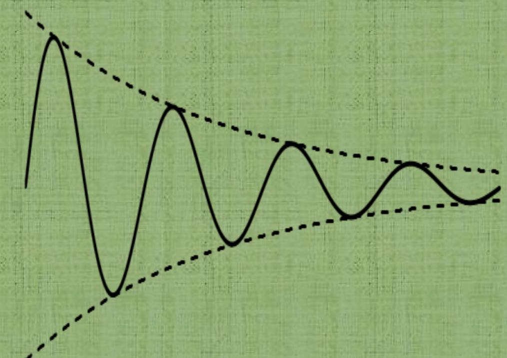
Д.І. Анпілогов – доцент кафедри
прикладної математики
національного університету
«Запорізька політехніка».

Н.В. Сніжко – доцент кафедри
вищої математики
національного університету
«Запорізька політехніка».

Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко Ряди

Д.І. Анпілогов
Н.В. Сніжко

Ряди



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Д. І. Анпілогов
Н. В. Сніжко

РЯДИ

Навчальний посібник
(*видання 2-е, виправлене і доповнене*)

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2022

УДК 517.3(075.8)
А69

*Рекомендовано до друку вченою радою
національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 2 від 26.09.2022)*

Р е ц е н з е н т и:

С.В.Чопоров – доктор технічних наук,
професор кафедри програмної інженерії
Запорізького національного університету;

О.В.Смоляков – доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри загальної та прикладної фізики
Запорізького національного університету.

Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В.
А69 Ряди: навч. посібник. Вид. 2-е, виправлене і доповнене / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 133 с.

ISBN 978-617-529-378-2

Посібник містить теоретичні відомості і значну кількість ілюстративних прикладів та розв’язаних задач з інтегрального числення у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців інженерно-технічних спеціальностей. В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів та приклади їх розв'язку, які не потребують застосування обчислювальної техніки.

Видання може бути корисним для студентів, педагогів вищої школи, докторантів та аспірантів, які працюють у сфері педагогіки вищої школи.

УДК 517.3(075.8)

ISBN 978-617-529-378-2

З М І С Т

Вступ

Посібник містить теоретичні відомості з теми «Ряди» у відповідності до програми курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців технічних спеціальностей. Розглянуто поняття числового ряду (включаючи знакозмінні), поняття збіжності, абсолютної і умовної збіжності. Наведено ознаки збіжності. Розглянуто також ряди степеневі (Тейлора) і тригонометричні (Фур'є). Переважну більшість тверджень доведено з дотриманням досить високого рівня математичної строгості. Це дозволяє розглядати матеріал як викладений системно. Крім того, з практичної точки зору мати в наявності доведення зручно, оскільки при цьому легше прийняти рішення про відповідність конкретної ситуації до меж застосування тих чи інших ознак, теорем, формул тощо.

Значний об'єм посібника зумовлений значною кількістю наведених прикладів, які пояснюють специфіку принципово нових термінів. В багатьох прикладах також розв'язано низку типових задач курсу вищої математики для студентів технічних спеціальностей.

В другому виданні доданий підрозділ, привячений питанням застосування степеневих рядів до наближених обчислень. Відповідні задачі та приклади їх розв'язання також додані до розділів 2 і 3.

В посібнику прийнято наступні умовні позначення. Означення супроводжуються символом ⧫. Формулювання теорем супроводжуються чорним квадратом ■. Доведення теорем містяться між білими квадратами: □ *текст доведення* □, а приклади – між білими трикутниками: ◁ *текст прикладу* ▷.

В посібнику містяться також індивідуальні завдання в кількості 15 варіантів і приклад розв'язку одного варіанта. Жодна задача (крім розвинення функції в ряд Фур'є) застосування обчислювальної техніки не потребує.

1 РЯДИ

1.1 Вступ до теорії рядів

1.1.1 Основні означення

Символ
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$
називають *рядом*, а величини a_n – *членами ряду*. Якщо величини a_n є числами, то ряд називають *числовим*, а якщо функціями – то *функціональним*. Зокрема, якщо $a_n = c_n x^n$, ряд називають *степеневим*; якщо $a_n = c_n \cos(nx + \varphi_n)$ – *тригонометричним* (рядом Фур'є) тощо.

Вираз (1.1) є лише символом. Математична сутність, яку позначає цей символ, потребує формулювання певного означення, оскільки сприймати (1.1) як звичайну арифметичну суму означає припускатися помилки. Це доводить наступний приклад.

$\lhd$ *Приклад 1.1.* Вираз $A = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ перетворимо наступним чином:
$$A = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots) = 1 + 2\,(1 + 2 + 4 + \cdots)\,.$$
Маємо: $A = 1 + 2A$, $A = -1$. Це протиріччя виникає через те, що ми намагаємось розповсюдити наші звички працювати з сумами скінченної кількості доданків (групування, винесення множника за дужки тощо) на випадок нескінченної кількості доданків. Іншого джерела помилок в цьому прикладі немає. $\rhd$

Сума (1.1) може виявитись конкретним числом навіть попри те, що вона містить нескінченну кількість доданків.

$\lhd$ *Приклад 1.2.* В (1.1) покладемо $a_n = \frac{3}{10^{n-1}}$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^{n-1}} = \frac{3}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \cdots =$$
$$= 3 + 0{,}3 + 0{,}03 + \cdots = 3{,}(3) = \frac{10}{3}.$$

Тут 3,(3) – періодичний десятковий дріб, на що вказують дужки після коми. $\triangleright$

Результат останнього прикладу можна отримати, *накопичуючи доданки послідовно один за одним*. Позначимо $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, де $a_n = \frac{3}{10^{n-1}}$. Очевидно, зі збільшенням номеру n числа a_n стають дедалі меншими. Тому можна припустити, що грубе наближення для значення S виникає при врахуванні декількох початкових доданків, а подальше його уточнення – при врахуванні все більшої кількості доданків. Отже, найбільш грубо можна вважати: $S \approx a_1 = \frac{3}{10^0} = 3$. Більш точний результат: $S \approx a_1 + a_2 = \frac{3}{10^0} + \frac{3}{10^1} = 3{,}3$. Ще більш точний результат:

$$S \approx a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{10^0} + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} = 3{,}33$$

і т.д. Узагальнимо ці міркування. У виразі (1.1) відокремимо перші M доданків:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_M) + (a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots) =$$

$$= \sum_{n=1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n.$$

Тут в правій частині першу суму називають *частковою сумою ряду*, а другу – *залишковим членом*, або *залишком ряду*. Відкидаючи залишок ряду, можна припустити, що $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \approx \sum\limits_{n=1}^{M} a_n$.

Поступово збільшуючи M, тобто враховуючи в частковій сумі все більшу кількість доданків, отримаємо (числову) *послідовність часткових сум* $S_M = \sum\limits_{n=1}^{M} a_n$:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\cdots,$$

$$S_M = a_1 + a_2 + \cdots + a_M$$

і т.д. Якщо ця послідовність має скінченну границю при прямуванні M до нескінченності, то цю границю і вважають сумою ряду (1.1), а про ряд кажуть, що він *збігається* (є збіжним). Якщо ця послідовність має нескінченну границю, або не має ніякої границі взагалі, про ряд кажуть, що він *розбігається* (є розбіжним). Сенсу говорити про суму розбіжного ряду немає.

♦ **Означення 1.1**. Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ називають **збіжним**, якщо границя $S = \lim\limits_{M\to+\infty} S_M = \lim\limits_{M\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{M} a_n$ послідовності часткових сум існує і є скінченною. Цю границю називають **сумою ряду**.

♦ **Означення 1.2**. Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ називають **розбіжним**, якщо границя $S = \lim\limits_{M\to+\infty} S_M = \lim\limits_{M\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{M} a_n$ послідовності часткових сум є нескінченною або не існує взагалі.

◁ *Приклад 1.3*. Нехай $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

має часткові суми $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$, $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$, і т.д. Очевидно, послідовність $1, 0, 1, 0, \cdots$ взагалі ніякої границі не має, ні скінченної, ані нескінченної. Отже, ряд розбігається. ▷

◁ *Приклад 1.4*. Нехай $a_n = n$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

є сумою арифметичної прогресії з першим членом $a_1 = 1$ і різницею $d = 1$. Його часткові суми (див. п. 4.1)

$$S_M = \frac{2a_1 + d(M-1)}{2} \cdot M = \frac{2 + (M-1)}{2} \cdot M = \frac{M^2 + M}{2}.$$

Границя послідовності часткових сум:

$$S = \lim_{M\to+\infty} S_M = \lim_{M\to+\infty} \frac{M^2 + M}{2} = +\infty,$$

отже, ряд розбігається. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.5*. Нехай $a_n = 1$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

має часткові суми $S_1 = 1$, $S_2 = 1+1 = 2$, $S_3 = 1+1+1 = 3$, і т.д. В загальному випадку $S_M = M$. Границя послідовності часткових сум:

$$S = \lim_{M \to +\infty} S_M = \lim_{M \to +\infty} M = +\infty,$$

отже, ряд розбігається. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.6*. Нехай $a_n = \frac{1}{2^n}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

є сумою геометричної прогресії з першим членом $a_1 = \frac{1}{2}$ і знаменником $q = \frac{1}{2}$. Його часткові суми (див. п. 4.2)

$$S_M = \frac{a_1 \left(1 - q^M\right)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^M\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^M}.$$

Границя послідовності часткових сум:

$$S = \lim_{M \to +\infty} S_M = \lim_{M \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^M}\right) = 1 < +\infty,$$

отже, ряд збігається. Сума ряду дорівнює одиниці. $\triangleright$

Порівняймо три останні приклади. Часткові суми

$$S_M = \frac{M^2 + M}{2}, \qquad S_M = M, \qquad S_M = 1 - \frac{1}{2^M}$$

є монотонно зростаючими функціями номеру M (чим більше M, тим більше S_M). Справді, при збільшенні M до суми S_M накопичених раніше членів a_n ми долучаємо додаткові додатні члени a_n, а це тільки збільшує накопичену часткову суму. Але поведінка функцій $S_M = f(M)$ (тобто динаміка накопичення) в трьох останніх прикладах є різною. В прикладі 1.4 накопичення відбувається з прискоренням, оскільки кожний новий доданок

a_n на одиницю більший за попередній. Графік S_M – квадратична парабола гілками догори і опуклістю донизу. В прикладі 1.5 накопичення є рівномірним, оскільки кожний новий доданок a_n дорівнює попередньому (і дорівнює одиниці). Графік S_M – пряма. І лише в прикладі 1.6 накопичення відбувається з уповільненням, оскільки кожний новий доданок a_n вдвічі менший за попередній. Графік S_M – графік показникової функції з опуклістю догори. Саме тому і виникає горизонтальна асимптота з рівнянням

$$S = \lim_{M \to +\infty} S_M = 1.$$

Графік продовжує зростати, але не може «перестрибнути» через цю асимптоту. Це і означає, що границя послідовності часткових сум існує і є скінченною, а відповідний ряд – збіжним.

1.1.2 Гармонічний ряд

Здавалося б, з наведених вище міркувань випливає: якщо члени a_n з ростом n збільшуються (або принаймні не зменшуються), то ряд розбігається, а якщо зменшуються, прямуючи до нуля, – то збігається. Але **цей висновок є хибним.** Аби його спростувати, достатньо навести приклад хоча б одного розбіжного ряду, члени a_n якого зменшуються, прямуючи до нуля. Таким прикладом може бути так званий *гармонічний ряд*. Він виникає з використанням послідовності $a_n = \frac{1}{n}$ і має вигляд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .$$

Зауважимо, послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ вже не є прогресією. До речі, переважна більшість розлядуваних нижче рядів – не прогресії.

Доведемо, що гармонічний ряд є розбіжним. Згрупуємо його доданки в «блоки» так, щоб кількість доданків в кожному «блоці» збільшувалась за законом геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 шт.}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{2 шт.}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\text{4 шт.}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\text{8 шт.}} + \cdots .$$

Виявляється, що кожний «блок» (починаючи з другого) – це число, яке перевищує $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{8\text{ шт.}}>\underbrace{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}}_{8\text{ шт.}}=8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

і т.д. Ясно, що часткова сума перевищує величину $\left(1+n\cdot\frac{1}{2}\right)$, де n – кількість врахованих «блоків» (починаючи з «блоку», який складається з числа $\frac{1}{2}$). Оскільки ця кількість є необмеженою, то і часткова сума скінченної границі не має. Отже, **гармонічний ряд є розбіжним**.

1.1.3 Подальші приклади

◁ *Приклад 1.7.* Нехай $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Для M-ї часткової суми ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

маємо оцінку

$$S_M=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{M}}}_{M\text{ шт.}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}}+\frac{1}{\sqrt{M}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{M}}}_{M\text{ шт.}}=$$

$$=M\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}=\sqrt{M},\qquad S_M>\sqrt{M}.$$

Оскільки $\lim\limits_{M\to+\infty}\sqrt{M}=+\infty$, то тим паче $\lim\limits_{M\to+\infty}S_M=+\infty$. Отже, ряд розбігається. ▷

◁ *Приклад 1.8.* Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Для n-го члену ряда маємо: $a_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$. Тоді M-а часткова сума:

$$S_M = a_1 + a_2 + \cdots + a_M =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(M+1) - \ln M) =$$

$$= \ln(M+1) - \ln 1 = \ln(M+1).$$

Тоді $\lim\limits_{M\to+\infty} S_M = \lim\limits_{M\to+\infty} \ln(M+1) = +\infty$, і ряд розбігається. ▷

Ці приклади, а також приклад гармонічного ряду доводять наступне. Навіть якщо члени ряду прямують до нуля, це ще не гарантує збіжності ряду. Іншими словами, прямування членів ряду до нуля ще не є достатньою умовою збіжності.

1.2 Теореми про числові ряди

Розглянемо декілька теорем загального характеру.

■ **Теорема 1.1.** Ряди

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \cdots, \tag{A}$$

$$\sum_{\substack{n=k,\\ k>1}}^{+\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots \tag{B}$$

збігаються або розбігаються одночасно.

□ *Доведення*. Дано: ряд (A) збігається. Довести: ряд (B) також збігається. За означенням збіжності дано:

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{n=1}^{M} a_n = S,$$

причому величина S існує і є скінченною. Маємо:

$$\lim_{M\to+\infty} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{k-1} a_n}_{\text{const}} + \sum_{n=k}^{M} a_n \right) = S.$$

Тут перша сума містить усі ті доданки, яких немає в ряді (B). Тому друга сума і є частковою сумою ряду (B). Для її границі маємо:

$$\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=k}^{M} a_n = S - \lim_{M\to+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} a_n = S - \text{const} = \text{const},$$

а це і значить, що ряд (B) також збігається. З розбіжності ряду (A) розбіжність ряду (B) випливає аналогічно. □

Ця теорема стверджує, що відкидання скінченної кількості початкових членів ряду не впливає на поведінку ряду в сенсі його збіжності.

■ **Теорема 1.2.** Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається. Тоді залишок ряду прямує до нуля:

$$\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n = 0.$$

□ *Доведення.* Нехай сума ряду дорівнює S. За означенням збіжності існує і є скінченною границя:

$$S = \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Тоді для кожного фіксованого M, $M < k$, маємо:

$$S = \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{k} a_n\right) = \sum_{n=1}^{M} a_n + \lim_{k\to+\infty}\sum_{n=M+1}^{k} a_n,$$

$$S = \sum_{n=1}^{M} a_n + \sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n. \qquad (*)$$

Тут $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=M+1}^{k} a_n = \sum\limits_{n=M+1}^{+\infty} a_n$, оскільки останній ряд збігається за теоремою 1.1. Здійснимо в рівнянні $(*)$ граничний перехід при $M \to +\infty$. Оскільки сума $\sum\limits_{n=1}^{M} a_n$ є частковою, то її границя і є S. Тоді

$$S = S + \lim_{M\to+\infty}\sum_{n=M+1}^{+\infty} a_n,$$

звідки і випливає твердження теореми. □

Доведена теорема стверджує наступне. Якщо в частковій сумі $S_M = \sum\limits_{n=1}^{M} a_n$ накопичити достатньо велику кількість M початкових членів, то похибка наближеної рівності $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \approx S_M$ прямує до нуля. Важливо відмітити, що до нуля прямує не тільки кожний окремо взятий відкинутий член збіжного ряду, а навіть сума нескінченної кількості відкинутих членів, узятих разом. Отже, ця теорема обґрунтовує практичний спосіб обчислення суми збіжного ряду, який полягає в припиненні накопичення доданків a_n в частковій сумі S_M при досягненні досить великого номеру M. Звичайно, до розбіжних рядів такий спосіб застосовувати не можна.

■ **Теорема 1.3 (про почленне множення).** Нехай з одного ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ утворено другий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ за правилом $b_n = \alpha a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha = \mathrm{const}$. Якщо перший ряд збігається і його сума дорівнює A, то другий ряд також збігається, причому його сума дорівнює αA.

□ *Доведення.* Позначимо M-і часткові суми першого і другого рядів через $S_M^{(1)}$, $S_M^{(2)}$. Маємо:

$$S_M^{(2)} = \sum_{n=1}^{M} b_n = \sum_{n=1}^{M} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{M} a_n = \alpha S_M^{(1)}.$$

Здійснюючи граничний перехід при $M \to +\infty$, отримуємо твердження теореми. □

Ця теорема узагальнює дистрибутивність множення відносно додавання, тобто дозволяє в рівності

$$\alpha x + \alpha y + \cdots + \alpha z = \alpha\left(x + y + \cdots + z\right)$$

вважати кількість доданків нескінченно великою, якщо відповідні суми збігаються.

■ **Теорема 1.4 (про почленне додавання).** Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігаються і їх суми дорівнюють A і B відповідно. Нехай з членів цих двох рядів утворено третій ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ за правилом

$c_n = a_n + b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді цей третій ряд також збігається, причому його сума дорівнює $(A + B)$.

☐ *Доведення.* Позначимо M-і часткові суми першого і другого рядів через $S_M^{(1)}$, $S_M^{(2)}$. Тоді часткова сума третього ряду дорівнює

$$S_M = c_1 + c_2 + \dots + c_M = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_M + b_M) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_M) + (b_1 + b_2 + \dots + b_M) = S_M^{(1)} + S_M^{(2)}.$$

Здійснюючи граничний перехід при $M \to +\infty$, отримуємо твердження теореми. ☐

Зауважимо, зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ збіжність окремих рядів $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ не випливає.

■ **Теорема 1.5 (необхідна умова збіжності).** Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

☐ *Доведення.* Запишемо n-у і $(n-1)$-у часткові суми:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Віднімаючи ці рівняння, знаходимо:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Очевидно, обидві часткові суми мають однакову границю, яка дорівнює сумі S ряду, оскільки він збігається. Тоді, здійснюючи граничний перехід при $n \to \infty$, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

що і треба було довести. ☐

Зауваження 1. З цієї теореми легко отримати *ознаку розбіжності ряду*: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Доведемо цю ознаку «від супротивного». Нехай ряд не розбігається, отже, він збігається. Тоді за теоремою 1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, і протиріччя отримано.

Зауваження 2. Остання теорема доводить: якщо ряд збігається, то його члени прямують до нуля. Обернене твердження (якщо члени ряду прямують до нуля, то він збігається) є хибним. На цьому ми вже наголошували при аналізі гармонічного ряду, а також подальших прикладів. Отже, прямування членів ряду до нуля є лише необхідною умовою збіжності ряду, але не є достатньою умовою його збіжності.

Остаточно маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ – необхідна умова збіжності ряду (але не достатня), $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ – достатня умова розбіжності ряду (але не необхідна).

1.3 Збіжність додатних рядів

1.3.1 Ідея аналізу збіжності додатних рядів

При встановленні збіжності ряду *за означенням* потрібно зробити два кроки: 1) вивести формулу для часткової суми; 2) знайти границю часткової суми. При такому способі встановлення збіжності додатковим результатом є сума ряду.

Але виведення загальної формули для часткової суми зазвичай пов'язане зі значними труднощами. Тому часто обмежуються лише дослідженням ряду на збіжність (розбіжність), не знаходячи ні виразу для часткової суми, ані його границі. Саме так ми робили, наприклад, у випадку гармонічного ряду.

Замість виведення точної формули для часткової суми часто достатньо побудувати її оцінку, скажімо, як в прикладі 1.7. В цьому розділі наведено низку теорем про збіжність, заснованих на такій оцінці. Такі теореми називають *ознаками збіжності* і використовують замість означення збіжності.

Найбільш просто такі ознаки сформулювати і довести для додатних рядів.

♦ **Означення 1.3**. **Додатним** називають ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, кожний член якого $a_n \geqslant 0$.

За умови $a_n \geqslant 0$ дослідження збіжності рядів значно спрощується. Для довільного ряду маємо:

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

В разі додатних рядів $a_{n+1} \geqslant 0$, і тому $S_{n+1} \geqslant S_n$. Отже, послідовність часткових сум додатних рядів є монотонно неспадною. Відома теорема К. Вейєрштрасса[1], яка стверджує, що монотонна обмежена послідовність має скінченну границю. Монотонність послідовності часткових сум в разі додатних рядів вже гарантовано. Якщо на додачу до цього ми зможемо пред'явити число, яке жодна часткова сума не перевищує, то буде гарантованою також обмеженість послідовності часткових сум. Тоді обидві умови теореми Вейєрштрасса виконано, і послідовність часткових сум має скінченну границю. Але це і означає збіжність досліджуваного ряду за означенням.

1.3.2 Ознака порівняння

■ **Теорема 1.6 (ознака порівняння).** Розглянемо ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (A) і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ (B), для членів яких виконана нерівність $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Якщо ряд (B) збігається, то ряд (A) тим паче збігається.

□ *Доведення.* Нехай ряд (B) збігається. Тоді існує і є скінченною границя

$$S^{(\text{ряду B})} = \lim_{M\to\infty} S_M^{(\text{ряду B})} = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} b_n.$$

Оскільки ряд (B) додатний, то при зростанні M його часткові суми не можуть зменшуватись. Тоді вони не перевищують суму ряду (B):

$$S_M^{(\text{ряду B})} \leqslant S^{(\text{ряду B})}.$$

Часткові суми ряду (A) складено з членів відповідно менших, тому

$$S_M^{(\text{ряду A})} \leqslant S_M^{(\text{ряду B})}.$$

Отже,

$$S_M^{(\text{ряду A})} \leqslant S^{(\text{ряду B})} = \text{const},$$

[1]Карл Теодор Вільгельм Вейєрштрасс (31 жовтня 1815 – 19 лютого 1897) – німецький математик. Дослідження Вейєрштрасса присвячені математичному аналізу, теорії функцій, варіаційному численню, диференціальній геометрії і лінійній алгебрі.

тобто послідовність часткових сум ряду (A) обмежена зверху (конкретно кажучи, числом $S^{(\text{ряду B})}$). З іншого боку, ряд (A) є додатним, тому послідовність його часткових сум монотонно зростає. Отже, за теоремою Вейєрштрасса ця послідовність має границю, що і треба було довести. $\square$

Наслідок. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (A) розбігається і $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ (B) тим паче розбігається. Справді, припустимо, це не так, і ряд (B) збігається. З цього випливала б і збіжність ряду (A), що протирічить вихідному припущенню.

$\triangleleft$ *Приклад 1.9.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$.

Покладемо $a_n = 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$, $b_n = 2^n \cdot \frac{\pi}{3^n}$. Кути $\alpha = \frac{\pi}{3^n}$ – з першої чверті, тому $\sin \alpha < \alpha$, і $a_n < b_n$. Але ряд, складений з членів b_n, збігається як прогресія ($q = \frac{2}{3} < 1$), тому наш ряд тим паче збігається за ознакою порівняння. $\triangleright$

Зауважимо, пред'являти суму $S^{(\text{ряду B})} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ збіжного ряду в якості числа, яке обмежує зверху послідовність часткових сум ряду (A), не обов'язково. Достатньо лише знати, що воно існує. Інакше кажучи, для доведення збіжності ряду (A) за ознакою порівняння достатньо пред'явити сам ряд (B), про який відомі дві речі: 1) він збіжний і 2) його члени більші за відповідні члени ряду (A). В цьому випадку кажуть, що ряд (B) виконує роль *мажоранти* для ряду (A). Мажоранта (B) оцінює ряд (A) *зверху*.

$\triangleleft$ *Приклад 1.10.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Маємо наступну оцінку:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} = \frac{1}{n}.$$

Покладемо $b_n = \frac{1}{n}$, і тоді $a_n > b_n$. Ряд, складений з членів b_n, розбігається як гармонічний, тому наш ряд тим паче розбігається за ознакою порівняння. $\triangleright$

Зауважимо, для доведення розбіжності ряду (A) за ознакою порівняння достатньо пред'явити сам ряд (B), про який відомі дві речі: 1) він розбіжний і 2) його члени менші за відповідні члени ряду (A). В цьому випадку кажуть, що ряд (B) виконує роль *міноранти* для ряду (A). Міноранта (B) оцінює ряд (A) *знизу*.

1.3.3 Ряд Діріхле

Рядом Діріхле[2] називають числовий ряд, народжений послідовністю $a_n = \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Він має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{$*$}$$

(Власне, іменем Діріхле називають ряди більш загального вигляду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$, де a_n і z – деякі комплексні числа).

Нехай $x = 1$. Тоді ряд Діріхле стає гармонічним рядом (і тому ряд ($*$) називають також *узагальненим гармонічним*). При $x = 1$ ряд Діріхле розбігається.

Нехай тепер $x < 1$ (тепер x може дорівнювати нулю або навіть бути від'ємним; ряд Діріхле залишається додатним). Тоді $1 - x > 0$, і $n^{1-x} > 1$ для всіх $n \geqslant 2$. Тоді $\frac{n}{n^x} > 1$, $\frac{1}{n^x} > \frac{1}{n}$. Позначимо $b_n = \frac{1}{n}$. Маємо: $a_n > b_n$. Ряд з членів b_n розбігається як гармонічний, тому ряд Діріхле при $x < 1$ тим паче розбігається за ознакою порівняння. Приклад 1.7 був саме таким. Він виникав при $x = \frac{1}{2} < 1$.

Нарешті, нехай тепер $x > 1$. Покладемо $x = 1 + \beta$, $\beta > 0$. Порівняємо ряд Діріхле зі збіжною геометричною прогресією зі знаменником $q = \frac{1}{2^\beta} < 1$. Розіб'ємо ряд Діріхле на «блоки» як і у випадку гармонічного ряду:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{\frac{1}{2^x}}_{1\ \text{шт.}} & + & \underbrace{\frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x}}_{2\ \text{шт.}} & + & \underbrace{\frac{1}{5^x} + \cdots + \frac{1}{8^x}}_{4\ \text{шт.}} & + \cdots \\ 1 & + & q & + & q^2 & + \cdots \end{array}$$

Тут початковий доданок $\frac{1}{1^x}$ відкинуто, оскільки його наявність

[2] Йоганн Петер Густав Лежен-Діріхле́ (нім. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 13 лютого 1805, Дюрен, Франція, зараз Німеччина – 5 травня 1859, Геттінген, Ганновер) – німецький математик, відомий значним внеском до математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної та теорії чисел.

чи відсутність не впливає на збіжність ряду. Маємо:

$$\underbrace{\frac{1}{2^\beta}}_{1\text{ шт.}} < 1 = q^0,$$

$$\frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} < \underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^x}}_{2\text{ шт.}} = \frac{2}{2^x} = \frac{1}{2^{x-1}} = \frac{1}{2^\beta} = q^1,$$

$$\frac{1}{5^x} + \cdots + \frac{1}{8^x} < \underbrace{\frac{1}{4^x} + \cdots + \frac{1}{4^x}}_{4\text{ шт.}} = \frac{4}{4^x} = \frac{1}{4^{x-1}} = \frac{1}{(2^2)^\beta} = \frac{1}{(2^\beta)^2} = q^2,$$

і т.д. Отже, збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots$ є мажорантою, тому ряд Діріхле при $x > 1$ збігається за ознакою порівняння.

