

УДК 004.021:539.3

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Д. Н. Колесник, Т. А. Миняйло  
Государственная инженерная академия, г. Запорожье

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Ранее рассмотренный метод расчета стержневых конструкций улучшен с целью повышения быстродействия алгоритма, уменьшения числа итераций и времени выполнения. Разработана и применена новая методика для нахождения промежуточного положения подвижных вершин.*

**Ключевые слова:** стержневые конструкции, нелинейные системы, метод последовательных перемещений, использование ЭВМ, быстродействие, алгоритмы.

### Введение

В работах [1, 2] представлен метод последовательных перемещений для расчета стержневых систем. Этот метод позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи расчета таких систем.

Данная работа является продолжением работ [1, 2] с целью улучшения предложенного в них метода. Усовершенствованный метод позволяет существенно уменьшить количество итераций и сократить время расчета конструкции, а также улучшить надежность алгоритма вычислений.

### Случай одноярусных конструкций, состоящих из произвольного количества стержней

Рассмотрим одноярусную стержневую систему, состоящую из  $n$  стержней, изображенную на рис. 1.

Начальные координаты узлов будут:

$$x_{B0}, y_{B0}, x_{Ai} = \text{const}, y_{Ai} = \text{const}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Пусть система находится в произвольном положении, отвечающем некоторому смещению узла  $B$  вдоль осей координат:

$$u_{B0}, v_{B0}. \quad (2)$$

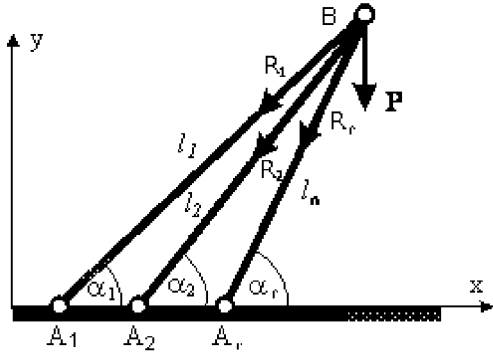


Рис. 1. Система из  $n$  стержней

Начальные длины стержней равны:

$$L_{i0} = \sqrt{(x_{B0} - x_{Ai})^2 + (y_{B0} - y_{Ai})^2} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Координаты узла  $B$  в произвольном положении:

$$x_B = x_{B0} + u_{B0}, \quad y_B = y_{B0} + v_{B0}. \quad (4)$$

Длины стержней при произвольном положении узла  $B$  равны:

$$L_i = \sqrt{(x_B - x_{Ai})^2 + (y_B - y_{Ai})^2} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Обозначим углы между стержнем номер  $i$  и осью координат через  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

Тогда косинусы и синусы этих углов будут равны соответственно:

$$\cos \alpha_i = \frac{x_B - x_{Ai}}{L_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{y_B - y_{Ai}}{L_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6)$$

Абсолютные деформации стержней равны:

$$\Delta L_i = L_i - L_{i0}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Для реакций стержней имеем:

$$R_i = D_i \Delta L_i, \quad D_i = \frac{E_i F_i}{L_{i0}} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Здесь  $E_i$  – модуль упругости материала стержня номер  $i$ ;  $F_i$  – площадь поперечного сечения стержня номер  $i$ . Эти реакции направлены вдоль стержней от узла (рис. 1).

Пусть теперь из положения со смещением (2) узел  $B$  получит дополнительное смещение:

$$u_B, v_B. \quad (9)$$

Составим уравнения равновесия узла  $B$  с учетом этого дополнительного смещения в линейной постановке. Дополнительные деформации стержней, вызванные смещениями (9), будут:

$$dL_i = u_B \cos \alpha_i + v_B \sin \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Вызванные этими смещениями реакции равны:

