

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Кафедра ПЗ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи
з дисципліни “Технології комп’ютерного
проектування”
для студентів за спеціальністю
122 «Комп’ютерні науки»
усіх форм навчання
Частина 1

2017

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Технології комп'ютерного проектування» для студентів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» усіх форм навчання. Частина 1 /Укл.: А.В. Пархоменко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – 50 с.

Укладач: А.В. Пархоменко, к.т.н., доцент кафедри ПЗ.

Рецензент: Г.М. Шило, к.т.н., доцент кафедри ІТЕЗ.

Відповідальний
за випуск: С.О. Субботін, зав. каф. ПЗ, д.т.н., професор.

Затверджено
на засіданні кафедри
“Програмних засобів”

Протокол № 11
від “06” червня 2017 р.

ЗМІСТ

Частина 1

Самостійна робота 1. Ознайомлення та виконання**простих математичних операцій за допомогою програми****Mathcad 6****1.1 Теоретичні відомості 6**

1.1.1 Призначення та функціональні можливості пакету

Mathcad 6

1.1.1.1 Обчислення простих математичних виразів 7

1.1.1.2 Побудування графіків 12

1.1.1.3 Обчислення складних функцій та
форматування

вихідних результатів 17

1.2 Завдання до виконання роботи 19**1.3 Зміст звіту 19****1.4 Контрольні питання 19****Самостійна робота 2. Розв'язок краєвих задач за допомогою****програми Mathcad 20****2.1 Теоретичні відомості 20**2.1.1 Розв'язок звичайних диференційних рівнянь першого
порядку 202.1.2 Розв'язок звичайних диференційних рівнянь другого
порядку 212.1.3 Розв'язок звичайних диференційних рівнянь вищих
порядків 222.1.4 Розв'язок диференційних рівнянь в
часткових похідних 24

2.1.5 Системи звичайних диференційних рівнянь

першого порядку	26
2.1.6 Системи звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків	27
2.2 Завдання до виконання роботи	30
2.3 Зміст звіту	30
2.4 Контрольні питання	30
Рекомендована література	31
Додаток А – Завдання на самостійну роботу №1	32
Додаток Б – Завдання на самостійну роботу №2	44

Частина 2

Самостійна робота 3. Вирішення науково

дослідницьких задач за допомогою програми Mathcad	54
3.1 Теоретичні відомості	54
3.1.1 Опис рішення науково-дослідної задачі	54
3.1.2 Обчислення інтеграла, першої та другої похідної	54
3.1.3 Пошук коренів рівняння	55
3.1.4 Пошук екстремумів функції	56
3.1.5 Інтерполяція функції	59
3.1.6 Апроксимація функції	60
3.2 Завдання до виконання роботи	62
3.3 Зміст звіту	63
3.4 Контрольні питання	63

Самостійна робота №4. Автоматизація інженерних методик розрахунку параметрів складних об'єктів та систем

4.1 Теоретичні відомості	64
4.1.1 Методика розрахунку параметрів передачі пасами	70
4.2 Завдання до виконання роботи	70

4.3 Зміст звіту	70
4.4 Контрольні питання	70

Самостійна робота №5. Створення проекту за допомогою системного інтегратору MathConnex	71
5.1 Теоретичні відомості	71
5.1.1 Інтегратор додатків MathConnex	71
5.1.2. Опис інтерфейсу користувача системи MathConnex....	72
5.1.3. Підготовка документів у MathConnex	74
5.1.4. Редагування блоків і документів системи MathConnex	77
5.2 Завдання до виконання роботи	79
5.3 Зміст звіту	79
5.4 Контрольні питання	79
Рекомендована література	80
Додаток А – Програмування в середовищі MathCAD 2000 PRO	81
Додаток Б – Завдання на самостійну роботу №3	83
Додаток В – Завдання на самостійну роботу №4	86
Додаток Д – Параметри передачі пасів	87
Додаток Ж – Завдання на самостійну роботу №5	92

САМОСТІЙНА РОБОТА №1

Ознайомлення та виконання простих математичних операцій за допомогою програми Mathcad

Мета роботи: ознайомитися та навчитися проводити обчислення простих математичних операцій за допомогою пакета **Mathcad**.

1.1 Теоретичні відомості

1.1.1 Призначення та функціональні можливості пакету Mathcad

У теперішній час для науково-технічних розрахунків на комп'ютерах, все частіше використовують не традиційні мови програмування, а спеціальні математичні програми типу Mathematica, Mathcad, Gauss та інші.

Mathcad – найпопулярніший пакет, що дозволяє швидко освоїти роботу на комп'ютері та реалізувати математичні моделі.

Конкретні переваги роботи в середовищі математичної програми Mathcad наступні:

- математичні вирази в середовищі Mathcad записуються в їх загально-призначеній нотації, що полегшує користування;
- процес створення “програми” йде паралельно з її відлагодженням. Якщо користувач введе вираз в Mathcad, то він може не тільки обчислити, чому дорівнює цей вираз, а й побудувати графік або поверхню, швидкий перегляд яких допомагає виявити помилку. Проміжні фрагменти можна залишати в документі для його наочності;
- до пакету Mathcad є можливість інтегрувати потужний апарат, що дозволяє вирішувати проблеми без виклику зовнішніх процедур. Mathcad дозволяє здійснювати:
 - 1) рішення звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь (задача Коші);
 - 2) рішення диференціальних рівнянь в часткових похідних;
 - 3) статистичну обробку даних (інтерполяція, екстраполяція, апроксимація);

4) роботу з векторами та матрицями (лінійна алгебра, пошук $\min$ та $\max$ функціональних залежностей).

- пакет Mathcad доповнений довідником з основних математичних та фізико-математичних формул та констант, які можна переносити в документ;
- до пакету Mathcad можна придбати ті або інші посібники з різноманітних дисциплін;
- користувач може вводити не тільки числові значення змінних, але й доповнювати їх розмірностями;
- в Mathcad інтегровані засоби символічної математики, що дозволяє розв'язувати задачі аналітично;
- не виходячи з середовища Mathcad можливо відкривати нові документи на інших серверах (Internet);
- Mathcad поставляється з дуже корисним та потужним інструментом MathConnex, який дозволяє інтегрувати різні Windows-додатки та організовувати передачу даних між ними.

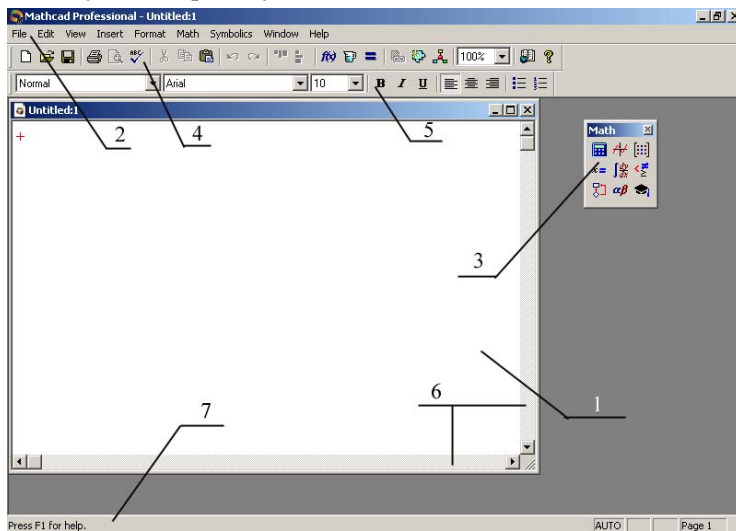


Рисунок 1.1 – Основні складові вікна MathCad

1.1.1.1 Обчислення простих математичних виразів

Щоб завантажити в оперативну пам'ять програму **Mathcad 2000 Professional** необхідно два рази натиснути лівою кнопкою “мишки” на

пiктограмi **Mathcad**. На екранi монiтора з'явиться вiкно **Mathcad 2000 Professional** (див. рис 1.1), яке мiстить вiкно робочого документа(1), основне меню(2), палiтри(3), панель iнструментiв(4), панель шрифтиv(5), вертикальну та горизонтальну лiнii прокрутки(6) i рядок повiдомлень(7).

В програмi **Mathcad** можна працювати з текстом. Користувач має можливість вводити текст в певнi областi та створювати цiлi параграфи. Щоб створити текстову область необхідно з меню **Insert** вибрати функцiю **Text Region** або послiдовним натисканням на кнопки **ALT+I+T**. В створеному прямокутнику набирати текст. Пiд час вводу тексту користувач має змогу змiнювати шрифт, його розмiр та iнше, використовуючи текстову панель.

Найчастiше, при наборi математичних формул, використовують стрiчку палiтр (див. рис. 1.2), яка розкривається пiсля натиснення її лiвою клавішею “мишi” (див. рис. 1.3,1.4). При необхідностi, користувач має змогу перетягнути необхідну палiтру в будь-яке мiсце основного меню, або його закрити.

