

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з вищої математики

до виконання контрольної роботи

**«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ.
ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.
ТЕОРІЯ ПОЛЯ»**

**для студентів заочної форми навчання
транспортного факультету**

2017

Методичні вказівки з вищої математики до виконання контрольної роботи «Невизначений та визначений інтеграли. Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли. Теорія поля» для студентів заочної форми навчання транспортного факультету./ Укл.: Килимник І.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – 98 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент
Полякова Т.Г., асистент

Рецензент: Онуфрієнко Л.М., доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доц.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої та загальної математики ЗНТУ
Протокол № 3 від 26.10.2016 р.

Затверджено
НМК транспортного факультету ЗНТУ
Протокол № 23 від 21.12.2016 р.

ЗМІСТ

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ	Стор 4
1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ	5
1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи по темі «Невизначений та визначений інтеграли»	5
1.1.1 Невизначений інтеграл	5
1.1.2 Методи інтегрування	7
1.1.3 Визначений інтеграл	18
1.1.4 Невласні інтеграли першого та другого роду	21
1.1.5 Застосування визначених інтегралів	22
1.2 Індивідуальні завдання	37
2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ	48
2.1 Вказівки до виконання контрольної роботи по темі «Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли. Теорія поля»	48
2.1.1 Подвійний інтеграл. Його обчислення	48
2.1.2 Застосування подвійних інтегралів	54
2.1.3 Потрійний інтеграл	62
2.1.4 Криволінійні інтеграли	67
2.1.5 Елементи теорії поля	75
2.2 Індивідуальні завдання	85
Література	97

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати назву контрольної роботи, дисципліну, з якої виконується контрольна робота, номер академічної групи, прізвище, ім'я та по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки, а в правому нижньому – домашню адресу.

3. В контрольній роботі повинні бути розв'язані всі завдання вказані викладачем. Розв'язання задач необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: передостанню цифру шифру помножити на номер завдання і додати останню цифру шифру. Номером задачі є число одиниць в отриманому числі. Наприклад. Дві останні цифри шифру 65. Розв'язуємо 11 завдання. Необхідно $6 \cdot 11 + 5 = 71$. Номер задачі в 11 завданні буде 1.

Якщо число одиниць дорівнює нулю, то студент розв'язує 10 задачу завдання.

5. Контрольна робота подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольні роботи виконані не за своїм варіантом не зараховуються.

1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи по темі «Невизначений та визначений інтеграли»

1.1.1 Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і справджується рівність $F'(x) = f(x)$ для усіх $x \in (a;b)$. Існує множина первісних $F(x)$ для функції $f(x)$, які відрізняються тільки сталою: $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Цю множину первісних називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і записують $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, C – *const*.

Властивості невизначеного інтеграла

$$\text{а) } \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$\text{б) } \int dF(x) = F(x) + C$$

$$\text{в) } d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

$$\text{г) } \int k f(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ де } k - \text{const}$$

$$\text{д) } \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\text{е) } \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$$

Нехай $u = u(x)$ – довільна функція, яка має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді справедливі формули:

$$1 \quad \int du = u + C$$

$$2 \quad \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1$$

$$2a \quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$26 \quad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$3 \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4 \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$4a \quad \int e^u du = e^u + C$$

$$5 \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$6 \quad \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7 \quad \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$8 \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$9 \quad \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$10 \quad \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$$

$$11 \quad \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C$$

$$12 \quad \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$13 \quad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

$$14 \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$15 \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$16 \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$17 \quad \int \sqrt{a^2 - u^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + \\ + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$18 \quad \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm \\ \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$19 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$20 \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Зауваження: таблицею інтегралів можна користуватись у випадку, коли аргумент підінтегральної функції і вираз під знаком диференціала однакові: $\int f(u) du = F(u) + C$.

1.1.2 Методи інтегрування

а) метод безпосереднього інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою властивостей невизначеного інтеграла та таблиці невизначених інтегралів.

Треба пам'ятати, що $du = \frac{1}{a} d(au)$, $du = ad\left(\frac{1}{a}u\right)$, $du = d(u \pm a)$, де $a = \text{const}$.

Задача 1. Знайти інтеграли

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3 - 2x^2}{x^2} dx &= \int \left(3 \cdot \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} - 4 \cdot \frac{x}{x^2} + 5 \cdot \frac{x^3}{x^2} - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2} \right) dx = \\ &= \int \left(3 \cdot x^{-\frac{7}{4}} - 4 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot x - 2 \right) dx = 3 \int x^{-\frac{7}{4}} dx - 4 \int \frac{dx}{x} + 5 \int x dx - 2 \int dx = \\ &= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x + C = -4 \cdot x^{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + \frac{5}{2} \cdot x^2 - 2x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}. \text{ Можемо застосувати формулу 2б, де } u=3x-2, \text{ і} \\ \text{врахувати лінійність аргументу } u. \text{ За властивістю е) коефіцієнт} \\ \text{лінійності } a=3. \text{ Матимемо: } \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x-2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int e^{7x-5} dx. \text{ Аналогічно прикладу 2), коефіцієнт лінійності } a=7. \\ \text{Застосовуємо формулу 4а. Матимемо: } \int e^{7x-5} dx = \frac{1}{7} \cdot e^{7x-5} + C; \end{aligned}$$

$$4) \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx = \int (\cos^2 3x - 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x + \sin^2 3x) dx =$$

$$= \int (1 - \sin 6x) dx = \int dx - \int \sin 6x dx = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C.$$

При знаходженні інтеграла врахували, що $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$ і $2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x = \sin 6x$

б) метод заміни змінної (метод підстановки).

