи сумісно систему (2.17) – (2.19), отримуємо рівняння траєкторії:

$$\left(x + \frac{\eta\mathcal{E}}{\omega^2} + \frac{v_{y0}}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{\eta\mathcal{E}}{\omega}t - \frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2 = R^2. \quad (2.20)$$

Вираз (2.20) – рівняння кола з радіусом R і координатами центру, які описуються так:

$$\begin{cases} x_{\text{ц}} = -\frac{\eta\mathcal{E}}{\omega^2} + \frac{v_{y0}}{\omega}, \\ y_{\text{ц}} = -\frac{\eta\mathcal{E}}{\omega}t + \frac{v_{x0}}{\omega}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Аналіз показує, що траєкторія руху електрона в площині (x, y) представляє собою коло з центром, яке рівномірно зміщується по осі y і одночасно перпендикулярно полям $\mathcal{E}$ і $\mathcal{B}$.

Швидкість зміщення визначається так:

$$v_{\text{зм}} = \frac{y_{\text{ц}}}{t} = -\frac{\eta\mathcal{E}}{\eta\mathcal{B}} = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}. \quad (2.22)$$

Графічно проекція траєкторії на площину (x, y) , перпендикулярну магнітному полю, зображено на рис. 2.5.

Ця крива нагадує *циклоїду* – криву, яку описує яка-небудь точка колеса, що котиться без ковзання. В нашому випадку траєкторія має

вигляд подовженої циклоїди, радіус якої залежить від напруженості електричного поля й індукції магнітного поля.

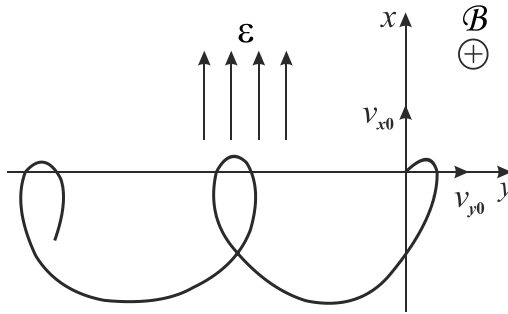


Рисунок 2.5 – Проекція траєкторії руху електрона, який рухається в схрещених $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ полях

При зміні знаку напруженості траєкторія руху теж змінює знак. Параметри циклоїди можна змінювати варіюванням значень v_{x0} і v_{y0} .

Циклоїда може перетворюватися в пряму лінію, якщо в напрямку x початкова швидкість відсутня, а початкова швидкість y від'ємному напрямку по осі y дорівнює швидкості зміщення.

Отже, якщо сила Лоренца й електростатична сила рівні $\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E} = \mathbf{F}_l = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, то зміщення в напрямку x не буде.

2.2 Приклади розв'язування задач

2.2.1 Дві паралельні пластини довжиною $L = 50$ мм (вздовж вісі x) розташовані на відстані $H = 5$ мм одна від одної (вздовж вісі y). З середини зазору між пластинами в горизонтальному напрямку (вздовж вісі x) вилітає електрон із початковою енергією $E_0 = 250$ еВ. Розрахуйте різницю потенціалів між пластинами, якщо траєкторія електрона лише торкається краю позитивно зарядженої пластини (рис. 2.6).

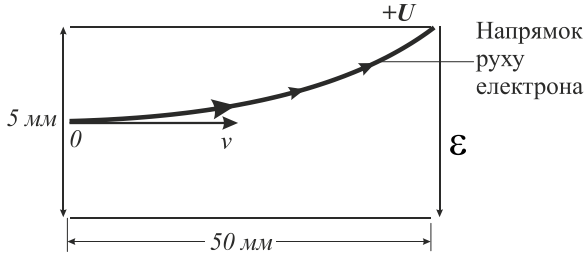


Рисунок 2.6 – Рисунок до задачі 2.2.1

Розв'язання

Згідно другого закону Ньютона

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -e\mathcal{E}. \quad (1)$$

Інтегруючи рівняння (1) за часом t при початковій умові $v_y(0)=0$, матимемо

$$v_y = -\frac{e\mathcal{E}}{m}t. \quad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2) за t і вважаючи, що електрон почав рухатися з точки 0 (рис. 2.7), отримаємо

$$y = -\frac{e\mathcal{E}}{2m}t^2. \quad (3)$$

Вважаючи, що $\mathcal{E}$ не залежить від t , а $t = \frac{x}{v_x}$, оскільки компонента швидкості v_x під дією поля не змінюється, знаходимо

$$y = -\frac{e\mathcal{E}}{2mv_x^2}x^2. \quad (4)$$

Із закону збереження енергії $\frac{mv_x^2}{2} = E_0$, знаходимо

$$v_x = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 9,38 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Підставляючи в (4) $y = H$ і $x = L$ розрахуємо напруженість електричного поля

$$\mathcal{E} = -\frac{2mv_x^2 y}{ex^2} = -\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (9,38 \cdot 10^6)^2 \cdot (-2,5 \cdot 10^{-3})}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} = 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

і потенціал між пластинами

$$U = \mathcal{E}d = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ В}.$$

2.2.2 Обчисліть час, за який електрон, що знаходився в стані спокою в початковий момент часу, пройшов відстань $l = 10$ мм, якщо різниця потенціалів, прикладена на цій відстані, дорівнює:

а) постійній напрузі $U = 100$ В ;

б) змінній напрузі, що змінюється за синусоїдальним законом, з амплітудою 25 В і частотою 3 МГц .

Вказівка. Вважайте, що в обох випадках градієнт потенціалу є постійною величиною, а у другому випадку електрон знаходиться в спокої в той момент, коли прикладена напруга дорівнює нулю.

Розв'язання

а) Оскільки електрон починає свій рух із стану спокою, його початкова швидкість $v_0 = 0$. Тому відстань, пройдена електроном, визначається формулою

$$l = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Отже, оскільки $a = \frac{e\mathcal{E}}{m_e}$,

$$l = \frac{e\mathcal{E}}{2m_e} t^2. \quad (2)$$

З цього рівняння знаходимо t і в результаті отримуємо

$$t = l \sqrt{\frac{2m_e}{eU}} = 10^{-2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} = 3,37 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,37 \text{ нс}.$$