$$r_i = D_i dL_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (11)$$

Складывая реакции (8) и (11) получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= P_x - \sum_{i=1}^n (R_i + r_i) \cos \alpha_i = 0, \\ \sum Y &= P_y - \sum_{i=1}^n (R_i + r_i) \sin \alpha_i = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражения (11) с учетом (10) получаем:

$$\begin{aligned} a_{11} u_B + a_{12} v_B &= \sum x = P_x - \sum_{i=1}^n R_i \cos \alpha_i, \\ a_{21} u_B + a_{22} v_B &= \sum y = P_y - \sum_{i=1}^n R_i \sin \alpha_i, \\ a_{11} &= \sum_{i=1}^n D_i \cos^2 \alpha_i, \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n D_i \cos \alpha_i \sin \alpha_i, \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^n D_i \sin^2 \alpha_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13) находим новое перемещение узла  $B$ :

$$u_{B0} \rightarrow u_{B0} + u_B, \quad v_{B0} \rightarrow v_{B0} + v_B. \quad (14)$$

После этого выкладки повторяются, начиная с (4). Условием окончания циклического процесса можно взять:

$$\sqrt{(\sum x)^2 + (\sum y)^2} < \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \varepsilon, \quad (15)$$

где  $\varepsilon$  – заданная относительная погрешность.

Однако описанный алгоритм действителен не всегда. Возможны случаи, когда определитель систем уравнений равен или близок к нулю, что характерно, например, для потери устойчивости системы. В таких случаях рекомендуется заменить поиск смещений  $u_B, v_B$  формулами, которые применялись в методе последовательных перемещений:

$$u_B = \gamma \sum x, \quad v_B = \gamma \sum y, \quad (16)$$

где  $\gamma$  – коэффициент пропорциональности, который равен меньшей из величин, обратных жесткостям:

$$\gamma \approx \min \left( \frac{1}{D_i} \right) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (17)$$

Однако и при неравном нулю определителе может оказаться, что перемещения  $u_B, v_B$  слишком велики, что противоречит условиям составления линейной

системы уравнений (13), т.е. предположением о малости данных перемещений. Для того, чтобы не допустить этого, зададим какие-то максимальные значения перемещений:

$$u_{\max}, v_{\max}. \quad (18)$$

Если выясняется, что  $u_B > u_{\max}$ , то выполняем замены:

$$k = \frac{u_{\max}}{u_B}, \quad u_B \rightarrow ku_B, \quad v_B \rightarrow kv_B. \quad (19)$$

При этом вектор перемещения узла  $B$  сохраняет свое направление, но перемещение  $u_B$  уже не превосходит заданного максимального значения (равно ему). После этого для вновь полученных значений перемещений выполняем аналогичную проверку для второго перемещения. При  $v_B > v_{\max}$  выполняем замены:

$$k = \frac{v_{\max}}{v_B}, \quad u_B \rightarrow ku_B, \quad v_B \rightarrow kv_B. \quad (20)$$

Таким образом, теперь обеспечиваются достаточно малые значения линейных перемещений узла с сохранением его направления.

На рис. 2 и 3 приведены графические результаты решения задач о вертикальном нагружении системы из трех стержней вплоть до потери ее устойчивости прежним и новым методами.

Промежуточное положение верхнего узла на каждой итерации алгоритма обозначается точкой на рисунке. Для старого алгоритма количество этих точек настолько велико, что они образуют непрерывную кривую, которая соединяет старое и новое положение вершины. Для нового метода, достижение результатов