Згідно з цим методом вводять нову змінну інтегрування. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$. Функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку $(\alpha; \beta)$ і $x \in (a; b)$. Тоді справедлива формула $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$. Зручним є і такий запис:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\begin{array}{l} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x)dx \end{array} \right] = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Підстановку $u = \varphi(x)$ підбирають так, щоб мати після перетворення табличний інтеграл.

Задача 2. Знайти інтеграли

1) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$

Так як $d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx$, то зробимо заміну змінної $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. Матимемо:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Перевіримо отриманий результат:

$$\left(\frac{\sin^5 x}{5} + C \right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x = \sin^4 x \cdot \cos x;$$

$$2) \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3x^2 + 8 \\ du = d(3x^2 + 8) = (3x^2 + 8)' dx = 6x dx \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6} \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C = \\
 &= \frac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{dx}{e^x + 1} &= \left\{ \begin{array}{l} u = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(u - 1) \\ dx = \frac{du}{u - 1} \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u(u - 1)} = - \int \frac{u - 1 - u}{u(u - 1)} du = \\
 &= - \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u - 1} = -\ln|u| + \ln|u - 1| + C = \ln \left| \frac{u - 1}{u} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

в) метод інтегрування частинами.

Формула інтегрування частинами має вигляд: $\int u dv = uv - \int v du$. До інтегралів, які обчислюються методом інтегрування частинами відносяться:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int P_n(x) \sin(ax + b) dx, \quad \int P_n(x) \cos(ax + b) dx, \quad \int P_n(x) e^{ax+b} dx, \\
 & \int P_n(x) a^{ax+b} dx, \quad \int \frac{ax+b}{\cos^2(cx+d)} dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sin^2(cx+d)} dx, \quad \text{де } P_n(x) - \\
 & \text{многочлен } n\text{-го степеню, } a, b, c, d - \text{дійсні числа. В цих інтегралах} \\
 & \text{через } u \text{ позначаємо } P_n(x) \text{ або } ax+b, \text{ а через } dv - \text{один з виразів} \\
 & \cos(ax+b) dx, \quad \sin(ax+b) dx, \quad a^{ax+b} dx, \quad e^{ax+b} dx, \quad \frac{dx}{\cos^2(cx+d)}, \\
 & \frac{dx}{\sin^2(cx+d)}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \int P_n(x) \arcsin f(x) dx, \quad \int P_n(x) \arccos f(x) dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arctg} f(x) dx, \\
 & \int P_n(x) \operatorname{arcctg} f(x) dx, \quad \int P_n(x) \ln f(x) dx, \quad \int P_n(x) \log_a f(x) dx, \quad \text{де } P_n(x) -
 \end{aligned}$$

многочлен n -го степеню (n може дорівнювати нулю), $f(x)$ – відповідна функція. В цих інтегралах через u позначаємо один з виразів $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$, $\ln f(x)$, $\log_a f(x)$, а через $dv = P_n(x)dx$.

Існують інші типи інтегралів для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Зауваження. При застосуванні метода інтегрування частинами треба підінтегральний вираз розбити на два множники: u і dv . При цьому: а) dx треба віднести до dv ; б) dv повинен бути таким, щоб інтегруванням легко знайти v ; в) інколи доводиться формулу інтегрування частинами застосовувати декілька разів.

Задача 3. Знайти інтеграли

$$\begin{aligned}
 1) \int (3-2x)\cos(4x+5)dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=3-2x \\ dv=\cos(4x+5)dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du=-2dx \\ v=\frac{1}{4}\sin(4x+5) \end{array} \Bigg\} = \\
 &= \frac{3-2x}{4}\sin(4x+5) + \frac{1}{2}\int \sin(4x+5)dx = \frac{3-2x}{4}\sin(4x+5) - \\
 &- \frac{1}{8}\cos(4x+5) + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int x\ln(x+3)dx &= \left\{ \begin{array}{l} u=\ln(x+3) \\ dv=xdx \end{array} \right| \begin{array}{l} du=\frac{1}{x+3}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{array} \Bigg\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \\
 &- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+3}dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}dx =
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{x^2}{x+3x} \mid \frac{x+3}{x-3} \\ -\frac{3x}{-3x-9} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \left(x-3 + \frac{9}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3) \right) + C.$$

$$3) \int e^{2x} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \mid du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin x dx \mid v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^{2x} \cos x +$$

$$+ 2 \int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \mid du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos x dx \mid v = \sin x \end{array} \right\} = -e^{2x} \cos x +$$

$$+ 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x.$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} \left(-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \right) + C.$$

г) інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.