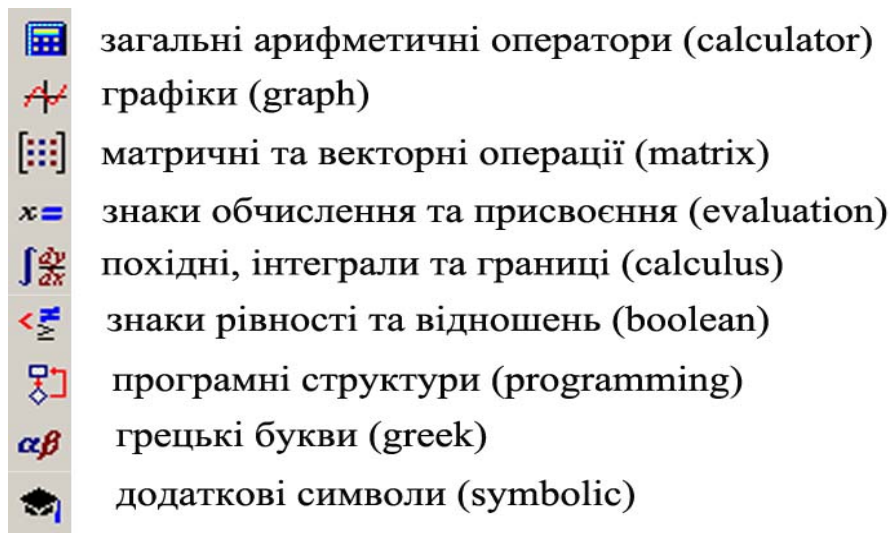


Рисунок 1.2 - Палiтри

Для набору математичної формули необхідно натиснути лiву клавішу “мишi” в заданому мiсцi робочого документа i там з'явиться

хрестик. Після цього, формула користувача буде розміщена з цієї позиції. Для прикладу, обчислимо простий вираз : **10-6/4.3+1.2*9**

В робочому полі Mathcad необхідно набрати **10-6/4.3+1.2*9=**, обчислення починається після того, як ви ставите знак рівності =, або після натискання **F9**. В результаті, після знаку = отримаємо число 19.405 та чорний квадрат, який призначений для введення розмірності порахованої величини (інколи розмірністю нехтують). В MathCad існує декілька видів знаків рівності:

:= - присвоювання;

= - дія;

= - логічна рівність.



Рисунок 1.3 – Розкриті вікна палітр

Програма **Mathcad** містить велику кількість стандартних функцій. Щоб вставити стандартну функцію у формулу необхідно натиснути кнопку з написом **"f(x)"** з панелі інструментів, або вибрати підменю **Function** з меню **Insert** і на екрані з'явиться меню стандартних функцій (див. рис. 1.4). Користувачу залишається

вибрати необхідну функцію і натиснути кнопку **Insert** (якщо вам необхідно додати ще якусь функцію), або **OK** (якщо функцій додавати більше не треба).

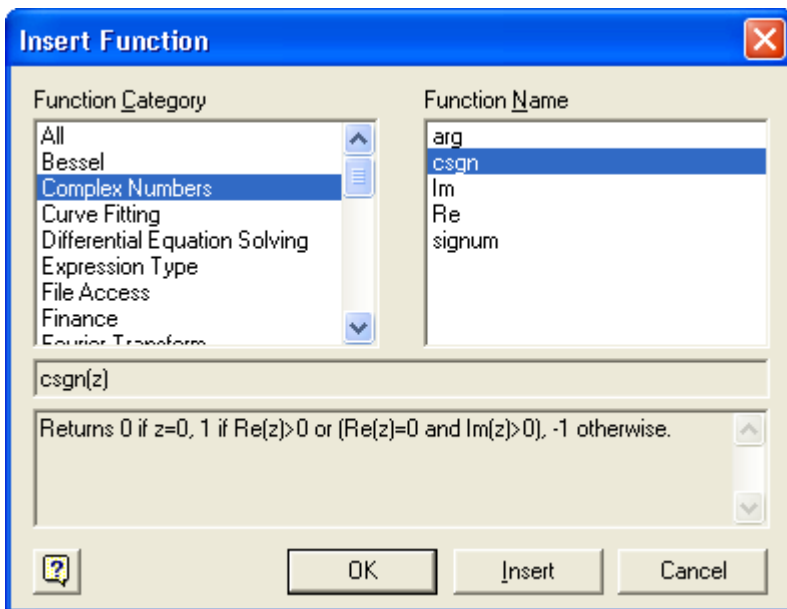


Рисунок 1.4 – Вибір функцій

При використанні стандартних функції слід пам'ятати, що всі кути виміряні в радіанах. Багатозначні функції і функції з комплексними аргументами завжди повертають основне значення.

Імена функцій не чутливі до шрифту, але чутливі до регістра - їх варто друкувати так, як вони наведені в меню.

У випадку, коли проводять одночасний розрахунок великої кількості формул вигідно використовувати змінні. Щоб визначити змінну S , необхідно ввести $S:=$ та початкове значення для S . Знак $:=$ друкується з допомогою клавіш **shift+:** і відповідає символу присвоєння. Перепишемо вище зазначений вираз, ввівши змінну S для першого доданка:

S:=10

S-6/4.3+1.2*9=19.405

Mathcad читає робочий документ зверху вниз і зліва направо, тому змінну **S** можна використовувати в формулах, які розміщені нижче та правіше місця її визначення.

Формулу чи вираз можна редагувати, вставивши в необхідне місце вказівник і надрукуювши там необхідні символи, цифри чи оператори. Більшість операторів та грецьких букв можуть бути надруковані за допомогою палітри символів (див. рис. 1.3).

Якщо необхідне повне або часткове знищення виразу, слід за допомогою клавіші **[↑]** виділити частину формули (штрихова лінія), яку потрібно видалити і натиснути **Cut** з меню **Edit** або **Del**.

Mathcad дозволяє проводити ітераційні обчислення. З цією метою введений спеціальний тип змінної - **дискретні аргументи**.

Змінна типу дискретний аргумент приймає діапазон цілих значень. Якщо у виразі присутній дискретний аргумент, то **Mathcad** вираховує вираз стільки разів, скільки значень містить дискретний аргумент.

Для того, щоб вирахувати вираз для діапазону значень, спершу необхідно визначити дискретний аргумент. Наприклад, розглянемо попередню задачу і змінну **S** визначимо як дискретний аргумент з діапазоном зміни від 1 до 10. Для цього поставимо курсор перед числом 10, надрукуємо: **1, 2** та ;

Після виконання даної задачі отримаємо одинадцять відповідей, які будуть оформлені у вигляді таблиці (див. рис. 1.5).

Ще більшу гнучкість обчислень мають функції. Знову розглянемо попередній приклад, але перед цим знищимо таблицю, виділяючи її за допомогою клавіші **[↑]** та натиснувши комбінацію клавіші **Ctrl x (Cut)**. Розпочнемо визначення функції з набору виразу **f(s):=**, а потім надрукуємо **S-6/4.3+1.2*9** (див. рис. 1.6).

В даному випадку назва функції - **f**, а її аргумент - **s**. Обчислення значення функції для конкретного значення аргумента проводиться за допомогою набору **f(12)=**, а коли необхідно порахувати для всього діапазону значень, то - **f(s)=**, в результаті отримаємо попередню таблицю значень.

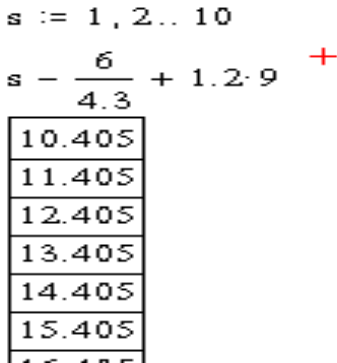
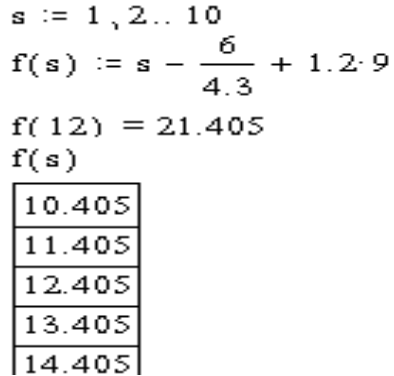


Рисунок 1.5 – Обчислення діапазону значень

Рисунок 1.6 – Обчислення функції $f(s)$

1.1.1.2 Побудування графіків

Програма Mathcad дозволяє будувати двовимірні графіки в декартових та полярних координатах. Розглянемо приклад створення простого двовимірного графіка. Для цього, необхідно надрукувати вираз, який визначає двовимірний графік розподілу шуканої функції і натиснути піктограму з графічної палітри (та на якій написано Graph на рис. 1.3). В результаті, отримаємо пустий двовимірний графік та темний квадрат під ним, у який необхідно вдрукувати ім'я шуканої функції. При подвійному натисненні на графіку з'явиться вікно параметрів: логарифмічний масштаб, лінії сітки, нумерація, автомасштаб, нанесені риски, автосітка (див. рис. 1.7).

Закладка "Підпис" (**Labels**) призначена для підпису графіка (див. рис. 1.8). У вікні **Title** надрукуйте підпис графіка. Потім визначіть, де розмістити підпис - зверху чи знизу. На завершення необхідно переконатися, що квадрат "Показати заголовок" (**Show Title**) відмічений і натисніть **"OK"**.

Щоб побудувати графік функції для прикладу з підрозділу 1.2 необхідно натиснути першу піктограму з графічної палітри (декартов графік). На екрані з'явиться пустий графік.



Рисунок 1.7 – Вікно параметрів графіка

Потім слід в середній мітці внизу набрати змінну S , а на її краях діапазон. Зліва-1, а справа-10.