Гармонічний ряд і збіжна прогресія виконували роль *еталонів*, з якими ми порівнювали ряд Діріхле при дослідженні його збіжності. Тепер, коли збіжність (розбіжність) ряду Діріхле встановлено (в залежності від x), він сам може відігравати роль такого еталону.

$\triangleleft$ *Приклад 1.11.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

Маємо наступну оцінку:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n \cdot n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Покладемо $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, і тоді $a_n < b_n$. Ряд, складений з членів b_n, збігається як ряд Діріхле при $x = \frac{3}{2} > 1$, тому наш ряд тим паче збігається за ознакою порівняння. $\triangleright$

1.3.4 Гранична ознака порівняння

При дослідженні ряду на збіжність *за означенням* було потрібно виводити формулу для часткової суми. При застосуванні ознаки порівняння ми позбавились цієї потреби, але необхідність порівнювати члени a_n і b_n ще залишалась. Виявляється, що і цієї необхідності можна уникнути: достатньо порівнювати не члени ряду, а їх асимптотичну поведінку при $n \to \infty$.

Наприклад, до рядів, складених з членів $a_n = \frac{1}{n^2}$ і $b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{\sin n}{n^3}$, ознаку порівняння застосувати не можна, оскільки при зростанні n величина $\sin n$ може виявитись як додатною, так і від'ємною. Це означає, що для різних n може виконуватись як нерівність $a_n > b_n$, так і нерівність $a_n < b_n$. Однак, в порівнянні з доданком $\frac{1}{n^2}$ доданок $\frac{\sin n}{n^3}$ швидше прямує до нуля, і ним можна знехтувати. Тому при великих n отримаємо $b_n \approx \frac{1}{n^2}$, тобто $b_n \approx a_n$. Це означає, що при $n \to \infty$ члени a_n і b_n прямують до нуля з однаковою швидкістю[3] (мають однакову асимптотичну поведінку, тобто стають нескінченно малими однакового порядку малості). Тому інтуїтивно ясно, що ряд з членів b_n повинен збігатись, бо ряд з членів a_n збігається як ряд Діріхле при $x = 2$.

Наведені міркування вдається «узаконити» за допомогою наступної теореми.

■ **Теорема 1.7 (гранична ознака порівняння).** Нехай з членів a_n, b_n двох додатних рядів утворено вираз $K = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Якщо $K = \text{const}$ і $K \neq 0$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) збігаються або розбігаються одночасно.

□ *Доведення.* За означенням границі послідовності, припускаючи $b_n \neq 0$, маємо:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon, \qquad a_n < b_n(K + \varepsilon).$$

Нехай ряд (B) збігається. Тоді ряд з членів $b'_n = b_n(K+\varepsilon)$ також збігається за теоремою 1.3. Тоді з нерівності $a_n < b'_n$ випливає збіжність ряду (A) за ознакою порівняння (b'_n – мажоранта).

Нехай тепер ряд (B) розбігається, і $K \neq 0$. Тоді ряд (A) також розбігається. Справді, припустимо, це не так, і ряд (A) – збіжний. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K}, \qquad \left|\frac{b_n}{a_n} - \frac{1}{K}\right| < \varepsilon, \qquad b_n < a_n\left(\frac{1}{K} + \varepsilon\right).$$

Тоді ряд з членів $a'_n = a_n\left(\frac{1}{K} + \varepsilon\right)$ також є збіжним за теоремою 1.3. Тоді з нерівності $b_n < a'_n$ випливає збіжність ряду (B) за

[3] Нагадаємо, одного лише прямування членів до нуля ще не достатньо для збіжності. Для збіжності треба, щоб вони не тільки прямували до нуля, а ще й робили це достатньо швидко. Наприклад, ряд Діріхле збігається не тоді, коли його члени прямують до нуля, а тоді, коли вони це роблять хоча б трохи швидше, ніж члени гармонічного ряду.

ознакою порівняння (a'_n – мажоранта), а це протирічить розбіжності ряду (B). □

◁ *Приклад 1.12.* Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\sin n}{n^3} \right).$$

Для порівняння утворимо еталонний ряд з членами $a_n = \frac{1}{n^2}$. Він збігається як ряд Діріхле при $x = 2 > 1$. Маємо:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{\sin n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin n}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0.$$

Отже, ряд з членів b_n є збіжним за граничною ознакою порівняння. Наші інтуїтивні міркування підтвердились. ▷

◁ *Приклад 1.13.* За допомогою граничної ознаки порівняння встановити розбіжність гармонічного ряду.

Для досліджуваного ряду з членами $b_n = \frac{1}{n}$ оберемо еталонний ряд з членами $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Він є розбіжним (див. приклад 1.8). Маємо:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1 \neq 0$$

(ввели заміну $t = \frac{1}{n}$ і скористались правилом Лопіталя[4]). Отже, гармонічний ряд – також розбіжний. ▷

◁ *Приклад 1.14.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

За умовою $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Для порівняння утворимо еталонний ряд з членами $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Він розбігається як ряд Діріхле при $x = \frac{1}{2} < 1$. Маємо:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1 \neq 0.$$

Отже, ряд з членів a_n є розбіжним за граничною ознакою порівняння. ▷

---

[4]Гійом Франсуа Антуан де Лопіталь (фр. Guillaume François Antoine de L'Hôpital; 1661, Париж – 2 лютого 1704, Париж) – французький математик, член Французької Академії Наук. Автор першого друкованого підручника з диференціального числення (1696).

1.3.5 Радикальна ознака Коші

Далі розглядатимемо радикальну ознаку Коші[5] і ознаку Даламбе́ра[6]. Вони обидві базуються на порівнянні досліджуваного ряду з геометричною прогресією. Ми наведемо т.зв. граничну форму цих ознак.

■ **Теорема 1.8 (радикальна ознака Коші).** Для *додатного* ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) утворимо послідовність $C_n = \sqrt[n]{a_n}$ і обчислимо границю $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Якщо $C < 1$, то ряд **збігається**, а якщо $C > 1$ – то ряд **розбігається**.

□ *Доведення*. Нехай $C < 1$. Доведемо збіжність ряду (A). За означенням границі маємо

$$|C_n - C| < \varepsilon, \qquad C - \varepsilon < C_n < C + \varepsilon,$$

$$\sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Величину ε ми можемо обрати в довільний спосіб, аби лише вона залишалась додатною, $\varepsilon > 0$. При цьому означення границі нам гарантує, що нерівність (1.2) буде виконаною при будь-яких номерах n, принаймні починаючи з деякого номера (якщо для деяких початкових номерів ця нерівність не виконана, то відповідні члени ряду можна відкинути, і це не вплине на збіжність ряду за теоремою 1.1). Тоді покладемо $\varepsilon = \frac{1-C}{2} > 0$, оскільки $C < 1$. Позначимо $q = C + \varepsilon = C + \frac{1-C}{2} = \frac{1+C}{2}$. Очевидно, $q < 1$, оскільки $C < 1$. Тоді нерівність (1.2) набуває вигляду

$$\sqrt[n]{a_n} < q, \qquad a_n < q^n.$$

Утворимо геометричну прогресію зі знаменником q і першим членом $b_1 = q$, тоді n-й член $b_n = b_1 q^{n-1} = q \cdot q^{n-1} = q^n$, і наша нерівність набуває вигляду: $a_n < b_n$. Але сума прогресії – збіжна, бо $q < 1$. Тоді ряд (A) – збіжний за ознакою порівняння.

Нехай тепер $C > 1$. Доведемо розбіжність ряду (A). За означенням границі маємо також

$$C - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}. \tag{1.3}$$

---

[5]Огюсте́н Луї Коші (фр. Augustin Louis Cauchy; 21 серпня 1789, Париж – 23 травня 1857) – французький математик, член Паризької Академії Наук (1816), Петербурзької Академії Наук (1831).

[6]Жан ле Рон д'Аламбер (фр. Jean le Rond d'Alembert; 16 листопада 1717, Париж – 29 жовтня 1783, Париж) – французький філософ-енциклопедист, фізик, математик.

Покладемо $\varepsilon = \frac{C-1}{2} > 0$, оскільки $C > 1$. Позначимо

$$Q = C - \varepsilon = C - \frac{C-1}{2} = \frac{C+1}{2}.$$

Очевидно, $Q > 1$, оскільки $C > 1$. Тоді нерівність (1.3) набуває вигляду

$$Q < \sqrt[n]{a_n}, \qquad Q^n < a_n.$$

Утворимо геометричну прогресію зі знаменником Q і першим членом $B_1 = Q$, тоді n-й член $B_n = B_1 Q^{n-1} = Q \cdot Q^{n-1} = Q^n$, і наша нерівність набуває вигляду: $B_n < a_n$. Але сума прогресії – розбіжна, бо $Q > 1$. Тоді ряд (А) – розбіжний за ознакою порівняння. $\square$

$\triangleleft$ *Приклад 1.15.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$.

За умовою $a_n = \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$. Маємо: $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+5}$,

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається за радикальною ознакою Коші. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.16.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

За умовою

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n.$$

Маємо: $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828 > 1.$$

Отже, ряд розбігається за радикальною ознакою Коші. $\triangleright$

Зауважимо, при $C = 1$ ряд може як збігатись, так і розбігатись. В цьому разі радикальна ознака Коші виявляється нечутливим інструментом дослідження, і тоді питання про збіжність розв'язують іншими засобами.

$\triangleleft$ *Приклад 1.17.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

За умовою $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Маємо: $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)$,

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Отже, питання про збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші в даному разі вирішити не можна. Але іншими засобами питання вирішується просто. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Отже, необхідну умову збіжності ряду не виконано (або виконано достатню умову розбіжності ряду), ряд розбігається. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.18.* Застосувати радикальну ознаку Коші до ряду Діріхле і зробити висновок про непридатність цієї ознаки в цьому випадку.

За умовою $a_n = \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Маємо:

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{n^x}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{x}{n}} = e^{\ln n^{-\frac{x}{n}}} = e^{-\frac{x}{n}\cdot\ln n} = e^{-x\cdot\frac{\ln n}{n}}.$$

Тоді

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} e^{-x\cdot\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-x\cdot\frac{\ln n}{n}\right)} =$$

$$= e^{-x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^{-x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^{-x\cdot 0} = 1$$

(при знаходженні границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$ скористались правилом Лопіталя). Отже, радикальна ознака Коші в цьому випадку є непридатною. При цьому $C = 1$ незалежно від x, а сам ряд може як збігатись (при $x > 1$), так і розбігатись (при $x \leqslant 1$), що було встановлено вище. $\triangleright$

1.3.6 Ознака Даламбера

Формулювання і доведення ознаки Даламбера

■ **Теорема 1.9 (ознака Даламбера).** Для *додатного* ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) утворимо послідовність $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ і обчислимо границю

$D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Якщо $D < 1$, то ряд **збігається**, а якщо $D > 1$ – то ряд **розбігається**.

$\square$ *Доведення*. Нехай $D < 1$. Доведемо збіжність ряду (А). За означенням границі маємо

$$|D_n - D| < \varepsilon, \qquad D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon,$$

$$a_{n+1} < a_n\left(D + \varepsilon\right). \tag{1.4}$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$, оскільки $D < 1$. Позначимо

$$q = D + \varepsilon = D + \frac{1-D}{2} = \frac{1+D}{2}.$$

Очевидно, $q < 1$, оскільки $D < 1$. Тоді нерівність (1.4) набуває вигляду

$$a_{n+1} < qa_n. \tag{1.5}$$

Утворимо геометричну прогресію зі знаменником q і довільним першим членом b_1, $b_1 > a_1$. Сума цієї прогресії є збіжним рядом, оскільки $q < 1$. Випишемо нерівність (1.5) при декількох початкових номерах n:

$$n = 1: \qquad a_2 < qa_1 < qb_1 = b_2, \qquad a_2 < b_2,$$

$$n = 2: \qquad a_3 < qa_2 < qb_2 = b_3, \qquad a_3 < b_3,$$

$$n = 3: \qquad a_4 < qa_3 < qb_3 = b_4, \qquad a_4 < b_4$$

і т.д. Тоді ряд (А) – збіжний за ознакою порівняння.

Нехай тепер $D > 1$. Доведемо розбіжність ряду (А). За означенням границі маємо також

$$\left(D - \varepsilon\right)a_n < a_{n+1}. \tag{1.6}$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{D-1}{2} > 0$, оскільки $D > 1$. Позначимо

$$Q = D - \varepsilon = D - \frac{D-1}{2} = \frac{D+1}{2}.$$

Очевидно, $Q > 1$, оскільки $D > 1$. Тоді нерівність (1.6) набуває вигляду

$$a_{n+1} > Qa_n. \tag{1.7}$$

Утворимо геометричну прогресію зі знаменником Q і довільним першим членом B_1, $B_1 < a_1$. Сума цієї прогресії є розбіжним рядом, оскільки $Q > 1$. Випишемо нерівність (1.7) при декількох початкових номерах n:

$$n = 1: \qquad a_2 > Qa_1 > QB_1 = B_2, \qquad a_2 > B_2,$$

$$n = 2: \qquad a_3 > Qa_2 > QB_2 = B_3, \qquad a_3 > B_3,$$

$$n = 3: \qquad a_4 > Qa_3 > QB_3 = B_4, \qquad a_4 > B_4$$

і т.д. Тоді ряд (A) – розбіжний за ознакою порівняння. □

Короткі відомості про факторіал

Перед наведенням прикладів подамо основні відомості про факторіал. *Факторíал* натурального числа n (позначається $n!$) – це добуток усіх натуральних чисел від одиниці до даного числа. Наприклад, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, і т.д. Приймають $0! = 1$, $1! = 1$.

Факторіал – це дуже швидко зростаюча функція. Наприклад, $10! \approx 3{,}6 \cdot 10^6$, $50! \approx 3{,}0 \cdot 10^{64}$. Для дуже великих значень n відома наближена формула Стірлінга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Як бачимо, факторіал зростає швидше навіть за показникову (зокрема, експоненціальну) функцію: у експоненціальної функції зростає лише показник степеня, а факторіал близький до показниково-степеневої функції; його зростання зумовлене зростанням і показника степеня, і його основи.

Відношення факторіалів зручно скорочувати. Наприклад:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = n + 1,$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = (n+1)(n+2).$$

Приклади застосування ознаки Даламбера

$\triangleleft$ *Приклад 1.19.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

За умовою $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Тоді $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ (просто переписуємо формулу для a_n, тільки записуємо $(n+1)$ всюди замість n). Маємо:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

і ряд збігається за ознакою Даламбера. Це цілком очікуваний результат, оскільки за рахунок факторіалу члени ряду дуже швидко прямують до нуля. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.20.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ при всіх $x > 0$.

За умовою $a_n = nx^{n-1}$. Тоді $a_{n+1} = (n+1)x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$. Маємо:

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} = x \cdot \frac{n+1}{n},$$

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \left(x \cdot \frac{n+1}{n} \right) = x.$$

Отже, при $0 < x < 1$ ряд збігається, а при $x > 1$ – розбігається за ознакою Даламбера.

При $x = 1$ ознака Даламбера є непридатною, тому рішення про збіжність отримаємо в інший спосіб. При $x = 1$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots .$$

Очевидно, в цьому разі ряд є розбіжним. $\triangleright$

Ознака Даламбера, як і ознака Коші, може «спрацювати» лише при $D \neq 1$. При $D = 1$ ряд може виявитись як збіжним, так і розбіжним.

$\triangleleft$ *Приклад 1.21.* Застосувати ознаку Даламбера до ряду Діріхле і зробити висновок про непридатність цієї ознаки в цьому випадку.

За умовою $a_n = \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Маємо: $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^x}$,

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^x} \cdot \frac{n^x}{1} = \frac{n^x}{(n+1)^x} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^x,$$

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^x = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \right)^x = 1^x = 1.$$

Отже, ознака Даламбера в цьому випадку виявилась недостатньо чутливим інструментом, оскільки $D = 1$ незалежно від x, а ряд може як збігатись (при $x > 1$), так і розбігатись (при $x \leqslant 1$), що було встановлено вище. $\triangleright$

Про порівняння ознак

Нехай до деякого ряду $\sum a_n$ намагались застосувати ознаку Даламбера і радикальну ознаку Коші і побудували вирази $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ і $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Можна довести [1] наступне: якщо існує границя D, то існує і границя C, причому $C = D$. Але обернене твердження є хибним. А саме, якщо існує границя C, то існування границі D ще не гарантується. Наприклад, для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}$ (приклад запозичено з [1]) можна отримати $C = \frac{1}{2}$, в той час як D не існує взагалі. Отже, якщо за допомогою ознаки Даламбера вдається прийняти рішення про збіжність, то за допомогою радикальної ознаки Коші теж можливо прийняти рішення, причому таке саме. Але не навпаки: якщо за допомогою радикальної ознаки Коші вдається прийняти рішення про збіжність, то «спрацьовування» ознаки Даламбера при цьому ще не гарантується. Це означає, що *радикальна ознака Коші є більш сильною (потужною) за ознаку Даламбера*.

Тоді виникають такі питання: 1) в чому причина обмеженості потужності ознак; 2) як знайти більш потужну ознаку; 3) чи існує найбільш потужна (універсальна) ознака.

Радикальна ознака Коші і ознака Даламбера мають обмежену потужність з наступної причини. Вони засновані на порівнянні досліджуваного ряду з геометричною прогресією, а для кожного збіжного (розбіжного) ряду (в тому числі і для прогресії) завжди можна знайти ряд, який збігається (розбігається) ще повільніше [1]. Повернемось до прикладу 1.8. Нехай ми хочемо довести розбіжність ряду з членами $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ за допомогою радикальної ознаки Коші або ознаки Даламбера. Нагадаємо, часткові суми в цьому прикладі дорівнювали $S_M = \ln(M + 1)$. Отже, потрібно знайти розбіжну (тобто $q > 1$) прогресію з членами b_n, яка б накопичувала свої часткові суми $S^*_M = \frac{b_1\left(q^M-1\right)}{q-1}$ ще повільніше. Якби вдалося знайти таке $q > 1$, що $S_M > S^*_M$ при будь-яких великих M, тоді б ми могли сказати: прогресія розбіжна, тому досліджуваний ряд тим паче розбіжний. Але проблема якраз в тому, що таке q не існує. Справді, функція S_M є логарифмічною (швидкість зростання уповільнюється), а функція S^*_M – показникова з основою $q > 1$ (швидкість зростання прискорюється). Тому для всіх досить великих M виконується як раз протилежна нерівність $S_M < S^*_M$, тобто розглядуваний ряд накопичує свої часткові суми повільніше за *будь-яку* розбіжну прогресію. Отже, ніяка прогресія не може слугувати еталоном для доведення розбіжності розглядуваного ряду за ознакою порівняння. Власне, в цьому і полягає причина обмеженості потужності ознак Даламбера і Коші.

Тоді відповідь на друге запитання проста: для створення більш потужних ознак їх треба засновувати на порівнянні з еталонними рядами, які збігаються (розбігаються) повільніше за прогресію. Так, ознака Раабе заснована на порівнянні досліджуваного ряду з рядом Діріхле, а він «повільніший» за прогресію (згадайте: ні радикальна ознака Коші, ні ознака Даламбера «не впорались» з рядом Діріхле).

Відповідь на третє запитання, на жаль, негативна: універсального ряду, який є «найповільнішим», не існує [1]. Це означає, що можна придумати як завгодно тонку і чутливу ознаку збіжності (засновану на порівнянні), і для неї завжди знайдеться настільки «повільний» ряд, що вона з ним «не впорається».

1.3.7 Інтегральна ознака Коші

Сформулюємо без доведення ознаку Коші–Маклорена (її називають також інтегральною ознакою Коші).

■ **Теорема 1.10 (інтегральна ознака Коші).** Нехай функція $f(x)$, визначена при $x \geqslant n_0$, є 1) неперервною, 2) додатною ($f(x) > 0$), 3) монотонно спадною. Тоді ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Тут невласний інтеграл розуміють як границю:

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{n_0}^{A} f(x)\,dx.$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.22.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

За умовою $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$. Утворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$. Очевидно, $f(n) = a_n$. Очевидно також, що $f(x)$ задовольняє усі вимоги інтегральної ознаки Коші при $n_0 = e$. Маємо:

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{e}^{A} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = A \Rightarrow t = \ln A \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int\limits_{1}^{\ln A} \frac{dt}{t^2} = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{1}{t}\right|_{\ln A}^{1} = \lim_{A\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln A}\right) = 1.$$

Отже, ряд збігається за інтегральною ознакою Коші. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.23.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

За умовою $a_n = \frac{1}{n\ln n}$. Утворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. Очевидно, $f(n) = a_n$. Очевидно також, що $f(x)$ задовольняє усі вимоги інтегральної ознаки Коші при $n_0 = e$. Маємо:

$$\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{e}^{A} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left\| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = A \Rightarrow t = \ln A \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int\limits_{1}^{\ln A} \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln t\Big|_{1}^{\ln A} = \lim_{A\to\infty} (\ln\ln A - \ln 1) = \infty.$$

Отже, ряд розбігається за інтегральною ознакою Коші. $\triangleright$

1.4 Збіжність знакозмінних рядів

1.4.1 Вступне зауваження

Питання про збіжність додатних рядів вирішується завдяки наявності багатьох ознак збіжності. Але ці ознаки стають непридатними (принаймні – без певної модифікації) для рядів, які містять члени різних знаків.

Принципово новим є випадок, коли ряд містить необмежену кількість і додатних, і від'ємних членів. Справді, нехай кількість від'ємних членів скінченна. Тоді їх можна відкинути за теоремою 1.1. Якщо скінченною є кількість додатних членів, то можна відкинути їх, а з решти членів (вони усі від'ємні) винести мінус одиницю за дужки за теоремою 1.3. В обох випадках уся справа зводилась би до дослідження додатного ряду.

♦ **Означення 1.4**. **Знакозмінним** називають числовий ряд, який містить необмежену кількість і додатних, і від'ємних членів.

1.4.2 Абсолютна збіжність

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, який містить необмежену кількість як додатних, так і від'ємних членів a_n. Кожному такому ряду поставимо у відповідність другий ряд, складений з модулів членів першого: $c_n = |a_n|$. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots\,, \tag{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots = c_1 + c_2 + \cdots\,. \tag{C}$$

♦ **Означення 1.5**. Якщо ряд (C) збігається, то ряд (A) називають **збіжним абсолютно**.

Зауважимо, якщо ряд (A) збігається абсолютно, то за цим означенням збігається ряд (C), а **не** ряд (A).

■ **Теорема 1.11.** Якщо ряд збігається абсолютно, то він збігається.

На перший погляд, це формулювання виглядає як тавтологія. Але насправді йдеться про два *різних* ряди – (A) і (C). І цілком можливо, що ряд (A) збігається, а ряд (C) розбігається (такі приклади ми наведемо нижче). Але, як виявляється, не можна навести таких прикладів, щоб ряд (C) збігався, а ряд (A) розбігався. Теорема стверджує саме це: якщо ряд (A) збігається абсолютно (тобто якщо ряд (C) є збіжним), то збігається і ряд (A). Інакше: при абсолютній збіжності ряду (A) означення нам гарантує збіжність ряду (C), а теорема (на додачу до цього) – також збіжність і самого ряду (A).

□ *Доведення.* Дано: ряд (C) – збіжний. Довести: ряд (A) – також збіжний. Отже, достатньо довести, що границя

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_M)$$

часткової суми S_M ряду (A) існує і є скінченною.

Нехай серед M перших членів a_n ряду (A) m штук від'ємні і $k = M - m$ штук невід'ємні. Очевидно, числа k і m однозначно залежать від M і прямують до нескінченності кожне разом з M. Зберігаючи місця членів ряду, невід'ємні члени позначимо через $p_1, p_2, \cdots, p_k$. Позначимо також $P_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ – «додатна частина» часткової суми S_M. *Модулі* решти членів позначимо через $q_1, q_2, \cdots, q_m$ – додатні числа. Позначимо також $Q_m = q_1 + q_2 + \cdots + q_m$ – «від'ємна частина» часткової суми S_M. Тепер часткова сума ряду (A): $S_M = P_k - Q_m$.

Нехай S^*_M – часткова сума ряду (C). Тоді $S^*_M = P_k + Q_m$. За умовою ряд (C) збігається, тому границя $S^* = \lim\limits_{M\to\infty} S^*_M$ існує і є скінченною. Послідовність S^*_M – монотонно зростаюча, тому $S^*_M \leqslant S^*$. Але $Q_m > 0$. Тоді

$$P_k = S^*_M - Q_m < S^*_M \leqslant S^* = \text{const}.$$

Отже, послідовність P_k обмежена зверху. Крім того, вона, очевидно, є монотонно зростаючою. Тому за теоремою Вейєрштрасса існує і є скінченною границя

$$P = \lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{M\to\infty} P_k$$

(нагадаємо, k однозначно залежить від M і прямує до нескінченності разом з M). Аналогічно доводиться існування скін-

ченної границі
$$Q = \lim_{m\to\infty} Q_m = \lim_{M\to\infty} Q_m.$$

Отже,

$$\lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty}(P_k - Q_m) = \lim_{M\to\infty} P_k - \lim_{M\to\infty} Q_m = P - Q,$$

тобто ця границя існує і є скінченною. Тоді ряд (A) збігається за означенням збіжності. □

Наслідок. Якщо знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) розбігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C), утворений з модулів його членів, також розбігається. Справді, якби ряд (C) збігався, то ряд (A) збігався би абсолютно за означенням абсолютної збіжності, тоді за теоремою збігався би і сам ряд (A).

Зауваження 1. За умови збіжності ряду (C) ми довели збіжність ряду (A) і назвали її абсолютною. Цією назвою ми хочемо підкреслити, що ряд (A) збігається не тому, що члени a_n, маючи різні знаки, компенсують один одного, а тому що ці члени за модулем (тобто за абсолютним значенням) стають малими досить швидко (саме тому ряд (C) збігається).

Зауваження 2. Збіжність ряду (C), будучи достатньою умовою збіжності ряду (A), не є необхідною умовою його збіжності. Це значить, що **ряд (A) в деяких випадках може збігатись, навіть якщо розбігається ряд (C).** В таких випадках збіжність ряду (A) зумовлена, як ми побачимо нижче, саме взаємною компенсацією сусідніх членів різних знаків, а не швидкістю їх прямування до нуля.

1.4.3 Умовна збіжність. Ряд Лейбніца

В попередньому пункті наголошувалось, що існує збіжний знакозмінний ряд, який **не** збігається абсолютно (тобто розбіжним виявляється інший ряд, складений з модулів членів першого). Про таку збіжність першого ряду кажуть, що вона є умовною.

⧫ **Означення 1.6**. Якщо ряд (A) збігається, а утворений з модулів його членів ряд (C) розбігається, то кажуть, що ряд (A) **збігається умовно.**

Приклади умовно збіжних рядів легко знайти серед знакопочергових рядів.

Знакозмінні (*рос.* – знакопеременные) ряди містять необмежену кількість і додатних членів, і від'ємних, але порядок розташування знаків членів може бути довільним. Існує окремий випадок знакозмінних рядів: т.зв. *знакопочергові*[7] (*рос.* – знакочередующиеся) ряди.

⧫ **Означення 1.7**. Знакозмінний ряд, два будь-яких сусідніх члени якого мають різні знаки, називають **знакопочерговим**.

Різницю між знакозмінним і знакопочерговим рядами проілюструємо таким прикладом. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

є знакозмінним, але не є знакопочерговим, а ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{1.8}$$

є і знакозмінним, і, зокрема, знакопочерговим.

Аби задати типовий член знакопочергового ряду, зручно скористатись множником $(-1)^n$. На математичному жаргоні його можна назвати *блимавкою*. Справді, до кожного члену ряду буде приєднуватись знак «плюс» або «мінус» залежно від парності номера члена. Це і гарантуватиме протилежність знаків будь-яких сусідніх членів ряду.