До цих інтегралів відносяться:

$$1) \int \frac{A dx}{ax^2 + bx + c}, 2) \int \frac{B dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, 3) \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx,$$

$$4) \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Для інтегралів типу 1), 2) необхідно виділити повний квадрат у квадратному тричлені:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \text{ Заміна } x + \frac{b}{2a} = u \text{ приводить інтеграл до}$$

табличного: для інтеграла типу 1) маємо табличний інтеграл 13 або 14,

для інтеграла типу 2) маємо табличний інтеграл 15 або 16. Для інтегралів типу 3) або 4) необхідно у чисельнику виділити похідну квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику, і чисельник почлено поділити на знаменник. Отримаємо два інтеграли, перший з яких знаходимо по таблиці інтегралів за формулою 17 (для інтеграла типу 3)) або за формулою 18 (для інтеграла типу 4)). Другий інтеграл є інтегралом типу 1) або 2).

Задача 4. Знайти інтеграл

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1) (4-2x-x^2)' = -2-2x \\ 2) 3x-4 = 3\left(x-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left(-2x+\frac{8}{3}\right) = \\ 3) 4-2x-x^2 = -(x^2+2x-4) = \\ = -(x^2+2x+1-1-4) = -(x+1)^2+5 \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x-2)-7}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{4-2x-x^2} - 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{4-2x-x^2} -$$

$$- 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

д) інтегрування дробово-раціональних функцій.

До цих функцій відносяться дробі $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степеня n і m відповідно. Якщо $n \geq m$, то дріб є неправильний. Треба виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$, де $S(x)$ – частка (ціла частина),

$\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб (ступінь многочлена $R(x)$ менший за m).

Далі, якщо правильний дріб не є простий, необхідно знаменник $Q_m(x)$ розкласти на множники (множниками можуть бути многочлени виду: $x \pm x_1$, $(x \pm x_2)^k$, $x^2 + a^2$, $(x^2 + a^2)^k$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^k$ з дискримінантом квадратного тричлена меншим нуля), потім правильний дріб – на прості дроби. Простих дробів буде стільки, скільки множників у знаменнику, враховуючи кратність кожного. У чисельниках простих дробів записують многочлени в загальному вигляді, не враховуючи кратність многочленів у знаменнику. Коефіцієнти чисельників знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або комбінованим методом. При інтегруванні правильних простих дробів можемо мати такі інтеграли:

$$\int \frac{A}{x \pm x_1} dx = A \cdot \ln|x \pm x_1| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x \pm x_2)^k} dx = A \cdot \frac{(x \pm x_2)^{1-k}}{1-k} + C;$$

$$\int \frac{A}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{a} \arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + a^2| + \frac{B}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q} dx, \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx - \text{розглянуті в інтегруванні виразів,}$$

які містять квадратний тричлен;

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k},$$

де $t = x + \frac{p}{2}$, $m^2 = q - \frac{p^2}{4}$. При цьому многочлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$;

$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = I_k$ можна знайти використовуючи рекурентну формулу:

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}$$

Задача 5. Знайти інтеграли

$$1) \int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx = \left\{ \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \right. \\ \left. = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C}{(x+2)(x^2+1)} \right.$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) = x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C$$

$$x = -2 \quad \left| \begin{array}{l} -2+1 = A((-2)^2+1) + (B(-2)+C)(-2+2) \Rightarrow -1 = 5A; A = -1/5 \\ x^2 \quad \left| \begin{array}{l} 0 = A+B; B = 1/5 \\ x \quad \left| \begin{array}{l} 1 = 2B+C; C = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-1/5}{x+2} + \frac{1/5x+3/5}{x^2+1} \left\} = \int \frac{-1/5}{x+2} dx + \int \frac{1/5x+3/5}{x^2+1} dx = \right. \\ = -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{10} \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \\ + \frac{3}{5} \arctg x + C = -\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{10} \ln|x^2+1| + \frac{3}{5} \arctg x + C ;$$

$$2) \int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)} = \left\{ \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \right. \\ \left. = \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \right. \\ \left. = \frac{x^2(B+C) + x(A-2C) + A-B+C}{(x-1)^2(x+1)} \right.$$

$$3 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)^2 = x^2(B+C) + x(A-2C) + A-B+C.$$

$$\begin{array}{l|l} x = -1 & 3 = 4C; C = 3/4 \\ x = 1 & 3 = 2A; A = 3/2 \\ x^2 & 0 = B + C; B = -3/4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-3/4}{x-1} + \frac{3/4}{x+1} \Bigg\} = \int \frac{3/2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-3/4}{x-1} dx + \\ &+ \int \frac{3/4}{x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

е) інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ за допомогою універсальної підстановки:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

приводяться до інтегралів від раціональної функції аргументу t . У деяких випадках застосовують інші підстановки, які спрощують знаходження інтегралів. Розглянемо ці випадки:

1) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, робимо заміну $\sin x = t$, а коли вона непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну $\cos x = t$.

2) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну:

$$\operatorname{tg} x = t, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

3) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходиться підстановкою $\sin x = t$, якщо n – ціле додатне непарне число, а m – ціле додатне парне число, або підстановкою $\cos x = t$, якщо m – ціле додатне непарне число, а n – ціле додатне парне число. Якщо n і m – цілі додатні парні числа,

застосовують формули зниження степеня: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ та $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Якщо n і m – цілі парні числа, але хоч одне з них від’ємне, або n і m – цілі непарні і від’ємні числа, то застосовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$.

4) $\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx, \int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx, \int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx$ за допомогою формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$

зводяться до табличних.

Задача 6. Знайти інтеграли.

$$\begin{aligned} 1) \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d \cos x = \\ &= -\int \cos^2 x d \cos x + \int \cos^4 x d \cos x = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \cos 3x \cdot \sin 2x dx &= \int \sin 2x \cdot \cos 3x dx = \int \frac{1}{2} (\sin(2x - 3x) + \\ &+ \sin(2x + 3x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{2} (-\cos x) + C = \end{aligned}$$

$$= -0,1 \cos 5x + 0,5 \cos x + C.$$

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{dx}{3 - \cos x} &= \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t^2+2} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1/2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} \right) + C. \end{aligned}$$

є) інтегрування ірраціональних виразів.

Розглянемо деякі з них.

$$1) \int R \left(x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, x^{\frac{n_k}{m_k}} \right) dx, \text{ де } n_i, m_i \ (i = \overline{1, k}) - \text{цілі додатні числа.}$$

Робимо заміну $x = t^s$, де s є спільним знаменником дробів $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

$$2) \int R \left(\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_k}{m_k}} \right) dx, \quad \text{де}$$

$n_i, m_i \ (i = \overline{1, k})$ – цілі додатні числа, a_1, b_1, a_2, b_2 – дійсні числа.

Заміна: $\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} = t^s$, де s є спільним знаменником дробів

$\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

3) В інтегралах, що мають вирази : 3а) $\sqrt{x^2 - m^2}$, 3б) $\sqrt{m^2 - x^2}$,

3в) $\sqrt{m^2 + x^2}$ можна робити наступні заміни змінної:

$$3а) \quad x = \frac{m}{\cos t}; \quad dx = \frac{m \sin t}{\cos^2 t} dt; \quad \sqrt{x^2 - m^2} = \frac{m \sin t}{\cos t};$$

$$3б) \quad x = m \cos t; \quad dx = -m \sin t dt; \quad \sqrt{m^2 - x^2} = m \sin t;$$

$$3в) \quad x = mtgt; \quad dx = \frac{m}{\cos^2 t} dt; \quad \sqrt{m^2 + x^2} = \frac{m}{\cos t}.$$

Задача 7. Знайти інтеграл.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6; t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^8}{t^2(t+1)} dt = \\ &= 6 \int \frac{t^6}{t+1} dt = 6 \int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt{x} + \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C. \end{aligned}$$

1.1.3 Визначений інтеграл

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізьку інтегрування $[a; b]$, a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування, обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ є первісною для підінтегральної функції $f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

$$\text{а) } \int_a^b dx = b - a$$

$$\text{б) } \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\text{в) } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\text{г) } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a; b)$$

$$\text{д) } \int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \quad \text{де } k = \text{const}$$

$$\text{е) } \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

є) для симетричного відрізка інтегрування $[-a; a]$ справедливо

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad \text{у випадку парної підінтегральної функції } f(x), \text{ і}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \quad \text{у випадку непарної підінтегральної функції } f(x).$$

Для знаходження первісної $F(x)$ при обчисленні визначеного інтеграла можна застосовувати табличні інтеграли та методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів. Розглянемо деякі з них:

а) заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ задовольняють умовам: функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$ і $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha; \beta]$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

б) формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задача 8. Знайти інтеграли.

$$\begin{aligned} 1) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} tgx d(tgx) = \frac{tg^2 x}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(tg^2 \frac{\pi}{4} - tg^2 \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \quad \alpha = 0; \beta = \pi/2 \\ a = 0; b = 2 \quad dx = 2 \cos t dt \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right] = \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \sin x dx \\ du = dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

1.1.4 Невласні інтеграли першого та другого роду

а) невластні інтеграли I роду (інтеграли з нескінченними межами інтегрування).

До них відносяться інтеграли виду:

$$1) \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad 2) \int_a^{\infty} f(x)dx, \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Розглянемо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. За властивістю г) розіб'ємо його на два

інтеграли: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$, перший з яких відповідає

інтегралу 1), а другий – інтегралу 2). Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x)dx, \quad \text{то} \quad \int_{-\infty}^c f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x)dx. \quad \text{Аналогічно для}$$

$$\int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B f(x)dx. \quad \text{Тоді матимемо:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c f(x)dx + \lim_{B \rightarrow \infty} \int_c^B f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_A^c + \lim_{B \rightarrow \infty} F(x) \Big|_c^B = \\ &= F(c) - \lim_{A \rightarrow -\infty} F(A) + \lim_{B \rightarrow \infty} F(B) - F(c) = \lim_{B \rightarrow \infty} F(B) - \lim_{A \rightarrow -\infty} F(A). \end{aligned}$$

б) невластні інтеграли II роду (інтеграли від розривних функцій).