Три вертикальні позиції призначені для вводу функції та її граничних значень. Перша знизу - призначена для найменшого значення функції. Друга знизу - для назви функції, і остання - для найбільшого значення функції $f(s)$. Коли введемо всі ці значення і натиснемо **Enter** або лівою клавішею миші у будь якому місці зовні графіку, то отримаємо графік $f(s)$, який зображено на рисунку 1.9.

При роботі з графіками часто виникає необхідність змінити розмір графіка або перемістити його в інше місце робочого документа (слід зауважити, що розмістити графік вище визначення функції неможливо). Отже, для зміни розміру графіка необхідно встановити курсор миші на чорний квадратик на боці або куті графіка та, натиснувши ліву кнопку миші, розтягнути графік до необхідного розміру.

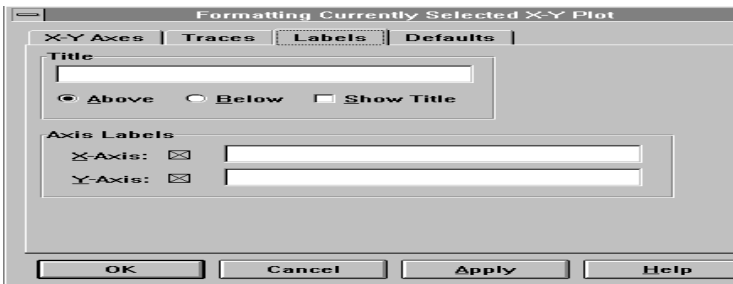


Рисунок 1.8 - Закладка "Підпис"

Графік (див. рис. 1.9) має властивості, які встановлені по замовчанню, до них належать: ділення по осям, відсутність ліній сітки і суцільна лінія графіка. Їх можна змінити, форматуючи графік.

Розглянемо приклад, який ілюструє форматування графіка:

- двічі натисніть на графіку, щоб викликати відповідне діалогове вікно. Це вікно дозволяє встановити всі доступні характеристики графіка (див. рис. 1.10);

- натисніть по закладці “Графіки” (**Traces**) в діалоговому вікні, щоб отримати доступ до сторінки вибору характеристик кривих;

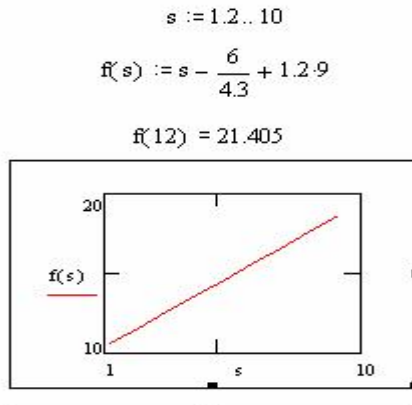


Рисунок 1.9 – Графік функції $f(x)$

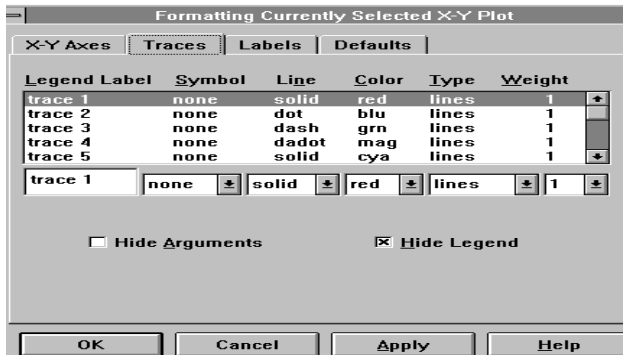


Рисунок 1.10 – Вікно вибору характеристик кривих

- натисніть на рядку “крива 1” (**trace 1**) в списку, щоб Mathcad перемістив установки для кривої 1 в рамки під відповідні стовбці даного списку;

- натисніть на стрілці під стовпчиком “Тип” (Type), щоб увійти до списку типів кривих. Користувач може вибрати такі типи графіків: у формі кривої, стовпчикової діаграми, східчастої кривої та крапок;

- змінити товщину кривої можна за допомогою рядка під назвою “Товщина” (Weight). Користувач має змогу вибрати значення від 1 до 9 (від найтоншого до найтовстішого);

- маєте змогу вибрати колір кривої у стовбці під назвою Color;

- стовпчик, який називається “Лінія” (Line) дозволяє вибрати суцільну лінію, пунктирну, штрихову та штрихпунктирну;

- натисніть кнопку “OK”, щоб побачити результат зміни характеристик.

- закладка “X-Y Осі” (X-Y Axes) дозволяє встановити параметри осей по X та Y. Наприклад, нанести лінії сітки шляхом встановлення прапорців біля **Grid Line**.

Щоб створити графік поверхні (див. рис. 1.11) треба натиснути другу піктограму в другому рядку вікна Graph (див. рис. 1.3). Для побудовання полярного графіка використовується перша піктограма у другому рядку вікна Graph (див. рис. 1.3). Для побудови графіка **ліній рівня** (див. рис. 1.12) або у **формі гістограм** (див. рис. 1.13) необхідно натиснути відповідні піктограми, а якщо необхідно побудувати **графік за допомогою крапок, хрестиків, стрілок** (див. рис. 1.14), то використовують дві останні піктограми (див. рис. 1.3).

Таким чином, щоб редагувати двовимірний графік необхідно два рази клікнути по ньому лівою кнопкою “миші”. На екрані з’явиться меню, в якому ви зможете змінити колір лінії, її товщину, кут повороту, кут нахилу рисунка, вигляд лінії та інше.

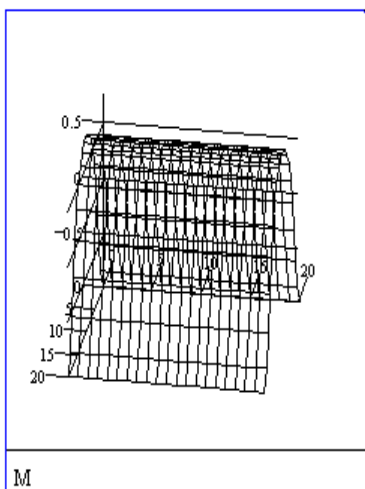


Рисунок 1.11 - Графік поверхні

$N := 20$ $i := 0..N$ $j := 0..N$
 $y_i := -1.5 + .15 \cdot j$ $x_i := -1.5 + .15 \cdot i$
 $f(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$ $M_{i,j} := f(x_i, y_j)$

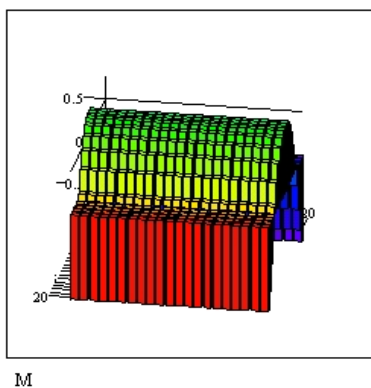


Рисунок 1.13 - Графік у формі гістограм

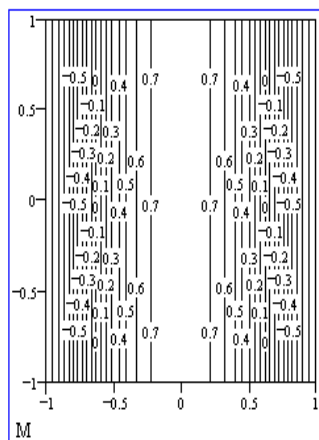


Рисунок 1.12 – Графік ліній рівня

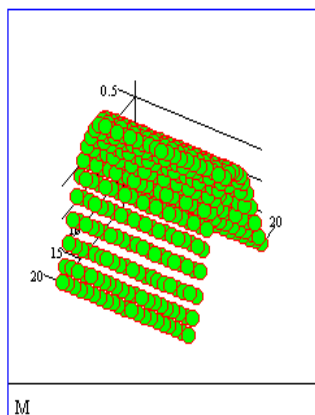


Рисунок 1.14 – Крапковий графік

1.1.1.3 Обчислення складних функцій та форматування вихідних результатів

Наведемо приклади обчислення дещо складніших математичних виразів: поліномів, сум, інтегралів та похідних.

Друкують математичні символи суми, похідної, інтегралу та інші, використовуючи палітру інтегралів, похідних та границь (див. рис. 1.2). В результаті, на екрані з'явиться відповідний математичний символ і користувачу залишається ввести конкретні значення у визначені місця (чорні квадрати). Після цього, необхідно надрукувати знак = та на екран з'явиться результат (див. рис. 1.15, 1.16).

Mathcad дозволяє формувати вихідний результат, тобто змінювати число знаків після коми, змінювати експоненційний вид подання вихідних чисел на звичайний запис з десятковою крапкою та інше (меню керування наведене на рис. 1.17).

$$i := 0..50 \quad x_i := \sin(0.1 \cdot i \cdot \pi)$$

$$\sum_{m=0}^{50} x_m \cdot m = 157.844$$

+

$$\prod_{m=1}^{10} m = 3.629 \cdot 10^6$$

$$x := 4 \quad y(x) := 5 \cdot x^2$$

$$\frac{d}{dx} y(x) = 40$$

$$\int_0^5 y(x) dx = 208.333$$

Рисунок 1.15 – Приклад розрахунку суми та добутку

Рисунок 1.16 – Приклад розрахунку похідної та інтегралу

Викликати відповідне меню можна шляхом подвійного натиснення лівою кнопкою на таблиці вихідних результатів.