б) Миттєве значення синусоїдальної напруги з амплітудою 25 В і частотою $f = 3$ МГц, дорівнює

$$u = U_{\max} \sin \omega t,$$

де $\omega = 2\pi f = 6\pi \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Напруженість електричного поля розраховується за формулою

$$\mathcal{E} = \frac{u}{l} = \frac{U_{\max} \sin \omega t}{l}. \quad (3)$$

Підставляючи вираз (3) в рівняння (2), знаходимо для t :

$$t = l \sqrt{\frac{2m_e}{eu}} = l \sqrt{\frac{2m_e}{eU_{\max} \sin \omega t}}. \quad (4)$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння (4):

$$t^2 = \frac{2m_e l^2}{eU_{\max} \sin \omega t}. \quad (5)$$

Позначаючи ωt через θ і підставляючи цю величину замість t і ωt в рівняння (5), отримуємо

$$\theta^2 = \frac{2m_e \omega^2 l^2}{eU_{\max} \sin \theta}.$$

Підстановка вихідних даних дає для величини $\theta^2 \sin \theta$ наступне значення

$$\theta^2 \sin \theta = \frac{2m_e \omega^2 l^2}{eU_{\max}} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4\pi^2 10^{12}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25} = 0,0161. \quad (6)$$

Рівняння (6) можна розв'язати наближено, якщо припустити, що для малих значень θ , виражених у радіанах, $\sin \theta \rightarrow \theta$. Тоді

$$\theta^3 \approx 0,0161 \quad (7)$$

або

$$\theta \approx 0,252 \text{ рад.}$$

Перевіримо цю відповідь. Обчислюючи θ в градусах ($\theta = \frac{0,252 \cdot 180}{\pi} = 14,5^\circ$) та підставляючи цей результат у аргумент синуса в рівняння (6), маємо

$$0,252^2 \sin 14,5^\circ = 0,016.$$

Отже, значення (7) знайдено вірно і, отже, $\theta = 0,252 \text{ рад.}$ Але оскільки $\theta = \omega t$, звідси знаходимо

$$t = \frac{0,252}{6\pi \cdot 10^6} = 13,4 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 13,4 \text{ нс.}$$

2.2.3 Електрон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U=1 \text{ кВ}$, влітає у вакуумі в однорідне магнітне поле з індукцією $B=0,01 \text{ Тл}$ перпендикулярно ліням індукції. Визначте радіус кола, описуваного електроном у полі.

Розв'язання

Сила Лоренца, що діє на електрон, який рухається в магнітному полі, надає йому доцентрового прискорення $a = \frac{v^2}{R}$. Тоді

$$mv^2/R = evB. \quad (1)$$

Пролетівши прискорюючу різницю потенціалів U , електрон набув енергії

$$mv^2/2 = eU,$$

звідки

$$v = \sqrt{2eU/m}.$$

Підставляючи в (1) отримане значення швидкості, матимемо

$$\sqrt{2emU} = eBR,$$

звідки остаточно

$$R = \frac{1}{\mathcal{B}} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = \frac{1}{0,01} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 0,01 \text{ м.}$$

2.2.4 Електрон рухається в електричному полі ондулятора $\mathbf{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{\mathcal{E}}(x, y, z) = (\mathcal{E}_0 \cos kx, 0, 0)$. Знайдіть $\mathbf{r}(t)$, якщо $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

Розв'язання

Позначення: $a \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} \equiv \ddot{r}$. Згідно другого закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{\mathcal{E}},$$

звідки покомпонентно у декартовій системі координат

$$m\ddot{x} = -e\mathcal{E}_0 \cos kx, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \quad (1)$$

Інтегруючи рівняння руху (1), маємо

$$z(t) = C_1 t + C_2, \quad y(t) = C_3 t + C_4.$$

Підставляючи початкові умови, отримаємо

$$y(t) = 0, \quad z(t) = v_0 t. \quad (2)$$

Тоді з (1) і (2) впливає рівняння

$$m\ddot{x} = -e\mathcal{E}_0 \cos kv_0 t,$$

інтегруючи яке двічі, матимемо

$$m\dot{x} = C_5 - \frac{e\mathcal{E}_0}{kv_0} \sin kv_0 t,$$

$$mx = C_5 t + C_6 + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} \cos kv_0 t.$$

Використовуючи початкові умови, матимемо

$$C_5 = 0, \quad 0 = C_6 + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2},$$

Звідки $C_6 = -\frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2}$. Тоді

$$mx(t) = -\frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} \cos kv_0 t,$$

або

$$x(t) = -\frac{2e\mathcal{E}_0}{mk^2 v_0^2} \sin^2 kv_0 t.$$

2.2.5 Пучок електронів рухається в однорідному постійному магнітному полі, вектор індукції якого $\mathcal{B} = (0, 0, \mathcal{B})$ перпендикулярний площині XOY . Початкові швидкості електронів $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, u)$ відрізняються значенням кута α . Знайдіть умову, при якій електрони фокусуються в одній точці.

Розв'язання

Помістимо початок координат в точку вильоту електрона, а вісь OZ спрямуємо паралельно вектору індукції $\mathcal{B}$. Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e[\mathbf{v}, \mathcal{B}], \quad (1)$$

або в проекціях на осі OX , OY , OZ :

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = \omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad (2)$$

де $\omega = \frac{e\mathcal{B}}{m}$. З системи рівнянь (2), враховуючи початкову умову

$\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$, маємо $z(t) = ut$ та перший інтеграл

$$\dot{y} - \omega x = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha. \quad (3)$$

Розв'язуючи рівняння (3) і перше рівняння системи (2), отримаємо закон руху електрона в площині XOY

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\dot{y}_0}{\omega}(1 - \cos \omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \\ y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}(1 - \cos \omega t). \end{cases} \quad (4)$$

Вважаючи $v_0 = R\omega$, представимо (4) у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = -R \sin \alpha + R \sin(\omega t + \alpha), \\ y(t) = R \cos \alpha - R \cos(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

Проекцією траєкторії на площину XOY є коло

$$(x + R \sin \alpha)^2 + (y - R \cos \alpha)^2 = R^2.$$

Нехай τ – час прольоту електронів до деякого екрану паралельного площині XOY і розташованого на відстані $L = u\tau$ від точки вильоту. Електрони, що вилітають під різними кутами α , фокусуються в різних місцях екрану. Але за умови $\omega\tau = 2\pi n$ (n – ціле число) всі електрони фокусуються в точці $(0,0,L)$. Тому відстань від точки вильоту до екрану має задовольняти умові

$$L = \frac{2\pi n}{\omega} u = 2\pi \frac{m u}{e B} n.$$

2.2.6 Електрон рухається в схрещених однорідних постійних електричному і магнітному полях $\mathbf{E} = (0, \mathcal{E}, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, \mathcal{B})$. Знайдіть $\mathbf{r}(t)$, якщо $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

Розв'язання

Згідно другого закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Запишемо (1) в координатній формі