До них відносяться інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$, для яких

підінтегральна функція $f(x)$ невизначена або при $x=a$, або при $x=b$, або при $x=c$, $c \in (a; b)$. Припустимо, що $f(x)$ невизначена при $x=c$, $c \in (a; b)$. За властивістю г) розіб'ємо інтеграл на два інтеграли:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx = \\
&= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(x) \Big|_{c+\varepsilon_2}^b = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(c-\varepsilon_1) - F(a) + \\
&\quad + F(b) - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(c+\varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Зауваження. Невласний інтеграл є збіжним, якщо границі існують (скінченні числа), у противному випадку – розбіжним.

Задача 9. Знайти невластні інтеграли.

$$\begin{aligned}
1) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^B (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4+x^2) = \lim_{B \rightarrow \infty} \sqrt{4+x^2} \Big|_0^B = \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} (\sqrt{4+B^2} - 2) = \infty \quad - \text{ інтеграл розбіжний.}
\end{aligned}$$

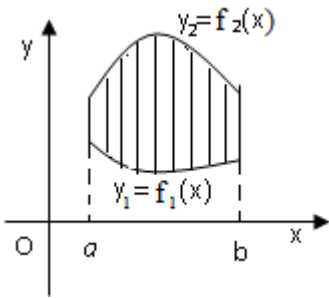
$$\begin{aligned}
2) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{1/2-\varepsilon} \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \arcsin 2x \Big|_0^{1/2-\varepsilon} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \right) - \frac{1}{2} \arcsin 0 = \frac{1}{2} \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} \quad - \text{ інтеграл} \\
&\text{збіжний.}
\end{aligned}$$

1.1.5 Застосування визначених інтегралів

Обчислення площі плоскої фігури.

а) плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox . Площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Якщо плоска фігура обмежена кривими:
 $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$ і прямими
 $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 \geq y_1$). Площа
 фігури обчислюється за формулою:

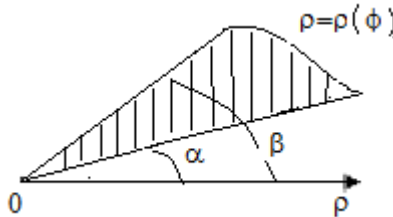
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx ;$$

б) плоска фігура обмежена кривою,
 заданою параметричним рівнянням

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t \in [t_1; t_2]$. Площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt ;$$

в) плоска фігура обмежена кривою, заданою в полярних
 координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

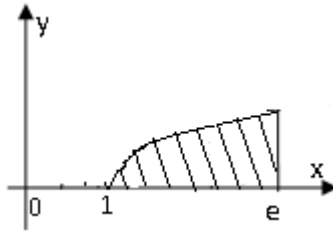


Площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi .$$

Задача 10. Знайти площу фігури.

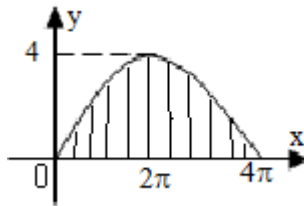
1) Фігура обмежена лініями: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Зробимо
 рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою: $S = \int_a^b f(x) dx$. З умови задачі маємо: $f(x) = \ln x$, $a = 0$, $b = e$.

$$S = \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

2) Фігура обмежена лініями: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ та віссю Ox . Зробимо рисунок.



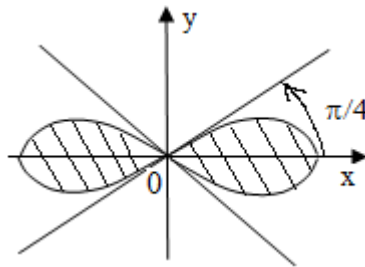
Площу заданої фігури знайдемо за формулою: $S = \int_a^b y(t)x'(t)dt$.

Маємо $y(t) = 2(1 - \cos t)$, $x'(t) = 2(1 - \cos t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Тоді

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2(1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= 4 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 12\pi.$$

3) $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$. Зробимо рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$. Маємо

$\rho = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$, ОДЗ: $2 \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Фігура симетрична відносно осей координат. Знайдемо площу її чверті і помножимо на 4. В нашому випадку $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\varphi d\varphi = 2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2.$$

Обчислення довжини дуги гладкої кривої.

а) крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$.

Довжина кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

б) крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$.

Довжина кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt;$$

в) крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Довжина кривої обчислюється за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Задача 11. Знайти довжину дуги гладкої кривої.

1) крива задана рівнянням $y^2 = x^3$, $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, ($y \geq 0$).

Довжину її знайдемо за формулою: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Маємо $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$, $a = 0$, $b = 1$.

$$L = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{3/2} \Big|_0^{4/3} = \frac{8}{27} \left(4^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27}.$$

2) крива задана рівнянням $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої

знайдемо за формулою $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.