В першому вікні встановлюється система числення: десяткова (**Decimal**), загальна (**General**), наукова (**Scientific**), інженерна (**Engineering**).

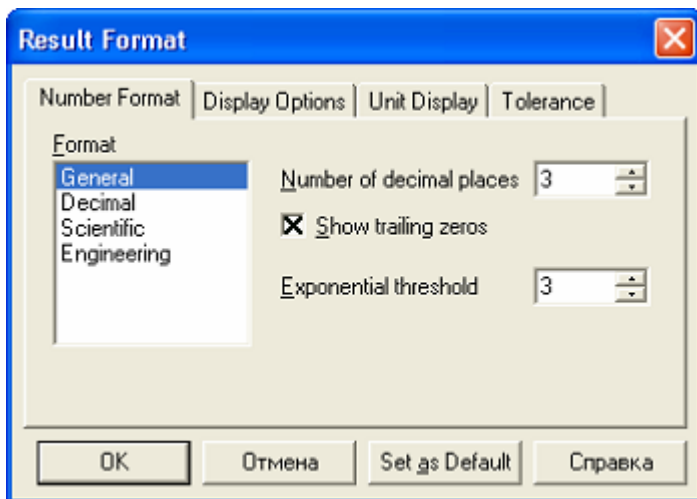


Рисунок 1.17 – Вікно форматування вихідного результату

Точність результатів (Number of decimal place). Цей параметр вказує програмі скільки десяткових розрядів виводити при обчисленні результату. Значення по замовчанню - 3. Діапазон зміни параметра від 0 до 15.

Діапазон показника (Exponential Threshold). Цей параметр дозволяє виводити вихідні результати, коли вони більші ніж 10^n або менші ніж 10^{-n} в науковому форматі.

Комплексна точність (Complex Tolerance). Вона знаходиться у закладці Tolerance. Цей параметр визначає відношення між реальною та уявною частинами комплексного числа і якщо воно менше ніж 10^{-n} або більше ніж 10^n , то його менша частина не виводиться.

Точність нуля (Zero Tolerance). Якщо число менше ніж 10^{-n} , то виводиться нуль. Встановлене значення по замовчанню 15. **Mathcad** змінює лише значення, які виводяться на екран. Ніяких змін у внутрішньому поданні значень при цьому не робиться.

Вивести як матрицю (Matrix Display Style). Знаходиться у закладці Display Options. Відмічаємо цей квадратик, коли необхідно, щоб була відмінена прокрутка таблиць виводу.

1.2 Завдання до виконання роботи

1.2.1 Отримати у викладача індивідуальне завдання (варіанти наведені у додатку А).

1.2.2 За допомогою програми Mathcad провести розрахунок заданих функцій: обчислити значення функції $f(x)$ та $g(x,y)$ для усіх значень x,y ; побудувати для $f(x)$ декартов графік, для $g(x,y)$ – графік поверхні та карту ліній рівня, для функції $\theta(\phi)$ побудувати полярний графік.

1.2.3 Вивести отримані результати на друк.

1.3 Зміст звіту

1.3.1 Мета заняття.

1.3.2 Теоретичні відомості у конспективній формі.

1.3.3 Індивідуальне завдання.

1.3.4 Результати розрахунку.

1.3.5 Висновки.

1.4 Контрольні питання

1.4.1. Які меню містить програма Mathcad?

1.4.2. Які дії необхідно виконати, щоб порахувати вихідні значення по простій математичній формулі?

1.4.3. Як побудувати таблицю для вихідних результатів ?

1.4.4. Як побудувати простий графік функції?

1.4.5. Як будуються формули, у яких присутні знаки похідних, інтегралів, сум та границь?

1.4.6. Які операції слід провести, щоб побудувати тривимірний графік розподілу функції?

1.4.7. Які операції слід провести, щоб вставити текст у програму?

1.4.8. Які засоби редагування вихідних результатів та графіків є в програмі Mathcad?

1.4.9. Які дії слід провести, щоб вставити стандартну функцію в розрахункову формулу ?

САМОСТІЙНА РОБОТА №2

Розв'язок крайових задач за допомогою програми Mathcad

Мета роботи: отримати навички використання програми **Mathcad** для розв'язування крайових задач.

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Розв'язок звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Будь-який фізичний процес, де розглядається степінь зміни однієї змінної по відношенню до іншої, описується диференціальними рівняннями. У найпростішому випадку розглядається диференціальне рівняння першого порядку - це рівняння, яке не містить похідних вище першого порядку від незалежної змінної.

$$y' = -y^2 + x$$

$$y_0 := 1$$

$$D(x, y) := -(y_0)^2 + x$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 10, 60, D)$$

$$x := 0..60$$

Диференціальне рівняння

Початкова умова

Функція, що задає похідну

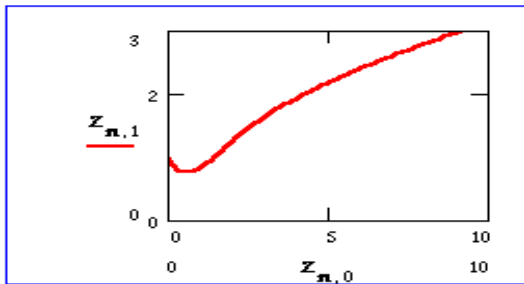


Рисунок 2.1 - Розв'язок звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку в програмі **MathCad** використовують функцію **rkfixed**. В результаті розв'язку отримують матрицю, яка містить два вузли, в

яких шукається розв'язок диференційного рівняння та значення отриманого розв'язку у відповідних точках або графік розв'язку.

Функція **rkfixed** має наступні аргументи: **rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)**,

де **y** - вектор початкових умов розмірності **n**, де **n** - порядок диференційного рівняння або кількість рівнянь у системі (якщо розв'язується система рівнянь). Для диференційного рівняння першого порядку, так, наприклад, для рівняння, наведеного на рис. 2.1, вектор початкових значень вироджується в одну точку $y_0 = y(x_1)$.

x1, x2 - краєві вузли інтервалу, на якому шукають розв'язок диференційних рівнянь. Початкові умови, які задані в векторі **y** - це значення розв'язку в точці **x1**.

npoints - кількість точок (не рахуючи початкової точки), у яких шукають наближений розв'язок. За допомогою цього аргумента визначають кількість точок $(1 + npoints)$ у матриці, яка буде поверненою функцією **rkfixed**.

D - функція, яка повертає значення **y** у вигляді вектора з **n** елементів, що містять перші похідні невідомих функцій. Найбільш складним у розв'язку диференційного рівняння є визначення функції **D(x, y)**.

Для прикладу, розглянемо розв'язок звичайного диференційного рівняння (3ДР) $y' = -y^2 + x$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0, 10]$ (див. рис. 2.1).

2.1.2 Розв'язок звичайних диференційних рівнянь другого порядку

Основні відмінності розв'язку диференційного рівняння другого порядку від першого є наступні:

- вектор початкових умов **y** тепер складається з двох елементів: значень функції і її першої похідної в початковій точці інтервалу **x1**.
- функція **D(t, y)** є тепер вектором двох елементів:

$$D(t, y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

- матриця, яку отримують в результаті розв'язку, містить тепер три стовбці: перший містить значення t , у яких йде пошук розв'язку; другий стовбець містить $y(t)$; а третій - $y'(t)$.

Приклад, наведений на рис. 2.2 показує, як розв'язують наступне диференційне рівняння другого порядку:

$$y'' = -y' + 2y$$

$$y(0)=1 \quad y'(0)=3$$

$$y'' = -y' + 2y$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 3$$

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + 2y_0 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, .5, 300, D) \quad i := 0..300$$

	0	1	2
0	0	1	3
1	0.002	1.005	2.998
2	0.003	1.01	2.997
3	0.005	1.015	2.995
4	0.007	1.02	2.993
5	0.008	1.025	2.992
6	0.01	1.03	2.99
7	0.012	1.035	2.989
8	0.013	1.04	2.987

$Z =$

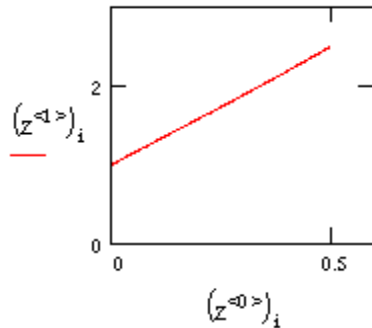


Рисунок 2.2 – Розв'язок звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

2.1.3 Розв'язок звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків

Основні відмінності розв'язку диференційного рівняння вищого порядку від рівняння другого є наступні:

- вектор початкових значень y тепер складається із n елементів, які визначають початкові умови для шуканої функції і її похідних $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

- функція D є тепер вектором, який містить n елементів:

$$D(t, y) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

- матриця, яку отримують в результаті розв'язку, містить тепер n стовбців: перший - для значень t , усі інші стовбці - для значень $y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$.