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{y}, \\ \ddot{y} = \omega \dot{x} - \frac{e}{m} \mathcal{E}, \\ \ddot{z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $\omega = \frac{e\mathcal{B}}{m}$. З системи рівнянь (2) знаходимо $z(t) = \dot{z}_0 t$ і перший інтеграл першого рівняння:

$$\dot{x} + \omega y = \dot{x}_0. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в друге рівняння системи (2), отримуємо

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega \dot{x}_0 - \frac{e}{m} \mathcal{E},$$

розв'язок якого

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\frac{e\mathcal{E}}{m\omega} - \dot{x}_0 \right) (\cos \omega t - 1) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4)$$

З (3) і (4) знаходимо

$$\dot{x} = \left(\dot{x}_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right) \cos \omega t - \dot{y}_0 \sin \omega t + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega},$$

звідки

$$x = \frac{1}{\omega} \left(\dot{x}_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right) \sin \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} t.$$

2.2.7 Електрони рухаються в плоскому конденсаторі, відстань між пластинами d . Одна із пластин ($y = 0$) є анодом, друга – катодом ($y = d$). Різниця потенціалів між ними дорівнює U_0 . Вектор магнітної індукції постійного однорідного поля $\mathcal{B} = (0, 0, \mathcal{B}_0)$. Електрони емітують із початковою швидкістю $\mathbf{v}_0 = 0$. Знайдіть значення $\mathcal{B}_0$, за якого струму немає.

Розв'язання

Вважатимемо, що $\mathcal{E} = -\frac{U_0}{d}$, $\mathbf{v}_0 = 0$. Тому матимемо

$$\dot{y}(t) = \frac{eU_0}{m\omega d} \sin \omega t, \quad y(t) = \frac{eU_0}{m\omega^2 d} (1 - \cos \omega t),$$

де $\omega = \frac{eB_0}{m}$. За умовою задачі в момент часу $t = \tau$ $y(\tau) = d$, $\dot{y}(\tau) = 0$, тому $\sin \omega \tau = 0$, а $\omega \tau = -\pi/2$. Тільки в цьому випадку

$$\frac{eU_0}{m\omega^2 d} (1 - \cos \omega \tau) = d,$$

тому

$$\frac{2eU_0}{md \frac{e^2 B_0^2}{m^2}} = d, \quad d^2 = \frac{2mU_0}{eB_0^2}, \quad B_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}}.$$

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1 Якої швидкості набуває однозарядний йон аргону ($A=40$), пройшовши різницю потенціалів у 400 В?

2.3.2 Два йони D^+ з однаковою початковою кінетичною енергією, що дорівнює 100 кеВ, летять вздовж прямої лінії назустріч один одному. Визначте мінімальну відстань між ними.

2.3.3 У гальмівне електричне поле вводиться потік електронів зі струмом $I_0 = 10$ мА. Функція розподілу електронів за енергіями

$f(E)$ відповідає температурі $T = 5 \cdot 10^4$ К (тобто $f(E) = A e^{-\frac{E}{k_B T}}$). Який буде струм у колі колектора, якщо напруга на ньому становить $U_k = -15$ В?

2.3.4 В однорідне гальмівне електричне поле $\mathcal{E} = 5,39 \cdot 10^3$ В/м влітає електрон з енергією 100 еВ. Кут між напрямком початкової швидкості електрона й електричним полем дорівнює α . Через $5 \cdot 10^{-3}$ с електрон досягає точки посадки на електрод, у якій його швидкість

перпендикулярна електричному полю. Знайдіть кут α і енергію, з якою електрон потрапляє на електрод.

2.3.5 Пучок протонів, прискорених до енергії 10^7 eV, бомбардує тверду мішень. Чому дорівнює сила, яка діє на мішень, якщо при проходженні крізь мішень протони втрачають у ній половину своєї енергії? Сила струму в пучку 100 мА.

2.3.6 В однорідне електричне поле енергоаналізатора у вигляді плоского конденсатора (рис. 2.7) під кутом $\alpha = 45^\circ$ до напрямку поля крізь отвір в пластині інjektується пучок електронів із кутом розхилу пучка $\Delta\alpha = 15^\circ$ і енергією електронів 10 кеВ. Яка напруженість поля, якщо після відхилення в ньому пучок виходить із конденсатора крізь отвір у тій же пластині, що знаходиться на відстані $l = 60$ мм від точки інжекції? Знайдіть ширину δ цього отвору, що забезпечує вихід всього пучка.

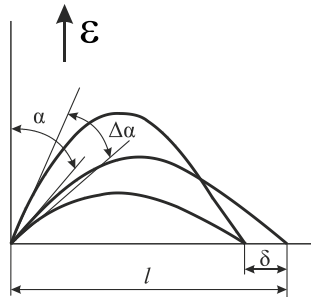


Рисунок 2.7 – До задачі 2.3.6

2.3.7 Електрон влітає в область однорідного магнітного поля в напрямку, перпендикулярному вектору магнітної індукції. Енергія електрона дорівнює 10^3 eV. Знайдіть величину магнітної індукції, за якої електрон відхилиться від початкового напрямку на 5 мм на відстані від точки вльоту 2 см.

2.3.8 Електрон влітає в область однорідного магнітного поля в напрямку, перпендикулярному вектору магнітної індукції. Енергія електрона дорівнює $2 \cdot 10^3$ eV. Знайдіть величину магнітної індукції, за якої відхилення електрона від початкового напрямку на відстані від точки вльоту 5 мм складатиме 20° .

3 ЕЛЕКТРИЧНИЙ РОЗРЯД У ГАЗАХ

3.1 Основні формули і визначення

У загальному випадку частинками в газовому середовищі є молекули, атоми, позитивні іони, негативні йони і електрони. При русі відбувається зіткнення частинок між собою з відповідним їх розсіюванням.

Поведінка частинок характеризується такими параметрами, як *середня довжина вільного пробігу* частинки $\bar{\lambda}$ й *ефективний переріз* $Q = 1/\bar{\lambda}$ (іноді *повний ефективний переріз*).

Середня довжина вільного пробігу частинки $\bar{\lambda}$ вказує на середню довжину шляху, на якому вона не має зіткнень з іншими частинками. При конкретизації типу частинки позначення $\bar{\lambda}$ набуває відповідний індекс. Наприклад, $\bar{\lambda}_e$ – середня довжина вільного пробігу електрона.

Середня довжина вільного пробігу молекули в газі

$$\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 P},$$

де d – діаметр молекули; P – тиск газу в паскалях (1 мм рт. ст. = 133,322 Па).

Середня довжина вільного пробігу електрона в газі

$$\bar{\lambda}_e = \frac{4k_B T}{\pi d^2 P}.$$

Ефективний переріз Q показує, скільки зіткнень зазнає частинка на одиниці шляху. Для електронів ефективний переріз Q_e іноді називають *коефіцієнтом поглинання*, оскільки при проходженні через газ введений ззовні електронний пучок ослабляється.