Маємо $x' = -5 \cos^4 t \sin t$, $y' = 5 \sin^4 t \cos t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{(-5 \cos^4 t \sin t)^2 + (5 \sin^4 t \cos t)^2} = \\&= \sqrt{25 \cos^8 t \sin^2 t + 25 \sin^8 t \cos^2 t} = \sqrt{25 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^6 t + \sin^6 t)} = \\&= 5 \sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \frac{5}{2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2t} = \\&= \frac{5}{4} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \frac{5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} dt = -\frac{5}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} d(\cos 2t) = \\&= -\frac{5}{8\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{3} \cos 2t + \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} \right| \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\&= \frac{5}{8} \left(1 + \frac{\ln |\sqrt{3} + 2|}{2\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

3) крива задана рівнянням $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої

знайдемо за формулою: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

Маємо $\rho' = 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy .

а) крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ і обертається навколо осі Ox . Площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

б) крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і

обертається навколо осі Ox . Площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt;$$

в) крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі. Площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Задача 12. Обчислити площу поверхні обертання.

1) крива задана рівнянням $y = \sin 2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ і обертається навколо Ox . Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \text{ Маємо } y' = 2 \cos 2x, \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx = \left[\begin{array}{l} 2 \cos 2x = t; t_u = 2; t_g = -2 \\ -4 \sin 2x dx = dt \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)).
\end{aligned}$$

2) крива задана рівнянням $\rho = 1 - \cos \varphi$ – кардіоида і обертається навколо полярної осі. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою: $Q_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$. Маємо $\rho' = \sin \varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^\pi 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
&= 32\pi \int_0^\pi \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) = 32\pi \frac{\sin^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \Big|_0^\pi = \frac{32\pi}{5}.
\end{aligned}$$

3) крива задана рівнянням $\begin{cases} x=t; \\ y=2-t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$ і обертається

навколо Ox . Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned}
Q_x &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \text{ Маємо } x' = 1, y' = -1, t_1 = 0, t_2 = 1. \\
Q_x &= 2\pi \int_0^1 (2-t) \cdot \sqrt{1+1} dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2-t) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= 2\sqrt{2}\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox або Oy .

а) плоска фігура обмежена кривими: $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 \geq y_1$) і обертається навколо осі Ox . Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx;$$

б) плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox . Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

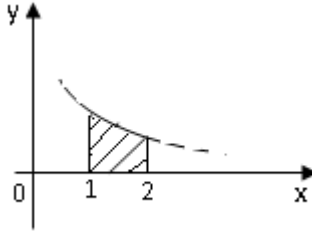
$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt;$$

в) плоска фігура обмежена кривою, заданою у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної осі. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:

$$V_\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Задача 13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо заданої осі плоскої фігури обмеженої лініями

1) $xy = 1$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$, обертається навколо осі Ox . Зробимо рисунок



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою: $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$, де $y = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$.

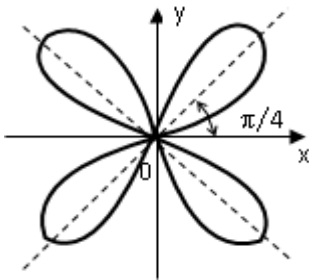
$$V_x = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) $\rho = \sin 2\varphi$, обертається навколо полярної осі.

Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою:
$$V_\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Зробимо рисунок.



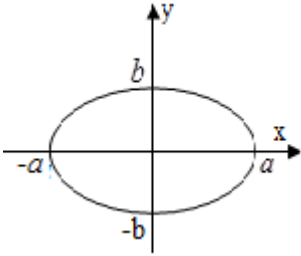
Фігура симетрична відносно осей Ox і Oy . Розглянемо частину фігури, що знаходиться в першій чверті. Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням цієї частини навколо осі Ox . Результат

подвоїмо. Маємо $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$V_\varphi = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} 8 \sin^4 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{64\pi}{105}.$$

3) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, обертається навколо осі Ox . Це рівняння еліпса.

Зробимо рисунок.



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою: $V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt$, де

$$y = b \sin t, \quad x' = -a \sin t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = 0$$

(так як фігура симетрична відносно осі Oy , подвоїмо результат).
Матимемо

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_{\pi/2}^0 b^2 \sin^2 t (-a \sin t) dt = -2\pi b^2 a \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t dt = \\ &= 2\pi b^2 a \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) d \cos t = 2\pi b^2 a \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_{\pi/2}^0 = \frac{4}{3} \pi b^2 a. \end{aligned}$$

Координати (x_c, y_c) **центра маси плоскої фігури** обчислюються за формулами: $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої фігури, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої фігури ($\gamma(x)=1$ для однорідної фігури).

а) якщо плоска фігура обмежена лініями: $y_2 = f_2(x)$ і $y_1 = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 \geq y_1$), то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$\begin{aligned} m &= \int_a^b \gamma(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx, \\ M_y &= \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot [f_2(x) - f_1(x)] dx; \end{aligned}$$

б) якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \cdot x'(t) dt,$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x(t) \cdot x'(t) dt;$$

в) якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi, \quad M_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \varphi d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cos \varphi d\varphi.$$

Задача 14. Знайти координати центра маси однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) та віссю Ox .