Приклад, наведений на рис. 2.3, показує як розв'язують наступне диференціальне рівняння четвертого порядку:

$$y'''' - 4k^2 y'' + k^4 y = 0 \text{ з початковими умовами:}$$

$$y(0)=0 \quad y'(0)=2 \quad y''(0)=4 \quad y'''(0)=8.$$

$$y'''' - 4 \cdot k^2 \cdot y'' + k^4 \cdot y = 0 \quad k := 10$$

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad D(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 4 \cdot k^2 \cdot y_2 - k^4 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

	0	1	2	3
0	0	0	2	4
1	0.1	0.228	2.637	12.5
2	0.2	0.591	5.268	51.663
3	0.3	1.575	18.147	275.903
4	0.4	5.996	94.065	1.698 · 10 ³
5	0.5	31.84	577.881	1.097 · 10 ⁴
6	0.6	196.561	3.734 · 10 ³	7.181 · 10 ⁴

Рисунок 2.3 - Розв'язок звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків

2.1.4 Розв'язок диференціальних рівнянь в часткових похідних

В програмі Mathcad є засоби для розв'язку нестационарних задач. Для прикладу, розглянемо задачу дифузії з тонкої пластини. Процес перерозподілу домішки описується одновимірним нестационарним рівнянням Фіка:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x^2}$$

з початковими умовами:

$$C(0,t) = C(L_x,t) = 0$$

та краєвими умовами:

$$C(x,0) = 0,$$

$$C(L_x/2,0) = 1.$$

Розв'язок цієї задачі базується на використанні різницьових методів. Результати моделювання дифузійної задачі зображено на рис. 2.4.

```
t := 0..9      x := 1..29      α := .415
f0,x := 0      f0,0 := 0      f0,50 := 0      f0,10 := 1
ft+1,x := ft,x + α · (ft+1,x+1 + ft,x-1 - 2 · ft,x)
```

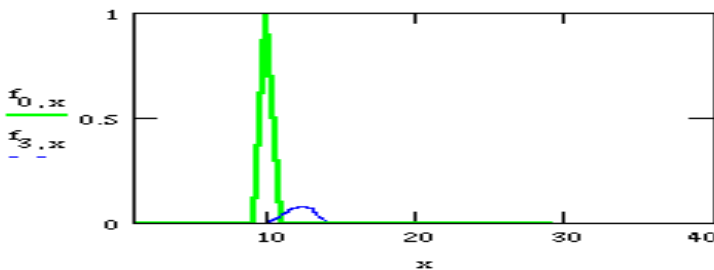


Рисунок 2.4 - Розв'язок дифузійної задачі

Mathcad містить дві функції для розв'язку рівнянь Лапласа та Пуассона в квадратній області. Функція **relax** використовується в тому випадку, коли відомі значення шуканої функції на границях області, а якщо функція $U(x,y)$ дорівнює нулю на границях області моделювання, то використовується функція **multigrid**.

Функція **relax** використовує метод релаксації для знаходження наближеного розв'язку. При цьому, рівняння Пуассона в квадратній області записується у формі:

$$a_{j,k}u_{j+1,k} + b_{j,k}u_{j-1,k} + c_{j,k}u_{j,k+1} + d_{j,k}u_{j,k-1} + e_{j,k}u_{j,k} = f_{j,k}$$

Аргументи функції relax наступні: **relax(a, b, c, d, e, f, u, rjac)**, де a, b, c, d, e - квадратні матриці однакового розміру, які містять коефіцієнти вищезгаданого рівняння;

f - квадратна матриця, яка містить значення правої частини рівняння в кожному вузлі області моделювання;

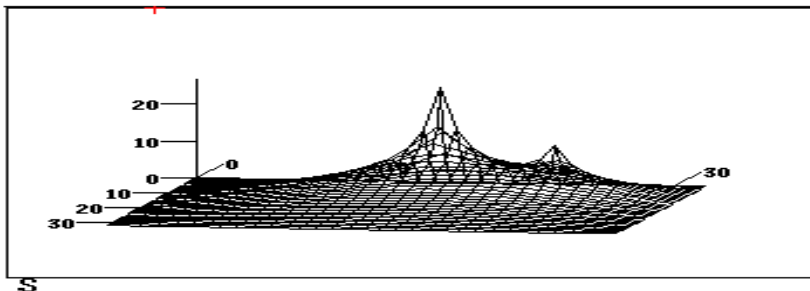
u - квадратна матриця, що містить краєві значення розв'язку на границі області та початкове наближення для розв'язку в середині області;

rjac - спектральний радіус ітерацій Якобі (це число між 0 та 1, яке керує сходимістю алгоритму релаксації).

Наведемо приклад використання функції relax для розв'язку

```
R := 32      MR,R := 17      MR,R := 45
MR,R := 0    4·3·4          1·2

j := 0..32    k := 0..32    aj,k := 1
c := a        b := a        d := a
e := -4·a      vj,k := 0      f := -M
S := relax(a, b, c, d, e, f, v, .95)
```



S

Ри

сунок 2.5 - Розв'язок рівняння Пуассона в квадратній області

рівняння Пуассона в квадратній області (див. рис. 2.5).

Для прикладу, розв'яжемо наступну задачу. Перерозподіл температури в квадратній області описується рівнянням Лапласа:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

на границях області температура дорівнює нулю $T(x,y) = 0$, якщо $x,y \in \Gamma$, а в точці $T(Lx/4, 3Ly/4) = 5^\circ\text{C}$.

Алгоритм розв'язку наступний:

- покриємо область моделювання сіткою 8×8 вузлів ($R=8$);
- початкові значення у вузлах приймемо рівними нулю ($M_{R,R}=0$);
- задаємо значення температури у вузлі з координатою

$Lx/4, 3Ly/4$ ($M_{R/4, 3R/4}=5$);

- використаємо функцію **multigrid(M,2)** (2 - число циклів на кожному рівні ітерації multigrid);

- будуємо двовимірний графік розподілу температури (див. рис. 2.6).

```
R := 8      MR,R := 0      M $\frac{R}{4}, \frac{3 \cdot R}{4}$  := 5
S := multigrid(M, 2)
```

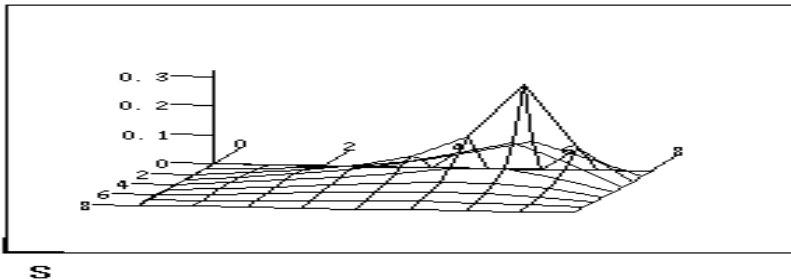


Рисунок 2.6 - Розв'язок рівняння Лапласа

2.1.5 Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

Методика розв'язку подібна на методику розв'язку диференційного рівняння порядку вищого за другий, можна вважати

розв'язок системи диференціальних рівнянь як частковий випадок розв'язку ЗДР.

Для розв'язку системи ЗДР першого порядку, необхідно:

- визначити вектор, який містить початкові значення для кожної невідомої функції;
- визначити функцію, яка повертає значення у вигляді вектора із n елементів, які містять перші похідні кожної з невідомих функцій;
- вибрати точки, в яких потрібно знайти наближений розв'язок;- передати всю цю інформацію в функцію rkfixed.

Функція rkfixed поверне матрицю, перший стовпчик якої містить точки, в яких шукається наближене значення, а в інших стовбцях містяться значення знайдених наближених розв'язків у відповідних точках. На рис. 2.7 наведено приклад розв'язку системи диференціальних рівнянь першого порядку.

$$\begin{aligned} u' &= 5 \cdot v \\ v' &= 5 \cdot v^2 - 2 \cdot u \end{aligned}$$

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D(t, y) := \begin{bmatrix} 5 \cdot y_0 \\ 5 \cdot (y_0)^2 - 2 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

```
Z := rkfixed(y, 0, 1, 100, D)
```

	0	1	2
0	0	3	1
1	0.01	3.154	1.449
2	0.02	3.316	1.938
3	0.03	3.486	2.472
4	0.04	3.664	3.056
5	0.05	3.852	3.694
6	0.06	4.05	4.394
7	0.07	4.257	5.161

$Z =$

Рисунок 2.7 - Розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

2.1.6 Системи звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків

Методика розв'язку системи диференціальних рівнянь, кожне з яких може містити похідні від невідомих функцій вище першого порядку, та ж, що описана вище.

Будь-яке рівняння виду $x^{(n)} = f(t, x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x, \dots)$ через заміну

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = x'(t)$$

...

$$x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

може бути приведенне до сукупності рівнянь

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_3(t)$$

...

$$x_n'(t) = f(t, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, \dots)$$

В наведених вище рівняннях не зустрічаються похідні вище першого порядку. Перетворивши подібним чином кожне із рівнянь, які входять в шукану систему, отримаємо систему з більшою кількістю невідомих функцій, але з похідними тільки першого порядку. Методика розв'язку таких систем описана в попередньому підрозділі.