Для того, щоб вказані параметри були параметрами конкретного роду газу, їх використовують в приведенному вигляді, тобто приводять до температури $T = 273$ К і тиску газу $P = 1$ Па. В цьому випадку в позначенні параметра з'являється індекс 0. Наприклад, Q_0 – повний ефективний переріз для зіткнень молекул при одиничному тиску і температурі газу $T = 273$ К.

Важливим в кінетичній теорії газів є рівняння, що дозволяє визначити, яке число частинок N_x із загального числа частинок N при русі в газі пройде без зіткнень шлях x :

$$N_x = N e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}} = N e^{-Qx}. \quad (3.1)$$

Наведене рівняння також застосовне і до руху електронів у газі.

З урахуванням того, що електрон через малу масу рухається значно швидше за молекули, останні можна вважати нерухомими при виведенні співвідношень між параметрами молекул і електронів за умови пружних зіткнень. Їх вигляд

$$Q_e = \frac{Q}{4\sqrt{2}}; \quad \bar{\lambda}_e = 4\sqrt{2}\bar{\lambda}. \quad (3.2)$$

Середня дрейфова швидкість електронів у газі під дією електричного поля напруженістю $\mathcal{E}$

$$\bar{v}_{ex} = -0,815 \sqrt{\frac{e\bar{\lambda}_{e0}}{m_e}} \sqrt[4]{\kappa} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{P_0}}, \quad (3.3)$$

де P_0 – тиск, приведений до 0°C ($P_0 = \frac{273}{T}P$, де P – тиск газу в об'ємі); κ – частка енергії, що передається в середньому електроном атому при сутичці з ним, яка називається коефіцієнтом акомодатії і яка відповідно до кінетичної теорії газів дорівнює $\kappa = 2m_e/m_a$; $\bar{\lambda}_{e0}$ – довжина вільного пробігу електрона за температури 273 K і тиску газу $P = 1\text{ Па}$. Причому $\bar{\lambda}_{e0} = 4\sqrt{2}\bar{\lambda}_0$.

Без дії зовнішніх сил заряджені частинки рухаються в газі за законами дифузії. Згідно закону Ейштейна,

$$l^2 = 2D\tau, \quad (3.4)$$

де l – відстань, на яку перемістилася частинка; τ – час, що витрачається на це переміщення; D – коефіцієнт дифузії, визначуваний як

$$D = \frac{\lambda\bar{v}}{3} = \frac{\bar{v}}{3Q}. \quad (3.5)$$

3.1.1 Акти взаємодії частинок в газі

При виникненні нерівноважних носіїв заряду можливі різні акти взаємодії частинок. При цьому, окрім пружних зіткнень, виникають непружні зіткнення. При непружному зіткненні змінюється внутрішня енергія хоча б однієї з частинок, і вона переходить в інший стан. Наприклад, можливі акти іонізації, збудження, рекомбінації, перезарядки. Кожний з цих процесів характеризується ефективним перерізом, в позначенні якого присутній індекс, що вказує на рід процесу (Q_i – іонізація, Q_z – збудження, Q_r – рекомбінація, Q_{Π} – перезарядка). Ці величини вказують на число зіткнень даного роду, проведених зарядженою частинкою на одиниці шляху.

Ефективний переріз непружного зіткнення може бути виражений через імовірність, яка показує, яка частка всіх зіткнень призводить до непружних процесів даного роду. Наприклад, імовірність іонізації

$$w_i = \frac{Q_i}{Q}. \quad (3.6)$$

Імовірність іонізації молекул та атомів газів апроксимується формулою

$$w_i(U) = \alpha(U - IP_i) e^{\frac{U - IP_i}{\beta}}, \quad (3.7)$$

де U – напруга між електродами; IP_i – потенціал іонізації (Ionization Potential) молекул або атомів газу, який наведено у [В] (Додаток Г); α, β – чисельні коефіцієнти.

Рекомбінацією називають зіткнення носіїв заряду протилежного знаку, що призводить до їх взаємної нейтралізації (наприклад, іон-іонна, електрон-іонна рекомбінації).

Число актів рекомбінації, що відбувається в одиниці об'єму газу за час dt , пропорційне концентрації носіїв позитивного заряду n_+ , концентрації носіїв негативного заряду n_- і часу dt :

$$dn = -\alpha_r n_+ n_- dt,$$

де α_r – коефіцієнт об'ємної рекомбінації розмірністю $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Газові розряди класифікуються на несамостійні і самостійні.

Для підтримки *несамостійного розряду* потрібна емісія електронів з катода або утворення заряджених частинок під дією зовнішніх факторів. Нехай $(dn/dt)_{\text{утв}}$ – швидкість зміни концентрації зарядів зовнішнім джерелом іонізації; $(dn/dt)_{\text{рек}}$ – швидкість рекомбінації зарядів. При динамічній рівновазі ці швидкості рівні: $(dn/dt)_{\text{утв}} = (dn/dt)_{\text{рек}}$. Тоді $n = n_+ = n_-$ (дана рівність справедлива для випадку, коли швидкість $(dn/dt)_{\text{рек}}$ значно більше за число електронів, що потрапляють на 1 м^2 за 1 с на електрод). А оскільки швидкість рекомбінації пропорційна добутку концентрації зарядів, тобто n^2 , то

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{утв}} = -\alpha_r n^2.$$

Повна густина струму j у газах за умов несамостійного розряду є сумою густин струмів, які зумовлені рухом позитивних і негативних іонів:

$$j = j_+ + j_-, \quad (3.8)$$

$$j_{\pm} = qn_{\pm}\mu_{\pm}\mathcal{E} - qD_{\pm} \frac{dn_{\pm}}{dx}, \quad (3.9)$$

де q – модуль заряду іонів; $\mu_{\pm}$ – рухливість (позитивних або негативних) іонів; $D_{\pm}$ – коефіцієнт дифузії іонів; $n_{\pm}$ – концентрація іонів; $dn_{\pm}/dx$ – градієнт концентрації іонів у газі.

Якщо напруженість поля достатньо велика, так що всі іони, що утворюються зовнішнім джерелом, встигають без рекомбінації дійти до електродів, то швидкість рекомбінації $(dn/dt)_{\text{рек}} = 0$. При цьому виникає струм насичення, густина якого

$$j_{\text{нас}} = qd \left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{утв}},$$

де d – відстань між катодом і анодом; e – заряд електрона.

При *самостійному розряді* генерація і рух зарядів відбуваються за рахунок енергії електричного поля між анодом і катодом. При цьому електрони, рухаючись в газі під дією електричного поля, набувають достатню енергію для іонізації молекул газу.