Знайдемо M_x, M_y, m за наведеними вище формулами.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t) \cos t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \left(t - 3 \sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = \frac{5}{2} a^3 \pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(t - \sin t) a(1 - \cos t) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (t - \sin t) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 t dt + a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} t \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt + a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} t \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt - \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 \Big|_0^{2\pi} = \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} t - 2 t \cos t + \frac{1}{2} t \cos 2t \right) dt - \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \left[\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t; \int t \cos 2t dt = \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right] = \\
&= a^3 \left(\frac{3}{4} t^2 - 2t \sin t - 2 \cos t + \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} a^3 \cdot 0 = \\
&= \frac{3}{4} a^3 \cdot 4\pi^2 = 3a^3 \pi^2; \\
m &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\
&= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2 \pi.
\end{aligned}$$

Координати центра маси однорідної фігури:

$$x_c = \frac{3a^3 \pi^2}{3a^2 \pi} = a\pi; \quad y_c = \frac{5a^3 \pi}{2 \cdot 3a^2 \pi} = \frac{5}{6} a.$$

Координати (x_c, y_c) **центра маси плоскої кривої** обчислюються за формулами $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої кривої, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої кривої ($\gamma(x)=1$ – для однорідної кривої).

а) якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

б) якщо однорідна плоска крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt;$$

в) якщо однорідна плоска крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \quad M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Задача 15. Знайти координати центра маси однорідної плоскої дуги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої над віссю Ox .

Знайдемо m , M_x , M_y за наведеними вище формулами. Маємо

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a. \quad \text{Тоді } y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ і}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$M_x = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_{-a}^a a dx = ax \Big|_{-a}^a = 2a^2.$$

$$M_y = \int_{-a}^a x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{a}{2} \int_{-a}^a \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{-a}^a = 0.$$

$$m = \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = a \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a\pi.$$

Координати центра маси однорідної плоскої дуги:

$$x_c = \frac{0}{a\pi} = 0, \quad y_c = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

Визначений інтеграл застосовують для знаходження:

а) роботи A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x) dx;$$

б) шляху s , пройденого точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$ зі швидкістю $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t) dt ;$$

в) маси m неоднорідного стержня з густиною $\gamma(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx .$$

1.2 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Знайти безпосереднім інтегруванням

1. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x^7} + 2\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} dx$ б) $\int \sin(2-3x) dx$
2. а) $\int \frac{2\sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[5]{x^3} + 5\sqrt[5]{x^8}}{\sqrt[5]{x^8}} dx$ б) $\int \cos(3+2x) dx$
3. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x^7} - 2\sqrt[4]{x^3} + 5\sqrt[4]{x^9}}{\sqrt[4]{x^7}} dx$ б) $\int \sin(8x-3) dx$
4. а) $\int \frac{3\sqrt[5]{x^2} - 2\sqrt[5]{x^7} + 5\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[5]{x^7}} dx$ б) $\int \cos(3x+5) dx$
5. а) $\int \frac{2\sqrt[3]{x^7} - \sqrt[3]{x^4} + 4\sqrt[3]{x^8}}{\sqrt[3]{x^7}} dx$ б) $\int \sin(3x+4) dx$
6. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x^7} - 3\sqrt[6]{x^5} + 7\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^7}} dx$ б) $\int \cos(2x+5) dx$
7. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt[3]{x^7} + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ б) $\int \sin(2-5x) dx$

8. а) $\int \frac{4\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{x^5}} dx$ б) $\int \cos(2-7x) dx$
9. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x^7} - 7\sqrt[5]{x^3} + 3\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^7}} dx$ б) $\int \sin(8x+3) dx$
10. а) $\int \frac{6\sqrt[4]{x^5} - 3\sqrt[4]{x^7} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^7}} dx$ б) $\int \cos(1-6x) dx$

Завдання 2 Знайти невизначений інтеграл і перевірити правильність відповіді.

1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 2x}}{\cos^2 2x} dx$ 2. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2} dx$
3. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$ 4. $\int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \operatorname{ctg}^4 3x} dx$ 6. $\int (\sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x) dx$
7. $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x}{1+9x^2} dx$ 8. $\int \frac{\operatorname{tg}^7 3x}{\cos^2 3x} dx$
9. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$ 10. $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Завдання 3. Знайти інтеграл.