Розглянемо приклад розв'язку системи диференціальних рівнянь другого порядку:

$$U''(X) = 5V(X);$$

$$V''(X) = 5V(X)^2 - 2U(X).$$

з початковими умовами:

$$U(0) = 2; \quad U'(0) = 0.5;$$

$$V(0) = 2; \quad V'(0) = 0.5$$

Для розв'язку наведеної системи диференціальних рівнянь необхідно визначити вектор початкових умов, який в нашому випадку буде мати наступну форму:

$$y := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ .5 \\ .5 \end{pmatrix},$$

де перший елемент цього стовбця є $-U(0)$, другий - $U'(0)$, третій - $V(0)$ і четвертий - $V'(0)$.

Вектор перших та других похідних виражається наступним чином:

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ 5y_2 \\ y_3 \\ 5(y_2)^2 - 2y_0 \end{pmatrix},$$

де першу похідну від U запишемо як y_1 та другу - $5y_2$, а першу похідну від V запишемо як y_3 та другу - $5(y_2)^2 - 2y_0$.

Після цього використаємо функцію **rkfixed**, де діапазон розв'язку задамо від 0 до 1, а кількість вузлів 100 (див. рис. 1.8).

В результаті, отримаємо матрицю в якій перший стовбець є - координата X , другий - $U(x)$, третій - $U'(x)$, четвертий - $V(x)$ і п'ятий - $V'(x)$.

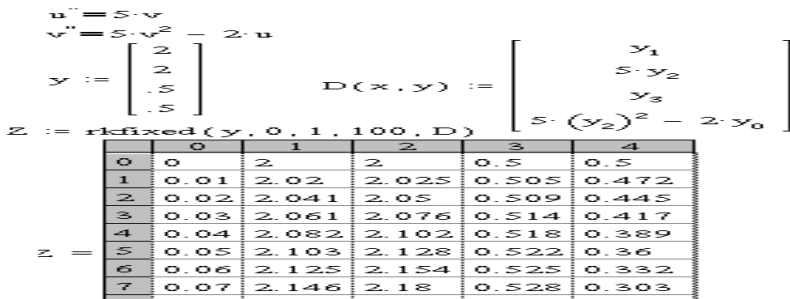


Рисунок 1.8 - Розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

2.2 Завдання до виконання роботи

2.2.1 Отримати у викладача індивідуальне завдання.

2.2.2 За допомогою програми Mathcad виконати розв'язок запропонованих задач (варіанти наведені у додатку Б).

2.2.3 Вивести отримані результати на друк.

2.3 Зміст звіту

2.3.1 Мета роботи

2.3.2 Теоретичні відомості у конспективній формі.

2.3.3 Індивідуальне завдання.

2.3.4 Результати розрахунку.

2.3.5 Висновки.

2.4 Контрольні питання

2.4.1 Які функції використовуються для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь у програмі MATHCAD ?

2.4.2 Які функції використовуються для розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь?

2.4.3 Які функції використовуються для розв'язку рівняння Лапласа?

2.4.4 Які функції використовуються для розв'язку рівняння Пуассона?

2.4.5 Особливості розв'язку дифузійної задачі.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. Учебник для студентов ВУЗов.- М.: МГТУ им. Баумана, 2002.-336 с.
2. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование. С примерами приложений на C++./Пер. с англ.- М.: Бинوم, СПб: Невский диалект, 2000.-560с.
3. Колодницький М.М. Елементи теорії САПР складних систем. Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 1999.- 512 с.
4. Болдин А.Н., Задиранов А.Н. Основы автоматизированного проектирования. Учебное пособие.- М.: МГИУ, 2006.-104 с.
5. Дьяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс.- СПб.: Питер, 2001.- 624с.
6. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 2001.- СПб.: БХВ-Питер, 2002.-544 с.
7. Тимченко А.А. Основи системного проектування та системного аналізу складних об'єктів: Основи САПР та системного проектування складних об'єктів: Підручник/ За ред. В.І. Бикова.- К.: Либідь, 2003.- 272с.

Додаток А

Завдання на самостійну роботу №1

Варіант № 1

$$N := 40 \quad x := 1..N \quad y := 1..2 \cdot N \quad \phi := 0,0001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \cos(x) \cdot \sqrt[7]{x^8 + \sin(x) + 4.5 \cdot e^{-2 \cdot x}} *$$

$$g(x, y) := \sqrt[3]{\frac{\left(\log(2.8 \cdot x) + 7.5 \cdot \frac{y^2}{2}\right)}{\frac{\pi \cdot e^y}{3}}} + \sqrt[3]{\tan\left(3 \cdot \frac{\pi}{8}\right) + 2.8 \cdot x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^3 \cdot e^2}}{8} + 8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot x}\right)$$

$$\theta(\phi) := 8 \cdot \pi \cdot \cos(2 \cdot \phi)$$

Варіант № 2

$$N := 20 \quad x := 0,0.1.. \pi \quad y := 1..N \quad \phi := 0,0001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \sqrt{\cos\left(3 \cdot \frac{\pi \cdot x}{2}\right) + \frac{1 + \sqrt{2 \cdot x}}{\sqrt[3]{x}}} + \tan(8 \cdot \pi \cdot x) + \frac{\sin(x) \cdot \cos(2 \cdot x)}{\tan\left(3 \cdot \frac{x}{2}\right)} \cdot \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}} *$$

$$g(x, y) := \ln(34 \cdot y^2 \cdot \sin(x) + 2 \cdot y + 5) + \sqrt[4]{y^2 + 2.3 \cdot \frac{\cos(3 \cdot \pi)}{2}} + e^{2 \cdot \sin\left(y \cdot \frac{x}{8 \cdot \pi}\right)} - \cos(x)^3 \cdot y^2 + \frac{\sqrt[4]{y} \cdot \sqrt{32 \cdot \tan\left(\frac{x}{8}\right)}}{4 \cdot \pi} + 2.5$$

$$\theta(\phi) := 1 + \sin(2 \cdot \phi)$$

Варіант № 3

$$x := 0..10 \quad y := 0..8 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \sqrt{\left| \frac{x-9}{x+3 \cdot \sqrt{x+9}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3+27}} \right)^{-1} \right|} - \sqrt{x}$$

$$g(x, y) := \left(x^4 \cdot y^2 - 3.8 \cdot x^2 \cdot \sqrt{y} + 8 \cdot y \cdot \sqrt{x} \right)^{x+y} - \frac{\sqrt{|\cos(x+y)|} \cdot \sqrt{|\sin(x-y)|}}{(\tan(x^2 + y^2))^3}$$

$$\theta(\phi) := 1 + 2 \cdot \cos(\phi)$$

Варіант № 4

$$x := 1..5 \quad y := 1..15 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \log(x^2 + 2 \cdot x + 2) - \left| \sqrt[3]{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{3}\right) + 2 \cdot x} - 3 \right| + \ln(x) + 2$$

$$g(x, y) := \frac{0.4x^3 + y^2}{\sin(x) + \cos(x) + 5} + \sqrt{|\tan(y) + \sin(x^2 + 3 \cdot x - 4)|} - 98 \cdot \cos(x + y)$$

$$\theta(\phi) := \sin(10 \cdot \phi)$$

Варіант № 5

$$x := 0..6 \quad y := 1..8 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := x^5 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot x + 8 \cdot \cos(x)$$

$$g(x, y) := \sqrt[3]{x^2 \cdot y - y^3 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y - 1} + \frac{x^3 - 32 \cdot y \cdot x + y^2 \cdot \sqrt{2 \cdot x}}{\sin(x \cdot y)}$$

$$\theta(\phi) := \frac{\phi}{5}$$

Варіант № 6

$$x := 0, 0.001.. \pi \quad y := 1, 1.2.. 3 \quad \phi := 0, 0.001.. 2\pi$$

$$f(x) := \cos\left(\frac{x}{3}\right) \sin\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{\sqrt{|\tan(x) + x^2|}}{\sin(x) + 2}$$

$$g(x, y) := y^3 \sin\left(x^2 + 4x - \frac{\pi}{2}\right) - 8x \cdot y^2 \cos(x) \sin(y) + 4 \tan\left(5 \frac{x}{2}\right) + 5$$

$$\theta(\phi) := 1 + 2 \cos(2\phi)$$

Варіант № 7

$$x := 0, 0.01.. 1.2 \quad y := 0, 0.1.. 18 \quad \phi := 0.001.. 2\pi$$

$$f(x) := 2^{(x^2+0.2)^3 - 0.3x+0.4} + 3^{(x+0.3)^2-0.9x} - 2x$$

$$g(x, y) := x^4 (5y + \cos(x \cdot y^2) - 23)^2 - 32\pi \frac{\tan(x+y)}{x+y} + \sqrt{x^3 + 3\sqrt{y}}$$

$$\theta(\phi) := \sec(\phi) + \tan(\phi)$$

Варіант № 8

$$x := 1.. 20 \quad y := 1.. 10 \quad \phi := 0, 0.001.. 2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \log \left(\left| x^2 - x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x \cdot \frac{\pi}{8}\right) - \frac{2^x}{3^x} \right| \right) + 3.2 \cdot x \cdot \sqrt{x}$$

$$g(x, y) := (x + 2 \cdot y + \sin(x \cdot y))^2 - 4.6 \cdot x \cdot y - \sin(2 \cdot x - y) \cdot \frac{\cos(x+y)}{3 \cdot x^2 + 1}$$

$$\theta(\phi) := \sec(\phi) + 1$$

Варіант № 9

$$x := -10..15 \quad y := 1..30 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \log(|x^2 + 10|) + 2 \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{x}{2 + 4 \cdot x}\right)}{(x - 2)^2 + 6}$$