Формула Таунсенда для *електричного пробою* (виникнення самостійного газового розряду з несамостійного розряду):

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1, \quad (3.10)$$

де α – коефіцієнт об'ємної іонізації - число пар електронів та іонів, що утворюються одним електроном на одиниці його шляху, $[m^{-1}]$; γ – коефіцієнт вторинної емісії (кількість вторинних електронів, вибитих з катоду одним позитивним іоном).

Коефіцієнт α залежить від напруженості електричного поля $\mathcal{E}$ у газі та тиску P . При цьому, як показує дослід, відношення α/P є функцією відношення напруженості поля до тиску газу:

$$\alpha/P = f(\mathcal{E}/P), \quad (3.11)$$

де вигляд функції f залежить від роду газу.

3.2 Приклади розв'язування задач

3.2.1 Електрон рухається в *неоні* під дією електричного поля напруженістю $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^3$ В/м. Тиск газу $P = 0,25$ мм рт.ст. Визначте α – число актів іонізації, здійснюваних електроном при русі на шляху в 1 м.

Розв'язання

Рішення задачі було запропоноване вченим Таунсендом за таких припущень:

а) імовірність іонізації апроксимується спрощеним законом:

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } U < IP_i, \\ 1, & \text{якщо } U > IP_i, \end{cases}$$

де U – напруга між електродами; IP_i – потенціал іонізації.

б) швидкість хаотичного руху електронів не враховується;

в) при кожному зіткненні електрон повністю втрачає придбану ним енергію.

Відповідно до (3.1) у електрона, що рухається у газі, ймовірність вільного пробігу довжиною, більшою за L , буде дорівнювати $e^{-\frac{L}{\lambda_e}}$.

Тому з N вільних пробігів лише $Ne^{-\frac{L}{\lambda_e}}$ за довжиною перевершуватимуть L . Рухаючись уздовж поля напруженістю $\mathcal{E}$, електрон на шляху L набуває енергію $e\mathcal{E}L$. Якщо $L \geq IP_i/\mathcal{E}$, то електрон іонізує молекулу

газу. Отже, з N вільних пробігів лише $Ne^{-\frac{IP_i}{\mathcal{E}\lambda_e}}$ приводитимуть до іонізації.

З припущень б) і в) випливає, що рух електронів прямолінійний. На шляху в 1 м він зробить Q_e зіткнень з молекулами газу; з них тільки $Q_e e^{-\frac{IP_i}{\mathcal{E}\lambda_e}}$ приводитимуть до іонізації атомів неону ($IP_i = 21,5$ В, Додаток Г). Число актів іонізації

$$\alpha = Q_e e^{-\frac{IP_i}{\mathcal{E}\lambda_e}} = Q_{e0} P e^{-\frac{IP_i Q_{e0} P}{\mathcal{E}}} = 1520 \cdot 0,25 \cdot e^{-\frac{21,5 \cdot 1520 \cdot 0,25}{5000}} = 74 \text{ м}^{-1}.$$

3.2.2 Для дослідження пружних зіткнень електронів з молекулами газу виготовлено прилад, який складається з катода, колектора (анода), двох сіток, які перебувають у замкнутому балоні, наповненому *гелієм* (рис. 3.1). На сітки подається однаковий потенціал $U = 18$ В. Тиск газу $P = 1,2$ мм рт. ст. Відстань між сітками $l = 1,0$ см. Визначте енергію електронів, які пройшли за допомогою дифузії через проміжок 1, а також електронів, які входять крізь сітку 2 в проміжок сітка-колектор?

Розв'язання

Електрони, які виходять з катода, прискорюються першою сіткою до енергії $E = eU$. З цією енергією вони входять в проміжок сітка-сітка. При дифузії від сітки 1 до сітки 2 електрони випробовують багатократні пружні зіткнення (непружних зіткнень бути не може, оскільки резонансний рівень збудження атома гелію відповідає 19,8 В). Якщо таких зіткнень було N , то електрони проходять до другої сітки, втративши енергію $\Delta E = N\kappa E$.

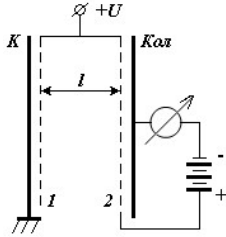


Рисунок 3.1 – Прилад для дослідження пружних зіткнень

Істинний шлях, який проходить частинка, буде $l = N\bar{\lambda}_e$; час шляху складе $\tau = \frac{N\bar{\lambda}_e}{\bar{v}}$. Тоді відповідно до (3.4) і (3.5)

$$l^2 = 2D\tau = 2D \frac{N\bar{\lambda}_e}{\bar{v}_e} = 2 \frac{\bar{v}_e}{3Q_e} \cdot \frac{N}{\bar{v}_e Q_e} = \frac{2N}{3Q_e^2}.$$

Звідки

$$N = \frac{3}{2} Q_e^2 l^2 = \frac{3}{2} (Q_{e0} Pl)^2 = \frac{3}{2} (1,35 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2})^2 = 393.$$

Енергія електронів в області сітки 2

$$E_2 = E - \Delta E = eU(1 - N\kappa) = 18(1 - 393 \cdot 2,7 \cdot 10^{-4}) = 16,2 \text{ eV}.$$

Енергія електронів поблизу колектора

$$E_{\text{кол}} = E_2 + E = 16,2 + 18 = 34,2 \text{ eV}.$$

Для порівняння $IP_i = 24,6 \text{ eV}$ в *гелій*. Це означає, що буде іонізація.

3.2.3 Визначте кількість йонів, які падають на 1 м^2 електроду в 1с, а також кількість йонів, які рекомбінують в просторі між електродами. Порівняйте отримані результати і оцініть коректність застосування формули (3.6). Механізм дифузії електронів не враховуйте. Рухливості йонів $\mu_+ = \mu_- = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; коефіцієнт рекомбінації $\alpha_r = 1 \text{ м}^3/\text{с}$; швидкість зміни концентрації зарядів зовнішнім джере-

лом йонізації $(dn/dt)_{\text{ynt}} = 10^{16}$ йонів/м³·с; напруженість поля $\mathcal{E} = 10^3$ В/м; відстань між електродами $d = 0,1$ м.

Розв'язання

Густина струму між електродами

$$\begin{aligned} j &= j_+ + j_- = q n_+ \mu_+ \mathcal{E} + q n_- \mu_- \mathcal{E} = q(\mu_+ + \mu_-) n \mathcal{E} = \\ &= q(\mu_+ + \mu_-) \sqrt{\frac{1}{\alpha_r} \left| \frac{dn}{dt} \right|_{\text{ynt}}} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Формула справедлива для випадку, коли кількість рекомбінуючих йонів в 1с набагато більше кількості йонів, які потрапляють за 1с на електрод.