Ймовірно, найпопулярнішим прикладом умовно збіжного ряду є *ряд лейбніцевського типу*. Так називають знакопочерговий числовий ряд, модулі членів якого монотонно прямують до нуля. Власне, сам Лейбніц[8] розглядав ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

і довів, що він збіжний і його сума дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (див. також с. 59, приклад 1.37).

---

[7] При аналізі україномовного сегменту мережі Інтернет станом на березень 2018 року з'ясувалось, що для позначення рядів, в яких два будь-яких сусідніх члени мають різні знаки, використовуються терміни «знакопочерговий», «знакопочережний» і «знакопереміжний».

[8] Ґо́тфрід Вільге́льм Ле́йбніц (нім. Gottfried Wilhelm Leibniz; 1 липня 1646, Лейпциг – 14 листопада 1716, Ганновер) – провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат. Сучасник, опонент і співавтор І. Ньютона.

Ми в якості ряду лейбніцевського типу розглянемо ряд (1.8), який подамо у вигляді

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

(В подальшому, на с. 59, приклад 1.36, ми зможемо навіть обчислити цю суму і з'ясувати, що вона є скінченною і дорівнює $\ln 2$).

Очевидно, цей ряд не є абсолютно збіжним: спроба «видалити мінуси» при знаходженні модулів членів перетворює ряд на гармонічний, а він розбігається. Разом з тим, завдяки наявності мінусів цей ряд збігається (вже не абсолютно, тобто умовно). Доведемо це.

Спочатку подамо ряд в такій формі, щоб стали зрозумілими властивості часткових сум, складених з парної кількості членів ряду. Маємо:

$$\sigma = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

Тут кожна «дужка» додатна, тому послідовність часткових сум парної кількості членів монотонно зростає. З іншого боку:

$$\sigma = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{6} + \cdots$$

Тут кожна «дужка» також додатна, тому послідовність часткових сум парної кількості членів обмежена зверху (зокрема, не перевищує одиниці). Отже, за теоремою Вейєрштрасса ця послідовність має скінченну границю

$$S^{\text{парне}} = \lim_{M\to\infty} S_{2M}.$$

Розглянемо тепер часткові суми, які складаються з непарної кількості доданків:

$$S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1} = S_{2M} + \frac{(-1)^{(2M+1)+1}}{2M+1} = S_{2M} + \frac{1}{2M+1}.$$

Здійснимо тут граничний перехід при $M \to \infty$:

$$S^{\text{непарне}} = \lim_{M\to\infty} S_{2M+1} = \lim_{M\to\infty} S_{2M} + \underbrace{\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}}_{=0} = S^{\text{парне}}.$$

Тому існує і є скінченною границя

$$\sigma = \lim_{M\to\infty} S_M = S^{\text{парне}} = S^{\text{непарне}}$$

при довільній парності числа M. Це і доводить збіжність розглядуваного ряду за означенням.

1.4.4 Теорема Лейбніца

Подамо строге означення ряду лейбніцевського типу.

♦ **Означення 1.8**. Числовий ряд називають **рядом лейбніцевського типу**, якщо: 1) ряд є знакопочерговим; 2) члени ряду прямують до нуля ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$); 3) їх прямування до нуля є монотонним за модулем (для довільного n виконано нерівність $|a_{n+1}| < |a_n|$).

Узагальнюючи міркування попереднього пункту, сформулюємо і доведемо теорему Лейбніца про умовну збіжність.

■ **Теорема 1.12 (теорема Лейбніца).** Ряди лейбніцевського типу збігаються принаймні умовно.

□ *Доведення.* Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Позначимо $c_n = |a_n|$. Очевидно, всі числа $c_n > 0$. Якби з'ясувалось, що для деякого n член $a_n = 0$, то нерівність $|a_{n+1}| < |a_n|$ не змогла би бути виконаною, тобто такий ряд не був би рядом лейбніцевського типу. Оскільки ряд є знакопочерговим, то його можна[9] подати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots .$$

З урахуванням наших позначень для знакопочергового ряду $c_n > c_{n+1}$. Тоді часткові суми парної кількості членів:

$$S_4 = S_2 + \underbrace{(c_3 - c_4)}_{>0}, \quad S_6 = S_4 + \underbrace{(c_5 - c_6)}_{>0}, \quad S_8 = S_6 + \underbrace{(c_7 - c_8)}_{>0}$$

[9] Тут ми припускаємо, що $a_1 > 0$. Якби це було не так, ми писали б:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n = -c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \cdots .$$

Але за теоремою 1.3 винесення мінус одиниці за дужки на впливає на збіжність ряду. Отже, припущення $a_1 > 1$ не обмежує загальності міркувань.

і т.д., тобто послідовність часткових сум парної кількості членів ряду монотонно зростає. З іншого боку,

$$S_{2M} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + c_{2M-1} - c_{2M} =$$

$$c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2M-2} - c_{2M-1}) - c_{2M} =$$

$$= c_1 - \{(c_2 - c_3) + \cdots + (c_{2M-2} - c_{2M-1}) + c_{2M}\} < c_1,$$

оскільки кожна «дужка» додатна. Тоді послідовність S_{2M} обмежена числом c_1. Тоді за теоремою Вейєрштрасса послідовність S_{2M} має скінченну границю:

$$S' = \lim_{M\to\infty} S_{2M}.$$

Для часткових сум, складених з непарної кількості членів ряду, маємо: $S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1}$. Здійснюючи тут граничний перехід при $M \to \infty$ і враховуючи, що члени ряду прямують до нуля, отримуємо:

$$S'' = \lim_{M\to\infty} S_{2M+1} = \lim_{M\to\infty} S_{2M} + \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = S' + 0 = S'.$$

Отже, при довільній парності M існує і є скінченною границя

$$S = \lim_{M\to\infty} S_M = S' = S'',$$

що і доводить збіжність ряду. Можливо, ця збіжність є навіть абсолютною. В цьому доведенні до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ми не звертались, тому про абсолютну збіжність сказати нічого не можемо. Задача про абсолютну збіжність в цому доведенні і не ставилась. Але принаймні умовну збіжність ми вже гарантуємо. $\square$

Зауваження. Нехай сума деякого збіжного ряду лейбніцевського типу дорівнює S, і S_M є частковою сумою. Тоді

$$S = S_M + \sum_{n=M+1}^{\infty} a_n.$$

Тоді $S \approx S_M$, причому відкидуваний залишок ряду і є абсолютною похибкою цього наближення. Але цей відкидуваний залишок, очевидно, також є рядом лейбніцевського типу. Тоді його часткові суми не перевищують $|a_{M+1}|$, бо саме цей член тепер відіграє роль числа c_1, яке обмежувало послідовність часткових сум зверху. Тому можна стверджувати: *якщо числовий ряд є рядом лейбніцевського типу, то при відкиданні залишку ряду модуль цього залишку не перевищує модуля першого з відкинутих членів.*

$\triangleleft$ *Приклад 1.24.* Розглянемо ще раз ряд Лейбніца:

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots .$$

Його сума $S = \frac{\pi}{4}$. Можна вважати, що вона наближено дорівнює $S \approx S_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Абсолютна похибка

$$\Delta_2 = S_2 - S = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} \approx -0{,}12.$$

Перший з відкинутих членів $a_3 = \frac{1}{5} = 0{,}20$. Як бачимо,

$$|\Delta_2| < |a_3| \,, \qquad 0{,}12 < 0{,}20.$$

Більш точно можна вважати, що $S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$. Абсолютна похибка

$$\Delta_3 = S_3 - S = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}08.$$

Перший з відкинутих членів $a_4 = -\frac{1}{7} \approx -0{,}14$. Як бачимо,

$$|\Delta_3| < |a_4| \,, \qquad 0{,}08 < 0{,}14.$$

Ще більш точно $S \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}$. Абсолютна похибка

$$\Delta_4 = S_4 - S = \frac{76}{105} - \frac{\pi}{4} \approx -0{,}06.$$

Перший з відкинутих членів $a_5 = \frac{1}{9} \approx 0{,}11$. Як бачимо,

$$|\Delta_4| < |a_5| \,, \qquad 0{,}06 < 0{,}11$$

і т.д. Зауважимо, що наявні похибки Δ_M різних знаків. Тому можливі як нерівність $S_M > S$, так і нерівнвість $S_M < S$ (тобто наближений результат може бути отриманий як з перевищенням, так і з недостачею). Легко побачити наступну закономірність. Якщо останній врахований член додатний (і перший з відкинутих – від'ємний), то часткова сума є наближеним значенням суми ряду з перевищенням: $S_M > S$, а в іншому разі – з недостачею: $S_M < S$. $\rhd$

Вимога монотонності прямування модулів членів ряду лейбніцевського типу до нуля не є зайвою. Наведемо приклад ряду, для якого ця вимога не виконана, через що і виникає розбіжність. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots .$$

Тут порушено монотонність прямування модулів членів до нуля. Справді, модуль чергового від'ємного члену виявляється меншим за наступний за ним додатний член:

$$\left|-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right| < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}, \qquad \sqrt{n+1}-1 < \sqrt{n}+1,$$

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n}+2, \qquad n+1 < n+4\sqrt{n}+4, \qquad -3 < 4\sqrt{n},$$

що очевидно. Далі, групуючи кожний додатний член з наступним за ним від'ємним, отримуємо

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1}\right) + \cdots .$$

Чергова «дужка» дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1},$$

тобто послідовність парних часткових сум розбігається як гармонічний ряд. Тому і досліджуваний ряд розбігається.

1.4.5 Природа умовної збіжності

Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, тобто нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{(A)}$$

збігається і нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{C}$$

розбігається. Представимо M-і часткові суми рядів (A) і (C) згідно з позначеннями п. 1.4.2:

$$S_M = P_{k(M)} - Q_{m(M)}, \quad S_M^* = P_{k(M)} + Q_{k(M)}, \quad k + m = M.$$

Нагадаємо, для ряду (A) k і m однозначно залежать від M.

Позначимо:

$$S = \lim_{M\to\infty} S_M = \lim_{M\to\infty} \left(P_{k(M)} - Q_{m(M)}\right).$$

Ця границя існує і є скінченною з огляду на збіжність ряду (A). Але не можна писати

$$S = \lim_{M\to\infty} P_{k(M)} - \lim_{M\to\infty} Q_{m(M)},$$

бо невідомо, чи існують скінченні границі в правій частині, взяті окремо кожна. Доведемо, що вони не існують, тобто доведемо, що **ряди, складені з тільки додатних або тільки від'ємних членів умовно збіжного ряду (A), є розбіжними.** Припустимо, що це не так, і послідовність $P_{k(M)}$ має скінченну границю, яка дорівнює $P = \lim\limits_{M\to\infty} P_{k(M)}$. Тоді $Q_{m(M)}$ також має скінченну границю, яка дорівнює

$$Q = \lim_{M\to\infty} Q_{m(M)} = \lim_{M\to\infty} \left(P_{k(M)} - S_M\right) = P - S.$$

Тоді послідовність S_M^* теж має скінченну границю:

$$S^* = \lim_{M\to\infty} S_M^* = \lim_{M\to\infty} \left(P_{k(M)} + Q_{k(M)}\right) =$$

$$= \lim_{M\to\infty} P_{k(M)} + \lim_{M\to\infty} Q_{k(M)} = P + Q = 2P - S.$$

Тоді ряд (C) збігається за означенням. Це означає, що ряд (A) збігається абсолютно, і протиріччя отримано.

Отже, послідовності P_k, Q_m не мають скінченних границь. Тому природу умовної збіжності з'ясовано: умовна збіжність можлива лише тому, що члени умовно збіжного ряду з різними знаками компенсують один одного, а не через те, що вони достатньо швидко прямують до нуля, в той час як абсолютна збіжність заснована саме на великій швидкості спадання цих членів (за модулем).

Разом з тим, члени умовно збіжного ряду, хоч і повільно, але все ж таки прямують до нуля: в іншому разі за достатньою ознакою розбіжності ми не отримали б ніякої збіжності взагалі, навіть умовної.

1.4.6 Ознаки Даламбера і Коші

Вище ми розглядали ознаки Даламбера і Коші для додатних рядів. Узагальнимо тепер ці ознаки для знакозмінних рядів.

■ **Теорема 1.13 (ознака Даламбера).** Для *знакозмінного* ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) утворимо послідовність $D_n^* = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ і обчислимо границю $D^* = \lim\limits_{n\to\infty} D_n^* = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Якщо $D^* < 1$, то ряд **збігається абсолютно**, а якщо $D^* > 1$ – то ряд **розбігається**.

□ *Доведення.* Для розглядуваного ряду (A) утворимо ряд (C), складений з модулів $c_n = |a_n|$ його членів.

Нехай $D^* < 1$, і нехай $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$. Тоді

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} D_n^* = D^* < 1.$$

Отримали: $D < 1$. Тоді ряд (C) збігається за ознакою Даламбера для додатних рядів. Тоді ряд (A) збігається абсолютно за означенням абсолютної збіжності.

Нехай тепер $D^* > 1$. За означенням границі

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - D^*\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} - D^*\right| < \varepsilon.$$

Тоді, як і в п. 1.3.6, доводиться існування геометричної прогресії $\{B_n\}$ зі знаменником $Q = \frac{D^*+1}{2}$, $Q > 1$, такої, що $c_n > B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Але члени B_n не прямують до нуля, бо ця прогресія розбіжна. Тоді тим паче $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$, і отже $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Тоді ряд (A) є розбіжним за достатньою ознакою розбіжності (зауваження 1 до теореми 1.5). □

Зауваження 1. Очевидно, ознака Даламбера для додатних рядів є окремим випадком щойно доведеної ознаки, оскільки для додатних рядів збіжність і абсолютна збіжність – це одне й те саме.

Зауваження 2. Раніше, співставляючи ряди (A) і (C), ми навели приклад (ряд Лейбніца), коли ряд (A) збігається, а ряд (C) розбігається. Тобто раніше ми стверджували, що з розбіжності ряду (C) розбіжність ряду (A) ще не випливає (див. зауваження 2 до теореми 1.11). Тепер ми стверджуємо протилежне: якщо $D^* > 1$, то ряд (C) розбігається, і це тягне за собою розбіжність ряду (A). Але тепер ідеться не про будь-які розбіжні ряди (C), а лише про такі, розбіжність яких встановлено саме ознакою Даламбера (і тому їх члени не прямують до нуля). Тому тепер можна сказати: «якщо ряд (C) розбігається **і це встановлено ознакою Даламбера,** то ряд (A) теж розбігається». При цьому протиріччя не виникає, оскільки останнє твердження стосується не всіх розбіжних рядів (C), а лише тих, члени яких не тільки не прямують до нуля зі швидкістю, достатньо великою для збіжності, а **взагалі не прямують до нуля**. Фактично в разі розбіжності ознака Даламбера гарантує нам саме це, оскільки вона заснована на порівнянні з геометричною прогресією, яка при $D^* > 1$ виявляється розбіжною.

Зауваження 3. При $D^* = 1$, як і раніше, про збіжність ряду нічого сказати не можна.

Аналогічно маємо наступну ознаку.

■ **Теорема 1.14 (радикальна ознака Коші).** Для *знакозмінного* ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) утворимо послідовність $C_n^* = \sqrt[n]{|a_n|}$ і обчислимо границю $C^* = \lim\limits_{n\to\infty} C_n^* = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Якщо $C^* < 1$, то ряд **збігається абсолютно**, а якщо $C^* > 1$ – то ряд **розбігається**.

□ *Доведення.* Для розглядуваного ряду (A) утворимо ряд (C), складений з модулів $c_n = |a_n|$ його членів.

Нехай $C^* < 1$, і нехай $C = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$. Тоді

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} C_n^* = C^* < 1.$$

Отримали: $C < 1$. Тоді ряд (C) збігається за радикальною ознакою Коші для додатних рядів. Тоді ряд (A) збігається абсолютно за означенням абсолютної збіжності.

Нехай тепер $C^* > 1$. За означенням границі

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - C^* \right| = | \sqrt[n]{c_n} - C^* | < \varepsilon.$$

Тоді, як і в п. 1.3.5, доводиться існування геометричної прогресії $\{B_n\}$ зі знаменником $Q = \frac{C^*+1}{2}$, $Q > 1$, такої, що $c_n > B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Але члени B_n не прямують до нуля, бо ця прогресія розбіжна. Тоді тим паче $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$, і отже $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Тоді ряд (A) є розбіжним за достатньою ознакою розбіжності (зауваження 1 до теореми 1.5). $\square$

Маємо три наступних аналогічних зауваження.

Зауваження 1. Очевидно, доведена ознака містить радикальну ознаку Коші для додатних рядів в якості окремого випадку, і отже, узагальнює її.

Зауваження 2. Якщо ряд (C) розбігається **і це встановлено радикальною ознакою Коші,** то ряд (A) теж розбігається (оскільки члени ряду не прямують до нуля).

Зауваження 3. При $C^* = 1$, як і раніше, про збіжність ряду нічого сказати не можна.

Не дивно, що ці три зауваження повторюють попередні, адже радикальна ознака Коші так само заснована на порівнянні досліджуваного ряду з прогресією, як і ознака Даламбера.

$\triangleleft$ *Приклад 1.25.* Досдідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+7}$.

Маємо: $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+7}$. 1) ряд є знакопочерговим. 2) члени ряду прямують до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3n+7} = 0.$$

3) їх прямування до нуля є монотонним за модулем:

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \qquad \left|\frac{(-1)^n}{3(n+1)+7}\right| < \left|\frac{(-1)^n}{3n+7}\right|,$$

$$\frac{1}{3n+10} < \frac{1}{3n+7}, \qquad 3n+7 < 3n+10,$$

що виконано для довільного n. Отже, розглядуваний ряд є рядом лейбніцевського типу, тому за теоремою Лейбніца він збігається принаймні умовно.

Дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Покладемо $c_n = |a_n| = \frac{1}{3n+7}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Маємо:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{3n+7}{1} = 3 \neq 0.$$

Таким чином, ряд членів b_n розбігається як гармонічний, ряд членів c_n розбігається за граничною ознакою порівняння, ряд членів a_n абсолютної збіжності не має. Тому досліджуваний ряд збігається умовно. $\triangleright$

В цьому прикладі застосовувати ознаку Даламбера не було сенсу (легко отримати $D^* = 1$). В наступному прикладі такий сенс є.

$\triangleleft$ *Приклад 1.26.* Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$.

Скористаємось ознакою Даламбера:

$$D_n^* = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^n n}\right| = \frac{n+1}{2n},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, за ознакою Даламбера розглядуваний ряд збігається абсолютно. $\triangleright$

1.4.7 Властивості збіжних рядів

Як пише Г.М. Фіхтенгольц[10] [2], «Понятие суммы бесконечного ряда существенно отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых (рассматриваемого в арифметике и в алгебре) тем, что включает в себя предельный переход. Хотя некоторые свойства обычных сумм переносятся и на суммы бесконечных рядов, но чаще всего лишь при выполнении определённых условий. ...В иных же случаях привычные нам свойства сумм разительным образом нарушаются, так что, вообще, в этом вопросе надлежит соблюдать осторожность».

Розглянемо *сполучну властивість додавання*. Для скінченної кількості доданків $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Для рядів приймемо без доведення наступне твердження. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то новий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, члени b_n якого утворено групуванням скінченних кількостей членів a_n без зміни порядку їх слідування, також збігається, причому суми

[10] Григорий Михайлович Фіхтенгольц (5 червня 1888, Одеса – 26 червня 1959, Ленінград) – радянський математик. Відомий як автор книги «Курс дифференциального и интегрального исчисления» в трьох томах.

рядів однакові:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1})}_{b_1} +$$

$$+ \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2})}_{b_2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Зауважимо, обернена дія – розгрупування (видалення групуючих дужок) може виявитись «незаконною». Якщо при видаленні групуючих дужок зі збіжного ряду утворюється новий ряд, який теж збігається, то суми рядів будуть однакові. Але можлива ситуація, коли при видаленні дужок утворюється розбіжний ряд. Наприклад, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

збігається до нуля, а ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

розбігається взагалі.

Більш того, замість розгрупування доданків можна здійснити перегрупування. При цьому може утворитись ряд, який буде збігатись, але до іншої суми! Справді, досі були згруповані члени перший з другим, третій з четвертим і т.д. Згрупуємо члени другий з третім, четвертий з п'ятим і т.д.:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots.$$

Очевидно, утворений ряд збігається до одиниці.

Друга властивість – *переставна* (від перестановки доданків значення суми не змінюється). Для рядів цю властивість, взагалі кажучи, треба доводити, тим більше, що вона є істинною не для будь-яких рядів. Відповідну теорему також подамо без доведення.

■ **Теорема 1.15 (переставна властивість).** Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то інший ряд, утворений з нього довільною перестановкою доданків, також збігається, причому суми обох рядів однакові.

Вимога абсолютної збіжності принципова. Якщо збіжність – умовна, то переставна властивість порушується; про це йдеться в наступній теоремі.

■ **Теорема 1.16 (теорема Рімана[11]).** Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, то перестановкою його членів можна отримати ряд, який має заздалегідь задану суму, або навіть розбігається.

□ *Доведення.* При доведенні обмежимось лише випадком, коли бажано в якості суми ряда отримати додатну константу B, відому заздалегідь.

Розіб'ємо множину членів ряду на множину P додатних членів і множину Q від'ємних членів (члени, рівні нулю, відкинемо, бо навіть нескінченна їх кількість суму не змінює). В кожній множині впорядкуємо члени в порядку зменшення їх модулів. Додатні члени (після такої перенумерації) позначимо через p_k, а *модулі* від'ємних членів – через q_m відповідно. Утворились два ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ і $\sum\limits_{m=1}^{\infty} q_m$. Члени p_k, q_m прямують до нуля (в іншому разі вихідний ряд не збігався би), але не достатньо швидко, так що два останніх ряди розбігаються (див. п. 1.4.5). Отже, ці ряди є «невичерпними запасами додатності та від'ємності».

Припустимо тепер, що потрібно обрати таке розташування членів p_k і q_m (а це те саме, що обрати розташування членів a_n), при якому сума ряду буде дорівнювати деякій величині B. Складемо часткову суму. Спочатку почнемо витрачати додатні члени, доки їх сумма вперше не перевищить число B. Нехай для цього потрібно витратити, наприклад, k_1 штук додатних членів. Отримаємо:

$$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > B.$$

(Зауважимо, без останнього доданка p_{k_1} сума в лівій частині ще не перевищила б числа B. Якщо число B мале порівняно з початковими членами ряду, то, можливо, спочатку знадобиться всього один додатний член, і $k_1 = 1$). Перейдемо тепер до витрати від'ємних членів. Будемо витрачати їх до тих пір, поки часткова сума не стане вперше меншою за B. Нехай для цього

[11] Георг Фрідріх Бернгард Ріман (нім. Georg-Friedrich-Bernhard Riemann, 17 вересня 1826, Брезеленц, Ганновер – 20 липня 1866, Селаска, Італія) – німецький математик, механік і фізик.

потрібно, наприклад, m_1 штук від'ємних членів. Отримаємо:

$$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} < B.$$

Відновимо витрати додатних членів, поки знову вперше не перевищимо величину B (це завжди можна зробити, адже через розбіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ запаси внесків невичерпні). Отримаємо:

$$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} +$$

$$+ p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} > B.$$

Повертаємось до витрати від'ємних членів:

$$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m_1} +$$

$$+ p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - q_{m_1+2} - \cdots - q_{m_2} < B.$$

Продовжимо цей процес до нескінченності. Якщо останнім приєднаним доданком було число p_i, то часткова сума перевищує B, але на величину, не більшу ніж p_i. Якщо ж останнім приєднаним доданком було число q_j, то часткова сума менша від B, але на величину, не більшу ніж q_j.

Таким чином, приєднання порцій тих чи інших доданків примушує часткову суму здійснювати коливання навколо числа B, кожного разу приймаючи значення по різні боки від нього. При цьому розмах таких коливань оцінюється так:

$$|S - B| < p_i \qquad \text{або} \qquad |S - B| < q_j.$$

Але усі наступні приєднані члени p_i, q_j прямують до нуля. Тоді можна написати $|S - B| < \varepsilon$, або $\lim S = B$ при даному способі розташування членів ряду, що і треба було довести. □

◁ *Приклад 1.27.* В ряді

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

переставимо доданки так, щоб після кожного додатного члена йшли два від'ємних:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

або

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right).$$

Як бачимо, від такої перестановки сума зменшилась вдвічі. ▷

1.5 Степеневі ряди

⧫ **Означення 1.9**. **Степеневим** називають ряд вигляду

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots. \quad (1.9)$$

Число x_0 називають **центром степеневого ряду.**

Зауважимо, тепер нумерація членів починається з $n=0$. Це дозволяє степеневому ряду містити вільний член (сталу складову) a_0, який не залежить від x (усі інші доданки є степеневими функціями x).

Фіксуючи в степеневому ряді значення x, отримаємо звичайний числовий ряд. Змінюючи x, отримаємо інший числовий ряд. Очевидно, його сума може стати іншою[12] або може перестати існувати взагалі (ряд може стати розбіжним). Отже, степеневий ряд є своєрідною функцією аргументу x.

⧫ **Означення 1.10**. Множина значень x, при яких степеневий ряд збігається, називається **областю збіжності**.

Область збіжності за своїм змістом є областю визначення функції $f(x)$. Очевидно, область збіжності степеневого ряду ніколи не є порожньою множиною, адже вона завжди містить принаймні одне значення: в точці $x=x_0$ степеневий ряд збігається (до нуля) при коефіцієнтах a_n, визначених в довільний спосіб. Щоправда, така точка може виявитись єдиною.

◁ *Приклад 1.28.* Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$. Він виникає з (1.9) при $x_0=0$, $a_n=n!$. Очевидно, при $x=0$ цей ряд збігається до

[12]А може і не стати. Наприклад, якщо ряд містить лише парні степені x і є збіжним при $x=+a$, то очевидно, що при $x=-a$ він також збігатиметься, причому до тієї самої суми.

нуля. Нехай тепер $x \neq 0$. За ознакою Даламбера для знакозмінних рядів маємо:

$$D_n^* = \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = (n+1)\,|x|\,,$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = |x| \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty > 1,$$

оскільки $x \neq 0$. За ознакою Даламбера для знакозмінних рядів маємо розбіжність. Отже, область збіжності містить лише єдину точку $x = 0$. ▷

Виявляється зручним ввести заміну змінної $z = x - x_0$, і ряд (1.9) набуває вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Ця заміна лише переміщує початок координат в точку x_0 (якщо $x = x_0$, то $z = 0$). Очевидно, розглядання ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ замість (1.9) не обмежує загальності подальших міркувань.

Становить інтерес питання, як в загальному випадку виглядає область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Відповідь на це питання надає наступна теорема.

■ **Теорема 1.17 (теорема Абеля[13]).** 1) Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається при деякому значенні $z = r$, $r \neq 0$, то він **збігається абсолютно** при довільних z, для яких $|z| < |r|$. 2) Якщо цей ряд розбігається при деякому значенні $z = r'$, то він **розбігається** при довільних z, для яких $|z| > |r'|$.

□ *Доведення.* 1) Дано: ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ збігається. Тоді члени прямують до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n r^n = 0$ (інакше б ряд розбігався). Тоді тим паче ці члени є обмеженими, тобто існує таке стале M, що для будь-яких номерів n виконано нерівність $|a_n r^n| < M$. Нехай $|z| < |r|$. Позначимо $q = \left|\frac{z}{r}\right|$, $0 \leqslant q < 1$. Маємо:

$$|a_n z^n| = \left| a_n r^n \cdot \frac{z^n}{r^n} \right| = |a_n r^n| \cdot \left|\frac{z}{r}\right|^n = |a_n r^n| \cdot q^n < M q^n.$$

Утворимо геометричну прогресію з початковим членом $b_0 = M$ і знаменником q. Тепер нумерація членів починається з нуля (а

[13] Нільс Генрік Абель (норв. Niels Henrik Abel; 5 серпня 1802 – 6 квітня 1829) – норвезький математик.