$$g(x, y) := \log(|x^2 - y^2 + x \cdot y|) - 3.6 \cdot x \cdot \frac{y^2}{\pi} \cdot \sin(x + y) + \tan(y - x)^2$$

$$\theta(\phi) := \sin(10 \cdot \phi)$$

Варіант № 10

$$x := 0, 0.5..10 \quad y := 3, 3.5..10 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \cos(x) \cdot \sin(x) + \sqrt[3]{(5 \cdot x)^2} - \log(|x + 3|) \cdot \tan(\sqrt{x})$$

$$g(x, y) := x^{\sqrt[3]{y}} + \cos(x + 2 \cdot y)^4 - \frac{(x^2 - 8 \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot \sqrt{y} - 8)^2}{(x + y + \sqrt{x + y^2})^3}$$

$$\theta(\phi) := \sqrt{|\cos(2 \cdot \phi)|}$$

Варіант № 11

$$x := 0..14 \quad y := 1..10 \quad \phi := 0, 0.001..2 \cdot \pi$$

$$f(x) := \sqrt[3]{3 \cdot x + \frac{4}{x + 1}} + \frac{\sqrt[5]{\sqrt{x^2 + \sin(x)} + 5}}{\sqrt{\cos(x)^2 + 28}} + 3 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot \frac{\tan(x)^2}{e^x} + 1$$

$$g(x, y) := \frac{\log(3 \cdot x \cdot y + 24)}{\sqrt{31 \cdot y - x}} + \sqrt{\frac{(x + y^2 \cdot x + 2)^3}{2 + 34 \cdot \sin(x - y)^2}} + x \cdot \sqrt{y}$$

$$\theta(\phi) := (\cos(\phi))^3$$

Варіант № 12

$$x := -7, -6.5 \dots 7 \quad y := 0, 0.01 \dots \pi \quad \phi := 0, 0.001 \dots 2 \cdot \pi$$

$$f(x) := x \cdot \cos(x - 2) + x \cdot e^{\frac{x}{x-10}} - x^2 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{x+8}\right)$$

$$g(x, y) := \frac{x^3}{(\cos(y)^4) + 7 \cdot x^2 \cdot \sin(y)^3 + 21} + \sqrt[3]{\frac{x+2}{\tan(y \cdot x) + 4}} + \log(x \cdot \sin(y) + 144) + 3$$

$$\theta(\phi) := (\sin(\phi))^3$$

Варіант № 13

$$x := 0 \dots 8 \quad y := 1 \dots 14 \quad \phi := 0, 0.001 \dots 2 \cdot \pi$$

$$f(x) := x \cdot \cos\left(\pi \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) - 3 \cdot x + \sin(x) \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$g(x, y) := \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{y^2 + 1}}}{x^2 + y^2 + 3 \cdot x \cdot y \cdot \sqrt{x \cdot y^3 + 5}} + \log\left(\left| x - y \right| + e^{x+y}\right) + 3 \cdot \frac{x+1}{y+1}$$

$$\theta(\phi) := 3 \cdot \cos(\phi) - \cos(3 \cdot \phi)$$

Вариант № 14

$$N := 40 \quad x := 1..N \quad y := 1..N \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi$$

$$F(x) = \frac{x^2 - 7x + 3}{(x-1)^2} + \sqrt[3]{4x} - \frac{5}{\sqrt{x}} - \ln 5 + \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$G(x,y) = 3y^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{y-x}} + x^4 (y - 2x^3)^2$$

$$\theta(\varphi) = \sqrt{\varphi} (e^{-1}) \ln \varphi - \frac{1}{10} e^{-\varphi} (-\operatorname{tg} 3\varphi - \operatorname{ctg} 3\varphi)$$

Вариант № 15

$$N := 20 \quad x := 2..N/2 \quad y := 2..N/2 \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi/2$$

$$F(x) = \ln^2(\sqrt{1+e^x} - 1) + \sqrt{\frac{3 \sin 2x - 2 \cos x}{5}}$$

$$G(x,y) = (3y + 2x) \sqrt{yx - x^2} + x^2 \sin \frac{x}{2} \cos y$$

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{3} \operatorname{arcctg} \frac{1+\varphi}{1-\varphi} - \frac{\sqrt{2\varphi^2 - 2\varphi + 1}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{(\varphi-1)^3}$$

Вариант № 16

$$N := 35 \quad x := 1..N \quad y := 1..N \quad \varphi := 0, 0.001 .. 2\pi$$

$$F(x) = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}} + \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 3)$$

$$G(x,y) = -\frac{1}{9} x \sin 3y - \frac{2}{27} \cos 3y + \operatorname{tg}^3 \sqrt{4x-1}$$

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{3} \varphi^2 \sqrt{1-\varphi^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-\varphi^2} + \varphi \arcsin \varphi$$

Вариант № 17

$$N := 20 \quad x := 1..N/2 \quad y := 1..N/2 \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi/2$$

$$F(x) = \arcsin^2(\ln x) + \frac{1}{\operatorname{arccctg}^2(4x^2 - 1)} + \sqrt{\operatorname{arccctg} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}}$$

$$G(x, y) = \frac{1 - y - x^3}{(1 - y^3)} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{y + 1} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{5}}} + \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$$

$$\theta(\varphi) = \varphi^3 \sqrt{\frac{(2\varphi + 5)^2}{\varphi^2 + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}^3 \frac{\varphi}{\sqrt{2}}$$

Вариант № 18

$$N := 40 \quad x := 2..2N \quad y := 2..2N \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\log_3 2x} + \frac{1}{4} x^3 (8 - 3x)^5 - \sqrt[3]{\sin x} + \sqrt{\sin x}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2} \sin x^2 - \frac{1}{2} \sin^2 y + \frac{1}{x} 2^x \ln y$$

$$\theta(\varphi) = \frac{\varphi^8}{8(1 - \varphi^2)^4} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \varphi - 1}{3} + \frac{1}{16} \cos(3\varphi^3) - \frac{1}{8} \cos^2 \varphi$$

Вариант № 19

$$N : = 35 \quad x : = 1..N \quad y : = 1..N \quad \varphi : = 0, 0.001 .. 2\pi$$

$$F(x) = \sqrt{2e^{-x} - 2^x + 1} + \ln^2 x - \ln(\ln x) + \frac{1}{5^{x^2}}$$

$$G(x,y) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(y+3)^3}} - \left(y - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{y}$$

$$\theta(\varphi) = \frac{2}{5(3\varphi^2 - 7)^3} - \frac{(\varphi + 2)^2}{(\varphi + 1)^3 (\varphi + 3)^4} + \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}$$

Вариант № 20

$$N : = 25 \quad x : = 5..N \quad y : = 5..N \quad \varphi : = 0, 0.001 .. 2\pi$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (5 \cos^4 x - 7) + e^{-(x^2 + 7x - 5)} - \ln(\sqrt{e^x - 1} + 1)$$

$$G(x,y) = x \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) - \sqrt{x^2 + y^2} - \log_3(x^2 - \operatorname{ctg} x)$$

$$\theta(\varphi) = -2 \cos^3 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} \sin \varphi}{\operatorname{arctg} 2\varphi}$$

Вариант № 21

$$N : = 20 \quad x : = 1..N/2 \quad y : = 1..N/2 \quad \varphi : = 0, 0.001 .. \pi/2$$

$$F(x) = \log_3 \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} + e^{-x} - \sin(e^{-x}) \cos(e^{-x})$$

$$G(x,y) = \frac{y^3 \sqrt{3x - y^2}}{3} - \frac{1}{4} \ln^2(1 + \sin x) - (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$$

$$\theta(\varphi) = \ln\left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) + \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{2} + \operatorname{Intg} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{arctg}^2 \frac{3}{\varphi}$$

Вариант № 22

$$N : = 40 \quad x : = 1..2N \quad y : = 1..2N \quad \varphi : = 0, 0.001 .. \pi$$

$$F(x) = \sqrt[5]{\operatorname{tg} \frac{1}{x^4 - 1}} + \operatorname{arccctg} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$G(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}} + \sqrt[y]{3} + \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}} e^{-x}$$

$$\theta(\varphi) = \sqrt[3]{\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Вариант № 23

$$N : = 40 \quad x : = 1..2N \quad y : = 1..2N \quad \varphi : = 0, 0.001 .. \pi$$

$$F(x) = \frac{5x^3 - 7x + 1}{4 + 3x^2 - x^3} + \sqrt{x + 1} \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{x + 1}$$

$$G(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{y}} - \sqrt{3} \right) \left(4x \sqrt[3]{y} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3y} \right) - \sqrt[3]{1 + 2 \operatorname{tg} x}$$

$$\theta(\varphi) = \sqrt[11]{7 + 5\sqrt[5]{\varphi^9}} + \sqrt[3]{\varphi^2} \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi$$

Вариант № 24

$$N : = 20 \quad x : = 1..N/2 \quad y : = 1..N/2 \quad \varphi : = 0, 0.001 .. \pi/2$$

$$F(x) = + \sqrt[3]{1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{1}{x} \right)}$$

$$G(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3y$$

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\varphi - 1}{\sqrt{3}} + (\varphi - 1) \sqrt[5]{(\varphi + 1)^2 (\varphi - 2)^3}$$