Кількість йонів, які потрапляють на 1 м² електроду за 1с, дорівнює

$$\frac{j}{q} = (\mu_+ + \mu_-) \sqrt{\frac{1}{\alpha_r} \left| \frac{dn}{dt} \right|_{\text{ynt}}} \mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{1}{1} \cdot 10^{16} \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{йонів}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Швидкість рекомбінації зарядів зовнішнім джерелом йонізації $(dn/dt)_{\text{ynt}} = 10^{16} \frac{\text{йонів}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$. Тоді в просторі між електродами на 1м² поперечного перетину в 1с рекомбінує $10^{16} \cdot d = 10^{15}$ йонів/(м²·с). Отже, застосування формули (5.6) є коректним.

3.2.4 Розрахуйте потенціал запалювання в наповненій азотом розрядній трубці, два плоскопаралельні електроди якої розділені проміжком довжиною 4 мм. Відношення ступеню йонізації до тиску дорівнює $\alpha/P = 500$ пар йонів/м·ммрт.ст., а відношення напруженості електричного поля до тиску $\mathcal{E}/P = 10^5$ В/м·ммрт.ст. Коефіцієнт вторинної емісії $\gamma = 0,07$. Знайдіть напруженість електричного поля і тиск у трубці.

Розв'язання

Потенціал запалювання дорівнює

$$U_s = \mathcal{E}d.$$

З умови пробою (3.10) знайдемо вираз для d

$$d = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma}, \text{ оскільки } \gamma \ll 1,$$

$$U_s = \mathcal{E}d = \frac{\mathcal{E}}{P}Pd = \frac{\mathcal{E}}{P}P \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma} = \frac{\mathcal{E}}{P} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma} = 443 \text{ В.}$$

Звідси напруженість електричного поля

$$\mathcal{E} = \frac{U_s}{d} \approx 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

а тиск у трубці

$$P = \frac{\mathcal{E}}{(\mathcal{E}/P)} = 1 \text{ мм рт.ст.}$$

3.2.5 В електронно-променевої трубці міститься аргон при тиску $1,8 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. З електронної гармати виходить пучок електронів з силою струму $I_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ А. Електрони прискорені напругою в 350 В. Відстань від гармати до екрану $L = 0,35$ м. Визначте частку електронів пучка, які дійшли до екрану нерозсіяними, а також кількість йонізацій, здійснюваних електронами пучка за 1 секунду.

Розв'язання

Відповідно до (4.1) частка нерозсіяних електронів, що пройшли шлях L без зіткнень

$$\frac{N_L}{N} = e^{-\frac{L}{\bar{\lambda}_e}} = e^{-\frac{L}{\bar{\lambda}_{e0}}P} = e^{-\frac{0,35 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}}{4,38 \cdot 10^{-4}}} = 0,246.$$

Це означає, що зі всієї кількості N електронів пучка зіткнення з молекулами газу випробують тільки $N - N_L$ електронів. Але зі всіх цих зіткнень тільки $(N - N_L)w_i$ приведуть до йонізації.

Відповідно до (4.6), рис. В.1 і табл. А.1 (див. Додатки) імовірність йонізації атомів аргону електронами складає

$$w_i = \frac{Q_{i_0}}{Q_{e_0}} = \frac{750}{2270} = 0,34.$$

Кількість йонізацій, здійснюваних пучком за 1 с, з урахуванням того, що $\frac{I_0}{e} = N$, дорівнює

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{I_0}{eN} (N - N_L) w_i = \frac{I_0}{e} \left(1 - \frac{N_L}{N} \right) w_i = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}} (1 - 0,246) \cdot 0,34 = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

3.2.6 Визначте, чи може йон літію (відносна атомна маса $A=7$), який має кінетичну енергію $E_k=60$ еВ, завдяки непружному зіткненню йонізувати атом гелію?

Розв'язання

При непружному зіткненні двох частинок мають виконуватися:

а) закон збереження енергії

$$\frac{m_1 u_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + E_{II},$$

де m_1, u_0, u – маса, початкова і кінцева швидкість першої частинки; m_2, v_0, v – маса, початкова і кінцева швидкість другої частинки; E_{II} – потенціальна енергія стану, порушеного при непружному ударі.

б) закон збереження кількості руху

$$m_1 u_0 + m_2 v_0 = m_1 u + m_2 v.$$

Припустимо, до зіткнення одна частинка перебуває в стані спокою (що повною мірою справедливо по відношенню до нейтральної частинки, $v_0 = 0$), тоді швидкість іншої частинки після зіткнення:

$$v = \frac{m_1 (u_0 - u)}{m_2}.$$

У цьому випадку рівняння збереження енергії

$$\frac{m_1 u_0^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} (u_0 - u)^2 + E_{II}.$$

Найбільше можливе значення E_{II} визначається з умови $\frac{dE_{II}}{du} = 0$, яка після перетворення матиме вигляд

$$u = u_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Підставляючи цей вираз у попередню формулу, отримаємо

$$E_{II \max} = E_{\kappa} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Відповідно до умови задачі $m_1 = 7m_p$ (m_p - маса протона) і $m_2 = 4m_p$. Тоді

$$E_{II \max} = \frac{60 \cdot 4}{4 + 7} = 21,8 \text{ eV}.$$

Одержана величина менше енергії, необхідної для йонізації гелію (для гелію $eI_p = 24,5 \text{ eV}$).

3.2.7 Яку мінімальну швидкість повинен мати електрон для йонізації молекули аргону, який має потенціал йонізації $IP_{I1} = 11,6 \text{ В}$? Електрон з цією швидкістю при зіткненні з молекулою ртуті йонізує її; потенціал йонізації ртуті $IP_{I2} = 10,4 \text{ В}$. Визначте швидкість бомбардуєчого і звільненого електронів після зіткнення за умови, що надлишкова енергія розподілилася порівну між цими електронами.

Розв'язання

Кінетична енергія електрона, необхідна для йонізації молекули аргону

$$\frac{mv_1^2}{2} = eIP_{I1},$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eIP_{I1}}{m}}.$$

Підставляючи чисельні дані з умови задачі, отримуємо швидкість електрона при йонізації молекули руті

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 11,6}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,02 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знайдемо тепер надлишкову енергію звільненого електрона:

$$\Delta E = \frac{mv_1^2}{2} - eIP_{12} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (2,02 \cdot 10^6)^2}{2} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10,4 = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Оскільки після зіткнення надлишкова енергія розподіляється порівну між бомбардуючим і звільненим електронами, то

$$\Delta E = mv_2^2,$$

звідки швидкість електронів після зіткнення

$$v_2 = \sqrt{\frac{\Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,457 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3.2.8 Нехай у розрядній трубці з міжелектродною відстанню 5 мм пробій відбувається за напруги 500 В. Ефективне значення коефіцієнта вторинної емісії для катода $\gamma = 0,018$. Чому дорівнює коефіцієнт первинної йонізації і коефіцієнт множення, якщо напруженість поля між електродами дорівнює 10^5 В/м ?