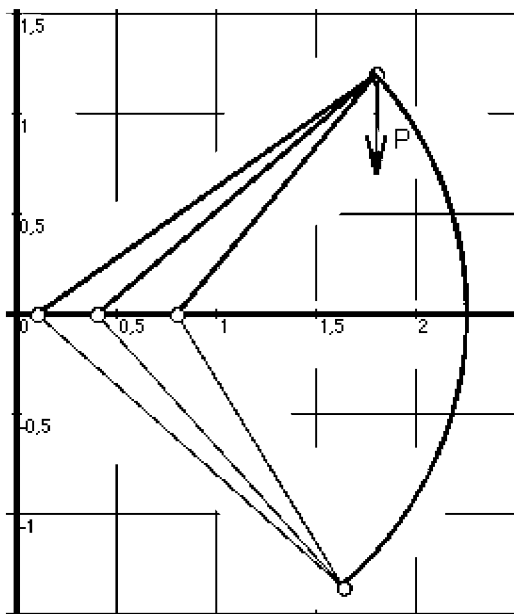


Рис. 2. Расчет методом последовательных перемещений

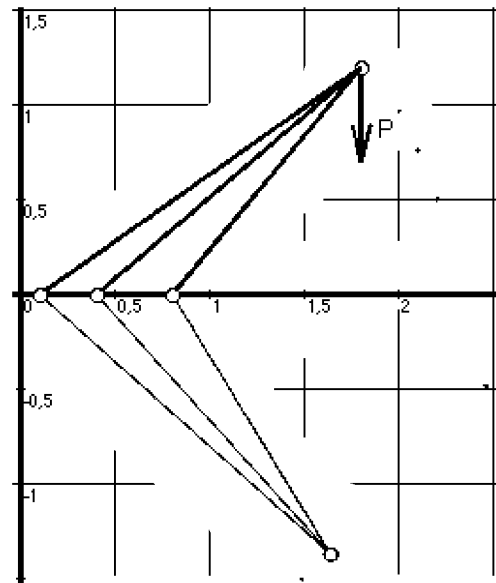


Рис. 3. Расчет усовершенствованным методом последовательных перемещений

потребовало гораздо меньшего числа итераций, что иллюстрируется значительно меньшим числом промежуточных положений. Так новому методу потребовалось в сорок шесть раз меньше итераций и в четыре раза меньше времени. Кроме того, многочисленные тестовые просчеты показали, что новый метод обладает значительно большей надежностью и способностью обеспечивать большую точность вычислений.

### Усовершенствованный метод последовательных перемещений для произвольных конструкций

Рассмотренный метод применяется и для конструкции произвольной степени сложности, имеющей много подвижных узлов. В таком случае метод решения аналогичен используемому для конструкции с одним подвижным узлом. На одном шаге вычислений предполагается, что конструкция имеет лишь один подвижный узел, все остальные закреплены. Решаем задачу приведенным выше способом для данного узла и переходим к следующему. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие (17) для всех узлов одновременно.

И в этом случае усовершенствованный подход позволяет сократить количество итераций и затрачиваемое время для выполнения расчетов.

На рис. 4, 5 приведены графические результаты расчетов двухъярусной конструкции под действием вертикальной нагрузки.

В данном случае число итераций нового метода меньше в тридцать семь раз, а время выполнения меньше в десять. Здесь в качестве примера рассмотрен только случай потери устойчивости верхним ярусом системы. Однако возможно изучить и дальнейшую потерю устойчивости нижнего яруса при увеличении нагрузки.