не з одиниці, як зазвичай). Тоді члени прогресії $b_n = b_0 q^n = M q^n$ (а не $b_n = b_1 q^{n-1}$, як зазвичай). Отже, $|a_n z^n| < b_n$. Але прогресія збігається, оскільки $0 \leqslant q < 1$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ збігається за ознакою порівняння для додатних рядів (b_n – мажоранта). Це означає, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ збігається абсолютно за означенням абсолютної збіжності, що і треба було довести.

2) Дано: ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (r')^n$ розбігається. Тоді очевидно, що при $|z| > |r'|$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ тим паче розбігається. Справді, припустимо, це не так, і він збігається. Але $|r'| < |z|$. Тоді за доведеним вище ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (r')^n$ збігався би абсолютно, і протиріччя отримано. $\square$

Нехай r_0 – *найбільше* з усіх значень r, за яких з нерівності $|z| < |r|$ ще випливає абсолютна збіжність ряду. Нехай r_0' – *найменше* з усіх значень r', за яких з нерівності $|z| > |r'|$ вже випливає розбіжність ряду. Як виявляється, $r_0 = r_0'$. Надалі позначимо $R = r_0 = r_0'$. Цікаві міркування з приводу рівності величин r_0 і r_0' запропонував академік Микола Миколайович Лузін [3] (наводимо цитату, змінюючи лише позначення для зведення їх у відповідність до наших позначень).

«Теорема Абеля даёт ясное представление об области сходимости степенных рядов. Окрасим (мысленно) в красную краску всякую точку расходимости степенного ряда и в голубую краску каждую его точку сходимости. Ясно, что точка $z = 0$ всегда будет голубой. Если степенной ряд везде сходится, вся ось абсцисс Oz будет голубой. Если степенной ряд везде расходится, вся ось абсцисс Oz будет красной, кроме начала O. Если какая-нибудь точка z_0, отличная от начала O, голубая, то, в силу теоремы Абеля, все точки оси абсцисс, лежащие ближе к началу O, чем точка z_0, по обе его стороны, также будут голубые. Если какая-нибудь точка z_1 красная, то, в силу теоремы Абеля, красными будут все точки оси абсцисс, лежащие дальше от начала O, чем z_1, по обе его стороны.

Так как всякая точка оси абсцисс есть либо голубая, либо красная, то из сказанного следует, что, идя от начала O вправо по оси абсцисс, мы сначала будем встречать лишь голубые точки, а потом только красные, причём самая граничная точка ζ голубой и красной части, может оказаться того или другого цвета. И то же самое происходит налево от начала O, причём обе граничные точки ζ и ζ' разноцветных частей лежат по разные стороны от начала O на одинаковом расстоянии R».

Тоді область збіжності можна охарактеризувати так: для будь-якого степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ існує і є єдиним число $R \geqslant 0$ таке, що при $|z| < R$ ряд **збігається абсолютно**, а при $|z| > R$ **розбігається**. Випадки $|z| = R$ (тобто $z = \pm R$) потребують окремого дослідження.

Число R називають *радуісом збіжності*. На площині, яка містить вісь Oz, проведемо коло радіуса R з центром в точці $z = 0$. Точки $z \in (-R, R)$ цієї осі, які потрапляють всередину кола, як раз і утворюють область збіжності ряду. Множина зовнішніх точок $z \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ – область розбіжності. (Більш глибоке розуміння того, чому R називають радіусом збіжності, виникає при переході до комплексних степеневих рядів). Повертаючись до змінної $x = z + x_0$, область збіжності можна подати у вигляді: $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Знайдемо величину R. За ознакою Даламбера для знакозмінних рядів маємо:

$$D_n^* = \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z| \, .$$

Для забезпечення збіжності вимагатимемо:

$$D^* = \lim_{n \to \infty} D_n^* = |z| \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Якщо виявилось, що границя $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ існує, є скінченною і відмінною від нуля (тобто додатною сталою), то

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Позначимо

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| , \tag{1.10}$$

і ми отримаємо:

$$|z| < R, \qquad\qquad -R < z < R.$$

Тому величина R (1.10) і є радіусом збіжності, отриманим за ознакою Даламбера для знакозмінних рядів.

Якщо виявиться, що $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то з ознаки Даламбера випливає: $|z| \cdot 0 < 1$. Це виконано для будь-яких z. Тому маємо збіжність на всій осі Oz, тобто на інтервалі $z \in (-\infty, +\infty)$. Отже, радіусу збіжності формально слід приписати значення $R = +\infty$. Але якщо формально домовитись, що $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$, то з формули (1.10) саме це значення ми і отримаємо:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty.$$

Якщо виявиться, що границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ існує, але є нескінченною, то з ознаки Даламбера випливає: $|z|\cdot M<1$, де M є як завгодно великим. Тоді збіжність буде можливою лише в єдиній точці $z=0$. В цьому разі вважатимемо $R=0$. Але якщо формально домовитись, що $\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$, то з формули (1.10) саме це значення ми і отримаємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Отже, якщо формально домовитись, що $\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$, $\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$, то можна вважати, що формула (1.10) «працює» в будь-якому випадку (звичайно, якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ існує[14] бодай яка – скінченна чи нескінченна).

◁ *Приклад 1.29.* Знайдемо область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Тут $x_0=0$, $a_n=n!$, і тоді $a_{n+1}=(n+1)!$. За формулою (1.10) маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Тому інтервал (x_0-R,x_0+R) вироджується в точку $x=0$. Залишається перевірити її і переконатись, що при $x=0$ ряд збігається до нуля. Отже, область збіжності складається з єдиної точки $x=0$. ▷

◁ *Приклад 1.30.* Знайдемо область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Тут $x_0=0$, $a_n=\frac{1}{n!}$, і тоді $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. За формулою (1.10) маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при будь-яких $x\in(-\infty,+\infty)$; це і є область збіжності.

[14] Якщо ця границя не існує взагалі (ні скічення, ані нескінченна), то це свідчить лише про те, що радіус збіжності не вдалося встановити за ознакою Даламбера. Це не причина стверджувати, що радіуса немає; він існує і це випливає з теореми Абеля. Просто в таких випадках шукати його потрібно за допомогою більш чутливих ознак збіжності.

Зауважимо, можна не користуватись формулою (1.10), а виводити її для кожного нового ряду. В нашому прикладі

$$D_n^* = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 < 1,$$

що виконується для будь-яких $x \in (-\infty, +\infty)$; це і є область абсолютної збіжності. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.31.* Знайдемо область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ (див. також приклад 1.20). За ознакою Даламбера

$$D_n^* = \left| \frac{(n+1)x^{(n+1)-1}}{nx^{n-1}} \right| = |x| \cdot \frac{n+1}{n},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x| < 1,$$

отже, інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$.

Перевіримо кінці інтервалу. При $x = 1$ даний ряд перетворюється на ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ і, очевидно, розбігається. При $x = -1$ маємо: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} n = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$. Очевидно, знову маємо розбіжність. Остаточно, область збіжності є інтервалом $x \in (-1, 1)$. Всередині цієї області ряд збігається абсолютно, а ззовні – розбігається. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.32.* Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-10)^n}{n\cdot 2^n}$. За ознакою Даламбера

$$D_n^* = \left| \frac{\frac{(4x-10)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(4x-10)^n}{n\cdot 2^n}} \right| = |4x-10| \cdot \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = |2x-5| \cdot \frac{n}{n+1},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = |2x-5| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x-5| < 1,$$

$$-1 < 2x - 5 < 1, \qquad 4 < 2x < 6, \qquad 2 < x < 3.$$

Отже, інтервал збіжності ряду $x \in (2,3)$. Перевіримо кінці інтервалу. При $x = 3$ даний ряд перетворюється на ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \cdot 3 - 10)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Він є гармонічним і тому розбігається; точка $x = 3$ не належить області збіжності.

Нехай тепер $x = 2$. Ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \cdot 2 - 10)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1 \cdot 2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Це ряд лейбніцевського типу. За теоремою Лейбніца він збігається принаймні умовно. Але абсолютної збіжності тут немає. Справді, ряд, складений з модулів членів $\frac{(-1)^n}{n}$, стає гармонічним, і тому розбіжним. Отже, ряд збігається умовно в точці $x = 2$, і тому ця точка належить області збіжності.

Остаточно, областю збіжності є множина $x \in [2,3)$, причому збіжність у точці $x = 2$ умовна, а в точках $x \in (2,3)$ – абсолютна. Зауважимо також, що цей приклад демонструє можливу відмінність *області* збіжності $x \in [2,3)$ і *інтервалу* збіжності $x \in (2,3)$. $\triangleright$

В наведеному прикладі лівий кінець $x = 2$ інтервалу збіжності входив до області збіжності, а правий $x = 3$ не входив. Легко навести приклади, коли області збіжності належать обидва кінця інтервалу збіжності.

$\triangleleft$ *Приклад 1.33.* Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. За ознакою Даламбера

$$D_n^* = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

$$D^* = \lim_{n \to \infty} D_n^* = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| < 1.$$

Отже, інтервал збіжності є $-1 < x < 1$. Перевіримо кінці інтервалу. При $x = 1$ даний ряд перетворюється на ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, збіжний як ряд Діріхле. При $x = -1$ даний ряд перетворюється на ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно, оскільки збігається попередній ряд. Отже, область збіжності є $x \in [-1, 1]$. $\triangleright$

Радіус збіжності можна знаходити також з використанням радикальної ознаки Коші для знакозмінних рядів. Для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ маємо:

$$C_n^* = \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Збіжність виникає при

$$C^* = \lim_{n\to\infty} C_n^* = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Якщо виявилось, що границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ існує, є скінченною і відмінною від нуля (тобто додатною сталою), то

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Позначимо

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{1.11}$$

і ми отримаємо:

$$|x - x_0| < R, \qquad x_0 - R < x < x_0 + R.$$

Тому величина R (1.11) і є радіусом збіжності, отриманим за радикальною ознакою Коші для знакозмінних рядів. Формулу (1.11) називають *формулою Коші–Адамáра*[15] для радіуса збіжності степеневого ряду. Якщо зберігати формальні домовленості $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$, $\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$, то цю формулу також можна розповсюдити на усі[16] випадки: при $R = 0$ будемо отримувати ряд,

[15] Адамар Жак Саломон (Hadamard Jacques Salomon; 8 грудня 1865 – 17 жовтня 1963) – французький математик. Член Паризької Академії наук (з 1912). Основні праці присвячені теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії чисел, теорії функцій комплексної змінної і механіки.

[16] Звісно, лише на всі такі випадки, в яких границя (1.11) існує бодай яка – скінченна або нескінченна. Якщо ця границя не існує взагалі (ні скіченна, ані нескінченна), то це свідчить лише про те, що радіус збіжності не вдалося встановити за радикальною ознакою Коші. Це не причина стверджувати, що радіуса немає; він існує і це випливає з теореми Абеля. Просто в таких випадках шукати його потрібно за допомогою більш чутливих ознак збіжності. Див. також виноску на с. 52.

який розбігається всюди (за винятком центра ряду $x = x_0$), а при $R = +\infty$ будемо отримувати ряд, який збігається всюди. Втім, користуватись формулою (1.11), як і формулою (1.10), не обов'язково; її можна виводити для кожного нового прикладу окремо.

$\lhd$ *Приклад 1.34.* Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-6)^n}{2^n}$. За радикальною ознакою Коші

$$C_n^* = \sqrt[n]{\left|\frac{(2x-6)^n}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}\,|2x-6| = |x-3|\,,$$

$$C^* = \lim_{n\to\infty} C_n^* = \lim_{n\to\infty} |x-3| = |x-3| < 1,$$

$$-1 < x-3 < 1, \qquad 2 < x < 4.$$

Ми знайшли інтервал збіжності. Перевіримо його граничні точки. При $x = 4$ вихідний ряд перетворюється на ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\cdot 4-6)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1+1+\cdots\,.$$

Очевидно, він розбігається. При $x = 2$ вихідний ряд перетворюється на ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\cdot 2-6)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1\cdot 2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots\,,$$

який теж розбігається. Отже, область збіжності $x \in (2, 4)$. $\rhd$

1.6 Почленні дії зі степеневими рядами

Приймемо без доведення, що зі степеневими рядами можна здійснювати почленні операції диференціювання і інтегрування, якщо аргумент x залишається в інтервалі збіжності.

1.6.1 Почленне диференціювання

Розглянемо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ з радіусом збіжності R. Тоді інтервал збіжності $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Нехай деяке значення x належить цьому інтервалу. Тоді ряд збігається абсолютно. Нехай його сума дорівнює

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Стверджується, що похідну цієї функції можна знайти так:

$$f'(x) = \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)' =$$

$$= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(x - x_0)^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Позначимо $b_n = n a_n$. Тоді можна сказати, що почленне диференціювання степеневого ряду (тобто диференціювання кожного члену ряду, взятого окремо), веде до виникнення нового ряду. Він теж є степеневим, але з іншими коефіцієнтами b_n. Гарантується: 1) новий ряд також є збіжним при даному значенні x; 2) сума цього нового ряду дорівнює $f'(x)$ при даному значенні x. Оскільки це справедливо для будь-яких значень x з інтервалу збіжності, то можна стверджувати, що інтервал збіжності нового ряду такий самий, як і інтервал збіжності старого ряду. Інакше: **почленне диференціювання степеневого ряду зберігає інтервал його збіжності**. При цьому, взагалі кажучи, швидкість збіжності ряду погіршується (в частковій сумі необхідно накопичити більшу кількість доданків для отримання суми ряду з тією ж абсолютною похибкою.)

$\lhd$ *Приклад 1.35.* Розглянемо геометричну прогресію:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

Диференціюючи, отримуємо:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \qquad |x| < 1.$$

Покладемо $x = \frac{1}{2}$. При цьому обидва ряди виявляються збіжними абсолютно, і ми отримуємо:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 2,$$

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots=4.$$

Зауважимо, тут друга сума (на відміну від першої) вже не є сумою геометричної прогресії.

Друга сума хоч і збігається, але повільшіше за першу. Так, якщо накопичити шість доданків, до перша часткова сума виявиться меншою за двійку (суму ряду) на 0,78%, а друга – меншою за четвірку (суму ряду) на 3,5%; при врахуванні десяти доданків ці відсотки становитимуть 0,04% і 0,3% відповідно, і т.д. ▷

1.6.2 Почленне інтегрування

Розглянемо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ з радіусом збіжності R. Тоді інтервал збіжності $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Нехай деякі значення x_1, x_2 належать цьому інтервалу. Нехай сума ряду для *будь-якого* $x \in [x_1, x_2]$ дорівнює

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Стверджується:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int\limits_{x_1}^{x_2}(x-x_0)^n\,dx.$$

Тут x_1 можна вважати сталим, а x_2 – змінним (але таким, що не залишає інтервал збіжності). Отже, можна замість x_2 писати просто x, і тоді замість x під знаками інтегралу треба писати його «замінник» (наприклад, ξ):

$$\int\limits_{x_1}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-x_0)^n\right)d\xi=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int\limits_{x_1}^{x}(\xi-x_0)^n\,d\xi.$$

Очевидно, тут в правій частині після почленного інтегрування утворюється також степеневий ряд. Гарантується: 1) цей ряд також є збіжним при даному значенні x; 2) його сума дорівнює інтегралу від вихідного ряду при даному значенні x. Інтервали збіжності нового і старого рядів однакові. Нагадаємо, область збіжності може відрізнятись від інтервалу збіжності включенням кінців інтервалу.

◁ *Приклад 1.36.* Розглянемо геометричну прогресію:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots , \qquad |x| < 1.$$

Замінюємо змінну x на змінну ξ і інтегруємо почленно:

$$\ln(1+\xi)\big|_{x_1}^{x} = \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4} + \cdots\right)\Bigg|_{x_1}^{x} .$$

Покладемо, наприклад, $x_1 = 0$ (ця точка належить інтервалу збіжності):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Дослідимо цей ряд на збіжність. За ознакою Даламбера

$$D_n^* = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| < 1.$$

Отже, інтервал збіжності залишається незмінним: $x \in (-1, 1)$. Але область збіжності поповнюється точкою $x = 1$ і стає множиною $x \in (-1, 1]$. Справді, при $x = -1$ ряд розбігається як гармонічний, а при $x = 1$ він набуває вигляду

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Це ряд лейбніцевського типу. Його умовну збіжність було встановлено вище, а тепер ще й обчислено суму цього ряду. ▷

◁ *Приклад 1.37.* Знову розглянемо геометричну прогресію:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots , \qquad |t| < 1.$$

Покладемо $t = x^2$:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots , \qquad \left|x^2\right| < 1, \qquad |x| < 1.$$

Замінюємо змінну x на змінну ξ і інтегруємо почленно:

$$\operatorname{arctg}\xi\big|_{x_1}^{x} = \left(\xi - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^7}{7} + \cdots\right)\Bigg|_{x_1}^{x}.$$

Покладемо, наприклад, $x_1 = 0$ (ця точка належить інтервалу збіжності):

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Дослідимо цей ряд на збіжність. За ознакою Даламбера

$$D_n^* = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}} \right| = \left|x^2\right| \cdot \frac{2n+1}{2n+3},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left|x^2\right| < 1.$$

Отже, інтервал збіжності залишається незмінним: $x \in (-1, 1)$. Але область збіжності поповнюється точками $x = \pm 1$ і стає множиною $x \in [-1, 1]$. Справді, при $x = 1$ ряд перетворюється на ряд Лейбніца

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Його умовну збіжність було встановлено вище, а тепер ще й обчислено суму цього ряду, яка дорівнює $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

При $x = -1$ усі члени ряду (а також і ліва частина за рахунок непарності функції арктангенс) відрізняються лише знаком. $\triangleright$

1.7 Ряди Тейлора

1.7.1 Формула Лейбніца

Розглянемо допоміжне питання знаходження n-ї похідної добутку функцій $u(x)$ і $v(x)$, диференційовних достатню кількість разів. При $n = 1$ маємо відому формулу $(uv)' = u'v + uv'$. При $n = 2$ отримуємо

$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

При $n = 3$ аналогічно легко отримати:

$$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Отримані результати за своїм виглядом схожі на формули скороченого множення (квадрат суми, куб суми і т.ін.). Ці формули узагальнює біном Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^{n-n} b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n.$$

Тут $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість сполучень з n елементів по k елементів. Тому природно припустити, що за аналогією

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{1.12}$$

Тут тепер (n), $(n-k)$, (k) – номери похідних, а не показники степеня (саме тому їх взято в круглі дужки). Домовимось вважати, що «нульова похідна» – це функція, продиференційована нуль разів, тобто $u^{(0)} = u(x)$, $u^{(1)} = u'(x)$, $u^{(2)} = u''(x)$ і т.д.

Доведемо формулу (1.12) методом математичної індукції. На першому етапі перевіримо її при початкових значеннях n. При $n = 0$ вона набуває вигляду $(uv)^{(0)} = uv$, при $n = 1$ – вигляду $(uv)' = u'v + uv'$, при $n = 2$ – вигляду $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$, і т.д. Насправді для методу математичної індукції було достатньо лише однієї з цих перевірок, і ми наводимо їх декілька лише з ілюстративною метою.

На другому етапі, вважаючи, що формулу (1.12) дано, доведемо аналогічну формулу

$$(u \cdot v)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}, \tag{1.13}$$

яка виникає з (1.12) при збільшенні n на одиницю. Маємо:

$$(u \cdot v)^{(n+1)} = \left((u \cdot v)^{(n)} \right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left\{ \left(u^{(n-k)}\right)' v^{(k)} + u^{(n-k)} \left(v^{(k)}\right)' \right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(u^{(n+1-k)} v^{(k)} + u^{(n-k)} v^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}.$$

З першої суми виокремимо початковий доданок (при $k = 0$), а з другої – останній доданок (при $k = n$). Перша сума:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} = C_n^0 u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Друга сума:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n+1)}.$$

Покладемо $k = p - 1$, $p = 1, 2, \cdots, n$. Тоді друга сума дорівнює

$$\sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} u^{(n-p+1)} v^{(p)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n+1)}.$$

Тепер p можна замінити на k, оскільки сума не залежить від позначення індексу підсумовування. Тоді друга сума дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n+1)}.$$

Доданки, які залишаються під знаком сум, з'являються при однаковій зміні індексу $k = \overline{1, n}$, і їх можна об'єднати під один знак суми. Тоді загальна сума становить

$$C_n^0 u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n+1)}.$$

Тут

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!\,[(n+1)-k]!} = \frac{(n+1)!}{k!\,[(n+1)-k]!} = C_{n+1}^k.$$

Залишається врахувати, що

$$C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1, \qquad\qquad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1.$$

Остаточно загальна сума має вигляд

$$C_{n+1}^0 u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + C_{n+1}^{n+1} u^{(0)} v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)},$$

оскільки початковий і останній доданки збігаються з типовим доданком при $k = 0$ і $k = n + 1$ відповідно. Отриманий результат збігається з правою частиною (1.13). Отже, з істинності формули (1.12) при деякому n (а для початкових значень n це вже перевірено) випливає істинність цієї ж формули, але при наступному значенні n, тобто істинність формули (1.13). Тому формулу (1.12) доведено методом математичної індукції.

Формулу (1.12) називають *формулою Лейбніца* знаходження похідних добутку. Вона виявляється зручною, коли один зі співмножників є многочленом невеликого степеня.

$\triangleleft$ *Приклад 1.38.* Нехай $f(x) = (2x-3)e^x$. Знайдемо n-ну похідну $\frac{d^n f}{dx^n}$. Покладемо $u = e^x$, $v = 2x - 3$. Маємо: $u^{(j)} = (e^x)^{(j)} = e^x$. Маємо також $v^{(0)} = v = 2x - 3$, $v^{(1)} = v' = 2$, $v^{(k)} = (2x - 3)^{(k)} = 0$ при будь-яких $k \geqslant 2$. Тоді за формулою Лейбніца

$$\frac{d^n}{dx^n}\,[(2x-3)e^x] = [(2x-3)e^x]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,(e^x)^{(n-k)}\,(2x-3)^{(k)} =$$

$$= C_n^0 e^x (2x-3)^{(0)} + C_n^1 e^x (2x-3)^{(1)} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k e^x (2x-3)^{(k)} =$$

$$= 1 \cdot e^x (2x-3) + n \cdot e^x \cdot 2 + 0 = e^x(2x - 3 + 2n).\ \triangleright$$

Розглянемо ще один приклад, важливий для подальшого.

$\triangleleft$ *Приклад 1.39.* Нехай $\varphi(x)$ – функція, диференційовна принаймні n разів поспіль. Потрібно обчислити n-ну похідну функції $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ в точці $x = x_0$. Введемо позначення $u(x) = (x - x_0)^n$, $v(x) = \varphi(x)$. Послідовно диференціюючи функцію u, отримуємо:

$$u^{(0)}(x) = (x - x_0)^n, \quad u^{(1)}(x) = n(x - x_0)^{n-1},$$

$$u^{(2)}(x) = n(n-1)(x - x_0)^{n-2}, \quad u^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(x - x_0)^{n-3},$$

і т.д. Очевидна загальна закономірність:

$$u^{(k)}(x) = \underbrace{(n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-[k-1])}_{k \text{ співмножників}} \cdot (x - x_0)^{n-k}.$$

В усіх випадках, коли $k < n$, кожна похідна ще містить певний степінь двочлена $(x - x_0)$, і при підстановці $x = x_0$ стає рівною нулю. Якщо ж $k = n$, то

$$u^{(n)}(x) = \underbrace{(n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-[n-1])}_{n \text{ співмножників}} \cdot (x - x_0)^{n-n} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n! = \text{const}$$

і не залежить від x. При подальшому диференціюванні решта похідних дорівнюють нулю тотожно. Отже

$$u^{(k)}(x)\Big|_{x=x_0} = \left[\begin{array}{ll} n!, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{array}\right.$$

Тому в формулі (1.12) можна обмежитись лише початковим доданком (решта доданків дорівнюють нулю), і ми отримаємо:

$$f^{(n)}(x_0) = C_n^0\, u^{(n)}(x) v^{(0)}(x)\Big|_{x=x_0} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, \underbrace{u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)\Big|_{x=x_0}}_{=0} =$$

$$= 1 \cdot n! v(x)|_{x=x_0} = n! \varphi(x_0).$$

Остаточно,

$$\frac{d^n}{dx^n} \left\{(x - x_0)^n \varphi(x)\right\}\Big|_{x=x_0} = n! \varphi(x_0). \triangleright$$

1.7.2 Виникнення рядів Тейлора

Нехай $\Phi(x)$ – функція, диференційовна в точці x_0. Локальну поведінку цієї функції в околі даної точки (тобто динаміку зміни цієї функції) можна охарактеризувати за допомогою похідної. Нехай аргумент змінюється від значення x_0 до значення $x = x_0 + \Delta x$, а сама функція при цьому змінює своє значення від $\Phi(x_0)$ до $\Phi(x)$. Приріст функції становить $\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(x_0)$. Оскільки функція $\Phi(x)$ диференційовна в точці x_0, то існує така функція $\varphi(x)$, що цей приріст можна подати у вигляді

$$\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(x_0) = (x - x_0)\varphi(x). \tag{1.14}$$

Справді, достатньо позначити

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \neq x_0.$$

Якщо ж $x = x_0$, то функцію $\varphi(x)$ можна довизначити значенням $\varphi(x_0)$, яке ми домовимось розуміти як границю:

$$\varphi(x_0) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \Phi'(x_0)$$

за означенням похідної. Очевидно, при цій домовленості функція $\varphi(x)$ стає довизначеною до неперервної. Тоді (1.14) набуває вигляду

$$\Phi(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0)\varphi(x), \tag{1.15}$$

причому відомо, що $\varphi(x_0) = \Phi'(x_0)$. Формально цей результат можна отримати диференціюванням (1.15):

$$\Phi'(x) = \underbrace{(\Phi(x_0))'}_{=0} + \underbrace{(x - x_0)'}_{=1}\varphi(x) + (x - x_0)\varphi'(x) = \varphi(x) + (x - x_0)\varphi'(x).$$

Підставляючи сюди $x = x_0$ і припускаючи[17], що $\varphi'(x_0)$ існує, отримуємо $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0) + 0$.

В околі точки x_0 функція $\Phi(x)$ змінюється, причому швидкість цієї зміни також може змінюватись. Наприклад, функція може зростати, але швидкість її зростання може спадати. Графік функції буде опуклий догори (уповільнене зростання).

[17] Припускаючи існування $\varphi'(x_0)$, ми фактично визнаємо, що $\Phi(x)$ є *двічі* диференційовною в точці $x = x_0$, оскільки $\varphi(x_0) = \Phi'(x_0)$, і $\varphi'(x_0) = \Phi''(x_0)$.

Функція може зростати, і швидкість її зростання також може зростати. Графік функції буде опуклий донизу (прискорене зростання). Враховуючи зміну функції, спробуємо знехтувати принаймні зміною швидкості цієї зміни. Іншими словами, замінимо змінну швидкість її сталим початковим значенням, тобто в (1.15) покладемо $\varphi(x) \approx \varphi(x_0) = \mathrm{const}$. Отримаємо:

$$\Phi(x) \approx \Phi_{\text{дот}}(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0)\varphi(x_0) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0).$$

Фактично права частина є рівнянням дотичної, проведеної до графіка $\Phi(x)$ в точці x_0. Тому можна сказати, що локальна поведінка функції $\Phi(x)$ в околі точки x_0 визначається тангенсом $\operatorname{tg}\alpha = \Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$ кута нахилу цієї дотичної. Ця поведінка є саме локальною, оскільки зміною початкової швидкості $\varphi(x_0)$ можна нехтувати лише при малих значеннях приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$, бо саме при малих Δx стає нескінченно малою відмінність значень $\Phi(x)$ і $\Phi_{\text{дот}}(x)$ (тобто відмінність викривленого графіка $\Phi(x)$ і прямої, дотичної до нього).