Розв'язання

Згідно рівняння для анодного струму

$$I_a = \frac{I_0 e^{ad}}{1 - \gamma(e^{ad} - 1)},$$

пробій відбувається в тому разі, коли знаменник $1 - \gamma(e^{ad} - 1) = 0$, тобто $e^{ad} = (1 + \gamma)/\gamma$. При цьому коефіцієнт первинної йонізації

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{1 + \gamma}{\gamma} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln \frac{1 + 0,018}{0,018} = 807 \text{ м}^{-1}.$$

Таке значення коефіцієнта первинної йонізації свідчить про те, що первинний електрон на шляху 1 м створює 807 нових електронів. Оскільки напруженість електричного поля є сталою, величина α не змінюється.

Коефіцієнт множення знаходимо з рівняння для струму

$$M = \frac{I_a}{I_0} = \frac{e^{807 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}}{1 - 0,018 \cdot (e^{807 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} - 1)} = \infty.$$

Цей результат відповідає напрузі пробую. Реально струм обмежується опором зовнішнього ланцюга.

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

3.3.1 Підрахуйте значення середнього коефіцієнта акомодатії k при пружному співударянні електрона з атомом аргону ($A = 40$).

3.3.2 У скільки разів зменшиться потік електронів при їх русі в газі на шляху $x = 5$ см, якщо повний переріз зіткнень електронів з атомами газу становить $Q = 0,3 \text{ см}^{-1}$?

3.3.3 Ефективний поперечний переріз розсіяння електронів на молекулах газу становить $q = 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$. Чому дорівнюватиме довжина вільного пробігу електронів у газі при тиску $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$ (при температурі газу 0°C)?

3.3.4 Оцініть порядок величини енергії електронів, при якій має спостерігатися ефект Рамзауера. Вважайте, що розмір молекул газу $a = 10^{-7} \text{ см}$.

3.3.5 Підрахуйте середнє значення ефективного перерізу кулонівських зіткнень електронів з однозарядними позитивними йонами. Температура електронів $T_e = 10^6 \text{ К}$. Чому дорівнюватиме повний поперечний переріз цих співударянь, якщо концентрація йонів $n_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$?

3.3.6 Підрахуйте частоту зіткнень електронів із попередньої задачі з позитивними йонами водню. При кожному зіткненні вони віддають йонам частину своєї енергії, яка визначається коефіцієнтом

акомодації k . Оцініть час, за який електрони передадуть йонам енергію, яка дорівнює енергії теплового руху електронів.

3.3.7 Підрахуйте коефіцієнт дифузії електронів у газі, якщо їх температура дорівнює $T_e = 2 \cdot 10^4$ К, а повний поперечний переріз зіткнень з атомами газу становить $Q = 0,3 \text{ см}^{-1}$. На яку середню відстань продифундують електрони за $\tau = 10^{-3}$ с.

3.3.8 Підрахуйте рухливість електронів за умов, наведених у попередній задачі. Яку дрейфову швидкість матимуть електрони в електричному полі $\mathcal{E} = 0,1 \text{ В/см}$?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Левитський, С. М.** Фізична електроніка [Текст] / С. М. Левитський. – К.: ВПЦ „Київський університет“, 2005. – 153 с.
- 2 **Поп, С. С.** Фізична електроніка [Текст] / С.С. Поп, І.С. Шароді. – Львів: Євросвіт, 2001. – 250с.
- 3 **Коротун, А. В.** Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни „Вакуумна та плазмова електроніка“ для студентів спеціальності 6.050801 „Мікро- та наноелектроніка“ денної й заочної форм навчання [Текст] / А. В. Коротун, А. В. Бабіч, Н. І. Павлице. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2014. – 94 с.

Додаток А

Параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу

Таблиця А.1 – Деякі параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу при $P = 1$ мм рт. ст. та $T = 0^{\circ}\text{C}$

Газ	A, ат.од.	λ_{T_0} , м	λ_{e_0} , м	Q_{e_0} , м ⁻¹	κ , відн.од
H ₂	2	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^{-4}$	1320	$5,4 \cdot 10^{-4}$
He	4	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$7,41 \cdot 10^{-4}$	1350	$2,7 \cdot 10^{-4}$
Ne	20	$1,16 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-4}$	1520	$5,4 \cdot 10^{-5}$
Ar	40	$7,73 \cdot 10^{-5}$	$4,38 \cdot 10^{-4}$	2270	$2,7 \cdot 10^{-5}$
Kr	84	$3,67 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$	4800	$1,3 \cdot 10^{-5}$
Xe	131	$2,56 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	6700	$8,2 \cdot 10^{-6}$
Hg	201	$4,88 \cdot 10^{-5}$	$2,76 \cdot 10^{-4}$	3600	$5,4 \cdot 10^{-6}$
N ₂	28	$6,33 \cdot 10^{-5}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	2800	$3,83 \cdot 10^{-5}$
Na	23	$8,07 \cdot 10^{-5}$	$4,57 \cdot 10^{-4}$	2200	$4,7 \cdot 10^{-5}$
Cs	133	$5,85 \cdot 10^{-6}$	$3,30 \cdot 10^{-5}$	30000	$8,1 \cdot 10^{-6}$

λ_{T_0} – середня довжина вільного пробігу молекули газу;

λ_{e_0} – середня довжина вільного пробігу електрона в газі;

Q_{e_0} – повний ефективний переріз пружного зіткнення електрона з молекулами газу;

$\kappa = 2 \frac{m_e}{m_a}$ – коефіцієнт акомодатії.