Вариант № 25

$$N := 10 \quad x := 4..2N \quad y := 4..2N \quad \varphi := 0, 0.001 \dots 0.5 \pi$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + \frac{e^x \cos x}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$$

$$G(x, y) = \ln \left(x + \sqrt{y^2 + x^2} \right) + \cos \frac{\arcsin y}{2}$$

$$\theta(\varphi) = \frac{2 + \sqrt{\varphi}}{2 - \sqrt{\varphi}} - (2 - \varphi)^2 \sin \varphi \cos 2\varphi - \log_4 \arccos 2\varphi$$

Вариант № 26

$$N := 10 \quad x := 1..2N \quad y := 1..2N \quad \varphi := 0, 0.001 \dots \pi$$

$$F(x) = \sqrt[5]{\frac{x(x^2 + 1)}{(1-x)^2}} + \log_2 \sqrt[3]{1-x^2} + 2\sqrt{x^2 - 1} + \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$G(x, y) = e^{-x} \left(\frac{y}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{y} \right) + \frac{1}{5} \sin^2 x \cos \frac{y}{2}$$

$$\theta(\varphi) = \ln \sqrt[3]{1 + \varphi^2} + \frac{1 - \varphi}{\sqrt{3}} - \ln \arccos \frac{\varphi}{2}$$

Вариант № 27

$$N := 40 \quad x := 1..2N \quad y := 1..2N \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi$$

$$F(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^4 + 1} + \sqrt{3e^{-\frac{x}{2}} + 3^x - 2}$$

$$G(x,y) = x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^5 + y} - \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{3y^2} + \frac{1}{\sin^3 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{3} \right)}$$

$$\theta(\varphi) = (e+1)(1+\varphi) - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(4\varphi-1)}}$$

Вариант № 28

$$N := 20 \quad x := 1..N/2 \quad y := 1..N/2 \quad \varphi := 0, 0.001 .. \pi/2$$

$$F(x) = \sqrt[4]{\frac{(x+2)(x-1)^3}{x^5}} + \frac{(x^3-1)e^{-x}}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

$$G(x,y) = y^5 \sqrt[4]{y + \frac{b}{x^3}} + (x^2+1) \operatorname{arctg} \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$$

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{\varphi} + \log_5 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \right) + \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 \frac{1}{\sqrt[4]{\varphi-1}}}$$

Вариант № 29

$$N := 20 \quad x := 1..N/2 \quad y := 1..N/2 \quad \varphi := 0, 0.001 \dots \pi/2$$

$$F(x) = \operatorname{ctg}^2(\arccos \sqrt{x}) + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4} + \operatorname{arccctg}^3 \frac{3x-8}{\sqrt{5}}$$

$$G(x,y) = \frac{\sqrt[5]{(y-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(y-3)^7}} - \frac{\sin^2 y}{\sin x^2} + \frac{1}{\sin(y - \sin x)}$$

$$\theta(\varphi) = \varphi \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{4\varphi^4} \ln \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{16\varphi^4} + \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Вариант № 30

$$N := 35 \quad x := 1..N \quad y := 1..N \quad \varphi := 0, 0.001 \dots 2\pi$$

$$F(x) = \sqrt{1-x^2} \arccos x + (\arcsin x)^2 + \frac{x-1}{2}$$

$$G(x,y) = \frac{\operatorname{tg} 2y}{3} + \frac{2}{\operatorname{ctg} 3x} + \sqrt[4]{1-e^{-\frac{1}{x}}} + \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$$

$$\theta(\varphi) = \frac{\varphi}{\ln \varphi} - \operatorname{arccctg}^5 \left(1 + \frac{1}{\varphi^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 \varphi}}$$

Додаток Б

Завдання на самостійну роботу №2

Б.1 Знайти рішення диференціальних рівнянь, що задовольняють умовам $y(0)=0$, $y'(0)=0$ та побудувати графічне відображення.

1. $y'' - y = th(t)$	16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-t}}$
2. $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^t}$	17. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^t}{1 + e^{-t}}$
3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1 + t^2}$	18. $y'' - y' = \frac{e^{-t}}{2 + e^{-t}}$
4. $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos(t)$	19. $y'' + 4y = tg \ 2t$
5. $y'' - y = th^2(t)$	20. $y'' + y' + y = \frac{e^t}{\sqrt{t^2 + 1}}$
6. $y'' - y = \frac{1}{ch(t)}$	21. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 t}$
7. $y'' - y' = \frac{e^t}{1 + e^t}$	22. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$
8. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t + 1}$	23. $y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3t}$
9. $y'' + y' = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}$	24. $y'' - y = \frac{2e^t}{e^t - 1}$
10. $y'' - 2y' = \frac{e^t}{ch(t)}$	

11. $y'' - y = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(t)}$	25. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 t$
12. $y'' + y' = \frac{1}{1 + e^t}$	26. $y'' - y = \frac{1}{e^t + 1}$
13. $y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2(2t)}$	27. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$
14. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2t}$	28. $y'' + 9y = \operatorname{tg} 3t$
15. $y'' + y = \operatorname{ctg} t$	29. $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$
	30. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 t}$

Б.2 Розв'язати систему звичайних диференційних рівнянь та побудувати графічне відображення.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases} \\ x(0) = -1, y(0) = 2$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \\ x(0) = 1, y(0) = 2$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9 \end{cases} \\ x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$4. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases} \\ x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \\ x(0) = 1, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 2 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2 \\ x(0) = 2, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y \\ x(0) = 0, y(0) = 2 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2 \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1 \\ \dot{y} = 4x - 2y \\ x(0) = -1, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 5 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = -4x \\ x(0) = 3, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \dot{x} = x + 4y - 1, \\ \dot{y} = 2x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - 4y + 7 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = -x + 2y - 4 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \dot{x} = -x + 5y + 3, \\ \dot{y} = 5x - y + 7 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = x - 2y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \dot{x} = -7x + 3y, \\ \dot{y} = 3x - 7y + 4 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 1, \\ \dot{y} = x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 3x + y + 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = x + 4y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = 3x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y, \\ \dot{y} = x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 4, \\ \dot{y} = x + 2y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y - 1 \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = 3x + y \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -1.5x + y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$$

Б.3 Розв'язати красві задачі.

1. Лапласа $R=8, T(L_x/4, L_y/2)=10^\circ\text{C}$
2. Пуассона $R=16, M_{R/2, R/4}=8, M_{R/8, R/2}=12; a_{j,k}=3$
3. Лапласа $R=16, T(L_x/4, L_y/2)=8^\circ\text{C}$
4. Пуассона $R=24, M_{R/4, R/8}=2, M_{2R/3, R/12}=5; a_{j,k}=1$
5. Лапласа $R=16, T(L_x/2, 3L_y/4)=12^\circ\text{C}$
6. Пуассона $R=32, M_{R/16, R/8}=5, M_{R/32, R/8}=10; a_{j,k}=5$
7. Лапласа $R=8, T(L_x/8, 2L_y/4)=5^\circ\text{C}$
8. Пуассона $R=36, M_{R/2, R/4}=8, M_{R/9, R/2}=12; a_{j,k}=4$
9. Лапласа $R=16, T(2L_x/8, L_y/8)=7^\circ\text{C}$
10. Дифузійна задача $t=0..10, x=1..20, \alpha=0,4$
11. Лапласа $R=32, T(L_x/4, L_y/2)=15^\circ\text{C}$
12. Дифузійна задача $t=0..20, x=1..40, \alpha=0,5$
13. Лапласа $R=16, T(L_x/2, L_y/8)=25^\circ\text{C}$
14. Лапласа $R=24, T(L_x/4, L_y/2)=8^\circ\text{C}$
15. Пуассона $R=16, MR/2, R/4=7, MR/8, R/4=8; a_{j,k}=2$
16. Лапласа $R=24, T(L_x/8, L_y/4)=15^\circ\text{C}$
17. Пуассона $R=16, M3R/4, R/6=5, MR/6, R/2=6; a_{j,k}=4$
18. Лапласа $R=16, T(3L_x/4, L_y/6)=10^\circ\text{C}$
19. Дифузійна задача $t=0..30, x=1..60, \alpha=0,6$
20. Лапласа $R=8, T(L_x/8, 5L_y/8)=6^\circ\text{C}$
21. Пуассона $R=16, MR/8, 3R/4=8, MR/4, 5R/6=12; a_{j,k}=3$

22. Лапласа $R=24, T(Lx/4, Ly/4) = 17^{\circ} C$
23. Пуассона $R=16, MR/8, R/4=10, MR/4, R/2=5; a_{j,k}=7$
24. Лапласа $R=32, T(Lx/2, Ly/4) = 5^{\circ} C$
25. Дифузійна задача $t=0..15, x=1..30, \alpha=0.5$
26. Пуассона $R=16, MR/7, R/5=4, MR/9, 7R/9=6; a_{j,k}=1$
27. Лапласа $R=32, T(5Lx/8, Ly/4) = 20^{\circ} C$
28. Пуассона $R=16, MR/2, R/4=6, MR/4, R/8=10; a_{j,k}=6$
29. Лапласа $R=8, T(3Lx/4, 3Ly/8) = 13^{\circ} C$
30. Дифузійна задача $t=0..25, x=1..50, \alpha=0.4$