Якщо ж величина $\Delta x = x - x_0$ стає великою, то треба відмовлятись від наближеної рівності $\varphi(x) \approx \varphi(x_0)$ і починати враховувати зміну величини $\varphi(x)$. Але це можна зробити знову за допомогою формули (1.15). Тому **ідея виникнення рядів Тейлора** полягає в багаторазовому застосуванні формули (1.15).

Розглянемо тепер функцію $f(x)$, яка є нескінченно диференційовною в точці x_0. Охарактеризуємо локальну поведінку функції $f(x)$ в околі точки x_0. З використанням (1.15) маємо:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)g_1(x).$$

Диференціюючи це рівняння і підставляючи в нього $x = x_0$, отримуємо $g_1(x_0) = f'(x_0)$. Застосовуючи (1.15) до функції $g_1(x)$, маємо:

$$g_1(x) = g_1(x_0) + (x - x_0)g_2(x) = f'(x_0) + (x - x_0)g_2(x),$$

і ми отримуємо:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[f'(x_0) + (x - x_0)g_2(x)\right] =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^2 g_2(x).$$

Тут перші два доданки можуть бути отримані з однакового типового виразу $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ при $k = 0$ і $k = 1$ відповідно, оскільки $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$, $0! = 1! = 1$. Тоді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^2 g_2(x).$$

Продиференціюємо це рівняння двічі і підставимо $x = x_0$. Фактично вирази $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \text{const}$, тому під знаком суми при $k \leqslant 1$ розташований лінійний двочлен, і його друга похідна тотожно дорівнює нулю. Другу похідну доданку поза знаком суми обчислено наприкінці попереднього пункту. Тоді

$$f^{(2)}(x_0) = 2! g_2(x_0), \qquad g_2(x_0) = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}.$$

Застосовуючи (1.15) до функції $g_2(x)$, маємо:

$$g_2(x) = g_2(x_0) + (x - x_0) g_3(x) = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} + (x - x_0) g_3(x),$$

і ми отримуємо:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^3 g_3(x).$$

Продиференціюємо це рівняння тричі і підставимо $x = x_0$. Під знаком суми при $k \leqslant 2$ розташований квадратний тричлен, і його третя похідна тотожньо дорівнює нулю. Третю похідну доданка поза знаком суми обчислено наприкінці попереднього пункту. Тоді

$$f^{(3)}(x_0) = 3! g_3(x_0), \qquad g_3(x_0) = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}.$$

Застосовуючи (1.15) до функції $g_3(x)$, маємо:

$$g_3(x) = g_3(x_0) + (x - x_0) g_4(x) = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + (x - x_0) g_4(x),$$

і ми отримуємо:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^4 g_4(x).$$

Продовжуючи цей процес і далі, ми будемо накопичувати в сумі доданки однакового типового вигляду $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Але якщо цей процес припинити на певному кроці, то виявиться, що в сумі накопичений деякий многочлен скінченного степеня. Тому функція $f(x)$ буде, взагалі кажучи, відрізнятись від породжуваної нею суми. Відмінність між функцією і породжуваним нею многочленом зручно врахувати, вводячи т.зв. *залишковий член* $R_n(x)$. Ми отримуємо *формулу Тейлора*[18]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x). \tag{1.16}$$

Власне кажучи, цю формулу можна розглядати як означення функції $R_n(x)$, і тому вона доведення не потребує.

Спробуємо здійснити граничний перехід в (1.16) при $n \to \infty$. Якщо при даному значенні x залишковий член $R_n(x)$ матиме границю $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то виникне збіжний[19] степеневий ряд, який називають **рядом Тейлора** функції $f(x)$ з центром в точці x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{1.17}$$

Зокрема, можна обрати $x_0 = 0$. При цьому утворюється степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

який називають **рядом Маклорена**[20] функції $f(x)$.

Формально, якщо для функції $f(x)$ в точці x_0 існують похідні усіх порядків, то ця функція вже здатна породжувати свій ряд Тейлора (1.17). При цьому може статись так, що при одних

[18] Брук Тейлор (англ. Brook Taylor; 1 серпня 1685, Міддлсекс, Англія – 29 грудня 1731, Лондон) – англійський математик, член Лондонського королівського товариства. Його ім'ям названа загальна формула розвинення функції в степеневий ряд.

[19] Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд (1.17), очевидно, розбігається. Але його також називають рядом Тейлора, хоча й розбіжним.

[20] Ко́лін Макло́рен (англ. Colin Maclaurin; лютий 1698 – 14 червня 1746) – шотландський математик. Математичні дослідження Коліна Маклорена включають числення скінченних різниць, аналіз теорії рядів і теорію плоских кривих вищих порядків, а також роботи з механіки.

значеннях x він збігається, а при інших – розбігається. Може статись навіть так, що при деякому значенні x він збігається, і отже, має свою суму, але вона не дорівнює $f(x)$. Це може бути можливим за рахунок того, що залишковий член не стає нескінченно малим. Тому перейдемо до отримання вигляду залишкового члену, бо потрібно встановити, за яких умов цей член прямує до нуля при $n \to \infty$.

1.7.3 Форма Лагранжа залишкового члену

Зафіксуємо довільні x_0 і x. Розглянемо нову незалежну змінну y, яка належить інтервалу $y \in [x_0, x]$. Розглянемо таку функцію цієї змінної:

$$\begin{gathered}\varphi(y) = f(y) + (x-y) \cdot f'(y) + (x-y)^2 \cdot \tfrac{f''(y)}{2!} + \dots + \\ +(x-y)^n \cdot \tfrac{f^{(n)}(y)}{n!} + (x-y)^{n+1} \cdot \tfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Тут x_0 і x – деякі сталі параметри. Нехай $y = x$. Тоді

$$\varphi(x) = f(x) + 0 \cdot f'(x) + \dots + 0, \qquad \varphi(x) = f(x).$$

Підставимо тепер у (1.18) значення $y = x_0$:

$$\varphi(x_0) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot f'(x_0) + (x-x_0)^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots +$$

$$+(x-x_0)^n \cdot \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + R_n(x).$$

Як бачимо, тут права частина збігається з правою частиною (1.16), отже,

$$\varphi(x_0) = f(x).$$

Тоді виявляється, що функція $\varphi(y)$ на лівому і правому кінцях інтервалу $y \in [x_0, x]$ набуває однакових значень:

$$\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x).$$

Тоді за *теоремою Ролля* існує принаймні одне значення $y = \xi$, $x_0 < \xi < x$, таке, що $\varphi'(\xi) = 0$. Цю теорему ми приймемо без доведення, оскільки її математичний зміст припускає наочне геометричне тлумачення. Справді, якщо $\varphi = \mathrm{const}$, то $\varphi' \equiv 0$, тому роль точки ξ може відігравати взагалі будь-яка точка інтервалу $[x_0, x]$. Якщо ж φ, наприклад, спочатку зростає, то для відновлення початкового значення вона колись повинна починати спадати. Отже, знайдеться принаймні одна точка $y = \xi$, в якій зростання змінюється на спадання. Ця точка буде стаціонарною за першою похідною, дотична до графіка $\varphi(y)$ в цій точці буде горизонтальною, і тому $\varphi'(\xi) = 0$.

Для знаходження похідної $\frac{d\varphi}{dy}$ з (1.18) виокремимо доданок, який містить k-у похідну. Позначимо $u_k = (x-y)^k$, $v_k = \frac{f^{(k)}(y)}{k!}$. Тоді похідна цього доданку за змінною y:

$$\left\{(x-y)^k \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\right\}'_y = \left\{(x-y)^k\right\}'_y \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{k!} + (x-y)^k \cdot \left\{\frac{f^{(k)}(y)}{k!}\right\}'_y =$$

$$= k(x-y)^{k-1} \cdot (-1) \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{k!} + (x-y)^k \cdot \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} =$$

$$= \underbrace{-(x-y)^{k-1} \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}}_{u'_k v_k} + \underbrace{(x-y)^k \cdot \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}}_{u_k v'_k}.$$

Замінюючи тут k на $k+1$, отримуємо похідну наступного доданку:

$$(u_{k+1} v_{k+1})'_y = \underbrace{-(x-y)^k \cdot \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}}_{u'_{k+1} v_{k+1}} + \underbrace{(x-y)^{k+1} \cdot \frac{f^{(k+2)}(y)}{(k+1)!}}_{u_{k+1} v'_{k+1}}.$$

Як бачимо, другий внесок $u_k v'_k$ від поточного доданку взаємно знищується з першим внеском $u'_{k+1} v_{k+1}$ наступного доданку. Тому після зведення подібних в загальній сумі залишається лише перший внесок початкового доданку і другий внесок останнього доданку. Але початковий доданок виникає при $k = 0$, і його множники $u_0 = (x-y)^0 = 1$, $v_0 = \frac{f^{(0)}(y)}{0!} = f(y)$. Тоді перший внесок початкового доданку

$$u'_0 v_0 = 1' \cdot f(y) = 0 \cdot f(y) = 0.$$

Отже, похідна суми усіх типових доданків містить лише другий внесок останнього доданку, тому остаточно

$$\frac{d\varphi}{dy} = u_n v'_n + \left\{(x-y)^{n+1} \cdot \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right\}'_y =$$

$$= (x-y)^n \cdot \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} - (n+1)(x-y)^n \cdot \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Підставляючи сюди $y = \xi$, ми повинні отримувати нуль:

$$0 = (x-\xi)^n \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - (n+1)(x-\xi)^n \cdot \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}},$$

$$(n+1)(x-\xi)^n \cdot \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = (x-\xi)^n \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!(n+1)}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Цей вираз називають *залишковим членом ряду Тейлора в формі Лагранжа*[21]. Тепер (1.16) набуває вигляду:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де ξ – деяке невідоме число таке, що $x_0 < \xi < x$.

1.7.4 Розвинення функцій в ряд Тейлора

■ **Теорема 1.18.** Якщо для функції $f(x)$ в будь-якій точці інтервалу $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, $R \geqslant 0$, існують похідні $f^{(n)}(x)$ усіх порядків n, і існує така стала M, що для будь-яких n і будь-яких x з цього інтервалу виконано нерівність

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant M, \tag{1.19}$$

то на всьому інтервалі $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ справджується (1.17):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Зокрема, не виключається також можливість того, що $R = +\infty$.

[21] Жозе́ф-Луї Лагра́нж (фр. Joseph-Louis Lagrange, італ. Giuseppe Lodovico Lagrangia; 25 січня 1736, Турин – 10 квітня 1813, Париж) – французький математик, фізик і астроном італійського походження.

□ *Доведення.* З використанням форми Лагранжа залишкового члену маємо наступну оцінку:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leqslant M \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

і, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Тепер в (1.16) залишається здійснити граничний перехід при $n \to \infty$, і ми отримуємо твердження теореми. □

Легко навести приклад, коли (1.19) виконано за рахунок того, що залишковий член при перевищенні номером n деякого значення стає не просто малим, а взагалі рівним нулю.

◁ *Приклад 1.40.* Розвинемо в ряд Тейлора функцію

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

в точці $x_0 = 1$. Маємо:

$$f(x_0) = f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0.$$

Маємо далі:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4,$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 4 = 0.$$

Маємо далі:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12,$$

$$f''(x_0) = f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 12 = 0.$$

Маємо далі:

$$f'''(x) = 24x - 24,$$

$$f'''(x_0) = f'''(1) = 24 \cdot 1 - 24 = 0.$$

Маємо далі: $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(1) = 24 \neq 0$. Зрозуміло, що усі інші похідні в точці $x_0 = 1$ дорівнюють нулю. Отже, в ряді Тейлора відмінним від нуля виявляється лише єдиний доданок, який виникає при $n = 4$. Тому

$$f(x) = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 = \frac{24}{4!}(x-1)^4 = (x-1)^4.$$

Часткова сума S_4 співпадає з вихідною функцією, тому залишкові члени $R_n(x) \equiv 0$, $\forall n \geqslant 4$. $\triangleright$

Розглянемо тепер приклад, в якому умову (1.19) не виконано. Це відомий приклад, який досить повно викладений в [4], звідки[22] ми його і запозичуємо.

$\triangleleft$ *Приклад 1.41.* Нехай

$$\varphi(x) = \left[\begin{array}{ll} P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{array}\right.$$

Тут P – многочлен деякого степеня. Легко бачити, що функція $\varphi(x)$ є неперервною в точці $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \left\| \begin{array}{c} y = \frac{1}{x} \\ y \to \infty \end{array} \right\| = \lim_{y \to \infty} P(y)e^{-y^2} = 0 = \varphi(x_0).$$

Можна також довести, що ця функція є навіть диференційовною в точці $x_0 = 0$, тобто похідна існує, та ще й має такий самий вигляд, як і задана функція:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left[\begin{array}{ll} Q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{array}\right.$$

Тут Q – многочлен деякого степеня. З цього випливає, що $\varphi^{(n)}(0) = 0$ для будь-яких n. Отже, ряд (1.17), породжуваний функцією $\varphi(x)$, збігається, але не до функції $\varphi(x)$, а до тотожного нуля. Здійснимо граничний перехід при $n \to \infty$ в рівнянні (1.16):

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{0}{k!}(x - x_0)^k \right) = \varphi(x),$$

що не є величиною, яка тотожно дорівнює нулю. Отже, умову (1.19) не виконано. Тому формально для функції $\varphi(x)$ ряд Тейлора побудувати можна, і він навіть буде збігатись, але не до цієї функції. Справа в тому, що цю функцію взагалі не можна розвинути в степеневий ряд з центром в точці $x_0 = 0$, оскільки співмножник e^{-1/x^2} при $x \to 0$ прямує до нуля швидше за многочлен будь-якого степеня. $\triangleright$

---

[22] Книга [2], яка видана значно раніше, також містить цей приклад.

Розглянемо більш простий приклад функції, для якої розвинення в степеневий ряд не існує.

◁ *Приклад 1.42.* Нехай

$$f(x) = x\,|x| = \left[\begin{array}{ll} x^2, & x \geqslant 0; \\ -x^2, & x < 0. \end{array}\right.$$

Перша похідна:

$$f'(x) = \left[\begin{array}{ll} 2x, & x \geqslant 0; \\ -2x, & x < 0. \end{array}\right.$$

В тому числі $f'(0) = 0$, тобто $f(x)$ є диференційовною в точці $x = 0$. Але лише одноразово:

$$f''(x) = \left[\begin{array}{ll} 2, & x > 0; \\ -2, & x < 0. \end{array}\right.$$

При $x = 0$ величина $f''(x)$ вже не є визначеною, і про побудову суми (1.17) мова йти не може. ▷

Як свідчать наведені приклади, не будь-яку функцію можна розвинути в ряд Тейлора. Але якщо розвинення функції в бодай який степеневий ряд взагалі можливо, то воно є розвиненням саме в ряд Тейлора.

■ **Теорема 1.19.** Нехай

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$

де ряд в правій частині при $x_0 - R \leqslant x \leqslant x_0 + R$ збігається до $f(x)$. Тоді цей ряд є рядом Тейлора, тобто

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

□ *Доведення.* Диференціюючи умову теореми n разів (нагадаємо, при почленному диференціюванні збіжного степеневого ряду виникає степеневий ряд, який теж є збіжним, причому область збіжності зберігається), отримуємо:

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + \frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x - x_0) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x - x_0)^2 + \cdots.$$

Підставляючи сюди $x = x_0$, отримуємо $f^{(n)}(x_0) = n!c_n$, що і треба було довести. □

Доведена теорема стверджує наступне: якщо розвинення функції $f(x)$ в степеневий ряд в деякій області можливе, то воно є єдиним (тобто, збігається з рядом Тейлора). Отже, маємо наступний наслідок.

Наслідок. Якщо для функції $f(x)$ в деякій області отримано два розвинення в степеневий ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

то

$$a_k = b_k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Фактично ми отримали обґрунтування відомого методу невизначених коефіцієнтів.

1.7.5 Приклади рядів Тейлора

Розглянемо приклади розвинень деяких елементарних функцій в ряд Тейлора.

$\lhd$ *Приклад 1.43.* Нехай $f(x) = e^x$. Покладемо $x_0 = 0$. Усі похідні $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(x_0) = e^{x_0} = e^0 = 1$. Тоді розвинення (1.17) набуває вигляду

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

За допомогою ознаки Даламбера легко встановити, що цей ряд є збіжним для будь-яких $x \in \mathbb{R}$. Фіксуючи значення x, в (1.19) достатньо покласти $M = e^x$. Тоді отримане розвинення збігається саме до функції $f(x) = e^x$.

Цікаво зауважити наступне. Перші два доданки отриманого розвинення утворюють рівняння $y_{\text{дот}} = 1 + x$ дотичної до графіка експоненти в точці $x = 0$. Це узгоджується з відомою границею $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.44.* Нехай $f(x) = \sin x$. Похідні:

$$f^{(0)}(x) = \sin x, \qquad f^{(1)}(x) = \cos x,$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x, \qquad f^{(3)}(x) = -\cos x.$$

В точці $x_0 = 0$ їх значення $f^{(0)}(0) = 0$, $f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$. Очевидно, далі ці значення повторюються блоками по чотири штуки. Тоді розвинення (1.17) набуває вигляду

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

За допомогою ознаки Даламбера легко встановити, що цей ряд є збіжним для будь-яких $x \in \mathbb{R}$. В (1.19) достатньо покласти $M = 1$. Тоді отримане розвинення збігається саме до функції $f(x) = \sin x$.

Перший доданок отриманого розвинення утворює рівняння $y_{\text{дот}} = x$ дотичної до синусоїди в точці $x = 0$. Це узгоджується з першою важливою границею $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Цікаво зауважити наступне. Синус є непарною функцією, тому його розвинення в ряд Тейлора містить лише непарні степені. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.45.* Нехай $f(x) = \cos x$. Похідні:

$$f^{(0)}(x) = \cos x, \qquad f^{(1)}(x) = -\sin x,$$
$$f^{(2)}(x) = -\cos x, \qquad f^{(3)}(x) = \sin x.$$

В точці $x_0 = 0$ їх значення $f^{(0)}(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = 0$, $f^{(2)}(0) = -1$, $f^{(3)}(0) = 0$. Очевидно, далі ці значення повторюються блоками по чотири штуки. Тоді розвинення (1.17) набуває вигляду

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

За допомогою ознаки Даламбера легко встановити, що цей ряд є збіжним для будь-яких $x \in \mathbb{R}$. В (1.19) достатньо покласти $M = 1$. Тоді отримане розвинення збігається саме до функції $f(x) = \cos x$.

Цікаво зауважити наступне. Косинус є парною функцією, тому його розвинення в ряд Тейлора містить лише парні степені (включаючи нульовий степінь, тобто вільний член). $\triangleright$

1.7.6 Біноміальний ряд

Розглянемо функцію $f(x) = (1 + x)^m$. Якщо m – натуральне, то можна розкрити дужки за допомогою формули бінома Ньютона. Тому розвинення, яке ми отримаємо нижче, називають *біноміальним рядом*.

Якщо m – натуральне, то функція $f(x)$ є многочленом m-го степеня, і при будь-якому x_0 її ряд Тейлора вичерпується скінченною частковою сумою, яка містить $(m+1)$ доданків вигляду $c_k(x-x_0)^k$, $k=\overline{0,m}$. Тому з точки зору рядів інтерес становлять випадки, коли $m \notin \mathbb{N}$, $m \neq 0$. Похідні:

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^m, \qquad f^{(1)}(x) = m(1+x)^{m-1},$$

$$f^{(2)}(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

і т.д. В загальному вигляді:

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots[m-(k-1)]\,(1+x)^{m-k}.$$

Покладемо $x_0 = 0$. При довільних m, k маємо $(1+x_0)^{m-k} = 1$. Тоді похідні в точці $x_0 = 0$ дорівнюють

$$f^{(0)}(0) = 1, \qquad f^{(1)}(0) = m, \qquad f^{(2)}(0) = m(m-1)$$

і т.д. В загальному вигляді:

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots[m-(k-1)]\,.$$

Тоді ряд Тейлора, породжуваний функцією $f(x)$, набуває вигляду

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots[m-(k-1)]}{k!}x^k + \cdots\,.$$

Оскільки $m \notin \mathbb{N}$ і $m \neq 0$, то кожен з коефіцієнтів цього розвинення є відмінним від нуля. За ознакою Даламбера легко встановити, що при $|x| < 1$ цей ряд є абсолютно збіжним, а при $|x| > 1$ – розбіжним. Дослідження граничних точок $x = \pm 1$ призводить до наступних результатів [2, с. 375]. Якщо $x = 1$, то біноміальний ряд а) збігається абсолютно при $m > 0$; б) збігається умовно при $-1 < m < 0$; в) розбігається при $m \leqslant -1$. Якщо $x = -1$, то біноміальний ряд а) збігається абсолютно при $m > 0$; б) розбігається при $m < 0$.

Додаткове дослідження залишкового члену призводить до такого результату: якщо біноміальний ряд збігається, то залишковий член прямує до нуля. Інакше, якщо біноміальний ряд збігається, то він збігається саме до функції $f(x) = (1+x)^m$.

Розвинення функції $f(x) = (1+x)^m$ в біноміальний ряд є досить загальною задачею. Становлять інтерес окремі випадки цього розвинення. Так, при $m = -1$ для $|x| < 1$ отримуємо:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots .$$

Змінюючи у x знак на протилежний, для $|x| < 1$ отримуємо:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots .$$

Ці дві формули надають суми збіжних геометричних прогресій зі знаменниками $q = -x$ і $q = x$ відповідно.

При $m = \frac{1}{2}$ для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ можна отримати [2, с. 375]:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 -$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots ,$$

а при $m = -\frac{1}{2}$ для $-1 < x \leqslant 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 -$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots . \qquad (1.20)$$

В двох останніх формулах символом «!!» позначено т.зв. подвійний факторіал (біфакторіал). Величину $n!!$ визначають як добуток усіх натуральних чисел, які не перевищують n і мають таку саму парність, як n. Наприклад:

$$7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1, \qquad 10!! = 10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2.$$

Два останніх розвинення легко отримати, враховуючи, що

$$2^n n! = 2^n(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n) = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot \ldots \cdot(2\cdot n) = (2n)!!.$$

1.7.7 Методи побудови рядів Тейлора

Оскільки розвинення функцій в ряд Тейлора є задачею, важливою з точки зору практичних застосувань, має сенс навести певну систематизацію методів побудови таких розвинень.

1°. *Безпосереднє розвинення функцій в ряд Тейлора*. Йдеться про безпосереднє застосування формули (1.17). Саме в цей спосіб нами були отримані розвинення функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, а також функції $(1+x)^m$ і її окремих випадків $\frac{1}{1\pm x}$, $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ тощо. З цих результатів можна скласти таблицю т.зв. табличних розвинень.

2°. *Використання табличних розвинень.*

$\lhd$ *Приклад 1.46.* Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2}.$$

Покладемо $y = 4x^2$. Тоді

$$\frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (4x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^k x^{2k}.$$

Використано формулу суми геометричної прогресії при $|y| < 1$, тому отримане розвинення збігається при $\left|4x^2\right| < 1$, тобто при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. $\rhd$

3°. *Додавання рядів.*

$\lhd$ *Приклад 1.47.* Розвинемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}.$$

Маємо:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

Використовуючи розвинення для функцій $\frac{1}{1+y}$, $\frac{1}{1-y}$, маємо:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \cdots, \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots , \quad |x| < 1.$$

Додаючи ці ряди, отримуємо:

$$f(x) = -\frac{1}{12}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \dots\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}x^2 + \dots + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)x^n + \dots .$$

Збіжність першого ряду має місце при $|x| < 3$, а другого – при $|x| < 1$, тоді знайдене розвинення збігається до функції $f(x)$ при $|x| < 1$. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.48.* Розвинемо функцію $f(x) = \operatorname{sh} x$ в ряд Маклорена. За означенням гіперболічного синусу: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Очевидно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots ,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots .$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, отримуємо:

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\cdot\frac{x^3}{3!} + 2\cdot\frac{x^5}{5!} + \dots .$$

Тоді

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots .$$

Ясно, що це розвинення виконується при будь-яких $x \in \mathbb{R}$, оскільки для таких значень виконувались розвинення експонент.

Зауважимо, в отриманому розвиненні містяться лише непарні степені аргументу; це узгоджується з непарністю гіперболічного синусу. $\rhd$

$\lhd$ *Приклад 1.49.* Розвинемо функцію $f(x) = \operatorname{ch} x$ в ряд Маклорена. За означенням гіперболічного косинусу: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Маємо:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots ,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots .$$

Додаючи ці ряди, отримуємо:

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Тоді

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Це розвинення також виконується при будь-яких $x \in \mathbb{R}$. Воно містить лише парні степені аргументу (включаючи нульовий степінь, тобто вільний член). Це узгоджується з парністю гіперболічного косинусу. $\triangleright$

4°. *Почленне інтегрування.*

$\triangleleft$ *Приклад 1.50.* Розвинемо функцію $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена. Маємо:

$$\frac{1}{1 + \xi} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \cdots + (-1)^n \xi^n + \cdots , \qquad |\xi| < 1,$$

Інтегруючи в інтервалі $\xi \in [0, x]$, отримуємо:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

Це розвинення виконується при $-1 < x \leqslant 1$, оскільки інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$ поповнюється точкою $x = 1$, в якій ряд збігається умовно як ряд лейбніцевського типу. В точці $x = -1$ функції $y = \frac{1}{1+x}$ і $y = \ln(1 + x)$ не визначені.

В отриманому розвиненні можна замінити x на $-x$:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n + 1}.$$

Очевидно, тепер область збіжності – інтервал $-1 \leqslant x < 1$, причому в точці $x = -1$ ряд збігається умовно. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.51.* Розвинемо функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена. Маємо:

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots , \qquad |t| < 1.$$

Покладемо $t = \xi^2$:

$$\frac{1}{1+\xi^2} = 1 - \xi^2 + \xi^4 - \xi^6 + \cdots + (-1)^n \xi^{2n} + \cdots, \qquad |\xi| < 1.$$

Інтегруючи в інтервалі $\xi \in [0, x]$, отримуємо:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Це розвинення виконується при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, оскільки інтервал збіжності $x \in (-1, 1)$ поповнюється точками $x = \pm 1$, в яких ряд збігається умовно як ряд лейбніцевського типу. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.52.* Розвинемо функцію $f(x) = \arcsin x$ в ряд Маклорена. У формулу (1.20) підставимо $x = -\xi^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\xi^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\xi^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\xi^{2n} + \cdots.$$

Інтегруючи в інтервалі $\xi \in [0, x]$, отримуємо:

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots.$$

Це розвинення виконується при $|x| \leqslant 1$. $\triangleright$

5°. *Почленне диференціювання.*

$\triangleleft$ *Приклад 1.53.* Розвинемо функцію $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ в ряд Маклорена. Позначимо $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Диференціюючи, отримуємо $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Тоді

$$f(x) = g'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \big(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\big)' =$$

$$= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Цей ряд ми вже розглядали в прикладі 1.20. Область збіжності легко встановити за ознакою Даламбера: $-1 < x < 1$. $\triangleright$

Звичайно, жорстко визначеного алгоритму побудови розвинення функції в степеневий ряд не існує. Наведені нами приклади лише ілюструють розмаїття можливих методів. Додамо, що ці методи можна застосовувати поодинці або в комбінації один з одним. Наприкінці наведемо ще один приклад, в якому комбінуються додавання рядів і використання табличних розвинень.