Додаток Б
Параметри електронного газу

Таблиця Б.1 – Зв'язок між температурою електронного газу T_e , середньою енергією eU і середньоарифметичною швидкістю електронів $\bar{v}_e$

T_e , К	eU , еВ	v_a , м/с	T_e , К	eU , еВ	v_a , м/с
100	0,009	$6,24 \cdot 10^4$	20000	1,73	$8,81 \cdot 10^5$
200	0,017	$8,8 \cdot 10^4$	22000	1,90	$9,25 \cdot 10^5$
500	0,043	$1,40 \cdot 10^5$	24000	2,07	$9,66 \cdot 10^5$
1000	0,086	$1,97 \cdot 10^5$	26000	2,21	$1,01 \cdot 10^6$
2000	0,173	$2,79 \cdot 10^5$	28000	2,42	$1,04 \cdot 10^6$
4000	0,345	$3,95 \cdot 10^5$	30000	2,59	$1,08 \cdot 10^6$
6000	0,518	$4,84 \cdot 10^5$	35000	3,02	$1,17 \cdot 10^6$
8000	0,690	$5,58 \cdot 10^5$	40000	3,45	$1,25 \cdot 10^6$
10000	0,862	$6,24 \cdot 10^5$	50000	4,31	$1,40 \cdot 10^6$
12000	1,035	$6,83 \cdot 10^5$	60000	5,18	$1,53 \cdot 10^6$
14000	1,206	$7,39 \cdot 10^5$	80000	6,90	$1,76 \cdot 10^6$
16000	1,380	$7,90 \cdot 10^5$	100000	8,62	$1,97 \cdot 10^6$
18000	1,552	$8,38 \cdot 10^5$			

$$eU = k_B T_e; \quad v_a = \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}} = 6,24 \cdot 10^2 \sqrt{T_e} \text{ (м/с)}.$$

Перехід до інших середніх значень швидкості електронів:

– середня найбільш імовірна швидкість: $v_n = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}};$

– середньоквадратична швидкість: $v_{\kappa\theta} = \sqrt{\frac{3k_B T_e}{m_e}}.$

Додаток В
Ефективні перерізи йонізації атомів деяких парів і газів

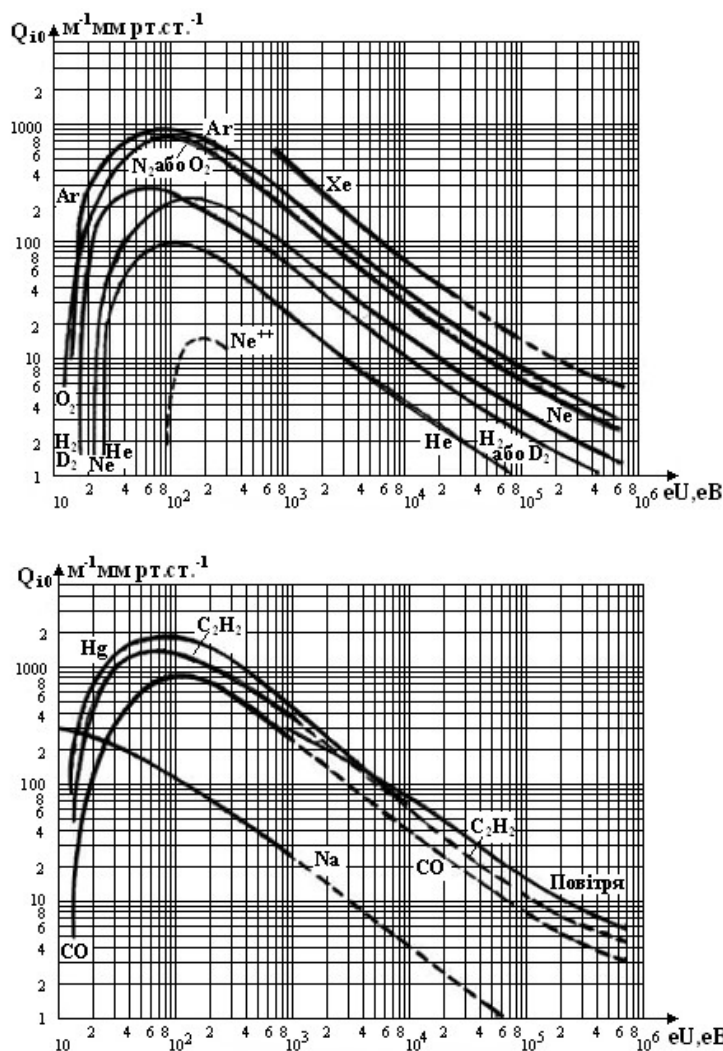


Рисунок В.1 – Залежності ефективних перерізів йонізації атомів деяких парів і газів від енергії електронів

Додаток Г
Потенціали йонізації й ефективні перерізи йонізації
молекул і атомів деяких газів

Таблиця Г.1 – Потенціали йонізації й ефективні перерізи йонізації молекул і атомів деяких газів, і константи у формулах для їх апроксимації

Рід газу	Кратність йонізації	$IP_i, \text{В}$	$U_m, \text{В}$	$q_i(U_m), \text{м}^2 \cdot 10^{20}$	$\alpha_i, \text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}$	Межі викорис-тання, В	$\alpha, \text{В}^{-1}$	$\beta, \text{В}$
H ₂	1	15,4	70	1,05	$4,80 \cdot 10^{-22}$	16...25	-	-
He	1	24,5	120	0,34	$1,30 \cdot 10^{-22}$	25...35	-	-
Ne	1	21,5	170	0,85	$1,58 \cdot 10^{-22}$	22...40	$2,5 \cdot 10^{-3}$	300
	2	62,4	200	0,05	$0,04 \cdot 10^{-22}$	63...190	-	-
Ar	1	15,4	100	3,40	$20,0 \cdot 10^{-22}$	16...25	$1,3 \cdot 10^{-3}$	110
	2	43,5	110	0,34	$0,90 \cdot 10^{-22}$	43...80	-	-
Hg	Спільн.	-	100	6,50	$20,0 \cdot 10^{-22}$	10,5...12,	$8,6 \cdot 10^{-3}$	100
	1	10,4	100	4,80	-	5	-	-
	2	29,1	120	0,56	$1,69 \cdot 10^{-22}$	-	-	-
	3	71,0	220	0,13	$0,17 \cdot 10^{-22}$	30...50	-	-
N ₂	1	15,8	110	3,10	$8,50 \cdot 10^{-22}$	71...150	$7,8 \cdot 10^{-3}$	160
O ₂	1	12,5	110	3,10	$5,65 \cdot 10^{-22}$	16...30	-	-
Повітря	1	-	130	2,80	$7,35 \cdot 10^{-22}$	13...30	-	-
						16...30		

Примітки:

1 Лінійна апроксимація ефективного перерізу іонізації молекули газу $q_i(U) = \alpha_i (U - IP_i)$;

2 Складна апроксимація ймовірності іонізації

$$w_i(U) = \alpha(U - IP_i) e^{\frac{U - IP_i}{\beta}},$$

де IP_i – потенціал іонізації, який приведено у [В]; α, β – чисельні коефіцієнти;

U_m – потенціал, при якому переріз йонізації максимальний;

$q(U_m)$ – максимальне значення перерізу іонізації молекули газу.