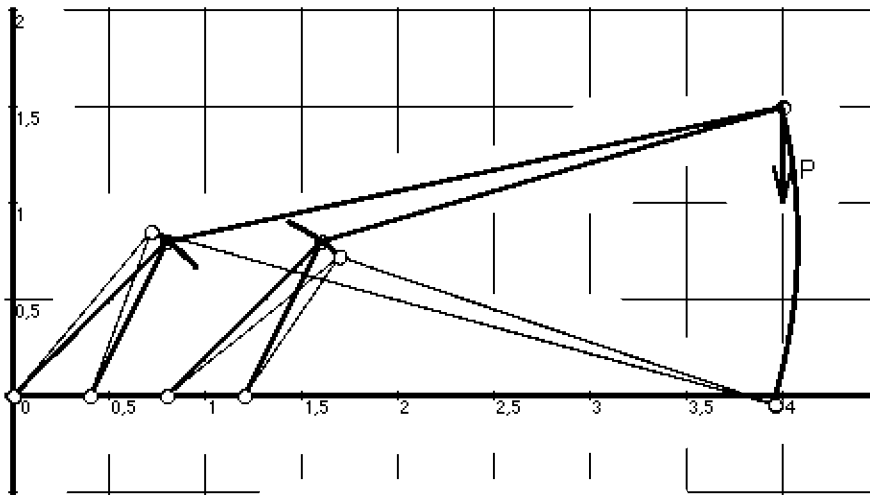


Рис. 4. Расчет методом последовательных перемещений

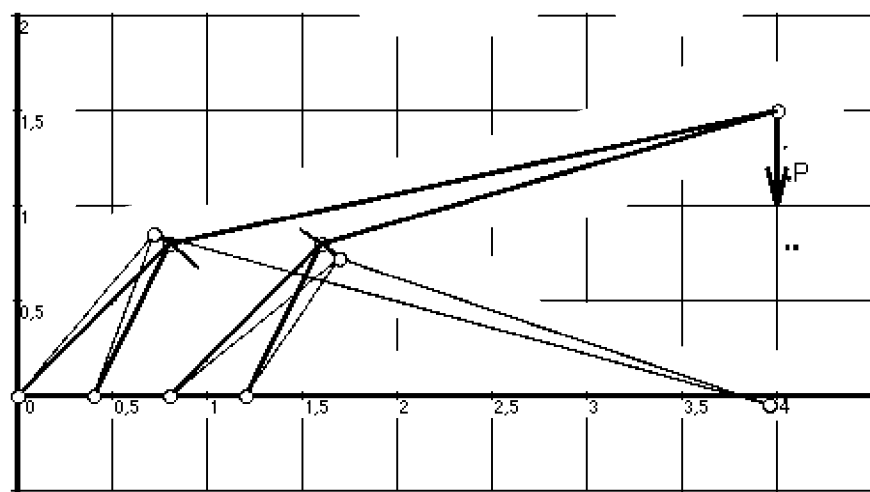


Рис. 5. Расчет усовершенствованным методом последовательных перемещений

### Выводы

Представленный в [1] метод расчета стержневых конструкций усовершенствован путем применения нового подхода к решению поставленной задачи, что позволило сократить число итераций и времени выполнения расчета, а также увеличить надежность метода и его точность. Полученные результаты позволяют применять метод последовательных перемещений для решения сложных конструкций (ферм, арок).

### Список литературы

1. Шамровський О. Д. Расчет стержневых конструкций методом последовательных перемещений с учетом геометрической нелинейности / О. Д. Шамровський, Д. М. Колесник, Ю. О. Лимаренко // *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*, 2009. – № 1. – С. 78–85.
2. Шамровський О. Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем / О. Д. Шамровський, А. І. Безверхий, В. В. Кривуляк // *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. – 2008. – № 2. – С. 110–118.

Одержано 01.04.2010

### Шамровський О.Д., Колесник Д.Н., Міняйло Т.О. Вдосконалений метод послідовних переміщень для розрахунку стержневих конструкцій

*Раніше розглянутий метод розрахунку стержневих конструкцій вдосконалено з метою підвищення швидкості алгоритму, зменшенню кількості ітерацій та часу виконання. Розроблена та застосована нова методика для розрахунку проміжного положення рухомих вершин.*

**Ключові слова:** стержневі конструкції, нелінійні системи, метод послідовних переміщень, використання ЕОМ, швидкодія, алгоритми.

**Shamrovskiy A., Kolesnik D., Minyaylo T. The improved method of successive approximations for beam structures calculation**

*Previously considered method of beam structures calculation has been improved in order to increase algorithm speed, reduce number of iterations and execution time. A new method of finding mobile nodes' intermediate positions has been developed and used.*

**Key words:** *beam structures, nonlinear system, the method of successive approximations, computer using, performance, algorithms.*

---