$\triangleleft$ *Приклад 1.54.* Розвинемо функцію $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$ в ряд Маклорена. Маємо:

$$f(x) = \ln \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \ln \frac{1+x^3}{1+x} = \ln(1+x^3) - \ln(1+x).$$

Використаємо вже відомий (табличний) результат:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots .$$

Підставляючи x^3 замість x, отримуємо також:

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \cdots .$$

Залишається відняти ці ряди і звести подібні члени. Пропонуємо цю задачу для самостійного доопрацювання. Звичайно, областю збіжності буде інтервал $x \in (-1, 1]$. $\triangleright$

1.8 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Функціональні ряди, зокрема, степеневі ряди, є потужним апаратом наближених обчислень, які застосовуються при розв'язанні прикладних задач. Ми розглянемо застосування степеневих рядів до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів та до наближеного розв'язання диференціальних рівнянь.

1.8.1 Наближене обчислення значень функції

Нехай потрібно обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_1$ з заданою точністю $\varepsilon > 0$. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(-R; R)$ можна розвинути в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

і $x_1 \in (-R; R)$, то точне значення $f(x_1)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_1$, тобто

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n + \cdots ,$$

а наближене значення – частковій сумі $S_n(x_1)$, тобто

$$f(x_1) \approx S_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n.$$

Точність цієї рівності збільшується з ростом n. Абсолютна похибка цієї наближеної рівності дорівнює модулю залишка ряду, тобто

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)| ,$$

де

$$r_n(x_1) = a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} + \cdots .$$

Таким чином, помилку $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ можна знайти, оцінивши залишок $r_n(x_1)$ ряду.

Для рядів лейбніцевського типу модуль залишка ряду не перевищує абсолютної величини першого відкинутого члена ряду:

$$|r_n(x_1)| = \left| a_{n+1} x_1^{n+1} + a_{n+2} x_1^{n+2} + \cdots \right| =$$

$$= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots| < |u_{n+1}|$$

(див. п.1.4.4, зауваження до теореми 1.12).

В інших випадках (ряд знакозмінний або знакододатний) утворюють ряд з модулів членів ряду і для нього намагаються знайти (підібрати) додатний ряд з більшими членами (зазвичай це збіжний ряд геометричної прогресії), який легко підсумовується. І в якості оцінки $|r_n(x_1)|$ беруть величину залишка цього нового ряду.

$\triangleleft$ *Приклад 1.55.* Обчислити $\sin \frac{1}{2}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Скористаємось рядом Маклорена для функції $\sin x$ (п. 1.7.5, приклад 1.44). Підставимо в цей ряд $x = \frac{1}{2}$:

$$\sin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^5 \cdot 5!} - \frac{1}{2^7 \cdot 7!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{3840} - \frac{1}{645120} + \cdots .$$

Це ряд лейбніцевського типу (знакопочерговий). Очевидно, що вже третій член ряду задовольняє нерівності $\frac{1}{3840} < 0{,}001 = \varepsilon$. Тому з потрібною точністю одержуємо:

$$\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48} \approx 0{,}479.$$

Зауважимо, що калькулятор дає значення $\sin\frac{1}{2} = 0{,}47942553\cdots$. Як бачимо, похибка наближеного обчислення не перевищує $0{,}0006 < 0{,}001$. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.56.* Обчислити $\sqrt[10]{1027}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

Очевидно, що

$$\sqrt[10]{1027} = \sqrt[10]{1024+3} = 2\sqrt[10]{1+\frac{3}{1024}} = 2\left(1+\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Скористаємось біноміальним рядом для функції $(1+x)^m$ (п. 1.7.6). Підставимо в цей ряд $m = \frac{1}{10}$, $x = \frac{3}{1024}$:

$$2\left(1+\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{10}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{1024} + \frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{3}{1024}\right)^2 + \cdots\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{3}{10240} - \frac{81}{209715200} + \cdots\right) = 2 + \frac{3}{5120} - \frac{81}{10485760} + \cdots.$$

Очевидно, що це ряд лейбніцевського типу (знакопочерговий). Оскільки для другого члена ряду $\frac{3}{5120} = 0{,}00058 > 0{,}0001$, і для третього члена ряду $\frac{81}{10485760} = 0{,}00000077\cdots < 0{,}0001$, то очевидно, що можна відкинути члени ряду, починаючи вже з третього. Тому з потрібною точністю одержуємо:

$$\sqrt[10]{1027} \approx 2 + \frac{3}{5120} \approx 2{,}0006.$$

Калькулятор дає значення $\sqrt[10]{1027} = 2{,}00058516645\cdots$. Як бачимо, похибка наближеного обчислення складає не більше ніж $0{,}00002 < 0{,}0001$. $\triangleright$

$\triangleleft$ *Приклад 1.57.* Обчислити $\sqrt[3]{e}$ з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

Скористаємось розвиненням показникової функції e^x в ряд Тейлора (п. 1.7.5, приклад 1.43). Підставимо в цей ряд $x = \frac{1}{3}$:

$$\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{3^n \cdot n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i \cdot i!}.$$

Залишок цього ряду:

$$r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i \cdot i!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+k} \cdot (n+k)!} < \frac{1}{3^n \cdot (n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k},$$

оскільки $(n+1)! < (n+1)! < \cdots$. Скористаємось формулою суми геометричної прогресії (п. 4.2): $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Отримали оцінку для залишка ряду:

$$r_n < \frac{1}{2 \cdot 3^n \cdot (n+1)!}.$$

При $n = 2$ і $n = 3$ маємо відповідно:

$$r_2 < \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 3!} = \frac{1}{108}, \qquad r_3 < \frac{1}{2 \cdot 3^3 \cdot 4!} = \frac{1}{1296} < 0{,}001.$$

Отже, результат з гарантованою точністю ми одержимо, якщо обмежимось членами ряду до третього включно (враховуючи і нульовий член ряду):

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} = \frac{113}{81} \approx 1{,}395.$$

Калькулятор дає значення $\sqrt[3]{e} = 1{,}395612425086\cdots$. Як бачимо, похибка наближеного обчислення складає не більше ніж $0{,}0006 < 0{,}001$. $\triangleright$

1.8.2 Наближене обчислення визначених інтегралів

Ряди застосовуються також для наближеного обчислення невизначених і визначених інтегралів у випадках, коли первісна не виражається в скінченному вигляді через елементарні функції або знаходження первісної є ускладненим.

Нехай потрібно обчислити $\int_a^b f(x)\,dx$ з точністю до $\varepsilon > 0$. Якщо підінтегральну функцію $f(x)$ можна розвинути в ряд за степенями x, і при цьому інтервал збіжності $(-R;R)$ включає в себе відрізок $[a;b]$, то для обчислення заданого інтегралу можна скористатись властивістю почленного інтегрування цього ряду. Похибку обчислення визначають так само, як і при обчисленні значень функцій (п. 1.8.1).

◁ *Приклад 1.58.* Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Первісна для функції e^{-x^2} в явному вигляді не існує, тому ми не можемо скористатись формулою Ньютона-Лейбніца. Розвинемо підінтегральну функцію в ряд Тейлора, замінивши x на $(-x^2)$ (п. 1.7.5, приклад 1.43):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots, \qquad x \in (-\infty;\infty).$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності на проміжку $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, який лежить всередині інтервалу збіжності $(-\infty;\infty)$, одержимо:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \cdots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 2^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 2^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 2^7} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \cdots.$$

Одержали ряд лейбніцевського типу. Оскільки $\frac{1}{320} > 0{,}001$ і $\frac{1}{5376} < 0{,}001$, то можна обмежитись трьома членами ряду. Отже, з потрібною точністю маємо:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} = \frac{443}{960} \approx 0{,}461. \ \triangleright$$

◁ *Приклад 1.59.* Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

Первісна для функції $\frac{\sin x}{x}$ в явному вигляді не існує. Розвинемо підінтегральну функцію в ряд Тейлора, скориставшись рядом для функції $\sin x$ (п. 1.7.5, приклад 1.44):

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots , \qquad x \in (-\infty; \infty) .$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності на проміжку $[0; 1]$, який лежить всередині інтервалу збіжності $(-\infty; \infty)$, одержимо:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots .$$

Одержали ряд лейбніцевського типу. Оскільки $\frac{1}{600} > 0{,}001$ і $\frac{1}{35280} < 0{,}001$, то можна обмежитись трьома членами ряду. Отже, з потрібною точністю маємо:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = \frac{1703}{1800} \approx 0{,}946. \ \triangleright$$

$\triangleleft$ *Приклад 1.60.* Знайти первісну $\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$ у вигляді степеневого ряду та вказати область його збіжності.

Розвинемо підінтегральну функцію в ряд Тейлора, скориставшись рядом для функції e^x (п. 1.7.5, приклад 1.43):

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) - 1}{x} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots , \qquad x \in (-\infty; \infty) .$$

Оскільки ряд збігається на всій числовій осі, то його можна почленно інтегрувати:

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \right) dx =$$

$$= C + x + \frac{x^2}{2!\cdot 2} + \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^4}{4!\cdot 4} + \cdots .$$

Отже, одержали первісну у вигляді збіжного ряду:

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\,dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\cdot n}, \qquad x \in (-\infty; \infty)\,. \rhd$$

1.8.3 Наближене розв'язання диференціальних рівнянь

Якщо розв'язок диференціального рівняння не виражається через елементарні функції в скінченному вигляді або спосіб його розв'язання занадто складний, то для наближеного розв'язання рівняння можна скористатись рядом Тейлора. Опишемо один із способів наближеного розв'язання диференціальних рівнянь – метод невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо задачу Коші:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Її розв'язок будемо шукати у вигляді ряду Тейлора з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Підставляючи цей вираз в диференціальне рівняння і початкову умову та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$.

$\lhd$ *Приклад 1.61.* Знайти наближений розв'язок задачі Коші

$$y' = x^2 y + y^2, \qquad y(0) = 1$$

у вигляді степеневого ряду до x^3 включно.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Використовуючи початкову умову $y(0) = 1$, одержуємо $a_0 = 1$. Отже, тепер маємо:

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots .$$

Підставимо вирази для $y(x)$ і $y'(x)$ в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots =$$

$$= x^2 \left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) + \left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right)^2 ,$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \left(x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + \cdots\right) +$$

$$+ \left(1 + 2a_1 x + \left(a_1^2 + 2a_2\right) x^2 + \left(2a_3 + 2a_1 a_2\right) x^3 + \cdots\right) .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 : & a_1 = 1 \\ x^1 : & 2a_2 = 2a_1 \\ x^2 : & 3a_3 = 1 + a_1^2 + 2a_2 \end{array}\right\}$$

Розв'язок системи $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{4}{3}$. Отже, наближений розв'язок задачі має вигляд:

$$y(x) \approx 1 + x + x^2 + \frac{4}{3} x^3 . \rhd$$

Аналогічний метод наближеного розв'язання можна застосувати і для диференціальних рівнянь вищих порядків.

$\lhd$ *Приклад 1.62.* Знайти наближений розв'язок задачі Коші

$$y'' = x^2 y - y', \qquad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

у вигляді степеневого ряду до x^5 включно.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots .$$

Використовуючи початкові умови, одержуємо $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Отже, тепер маємо:

$$y(x) = 1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots ,$$

$$y'(x) = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 \cdots ,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 \cdots .$$

Підставимо вирази для $y(x)$, $y'(x)$ і $y''(x)$ в диференціальне рівняння:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 \cdots =$$
$$= x^2 \left(1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots\right) -$$
$$- \left(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \cdots\right),$$
$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 \cdots =$$
$$= \left(x^2 + a_2x^4 + a_3x^5 + a_4x^6 + a_5x^7 + \cdots\right) -$$
$$- \left(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \cdots\right).$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\left.\begin{array}{r|l} x^0 : & 2a_2 = 0 \\ x^1 : & 6a_3 = -2a_2 \\ x^2 : & 12a_4 = 1 - 3a_3 \\ x^3 : & 20a_5 = -4a_4 \end{array}\right\}$$

Розв'язок системи $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{12}$, $a_5 = -\frac{1}{60}$. Отже, наближений розв'язок задачі має вигляд:

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60}. \triangleright$$

1.9 Ряди Фур'є

Цінність рядів Тейлора – можливість просто описати локальну поведінку функції в околі початкової точки x_0. Але що далі ми відсунемось від цієї точки (тобто що більшою стане величина $|x - x_0|$), то повільнішою буде збіжність ряду. В той же самий час існує велика кількість *періодичних процесів*, вивчення яких становить як науковий, так і практичний інтерес. Отже, виникає проблема: як відсунутись далеко від початкової точки, але зберегти швидку збіжність ряду. Цю проблему вдається розв'язати, використовуючи при побудові ряду тригонометричні функції замість степеневих. Так і виникають тригонометричні ряди; їх називають також рядами Фур'є[23].

[23] Жан Батист Жозеф Фур'є (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier; 21 березня 1768 – 16 травня 1830) – французький математик і фізик. Започаткував використання тригонометричних рядів для розв'язування задач математичної фізики.

1.9.1 Гармоніки

В цьому розділі будемо розглядати функції $x = f(t)$, задані на інтервалі $t \in [t_0, t_0 + T]$. Власне, вони можуть бути визначеними також і поза межами цього інтервалу, причому в довільний спосіб, але ми будемо цікавитись їх поведінкою саме всередині цього інтервалу.

Спробуємо подати функцію $f(t)$ у вигляді «суміші» деяких функцій, взятих в певних пропорціях. Вимагатимемо, щоб ці функції були періодичними, і щоб вони довжину T вичерпували цілою кількістю своїх періодів. У випадку рядів Тейлора ми робили те ж саме: обирали систему функцій $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \cdots$, і будували їх «суміш» $\sum_{(k)} c_k f_k(x) = \sum_{(k)} c_k x^k$ в пропорції, яка визначалась коефіцієнтами c_k. Якісно новим є лише те, що тепер функції будуть не степеневими, а тригонометричними. З урахуванням сказаного приймемо їх у вигляді

$$f_k(t) = a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t. \qquad (1.21)$$

Покладемо

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тоді функція $f_1(t)$ є періодичною з періодом T, а періоди функцій $f_k(t)$ дорівнюють T/k. Отже, кожна з функцій $f_k(t)$ укладає свій період цілу кількість разів на інтервалі $t \in [t_0, t_0 + T]$. Функції (1.21) і називають *гармоніками*. Тепер в (1.21) можна покласти $k = 0, 1, 2, \cdots$. Зокрема, при $k = 0$ будемо отримувати т.зв. *нульову гармоніку* $f_0 = a_0$ – єдину, яка не залежить від t; її називають також *сталою складовою*.

Тепер можна побудувати «суміш» гармонік. При цьому і буде виникати ряд Фур'є: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$.

1.9.2 Властивості гармонік

Побудована вище «суміш» гармонік аніякого відношення до функції $f(t)$ поки що не має. Справді, гармоніки ми побудували, лише відштовхуючись від довжини T інтервалу, в той час як вигляд функції $f(t)$ взагалі ще не визначали. Однак, при вдалому підборі коефіцієнтів a_k, b_k може виявитись, що побудований нами ряд 1) збігається 2) до функції $f(t)$. Перед знаходженням потрібних для цього значень a_k, b_k сформулюємо і доведемо дві властивості гармонік.

Утворимо *систему функцій*

$$C_k(t) = \cos k\omega t, \qquad\qquad S_k(t) = \sin k\omega t.$$

Зокрема, $C_0 = 1$, $S_0 = 0$. Тоді гармоніки: $f_k(t) = a_k C_k(t) + b_k S_k(t)$. Серед функцій $C_k(t)$, $S_k(t)$ оберемо дві будь-які (різні!), і обчислимо визначений інтеграл від їх добутку в межах від t_0 до t_0+T. Наприклад, при $n \neq k$, користуючись відомою формулою

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\},$$

отримуємо:

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)C_n(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \cos k\omega t\cos n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \{\cos(k+n)\omega t + \cos(k-n)\omega t\}\;dt =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\sin(k+n)\omega t}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\omega t}{k-n}\right)\Bigg|_{t_0}^{t_0+T} = 0, \qquad n \neq k,$$

оскільки кожна з функцій $\sin(k+n)\omega t$, $\sin(k-n)\omega t$ укладає свій період цілу кількість разів на інтервалі $t \in [t_0, t_0+T]$. Аналогічно доводяться також рівності

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} S_k(t)S_n(t)\,dt = 0, \qquad n \neq k,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)S_n(t)\,dt = 0, \qquad k, n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Тут в останній формулі вже не вимагається відмінність n і k, тобто з останньої формули зокрема випливає

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)S_k(t)\,dt = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Отже, перша властивість гармонік полягає в тому, що **інтеграл від добутку двох *різних* функцій розглядуваної системи дорівнює нулю**.

Якщо $n = k$, то результат буде іншим. З використанням формули $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ зниження степеня маємо:

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)\cdot C_k(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+T}\cos^2 k\omega t\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+T}\frac{1+\cos 2k\omega t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2k\omega}\sin 2k\omega t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{T}{2}, \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

Аналогічно маємо також

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} S_k^2(t)\,dt = \frac{T}{2}, \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

При $k = 0$ отримуємо інші результати:

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} C_0^2(t)\,dt = T, \qquad \int\limits_{t_0}^{t_0+T} S_0^2(t)\,dt = 0.$$

Отриману сукупність значень інтегралів від квадратів функцій розглядуваної системи вважатимемо другою властивістю. Тепер можна переходити до знаходження коефіцієнтів a_k, b_k.

1.9.3 Коефіцієнти Фур'є

Розвинення функції $f(t)$ в ряд Фур'є на інтервалі $t \in [t_0, t_0 + T]$ будемо шукати в вигляді

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right), \qquad (1.22)$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ми будемо припускати, що цей ряд збігається і що його можна почленно інтегрувати.

Коефіцієнти a_k, b_k називають *коефіцієнтами Фур'є*. Для знаходження кожного окремого коефіцієнту a_k помножимо рівняння (1.22) на $C_k(t)$ і проінтегруємо його в інтервалі розвинення.

Спочатку помножимо рівняння (1.22) на $C_0 \equiv 1$ і проінтегруємо його. За першою властивістю гармонік інтеграл від кожного добутку під знаком суми дорівнюватиме нулю, і залишиться:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a_0\,dt, \qquad a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt.$$

Отже, нульова гармоніка є інтегральним середнім функції $f(t)$ на інтервалі розвинення: a_0 є висотою такого прямокутника ширини T, площа якого дорівнює площі під графіком $f(t)$.

Нехай тепер $k > 0$. Помножимо рівняння (1.22) на $C_k(t)$ і проінтегруємо його. Виокремлюючи з суми k-у гармоніку, отримуємо:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)C_k(t)\,dt = a_0 \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} C_k(t)\,dt}_{=0} +$$

$$+a_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} C_k^2(t)\,dt}_{=\frac{T}{2}} + b_k \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} S_k(t)C_k(t)\,dt}_{=0} +$$

$$+ \sum_{\substack{n=1,\\ n\neq k}}^{+\infty} \left(a_n \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} C_n(t)C_k(t)\,dt}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} S_n(t)C_k(t)\,dt}_{=0} \right),$$

звідки

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)C_k(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\,dt.$$

Аналогічно, при множенні (1.22) на $S_k(t)$ і подальшому інтегруванні отримуємо:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)S_k(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\,dt.$$

Тепер можна сказати, що функція $f(t)$ породжує свій ряд Фур'є (1.22) з коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt, \\ a_k = \frac{2}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\,dt. \end{cases} \tag{1.23}$$

1.9.4 Збіжність рядів Фур'є

Побудований нами ряд буде 1) збігатись 2) до функції $f(t)$ не завжди. Як мінімум, коефіцієнти Фур'є повинні існувати, тобто функція $f(t)$ повинна бути інтегровною.

Кажуть, що **функція задовольняє умову Діріхле на деякому скінченному інтервалі, якщо вона на цьому інтервалі має не більш як скінченну кількість розривів не більш ніж першого роду.** Іншими словами, в кожній точці інтервалу функція має бути або неперервною, або, якщо вона розривна, то розрив має бути або усувним, або розривом першого роду (типу «стрибка»). Розриви другого роду (коли наявна вертикальна асимптота) є неприпустимими. При цьому кількість розривів (якщо вони наявні) має бути скінченною. Сформульовані вимоги гарантують існування відповідних інтегралів, тобто існування коефіцієнтів Фур'є.

Приймемо без доведення наступну теорему.

■ **Теорема 1.20.** Якщо функція $f(t)$ задовольняє умову Діріхле на інтервалі $t \in [t_0, t_0 + T]$, то її ряд Фур'є (1.22) з коефіцієнтами (1.23) збігається:

1) у внутрішніх точках t інтервалу $t \in [t_0, t_0 + T]$, де функція $f(t)$ є неперервною, до значення $f(t)$;

2) у внутрішніх точках t^* інтервалу $t \in [t_0, t_0 + T]$, де функція $f(t)$ є розривною, до середнього арифметичного ліво- і правобічного граничних значень функції $f(t)$, тобто до значення $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to t^*-0} f(t) + \lim\limits_{t\to t^*+0} f(t)\right)$;

3) в кінцях інтервалу розвинення – до середнього арифметичного граничних значень в цих кінцях; однобічні границі обчислюють зсередини інтервалу: $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{t\to t_0+0} f(t) + \lim\limits_{t\to t_0+T-0} f(t)\right)$.

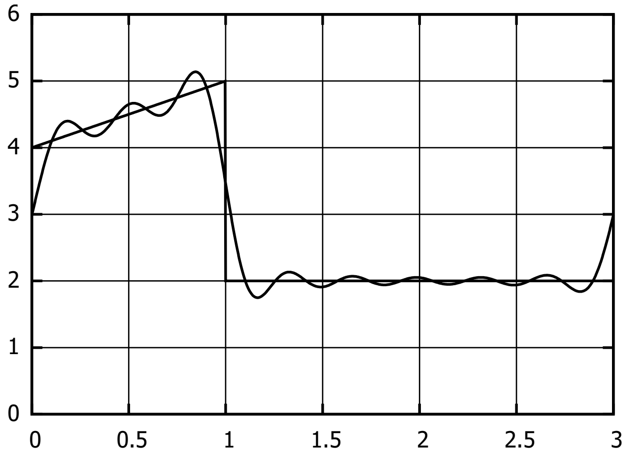


Рисунок 1.1 – До прикладу 1.55

◁ *Приклад 1.63.* Розвинемо функцію

$$f(t) = \begin{bmatrix} t+4, & 0 \leqslant t < 1; \\ 17, & t = 1; \\ 2, & 1 < t \leqslant 3 \end{bmatrix}$$

в ряд Фур'є. За умовою $t_0 = 0$, $T = 3$, тоді $\omega = \frac{2\pi}{3}$. З використанням (1.23) маємо: $a_0 = \frac{17}{6}$, а також

$$a_k = \frac{2}{3k\omega}\left[5\sin k\omega + 4\sin k\omega\cos 2k\omega + \frac{\cos k\omega - 1}{k\omega}\right];$$

$$b_k = \frac{2}{3k\omega}\left[4 - 5\cos k\omega + 4\sin k\omega\sin 2k\omega + \frac{\sin k\omega}{k\omega}\right].$$

На рисунку 1.1 показано графік функції $f(t)$, а також графік часткової суми ряду (1.22), яка містить дев'ять гармонік.

Функція $f(t)$ має єдину точку розриву $t^* = 1$. В цій точці значення самої функції $f(1) = 17$. Але це ніякого значення не має: число 17 до розрахунку коефіцієнтів Фур'є за формулами (1.23) не залучається (замість цього числа ми могли взяти будь-яке інше або вважати функцію $f(t)$ взагалі не визначеною в точці $t = 1$, і коефіцієнти a_k, b_k при цьому залишилися би незмінними). Лівобічне граничне значення функції визначається з виразу $t + 4$ при $t = 1$ і становить $\lim\limits_{t \to 1-0} f(t) = 5$, а правобічне граничне значення $\lim\limits_{t \to 1+0} f(t) = 2$. Тому в точці $t^* = 1$ ряд Фур'є збігається до значення $\frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$, і графік часткової суми проходить через точку $\left(1, \frac{7}{2}\right)$. Ніякого зв'язку між поодиноким значенням функції в точці розриву $t = 1$ (число 17) і значенням часткової суми в цій точці (число $\frac{7}{2}$) бути і не повинно.

Навпаки, при $0 < t < 1$ часткова сума збігається до виразу $f(t) = t + 4$, а при $1 < t < 3$ – до виразу $f(t) = 2$.

Нарешті, однобічні границі в кінцях інтервалу зсередини:

$$\lim_{t \to 0+0} f(t) = \lim_{t \to 0+0} (t + 4) = 4,$$

$$\lim_{t \to 3-0} f(t) = \lim_{t \to 3-0} 2 = 2.$$

Тому на кінцях інтервалу розвинення часткова сума збігається до значення $\frac{4+2}{2} = 3$. Відповідно, графік часткової суми проходить через точки $(0, 3)$ і $(3, 3)$. $\triangleright$

Нехай $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ – деяка внутрішня точка інтервалу розвинення. Маємо:

$$C_k(t_1 + mT) = \cos k\omega(t_1 + mT) = \cos(k\omega t_1 + mk\omega T).$$

Тут

$$mk\omega T = mk\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2mk\pi.$$

Тоді

$$C_k(t_1 + mT) = \cos(k\omega t_1 + 2mk\pi) = \cos k\omega t_1 = C_k(t_1),$$

тобто функції $C_k(t)$ є періодичними з періодом T. Те ж саме стосується також функцій $S_k(t)$, а тому і кожної гармоніки $f_k(t)$, а отже – і всього ряду Фур'є в цілому. Таким чином, якщо ряд Фур'є збігається всередині інтервалу розвинення, то він збігається на всій дійсній осі $t \in \mathbb{R}$, оскільки він є періодичною функцією з періодом T. Сама функція $f(t)$ періодичною може і не бути. Поза межами інтервалу розвинення вона може виявляти будь-яку поведінку або бути невизначеною взагалі, і її ряд Фур'є «дізнатись про це» не зможе. Фактично, все, що

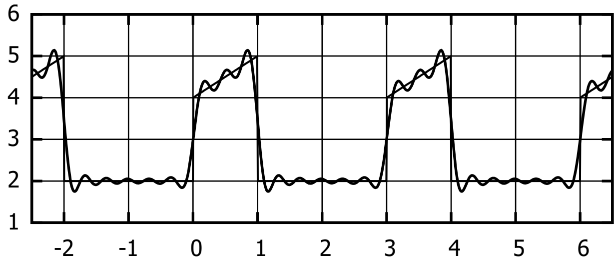


Рисунок 1.2 – Розширення інтервалу аргументу

відомо про функцію при побудові її ряду Фур'є, – це лише її поведінка *всередині* інтервалу розвинення; лише це і було використано при знаходженні коефіцієнтів Фур'є за формулами (1.23). Тому можна сказати, що функція $f(t)$, яка задовольняє умови Діріхле на деякомі інтервалі, породжує ряд Фур'є

$$f(t) \sim \hat{f}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)\,,$$

причому всередині інтервалу розвинення (виключаючи, можливо, точки розриву і кінці інтервалу) має місце рівняння $\hat{f}(t) = f(t)$. Поза межами інтервалу розвинення це рівняння може і не виконуватись. Втім, якщо домовитись, що функція $f(t)$ довизначена (або перевизначена) на зовнішність інтервалу до періодичної (так щоб рівність $f(t \pm mT) = f(t)$ виконувалась для будь-яких t і будь-яких $m \in \mathbb{Z}$), то рівняння $\hat{f}(t) = f(t)$ буде виконано для будь-яких $t \in \mathbb{R}$ (виключаючи, можливо, точки розриву). Тому кажуть, що ряд **Фур'є довизначає (перевизначає) функцію до періодичної** з періодом, що дорівнює довжині інтервалу розвинення. Цю думку легко проілюструвати, якщо в останньому прикладі використати значення t також і зовні інтервалу $t \in [0, 3]$ (рис. 1.2).

Збіжність рядів Фур'є може відбуватись з різною швидкістю залежно від конкретного значення t. Особливо повільною вона виявляється в околі точок t^* розриву. Це проявляється у виникненні т.зв. «сплесків» (при переході через точку t^* ряд повинен стрибкоподібно змінити свою суму на величину, що дорівнює різниці ліво- і правобічного граничних значень фун-

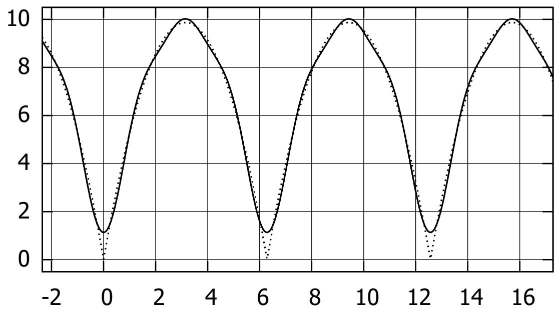


Рисунок 1.3 – Наближення параболи рядом Фур'є

кції). Такі «сплески» називають *ефектом Гіббса*[24]. Проблема полягає в наступному. Навіть якщо функція $f(t)$ була неперервною на інтервалі $t \in [t_0, t_0+T]$, але набувала на його кінцях різних значень $f(t_0+T) \neq f(t_0)$, то вона після довизначення до періодичної стає розривною. Розриви настають в точках

$$t_m^* = t_0 + mT, \qquad m \in \mathbb{Z};$$

вони є неусувними розривами першого роду зі стрибкоподібною зміною значення функції на величину $|f(t_0+T) - f(t_0)|$ при переході через кожну точку t_m^*.

В наступному прикладі, навпаки, рівність $f(t_0+T) = f(t_0)$ виконується, і тому збіжність ряду є швидшою.

$\lhd$ *Приклад 1.64.* Функцію $f(t) = 2\pi t - t^2$ розвинемо в ряд Фур'є на інтервалі $t \in [0, 2\pi]$. У нас $t_0 = 0$, $T = 2\pi$, $\omega = 1$. Тепер $f(0) = f(2\pi) = 0$, тому функція навіть після довизначення до періодичної залишається неперервною. За формулами (1.23) отримуємо: $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_k = -\frac{4}{k^2}$, $b_k = 0$. На рис. 1.3 точками показано графік функції, а суцільною лінією – графік часткової суми, в якій взято усього три гармоніки. Як бачимо, «сплесків» не спостерігається. $\rhd$

Зауважимо, в прикладі 1.55 коефіцієнти Фур'є прямували до нуля повільно (зі швидкістю порядку $\sim\frac{1}{k}$), а в прикладі 1.56 –

[24] Джоза́я Віллард Гіббз (англ. Josiah Willard Gibbs; 11 лютого 1839, Нью-Гейвен, США – 28 квітня 1903, там же) – американський математик та фізик, один із засновників векторного аналізу та математичної теорії термодинаміки.

швидше (зі швидкістю порядку $\sim\frac{1}{k^2}$). Це є проявом досить загальної властивості коефіцієнтів Фур'є: що більшою є гладкість функції, то швидше коефіцієнти Фур'є прямують до нуля [5].

1.9.5 Косинус- і синус- розвинення

Будуючи розвинення функції в ряд Фур'є, інтервал розвинення можна обирати довільно, аби лише на ньому виконувались умови Діріхле. Часто обирають $T = 2\pi$ і $t_0 = 0$ або $t_0 = -\frac{T}{2}$.

Ясно, що для даної функції можна побудувати безліч різних розвинень Фур'є. Справді, нехай функція $f(t)$ задана на інтервалі $t \in [t_0, t_0 + T]$. Нехай $a > 0$ – довільне число. Утворимо новий інтервал $t \in [t_0 - a, t_0 + T]$, приєднуючи до старого інтервалу з лівого боку «шматочок» довжиною a. Позначимо $\hat{t}_0 = t_0 - a$, $\hat{T} = T + a$, тоді $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \hat{T}]$. На цьому новому інтервалі утворимо нову функцію $\hat{f}(t)$ за правилом

$$\hat{f}(t) = \left[\begin{array}{ll} \varphi(t), & t_0 - a \leqslant t < t_0; \\ f(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T. \end{array}\right.$$

Тут функція $\varphi(t)$ може бути будь-якою, аби лише на новому інтервалі для функції $\hat{f}(t)$ виконувались умови Діріхле. Тоді для нової функції $\hat{f}(t)$ на новому інтервалі $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \hat{T}]$ можна побудувати звичайния ряд Фур'є, який і буде зображати функцію $\hat{f}(t)$. **В тому числі, цей ряд буде зображати також і стару функцію** $f(t)$, якщо t не буде залишати старого інтервалу, оскільки за цієї умови $\hat{f}(t) = f(t)$. Цим рядом функція $f(t)$ буде довизначеною до періодичної, але її період дорівнюватиме $\hat{T}$ (а не T). При цьому поведінкою ряду на «шматочку» $t \in [t_0 - a, t_0)$ можна навіть не цікавитись.

Звичайно, старий інтервал можна було розширити по обидва боки, покладаючи $a > 0$, $b > 0$, а також

$$\hat{f}(t) = \left[\begin{array}{ll} \varphi_1(t), & t_0 - a \leqslant t < t_0; \\ f(t), & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T; \\ \varphi_2(t) & T < t \leqslant t_0 + T + b. \end{array}\right.$$

Тепер лівий кінець нового інтервалу $\hat{t}_0 = t_0 - a$, а його довжина $\hat{T} = T + a + b$.

Надалі обмежимось випадком, коли $t_0 = 0$. Тоді формули (1.23), (1.22) набувають вигляду

$$a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt,$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Виявляється, цьому розвиненню можна надати спрощений вигляд. Підбираючи параметр a і функцію $\varphi(t)$, можна досягти того, щоб для довільних k виконувались рівняння $a_k = 0$ або рівняння $b_k = 0$.

Синус- розвинення

Нехай функцію $f(t)$ задано на інтервалі $t \in [0, T]$. Покладемо $a = -T$. Утворюється новий інтервал $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_0 + \hat{T}]$, лівий кінець якого $\hat{t}_0 = -T$, а довжина $\hat{T} = 2T$. Довизначимо функцію $f(t)$ на цьому інтервалі до непарної, тобто утворимо нову функцію

$$\hat{f}_{\mathrm{s}}(t) = \left[\begin{array}{ll} -f(-t), & -T \leqslant t < 0; \\ f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{array}\right.$$

Звичайно, на старому інтервалі $t \in [0, T]$ матимемо $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t) = f(t)$.

Побудуємо розвинення нової функції на новому інтервалі. Позначимо $\hat{\omega} = \frac{2\pi}{\hat{T}} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega}{2}$. Косинус- коефіцієнти Фур'є

$$\hat{a}_k = \frac{2}{\hat{T}}\int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_0+\hat{T}} \hat{f}_{\mathrm{s}}(t)\cos k\hat{\omega}t\,dt = \frac{2}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \hat{f}_{\mathrm{s}}(t)\cos k\hat{\omega}t\,dt = 0$$

як інтеграл від непарної[25] функції в симетричних межах. Те ж саме стосується і вільного члену: $\hat{a}_0 = 0$.

Синус- коефіцієнти Фур'є

$$\hat{b}_k = \frac{2}{\hat{T}}\int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_0+\hat{T}} \hat{f}_{\mathrm{s}}(t)\sin k\hat{\omega}t\,dt = \frac{2}{2T}\int\limits_{-T}^{T} \hat{f}_{\mathrm{s}}(t)\sin k\hat{\omega}t\,dt.$$

[25] Функція $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ є непарною, а функція $\cos k\hat{\omega}t$ є парною. Отже, їх добуток, розташований під знаком інтегралу, є непарною функцією.

Тепер під знаком інтегралу розташовано парну функцію (добуток двох непарних $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ і $\sin k\hat{\omega}t$). За рахунок симетрії меж інтегрування отримуємо:

$$\hat{b}_k = \frac{2}{2T} \cdot 2 \int\limits_0^T \hat{f}_{\mathrm{s}}(t) \sin k\hat{\omega}t \, dt = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \sin k \left(\frac{\omega}{2}\right) t \, dt.$$

Тут в останньому інтегралі функцію $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ замінили на функцію $f(t)$, оскільки тепер $0 \leqslant t \leqslant T$, а на цьому інтервалі вони не відрізняються. Тоді ряд Фур'є

$$\hat{f}_{\mathrm{s}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \sin k\hat{\omega}t = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{b}_k \sin k \left(\frac{\omega}{2}\right) t.$$

Зокрема, якщо $t \in [0, T]$, то цей ряд зображає також і функцію $f(t)$. Але тепер її довизначено до періодичної з періодом $\hat{T} = 2T$, причому так, що вона стає непарною. **Отриманий ряд називають розвиненням за синусами.** Саме тому позначення функції $\hat{f}(t)$ супроводжували індексом «s».

Як бачимо, при побудові розвинення функції в ряд Фур'є за синусами косинус- коефіцієнти (включаючи вільний член) просто відкидають, а синус- коефіцієнти обчислюють за формулою (1.23). Ряд синтезують за формулою (1.22). Єдина «розплата» за відкидання косинус- коефіцієнтів полягає лише в тому, що в формулах (1.22), (1.23) замість ω використовують частоту $\hat{\omega} = \frac{\omega}{2}$ першої гармоніки, яка відповідає інтервалу $\hat{T} = 2T$.

Як правило, отриманий ряд збігається повільно. Справді, якщо $f(0) \neq 0$, то $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ в точці $t^* = 0$ має неусувний розрив першого роду з величиною стрибка $\Delta \hat{f}_{\mathrm{s}} = 2\,|f(0)|$, тобто $\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ належить найнижчому класу гладкості.

Косинус- розвинення

Нехай функцію $f(t)$ знову задано на інтервалі $t \in [0, T]$, і потрібно побудувати розвинення, в якому усі коефіцієнти $b_k = 0$. Як і вище, утворимо новий інтервал $t \in [-T, T]$, лівий кінець якого $\hat{t}_0 = -T$, а довжина $\hat{T} = 2T$. Функцію $f(t)$ на ньому цього разу довизначимо до парної, тобто утворимо нову функцію

$$\hat{f}_{\mathrm{c}}(t) = \begin{bmatrix} f(-t), & -T \leqslant t < 0; \\ f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{bmatrix}$$

Звичайно, на старому інтервалі $t \in [0, T]$ матимемо $\hat{f}_\text{с}(t) = f(t)$.

Побудуємо розвинення нової функції на новому інтервалі. Позначимо $\hat{\omega} = \frac{2\pi}{\hat{T}} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega}{2}$. Синус- коефіцієнти Фур'є

$$\hat{b}_k = \frac{2}{\hat{T}} \int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_0+\hat{T}} \hat{f}_\text{с}(t) \sin k\hat{\omega}t\, dt = \frac{2}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \hat{f}_\text{с}(t) \sin k\hat{\omega}t\, dt = 0$$

як інтеграл від непарної (за рахунок синусу) функції в симетричних межах.

Вільний член

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_0+\hat{T}} \hat{f}_\text{с}(t)\, dt = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \hat{f}_\text{с}(t)\, dt.$$

Оскільки функція під знаком інтегралу є парною, і межі інтегрування симетричні, то маємо далі:

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{2T} \cdot 2 \int\limits_{0}^{T} \hat{f}_\text{с}(t)\, dt = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} f(t)\, dt = a_0.$$

Тут при переході до останнього інтегралу функцію $\hat{f}_\text{с}(t)$ замінили на $f(t)$, оскільки при $t \in [0, T]$ ці функції збігаються. Як бачимо, вільний член у функцій $\hat{f}_\text{с}(t)$ і $f(t)$ виявляється однаковим. Так і має бути, оскільки графік функції $\hat{f}_\text{с}(t)$ утворюється при доповненні графіка $f(t)$ його дзеркальним відображенням ліворуч, і площа під графіком зростає вдвічі. Але й ширина інтервалу зростає вдвічі. Тому висота рівновеликого прямокутника (тобто інтегральне середнє значення) залишається незмінною.

Косинус- коефіцієнти Фур'є:

$$\hat{a}_k = \frac{2}{\hat{T}} \int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_0+\hat{T}} \hat{f}_\text{с}(t) \cos k\hat{\omega}t\, dt = \frac{2}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \hat{f}_\text{с}(t) \cos k\hat{\omega}t\, dt.$$

Тепер під знаком інтегралу розташовано парну функцію. За рахунок симетрії меж інтегрування отримуємо:

$$\hat{a}_k = \frac{2}{2T} \cdot 2 \int\limits_{0}^{T} \hat{f}_\text{с}(t) \cos k\hat{\omega}t\, dt = \frac{2}{T} \int\limits_{0}^{T} f(t) \cos k\frac{\omega}{2}t\, dt.$$

Тут в останньому інтегралі функцію $\hat{f}_c(t)$ замінили на функцію $f(t)$, оскільки тепер $0 \leqslant t \leqslant T$, а на цьому інтервалі вони не відрізняються. Тоді ряд Фур'є

$$\hat{f}_c(t) = \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \cos k\hat{\omega}t = \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{a}_k \cos k\left(\frac{\omega}{2}\right)t.$$

Зокрема, якщо $t \in [0, T]$, то цей ряд зображає також і функцію $f(t)$. Але тепер її довизначено до періодичної з періодом $\hat{T} = 2T$, причому так, що вона стає парною. **Отриманий ряд називають розвиненням за косинусами.** Саме тому позначення функції $\hat{f}(t)$ супроводжували індексом «c».

Як бачимо, при побудові розвинення функції в ряд Фур'є за косинусами синус- коефіцієнти відкидають, а косинус- коефіцієнти обчислюють за формулою (1.23). При цьому формула для вільного члена (і отже, його значення) залишається такою самою, як і у випадку розвинення старої функкії на старому інтервалі. Ряд синтезують за формулою (1.22). Єдина «розплата» за відкидання синус- коефіцієнтів полягає лише в тому, що в формулах (1.22), (1.23) замість ω використовують частоту $\hat{\omega} = \frac{\omega}{2}$ першої гармоніки, яка відповідає інтервалу $\hat{T} = 2T$.

Як правило, отриманий ряд збігається швидше за синус-розвинення. Справді, при довизначенні функції $f(t)$ на інтервал $t \in [-T, 0)$ до парної утворюється функція $\hat{f}_c(t)$, яка є неперервною в точці $t = 0$: $\lim\limits_{t\to 0-0} \hat{f}_c(t) = \lim\limits_{t\to 0+0} \hat{f}_c(t) = f(0)$.

$\triangleleft$ *Приклад 1.65.* Для функції

$$f(t) = \begin{bmatrix} 1, & 0 < t < 1; \\ t & 1 < t < 2 \end{bmatrix}$$

побудувати розвинення в ряд Фур'є, а також знайти косинус- і синус- розвинення.

За умовою маємо $T = 2$, тоді $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Застосовуючи (1.23) при $t_0 = 0$ і враховуючи, що вихідна функція задана кусково, отримуємо:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dt + \int_1^2 t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t\,\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{5}{4}.$$

Аналогічно маємо:

$$a_k = \frac{1-\cos k\pi}{k^2\pi^2}, \qquad b_k = -\frac{1}{k\pi},$$

Тоді з (1.22) отримуємо:

$$f(t) = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos k\pi}{k^2\pi^2} \cos k\omega t - \frac{1}{k\pi} \sin k\omega t \right).$$

Тут $\omega = \pi$ і відповідає *головному періоду* розвинення $t \in [0, T]$.

При побудові синус- і косинус- розвинень покладаємо

$$\hat{T} = 2T = 4, \qquad \hat{\omega} = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Для косинус- розвинення отримуємо: $\hat{b}_k = 0$, $\hat{a}_0 = a_0 = \frac{5}{4}$, а також

$$\hat{a}_k = \frac{4}{k^2\pi^2} \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{2} \right),$$

і виникає ряд

$$\hat{f}_\mathrm{c}(t) = \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{2} \right) \cos k\hat{\omega} t.$$

Тут $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$ і відповідає *головному періоду* розвинення $t \in [-T, T]$. При цьому функція $\hat{f}_\mathrm{c}(t)$ довизначає функцію $f(t)$ до парної.

Для синус- розвинення отримуємо: $\hat{a}_k = 0$, $k = 0, 1, \cdots$, а також

$$\hat{b}_k = \frac{2}{k\pi} (1 - 2\cos k\pi) - \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2},$$

і виникає ряд

$$\hat{f}_\mathrm{s}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{k\pi} (1 - 2\cos k\pi) - \frac{4}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right] \sin k\hat{\omega} t.$$

Тут частота першої гармоніки $\hat{\omega} = \frac{\pi}{2}$ також відповідає *головному періоду* розвинення $t \in [-T, T]$. Але тепер функція $\hat{f}_\mathrm{s}(t)$ довизначає функцію $f(t)$ до непарної.

На рисунку 1.4 в порядку зверху донизу показано графіки часткових сум рядів функцій $f(t)$, $\hat{f}_\mathrm{c}(t)$, $\hat{f}_\mathrm{s}$ відповідно. Для $f(t)$ головним періодом є інтервал $t \in [0, T]$, а для $\hat{f}_\mathrm{c}(t)$ і $\hat{f}_\mathrm{s}$ – інтервал $t \in [-T, T]$; графіки на цих інтервалах зображено більш грубою лінією. При розрахунках за формулою ряду Фур'є для $f(t)$ в частковій сумі взято 16 доданків, для $\hat{f}_\mathrm{c}(t)$ – 5 доданків, для

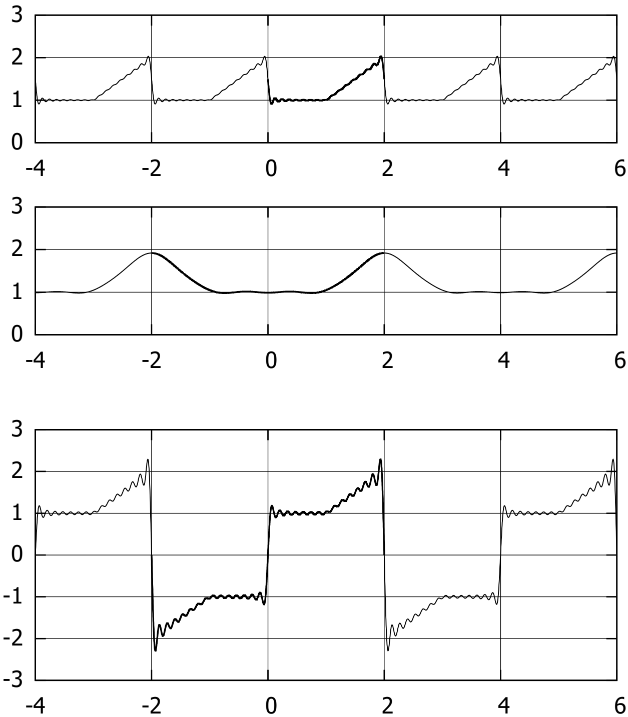


Рисунок 1.4 – Порівняння синус- і косинус- розкладань

$\hat{f}_{\mathrm{s}}(t)$ – 30 доданків. Серед трьох розвинень тільки $\hat{f}_{\mathrm{c}}(t)$ (після довизначення до періодичної) залишається неперервною, а $f(t)$ і $\hat{f}_{\mathrm{s}}$ мають розриви (в точках $t^* = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$). Для них в цих точках якраз і спостерігається ефект Гіббса у вигляді сплесків. $\triangleright$

1.10 Контрольні запитання

1. Що таке ряд? член ряду?

2. Що таке числовий ряд? функціональний ряд?

3. Що таке часткова сума ряду?
4. Що таке залишковий член (залишок ряду)?
5. Чому часткові суми утворюють числову послідовність? Як вона виглядає?
6. Що таке збіжний ряд? сума збіжного ряду?
7. Що таке розбіжний ряд?
8. Що таке гармонічний ряд? Як він поводиться?
9. Як зміниться збіжність ряду, якщо відкинути члени з першого по сьомий?
10. Нехай деякий ряд збігається. Як поводиться залишок цього ряду?
11. Теорема про почленне множення рядів.
12. Теорема про почленне додавання рядів.
13. Чи правильне твердження: якщо ряд збігається, то його залишок прямує до нуля?
14. Чи правильне твердження: якщо ряд збігається, то його n-й член прямує до нуля?
15. Чи правильне твердження: якщо n-й член ряду прямує до нуля, то ряд збігається?
16. Чи правильне твердження: якщо ряд розбігається, то його n-й член не прямує до нуля?
17. Чи правильне твердження: якщо n-й член ряду не прямує до нуля, то ряд розбігається?
18. В чому полягає необхідна умова збіжності ряду?
19. В чому полягає достатня умова розбіжності ряду?
20. Що таке додатний числовий ряд?
21. Чому при дослідження збіжності додатних числових рядів законно застосовувати теорему Веєрштрасса про існування скінченної границі монотонної обмеженої числової послідовності?

22. Перелічіть п'ять ознак збіжності додатних числових рядів.
23. Що зручніше застосовувати: означення збіжності чи ознаку збіжності? Чому?
24. Сформулюйте і доведіть ознаку порівняння.
25. Що таке мажоранта? міноранта? Навіщо вони потрібні?
26. Що таке ряд Діріхле? Як він поводиться в залежності від показника степеня?
27. Як доводять збіжність чи розбіжність ряду Діріхле?
28. Сформулюйте і доведіть граничну ознаку порівняння.
29. Чому при встановленні збіжності за граничною ознакою порівняння мажоранта не потрібна? Що використовують замість неї?
30. На чому заснована радикальна ознака Коші збіжності додатних рядів?
31. Сформулюйте і доведіть радикальну ознаку Коші збіжності додатних рядів.
32. Чи завжди радикальна ознака Коші здатна встановити збіжність ряду? Чому?
33. На чому заснована ознака Даламбера збіжності додатних рядів?
34. Сформулюйте і доведіть ознаку Даламбера збіжності додатних рядів.
35. Чи завжди ознака Даламбера здатна встановити збіжність ряду? Чому?
36. Що таке факторіал? Чому при дослідженні збіжності рядів з членами, вирази для яких містять факторіал, вигідно застосовувати ознаку Даламбера?
37. Який результат виникає в разі застосування радикальної ознаки Коші при дослідженні збіжності гармонічного ряду? ряду Діріхле?

38. Який результат виникає в разі застосування ознаки Даламбера при дослідженні збіжності гармонічного ряду? ряду Діріхле?

39. Яка ознака є більш потужною: ознака Даламбера чи радикальна ознака Коші?

40. Чи існує універсальний еталон для утворення ознак збіжності, заснованих на порівнянні? Чому?

41. Інтегральна ознака Коші (Коші-Маклорена) збіжності додатних рядів.

42. Що таке знакозмінний ряд? знакопочерговий ряд?

43. Що таке абсолютна збіжність?

44. Якщо ряд збігається абсолютно, то він збігається. Це твердження є наслідком означення абсолютної збіжності чи воно потребує доведення?

45. Чи може бути збіжним ряд, якщо він не є збіжним абсолютно? Наведіть приклади.

46. Що таке умовна збіжність?

47. Що таке ряд лейбніцевського типу?

48. Теорема Лейбніца про умовну збіжність.

49. Як оцінити похибку при сумуванні ряду лейбніцевського типу методом безпосереднього накопичування?

50. На чому засновано радикальну ознаку Коші і ознаку Даламбера збіжності знакозмінних рядів?

51. Що змінюється у формулюванні *умов* радикальної ознаки Коші і ознаки Даламбера при переході від додатних рядів до знакозмінних рядів? Як змінюється *висновок*, який за допомогою цих ознак можна зробити в разі збіжності?

52. Нехай перший числовий ряд є знакопочерговим. Нехай для нього побудовано другий ряд, складений з *модулів* членів першого. Нехай виявилось, що другий ряд є розбіжним. Як *може* поводитись перший ряд? Чому?

53. Нехай перший числовий ряд є знакопочерговим. Нехай для нього побудовано другий ряд, складений з *модулів* членів першого. Нехай виявилось, що другий ряд є розбіжним, *і це вдалося встановити шляхом застосування радикальної ознаки Коші для знакозмінних рядів*. Як *може* поводитись перший ряд? Чому?

54. Нехай перший числовий ряд є знакопочерговим. Нехай для нього побудовано другий ряд, складений з *модулів* членів першого. Нехай виявилось, що другий ряд є розбіжним, *і це вдалося встановити шляхом застосування ознаки Даламбера для знакозмінних рядів*. Як *може* поводитись перший ряд? Чому?

55. Що таке степеневий ряд?

56. Що таке центр степеневого ряду? область збіжності? інтервал збіжності? радіус збіжності?

57. Чи може область збіжності степеневого ряду бути порожньою множиною?

58. Сформулюйте і доведіть теорему Абеля про структуру області збіжності степеневого ряду.

59. Як збігається степеневий ряд у внутрішній точці області збіжності?

60. Як може поводитись степеневий ряд на кінцях інтервалу збіжності?

61. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду за допомогою ознаки Даламбера?

62. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду за допомогою радикальної ознаки Коші? Що таке формула Коші–Адамара?

63. Як здійснюють почленне диференціювання степеневого ряду? Як при цьому змінюється інтервал збіжності?

64. Як здійснюють почленне інтегрування степеневого ряду? Як при цьому змінюється інтервал збіжності?

65. Як знайти n-у похідну добутку двох функцій?

66. Що таке ряд Тейлора? ряд Маклорена? Чому дорівнюють коефіцієнти цих рядів?

67. Як виникають ряди Тейлора? В чому полягає ідея їх виникнення?

68. Як доводять, що ряд Тейлора всередині області збіжності збігається саме до тієї функції, яка його породжує?

69. Як виглядає залишковий член ряду Тейлора в формі Лагранжа?

70. За якої умови можна гарантувати, що розвинення функції в ряд Тейлора існує?

71. Якщо розвинення функції в бодай який степеневий ряд взагалі можливо, то воно є розвиненням саме в ряд Тейлора. Доведіть це.

72. Як виглядає розвинення ескпоненти в ряд Маклорена? Яка область збіжності цього розвинення?

73. Як виглядає розвинення синусу в ряд Маклорена? Яка область збіжності цього розвинення?

74. Як виглядає розвинення косинусу в ряд Маклорена? Яка область збіжності цього розвинення?

75. Що таке біноміальний ряд? Як виглядає його розвинення в ряд Маклорена?

76. При яких показниках степеня біноміальний ряд перетворюється на окремий випадок суми збіжної геометричної прогресії?

77. Якою є область збіжності біноміального ряду в залежності від показника степеня? Який характер збіжності?

78. Перелічіть методи побудови розвинень Тейлора. Наведіть приклади.

79. Для яких наближених обчислень застосовуються степеневі ряди?

80. Як визначити необхідну кількість членів ряду для забезпечення потрібної точності наближених обчислень, якщо одержаний ряд а) лейбніцевського типу; б) не є лейбніцевським?

81. Що таке тригонометричний ряд (ряд Фур'є)? Які процеси аналізують за його допомогою?

82. Що таке гармоніка? Які властивості гармонік?

83. Що таке коефіцієнти Фур'є? Як їх обчислюють?

84. Що таке умова Діріхле для заданої функції на заданому інтервалі?

85. Який характер збіжності ряду Фур'є при виконанні умови Діріхле?

86. Чому кажуть, що ряд Фур'є довизначає (перевизначає) функцію до періодичної? З яким періодом?

87. Чи є єдиним розвинення функції в ряд Фур'є? Чому?

88. Що таке розвинення за синусами? за косинусами?

89. До якої функції довизначається (перевизначається) функція, задана на інтервалі $t \in [0, T]$, при побудові її розвинення за синусами? за косинусами?

90. Який ряд збігається швидше: розвинення за синусами чи розвинення за косинусами? За якої умови? Чому?

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Задача 1. Встановити розбіжність заданого ряду, використовуючи достатню ознаку розбіжності.

В-1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n+2}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+5}$. В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{n}$. В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^{-n}$. В-6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

В-7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$. В-8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}\sin\frac{1}{n}$. В-9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2n^2}$. В-11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$. В-12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-n}{2^n+n}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$. В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+\sqrt[3]{n^2+1}}$.

Задача 2. Дослідити на збіжність заданий ряд, використовуючи ознаку порівняння.

В-1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\frac{1}{2}}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-\frac{1}{3}}$. В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2}$. В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2-\frac{1}{2}}$. В-6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n\sqrt{n}-2}$.

В-7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+4}$. В-8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$. В-9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\sin^2 n}{n^3}$.

В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$. В-11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$. В-12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2}+1\right)$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$. В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)$.

Задача 3. Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи граничну ознаку порівняння.

В-1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{\sin n}{n^5}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

В-2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$.

В-3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

В-4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}}-1+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}}-1+\frac{1}{n^3}\right)$.

В-5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{n^5}\right)$.

В-6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$.

В-7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1+\frac{1}{n^4}\right)$.

В-8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}+e^{\frac{1}{n}}-1\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}+e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

В-9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^3-1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^3-1+\frac{2}{n^7}\right]$.

В-10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3+\frac{1}{n}\right]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3+\frac{1}{n^2}\right]$.

В-11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{100^n}\right)$.

В-12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^2}\right)$.

В-13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$.

В-14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1+\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)$.

В-15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\right]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{n^2}\right]$.

Задача 4. Дослідити на збіжність заданий ряд з використанням ознаки Даламбера.

В-1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+3^n}$.

В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$. В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$. В-6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n+n}$.

В-7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 2^n}{n!}$. В-8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\cdot n!}{(2n)!}$. В-9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+5)\sin\frac{1}{2^n}$.

В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$. В-11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{n!}$. В-12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(2n+1)!}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n\sin\frac{1}{n}}$. В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$.

Задача 5. Дослідити на збіжність заданий ряд з використанням радикальної ознаки Коші.

В-1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+3}}{(8n^3+1)^{\frac{n}{3}}}$. В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{n+3}{n+5}$.

В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{4^n}$. В-6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{3n}{5n+1}\right)^{2n}$.

В-7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{e^n}$. В-8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$. В-9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{3}}}$.

В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\ln^n n}$. В-11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. В-12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{3^{n+1}}{10^n}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$.

Задача 6. Дослідити на збіжність заданий ряд з використанням інтегральної ознаки Коші–Маклорена.

В-1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$. В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$.

В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$. В-6. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln^3(n-3)}$.

В-7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$. В-8. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

В-9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n/3)\ln^2(n+7)}$. В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n/3-1)\ln^2(n/2)}$.

В-11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$. В-12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln^3 n}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(3n^2+8)\sqrt{\ln n}}$.

Задача 7. Дослідити заданий знакозмінний ряд на збіжність.

В-1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2+n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{3^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{5^n}$.

В-2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3n+5}$.

В-3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+5)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n^2+2}$.

В-4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2}$.

В-5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n}$.

В-6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{n!}$.

В-7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n}$.

В-8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (2n)!}{e^n}$.

В-9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{(n+1)!}$.

В-10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+1}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{5^n+n^5}$.

В-11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\cos\pi n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+5}{n^5+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{n^3+3}$.

В-12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{n!}$.

В-13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cos\pi n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n^3}$.

В-14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{3n^2+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{n\cdot 2^n}$.

В-15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{2}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^n}{n!\sqrt{n}}$.

Задача 8. Знайти область збіжності заданого степеневого ряду. Вказати характер збіжності на кінціях інтервалу збіжності.

В-1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$. В-2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{2^n}$. В-3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3n+1}$.

В-4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$. В-5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln^2 n}$. В-6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n^5+5}$.

В-7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^3}$. В-8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2n+1}$. В-9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{3^n(n^2+1)}$.

В-10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3\sqrt{n}}$. В-11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n+n^2}$. В-12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

В-13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(2n+5)^2}$. В-14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)3^n}$. В-15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{(n^2+1)^2}$.

Задача 9. Задану функцію $f(x)$ розвинути в ряд Тейлора в заданій точці x_0. Знайти область збіжності отриманого ряду. Скористатись табличними розвиненнями (див. п. 4.3), а також іншими методами (за необхідності).

В-1. $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$. В-2. $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

В-3. $f(x)=e^{-x^2}$, $x_0=0$. В-4. $f(x)=e^x$, $x_0=1$.

В-5. $f(x) = xe^x$, $x_0 = 1$.
В-6. $f(x) = \frac{1}{2x+5}$, $x_0 = 3$.
В-7. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$.
В-8. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$.
В-9. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $x_0 = 1$.
В-10. $f(x) = \ln 2x$, $x_0 = 2$.
В-11. $f(x) = \operatorname{sh} 2x$, $x_0 = 0$.
В-12. $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$, $x_0 = 0$.
В-13. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $x_0 = 1$.
В-14. $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
В-15. $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$, $x_0 = 0$.

Задача 10. Використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити вказаний визначений інтеграл з точністю до 0,001.

В-1. $\int\limits_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}\,dx$.
В-2. $\int\limits_0^{1}\cos x^2\,dx$.
В-3. $\int\limits_0^{1}\sin\frac{x^2}{4}\,dx$.
В-4. $\int\limits_0^{0,5}e^{-3x^2}\,dx$.
В-5. $\int\limits_0^{1}\cos x^3\,dx$.
В-6. $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{2x}\,dx$.
В-7. $\int\limits_0^{0,5}\frac{1+\cos x}{x^2}\,dx$.
В-8. $\int\limits_0^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$.
В-9. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.
В-10. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$.
В-11. $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.
В-12. $\int\limits_0^{1}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$.
В-13. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^3}$.
В-14. $\int\limits_0^{0,4}\sqrt{1-x^3}\,dx$.
В-15. $\int\limits_0^{0,1}\ln(1+x^4)\,dx$.

Задача 11. Функцію $f(t)$ задано на інтервалі $t \in (0,\pi)$. 1) Розвинути цю функцію на цьому інтервалі в ряд Фур'є і в одній системі координат побудувати графік функції і графік часткової суми її ряду Фур'є з врахуванням 10 гармонік. 2) Знайти косинус- розвинення і в одній системі координат побудувати графік функції, довизначеної до парної, і графік часткової суми одержаного косинус- розвинення з врахуванням 10 гармонік. 3) Знайти синус- розвинення і в одній системі координат побудувати графік функції, довизначеної до непарної, і графік часткової суми одержаного синус- розвинення з врахуванням 10 гармонік. За необхідності скористатись прикладом 1.65.

В-1. $f(t) = t - \frac{\pi}{2}$.
В-2. $f(t) = 2\pi - t$.
В-3. $f(t) = \pi^2 - t^2$.
В-4. $f(t) = \frac{\pi}{3} - t$.
В-5. $f(t) = t + \frac{\pi}{4}$.
В-6. $f(t) = \pi - t$.
В-7. $f(t) = \sin 2t$.
В-8. $f(t) = \cos 2t$.
В-9. $f(t) = \sin\frac{3t}{4}$.
В-10. $f(t) = \cos\frac{3t}{4}$.
В-11. $f(t) = \left|t - \frac{2\pi}{3}\right|$.
В-12. $f(t) = \left|t - \frac{\pi}{3}\right|$.
В-13. $f(t) = \cos 3t$.
В-14. $f(t) = \sin 3t$.
В-15. $f(t) = \frac{t^2}{\pi^2}$.

3 РОЗВ'ЯЗОК ТИПОВОГО ВАРІАНТУ

Задача 1. Встановити розбіжність заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$, використовуючи достатню ознаку розбіжності.

За умовою $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}}.$$

Користуючись правилом Лопіталя, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

отже,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1 \neq 0.$$

Отже, члени ряду не прямують до нуля, і необхідну умову збіжності не виконано (тобто виконано достатню умову розбіжності); ряд розбігається.
Відповідь: розбігається.

Задача 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$, використовуючи ознаку порівняння.

За умовою $a_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1$. Очевидно, границя:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) = e^0 - 1 = 0,$$

отже, ситуація поки залишається невизначеною.

Як відомо, $e^x - 1 \geqslant x$ при будь-яких x, причому рівність досягається лише при $x = 0$. Покладаючи $x = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, маємо:

$$a_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 = e^x - 1 > x = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} = b_n.$$

Отже, утворилась мінораранта. Ряд членів b_n розбігається як ряд Діріхле з показником степеня $1/2 < 1$, тоді ряд членів a_n розбігається тим паче за ознакою порівняння.
Відповідь: розбігається.

Задача 3. Ряди а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^3}+\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}\right)$ дослідити на збіжність з використанням граничної ознаки порівняння.

а) За умовою $a_n = \sin\frac{1}{n}+\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$. Якщо $n\to\infty$, то $\frac{1}{n}\to 0$. Отже, a_n є сумою двох нескінченно малих. За таблицею еквівалентних нескінченно малих маємо $\sin z\sim z$, $\operatorname{tg} z\sim z$, $z\to 0$. Очевидно, $\sin\frac{1}{n}$ є нескінченно малою першого порядку малості, а $\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$ – більш високого (другого) порядку малості. Тому при великих n поведінка членів a_n визначатиметься, в основному, складовою $\sin\frac{1}{n}$. Отже, має сенс в якості еталону при порівнянні обрати ряд з членами $b_n=\frac{1}{n}$. Він є гармонічним, і тому розбігається. Маємо:

$$K=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left\|\begin{array}{c} x=\frac{1}{n}\\ x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\operatorname{tg} x^2}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}+x\cdot\frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2}\right]=1+0\cdot 1=1\neq 0.$$

Отже, ряд з членів a_n також розбігається за граничною ознакою порівняння.

б) За умовою $a_n=\sin\frac{1}{n^3}+\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$. Але цього разу внесок $\sin\frac{1}{n^3}$ прямує до нуля швидше (має більш високий – третій – порядок малості). Тому при великих n поведінка членів a_n визначатиметься, в основному, складовою $\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$. Отже, має сенс в якості еталону при порівнянні обрати ряд з членами $b_n=\frac{1}{n^2}$. Він збігається як ряд Діріхле з показником степеня $2>1$. Маємо:

$$K=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\left\|\begin{array}{c} x=\frac{1}{n}\\ x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3+\operatorname{tg} x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{\sin x^3}{x^3}+\frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2}\right]=0\cdot 1+1=1\neq 0.$$

Отже, ряд з членів a_n також збігається за граничною ознакою порівняння.

Відповідь: а) розбігається; б) збігається.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ з використанням ознаки Даламбера.

За умовою $a_n = \frac{n!}{n^n}$, тоді $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Маємо:

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Отже, ряд збігається за ознакою Даламбера.
Відповідь: збігається.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ з використанням радикальної ознаки Коші.

За умовою $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, тоді:

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається за радикальною ознакою Коші.
Відповідь: збігається.

Задача 6. Ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}$ дослідити на збіжність з використанням інтегральної ознаки Коші–Маклорена.

За умовою $a_n = \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}$. Для дробово-раціональної частини маємо:

$$\frac{2n+1}{3n^2/2+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3n/2+\frac{2}{n}} = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3n}}{n/2+\frac{2}{3n}}.$$

Очевидно, при зростанні n доданками $\frac{1}{3n}$ і $\frac{2}{3n}$ можна знехтувати. Тому ясно, що для порівняння (з точністю до співмножника $\frac{2}{3}$) зручно обрати ряд з членів

$$b_n = \frac{1}{(n/2)\ln(n/2)}.$$

Застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(3n^2/2+2)\ln(n/2)}}{\frac{1}{(n/2)\ln(n/2)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(3n^2/2+2)} \cdot (n/2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3n}}{n/2+\frac{2}{3n}} \cdot (n/2) = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння ряди з членів a_n і b_n збігаються або розбігаються одночасно. Тому дослідимо збіжність ряду з членів b_n.

У відповідності до вигляду членів b_n утворимо функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x/2)\ln(x/2)}.$$

Покладемо $n_0 = 2e$. При $x \geqslant n_0$ функція $f(x)$ неперервна, набуває додатних значены є монотонно спадною. Отже, можна застосувати інтегральну ознаку Коші. Маємо:

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_{2e}^{A} \frac{2\,dx}{x\ln(x/2)} = \left\| \begin{array}{l} \ln(x/2) = t \\ \ln x - \ln 2 = t \\ \frac{dx}{x} = dt \\ t \in \left[1, \ln\frac{A}{2}\right] \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{A\to\infty} 2\int_{1}^{\ln\frac{A}{2}} \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} 2\ln t\Big|_{1}^{\ln\frac{A}{2}} = \lim_{A\to\infty} 2\left[\ln\left(\ln\frac{A}{2}\right) - \ln 1\right] = \infty.$$

Отже, інтеграл є розбіжним. Разом з ним є розбіжним і ряд з членів b_n за інтегральною ознакою Коші. Тоді і ряд з членів a_n також є розбіжним за граничною ознакою порівняння.
Відповідь: розбігається.
Задача 7. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}; \qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!\,(n^2+3n)}.$$

а) За умовою $a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$. Покладемо $c_n = |a_n|$, тоді $c_n = \frac{2^n}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$D_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1},$$

$$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, ряд з членів c_n збігається за ознакою Даламбера, тоді ряд з членів a_n збігається абсолютно.

б) За умовою $a_n = \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$. Цей ряд є знакопочерговим; його члени прямують до нуля при $n \to \infty$; їх прямування є монотонним за модулем:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+2}} \right| > \left| \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}} \right|,$$

що випливає з властивостей тангенса і кореня. Отже, розглядуваний ряд є рядом лейбніцевського типу. Тому за теоремою Лейбніца він збігається принаймні умовно.

Перевіримо, чи збігається він абсолютно. Утворимо новий ряд з модулів членів старого: $c_n = |a_n| = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$. Розглянемо також ряд членів $b_n = \frac{1}{n}$. Він розбігається як гармонічний. Легко переконатись, що

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1 \neq 0.$$

Тому ряд з членів c_n також розбігається за граничною ознакою порівняння, і отже, абсолютна збіжність ряду з членів a_n місця не має. Іншими словами, ряд з членів a_n збігається умовно, але не абсолютно.

в) За умовою $a_n = \frac{(-1)^n n^n}{n!(n^2+3n)}$. Застосуємо для ряду з цих членів ознаку Даламбера для знакозмінних рядів:

$$D_n^* = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,((n+1)^2 + 3(n+1))} \cdot \frac{n!\,(n^2+3n)}{n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+1)!\,(n^2+5n+4)} \cdot \frac{n!\,(n^2+3n)}{n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^n}{(n^2+5n+4)} \cdot \frac{(n^2+3n)}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n^2+3n}{n^2+5n+4} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}} = e\cdot 1 = e > 1.$$

Отже, новий ряд, складений з модулів членів старого ряду, розбігається за ознакою Даламбера для знакозмінних рядів, і тому старий ряд абсолютної збіжності не має. Але новий ряд не просто розбігається, а розбігається так, що це встановлено ознакою Даламбера (тобто розбігається так, що до нуля не прямує не тільки залишок ряду, а навіть n-й член ряду; фактично ознакою Даламбера ми порівняли модулі цих членів з членами розбіжної геометричної прогресії). Отже, збіжності немає ніякої, навіть умовної; ряд розбігається за достатньою умовою розбіжності. Див. також зауваження 2 до теореми 1.13.
Відповідь: а) збігається абсолютно; б) збігається умовно; в) розбігається.

Задача 8. Для степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 4^n}$ знайти область збіжності і вказати характер збіжності на кінцях інтервалу збіжності.

За ознакою Даламбера для знакозмінних рядів

$$D_n^* = \left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 4^{(n+1)}}\cdot\frac{n\cdot 4^n}{(x-1)^n}\right| = |x-1|\cdot\frac{n}{4(n+1)},$$

$$D^* = \lim_{n\to\infty} D_n^* = \frac{|x-1|}{4}.$$

Для абсолютної збіжності вимагатимемо: $D^* < 1$,

$$\frac{|x-1|}{4} < 1, \quad |x-1| < 4, \quad -4 < x-1 < 4, \quad -3 < x < 5.$$

Це і є інтервал збіжності. Перевіримо поведінку ряду на кінцях цього інтервалу.

Нехай $x = 5$. Член ряду перетворюється на вираз:

$$\frac{(5-1)^n}{n\cdot 4^n} = \frac{1}{n}.$$

Цей ряд є гармонічним і тому розбігається. Точка $x = 5$ до області збіжності не належить.

Нехай тепер $x = -3$. Член ряду перетворюється на вираз:

$$\frac{(-3-1)^n}{n\cdot 4^n} = \frac{(-1)^n\cdot 4^n}{n\cdot 4^n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Це ряд лейбніцевського типу, і тому він збігається принаймні умовно. Але абсолютна збіжність місця не має, оскільки новий ряд, складений з модулів цих членів, є гармонічним, і тому розбіжним. Точка $x = -3$ до області збіжності належить, але в цій точці ряд збігається умовно.
Відповідь: $x \in [-3, 5)$, причому всередині інтервалу ряд збігається абсолютно, в точці $x = -3$ – умовно, а в точці $x = 5$ – розбігається.
Задача 9. Функцію $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^2}$ розвинути в ряд Тейлора в заданій точці $x_0 = c$. Знайти область збіжності отриманого ряду. Вважати, що $b + ac \neq 0$, $a \neq 0$.

Спочатку розв'яжемо допоміжну задачу: в заданій точці $x_0 = c$ розвинемо в ряд Тейлора функцію $g(x) = \frac{1}{ax+b}$. Маємо:

$$g(x) = \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{ax - ac + b + ac} =$$

$$= \frac{1}{(b+ac) + a(x-c)} = \frac{1}{b+ac} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a(x-c)}{b+ac}}.$$

Позначимо $A = \frac{1}{b+ac}$, $\beta = \frac{a}{b+ac}$, $t(x) = \frac{a(x-c)}{b+ac} = \beta(x-c)$, тоді

$$g(x) = A \cdot \frac{1}{1+t(x)} = A\left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\right)$$

як сума геометричної прогресії (використали табличне розвинення). Підставляючи сюди $t(x) = \beta(x-c)$, отримаємо відповідь:

$$g(x) = A\left\{1 - \beta(x-c) + \beta^2(x-c)^2 - \beta^3(x-c)^3 + \cdots\right\}.$$

Це і є шукане розвинення за степенями двочлена $(x-c)$. Воно збігається при виконанні нерівності $|t| < 1$, $|\beta(x-c)| < 1$,

$$c - \frac{1}{|\beta|} < x < c + \frac{1}{|\beta|}.$$

Тут величина $\frac{1}{|\beta|}$ існує, оскільки $a \neq 0$.

Повернемось до розв'язку вихідної задачі. Маємо:

$$\frac{dg}{dx} = \left(\frac{1}{ax+b}\right)' = -\frac{a}{(ax+b)^2},$$

звідси
$$f(x) = \frac{1}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{dg}{dx}.$$
Оскільки отримане нами вище розвинення для $g(x)$ є степеневим, то дозволяється почленне диференціювання всередині області збіжності, причому ця область зберігається. Тоді маємо:
$$f(x) = -\frac{1}{a}\cdot A\left\{1-\beta(x-c)+\beta^2(x-c)^2-\beta^3(x-c)^3+\cdots\right\}' =$$
$$= \frac{A}{a}\left\{\beta-2\beta^2(x-c)+3\beta^3(x-c)^2-\cdots\right\} =$$
$$= \frac{\beta A}{a}\left\{1-2\beta(x-c)+3\beta^2(x-c)^2-\cdots\right\} =$$
$$= \frac{1}{(b+ac)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\beta^k(x-c)^k,$$
причому область збіжності вже встановлено вище. Зокрема, в точці $x=c$ (середина інтервалу збіжності) в знайденій сумі відмінним від нуля є лише доданок з номером $k=0$ (від дорівнює одиниці), і ми отримуємо: $f(c)=\frac{1}{(b+ac)^2}$, що узгоджується з умовою задачі.

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{(b+ac)^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\beta^k(x-c)^k$, де $\beta=\frac{a}{b+ac}$; область збіжності $x\in\left(c-\frac{1}{|\beta|}, c+\frac{1}{|\beta|}\right)$.

Задача 10. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1\sqrt[4]{1+x^3}\,dx$ з точністю до 0,01, використовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд,.

Розвинемо підінтегральну функцію в ряд Тейлора. Скористаємось біноміальним рядом для функції $(1+x)^m$ (п. 1.7.6). Підставимо в цей ряд $m=\frac{1}{4}$, а також x^3 замість x:
$$\sqrt[4]{1+x^3} = \left(1+x^3\right)^{\frac{1}{4}} =$$
$$= 1+\frac{1}{4}x^3+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)}{2!}x^6+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}x^9+\cdots =$$
$$= 1+\frac{x^3}{4}-\frac{3x^6}{32}+\frac{7x^9}{256}+\cdots, \qquad x\in(-1;1).$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності на проміжку $(0; 1)$, який лежить всередині інтервалу збіжності $(-1; 1)$, одержимо:

$$\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{x^3}{4} - \frac{3x^6}{32} + \frac{7x^9}{256} - \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^4}{4\cdot 4} - \frac{3x^7}{32\cdot 7} + \frac{7x^{10}}{256\cdot 10} - \cdots\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{16} - \frac{3}{224} + \frac{7}{2560} - \cdots .$$

Одержали ряд лейбніцевського типу. Оскільки $\frac{3}{224} > 0{,}01$ і $\frac{7}{2560} < 0{,}01$, то можна обмежитись трьома членами ряду. Отже, з потрібною точністю маємо:

$$\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^3}\,dx \approx 1 + \frac{1}{16} - \frac{3}{224} = \frac{235}{224} \approx 1{,}05.$$

Відповідь: $1{,}05$.

4 ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ

4.1 Арифметична прогресія

Розглянемо числову послідовність з першим членом a_1. Нехай кожний наступний член послідовності більше попереднього на одне й те саме число d. Таку послідовність називають *арифметичною прогресією*, а число d – *різницею* прогресії. Маємо: $a_{n+1} = a_n + d$. Тоді

$$a_2 = a_1 + d, \qquad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \qquad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

і т.д. Очевидно, $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Обчислимо суму M перших членів арифметичної прогресії. Перпишемо цю суму двічі – в прямому порядку і в зворотному:

$$\begin{aligned} S_M &= a_1 + a_2 + \cdots + a_M, \\ S_M &= a_M + a_{M-1} + \cdots + a_1. \end{aligned}$$

При додаванні цих рівнянь в правій частині згрупуємо члени по одному відповідному з першого і другого рядків:

$$2S_M = \underbrace{(a_1 + a_M) + (a_2 + a_{M-1}) + \cdots + (a_M + a_1)}_{M \text{ «дужок»}}.$$

При переході від чергової «дужки» до наступної перший доданок заміняється на наступний, тобто збільшується на d, а другий – на попередній, тобто зменшується на d. Тому всі «дужки» дорівнюють одна одній. Тоді

$$2S_M = (a_1 + a_M) \cdot M, \qquad S_M = \frac{a_1 + a_M}{2} \cdot M.$$

Підставляючи сюди $a_M = a_1 + d(M-1)$, легко отримати також

$$S_M = \frac{2a_1 + d(M-1)}{2} \cdot M.$$

4.2 Геометрична прогресія

Розглянемо числову послідовність з першим членом a_1, відмінним від нуля. Нехай кожний наступний член послідовності дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число q. Таку послідовність називають *геометричною прогресією*, а число q – *знаменником* прогресії. Маємо: $a_{n+1} = a_n q$. Тоді

$$a_2 = a_1 q, \qquad a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \qquad a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

і т.д. Очевидно, $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Обчислимо суму M перших членів геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{M} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{M-1} = a_1 \left(1 + q + \cdots + q^{M-1}\right) =$$

$$= a_1 \cdot \frac{\left(1 + q + \cdots + q^{M-1}\right)(1-q)}{1-q} =$$

$$= a_1 \cdot \frac{1 - q + q - q^2 + \cdots + q^{M-1} - q^M}{1-q} = \frac{a_1\left(1 - q^M\right)}{1-q},$$

$$S_M = \frac{a_1\left(1 - q^M\right)}{1-q}.$$

Якщо кількість членів прогресії $M \to +\infty$, то цю суму домовляються розуміти в граничному сенсі:

$$S_\infty = \lim_{M \to +\infty} S_M.$$

Якщо $|q| < 1$, то ця границя існує і є скінченною:

$$S_\infty = \lim_{M \to +\infty} \frac{a_1\left(1 - q^M\right)}{1-q} =$$

$$= \frac{a_1\left(1 - \lim\limits_{M \to +\infty} q^M\right)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

У випадку $|q| < 1$, $M \to +\infty$ прогресію називають нескінченно спадною (оскільки $|a_{n+1}| < |a_n|$). Її сума є сумою збіжного ряду. При $|q| > 1$ границя $S_\infty = \lim\limits_{M \to +\infty} S_M$ не існує як скінченна величина. Прогресію в цьому разі називають нескінченно зростаючою, а її сума є сумою розбіжного ряду; ця сума не існує як скінченна величина.

Аналіз випадків $|q| = 1$ також не складає труднощів. При $q = 1$ маємо:

$$S_M = a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = Ma_1, \lim_{M\to+\infty} S_M = \lim_{M\to+\infty} Ma_1 = \infty;$$

ця границя не існує як скінченна величина.

При $q = -1$ маємо:

$$S_M = a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \cdots .$$

Очевидно, якщо M – парне, то $S_M = 0$, а якщо непарне, то $S_M = a_1 \neq 0$. Тому границя $\lim\limits_{M\to+\infty} S_M$ взагалі не існує: ні як скінченна величина, ані як нескінченна величина.

Остаточно, сума геометричної прогресії зі знаменником q і першим членом a_1 збігається до числа $\frac{a_1}{1-q}$ при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geqslant 1$.

Формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії зручно використовувати для зведення періодичних десяткових дробів до звичайних дробів. Наприклад, число 3,(3) може бути подане як

$$3{,}(3) = 3 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots ,$$

тобто як нескінченно спадна геометрична прогресія з параметрами $a_1 = 3$, $q = 0{,}1$, $|q| < 1$. Тому маємо:

$$3{,}(3) = S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-0{,}1} = \frac{3}{0{,}9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}.$$

В цьому легко переконатись, розділивши 10 на 3 «в стовпчик».

4.3 Розвинення елементарних функцій в ряд Маклорена

Нижче наведено розвинення в ряд Маклорена деяких елементарних функцій та вказано область їх збіжності. Використовуючи ці розвинення, можна побудувати як ряди Маклорена, так і ряди Тейлора для досить широкого класу функцій, що виражаються через елементарні.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n, \qquad |x| < 1.$$

Окремі випадки останнього (біноміального) ряду при $m = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

Література

[1] Ильин В.А. и др. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Под ред. А.Н. Тихонова. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II / Г.М. Фихтенгольц. – 5-е изд. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 807 с.

[3] Лузин Н.Н. Интегральное исчисление / Н.Н. Лузин. – М. : Советская наука, 1952. – 415 с.

[4] Воробьев Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – СПб. : «Лань», 2002. – 408 с.

[5] Анпілогов Д.І., Сніжко Н.В. Ряди Фур'є. Вибрані питання : навч. посібник / Д.І. Анпілогов, Н.В. Сніжко. – Запоріжжя : Акцент Інвест-трейд, 2014. – 92 с.

Навчальне видання

Анпілогов Дмитро Ігорович
Сніжко Наталія Вікторівна

Ряди

Навчальний посібник
(*видання 2-е, виправлене і доповнене*)

Комп'ютерний набір *Анпілогов Д.І.*
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 27.09.2022. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,73.
Тираж 100 прим. Зам. № 771.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.