1. а) $\int \frac{3x+1}{4x^2+4x+5} dx$ б) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$
2. а) $\int \frac{4x-3}{9x^2+12x+8} dx$ б) $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$

- | | |
|---|--|
| 3. а) $\int \frac{5x-3}{4x^2-4x+10} dx$ | б) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{3-x^2+2x}} dx$ |
| 4. а) $\int \frac{2x+5}{9x^2-6x+5} dx$ | б) $\int \frac{3-4x}{\sqrt{x^2+6x+5}} dx$ |
| 5. а) $\int \frac{3x-2}{4x^2+4x+17} dx$ | б) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx$ |
| 6. а) $\int \frac{5x+1}{x^2-2x+17} dx$ | б) $\int \frac{3-7x}{\sqrt{x^2-6x+7}} dx$ |
| 7. а) $\int \frac{1-7x}{x^2+6x+5} dx$ | б) $\int \frac{5x+1}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx$ |
| 8. а) $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+2} dx$ | б) $\int \frac{2-5x}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx$ |
| 9. а) $\int \frac{4-5x}{x^2+4x+13} dx$ | б) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{8x-x^2-12}} dx$ |
| 10. а) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+8} dx$ | б) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{x^2-4x+20}} dx$ |

Завдання 4. Знайти інтеграл, застосувавши формулу інтегрування по частинам.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| 1. а) $\int (3x+1)e^{2x-3} dx$ | б) $\int \arctg 2x dx$ |
| 2. а) $\int (2x-1)\sin(3x+5) dx$ | б) $\int \arcsin 3x dx$ |
| 3. а) $\int (4x-3)\cos(2x+5) dx$ | б) $\int \ln(3x-2) dx$ |
| 4. а) $\int (5x+2)\sin(2x-3) dx$ | б) $\int \ln(x^2+4) dx$ |
| 5. а) $\int (2x+3)e^{3x+4} dx$ | б) $\int \ln(2x+5) dx$ |
| 6. а) $\int (1-2x)\cos(4x+3) dx$ | б) $\int x \cdot \arctg 2x dx$ |

- | | |
|----------------------------------|---|
| 7. а) $\int (6x-5)\sin(3x+2)dx$ | б) $\int x \cdot \operatorname{arccotg} x dx$ |
| 8. а) $\int (1-3x)e^{2x+5} dx$ | б) $\int x^2 \cdot \ln x dx$ |
| 9. а) $\int (3x+5)\cos(6x-1)dx$ | б) $\int \ln(4x+3)dx$ |
| 10. а) $\int (3-2x)\sin(5x+4)dx$ | б) $\int \arccos 2x dx$ |

Завдання 5. Знайти інтеграл від ірраціональної функції.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$ | 2. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$ |
| 3. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$ | 4. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx$ |
| 5. $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ | 6. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} - \sqrt{x+3}} dx$ |
| 7. $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} + 1)\sqrt{x}} dx$ | 8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[4]{x}} dx$ |
| 9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x^2}} dx$ | 10. $\int \frac{\sqrt[4]{x+4}}{\sqrt{x+4} + 4} dx$ |

Завдання 6. Знайти інтеграл від дробово-раціональної функції.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int \frac{3x^2 + 7}{(x+1)(x^2 + 4)} dx$ | 2. $\int \frac{x-5}{(x+1)(x^2 + 9)} dx$ |
| 3. $\int \frac{2-11x}{(x-2)(x^2 + 4)} dx$ | 4. $\int \frac{36}{(x-3)(x^2 + 9)} dx$ |
| 5. $\int \frac{4x+11}{(x-1)(x^2 + 4)} dx$ | 6. $\int \frac{x^2 + 22}{(x-2)(x^2 + 9)} dx$ |
| 7. $\int \frac{12}{(x-2)(x^2 + 4)} dx$ | 8. $\int \frac{3x-27}{(x+3)(x^2 + 9)} dx$ |

9. $\int \frac{1-9x}{(x^2+4)(x-3)} dx$

10. $\int \frac{9x-14}{(x+4)(x^2+9)} dx$

Завдання 7. Знайти інтеграл від тригонометричної функції.

1. $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 5}$

2. $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$

3. $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 3}$

4. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 4}$

6. $\int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x}$

7. $\int \frac{dx}{5 \sin x + 3 \cos x + 4}$

8. $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$

9. $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x - 3}$

10. $\int \frac{dx}{3 \sin x - 2 \cos x}$

Завдання 8. Знайти визначений інтеграл.

1. а) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$

б) $\int_2^3 x \ln(x-1) dx$

в) $\int_{-1}^0 \frac{\sqrt[4]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx$

2. а) $\int_2^3 \frac{\ln(y-1)}{y-1} dy$

б) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

в) $\int_0^5 \frac{dx}{3x+2\sqrt{3x+1}}$

3. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x dx$

б) $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$

в) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

4. а) $\int_{-1}^0 x e^{-x^2} dx$

б) $\int_1^2 (x-1) \ln x dx$

в) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

5. а) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ б) $\int_{-1/2}^0 x e^{-2x} dx$ в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$
6. а) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx$ б) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x dx$ в) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$
7. а) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ б) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$ в) $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$
8. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos x} \sin x dx$ б) $\int_0^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx$ в) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}$
9. а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}$ б) $\int_{-3}^0 (x-2) e^{-\frac{x}{3}} dx$ в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$
10. а) $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ б) $\int_{\pi/9}^{\pi/6} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$ в) $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$

Завдання 9. Знайти невідкладні інтеграли.

1. а) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$ б) $\int_{-1,5}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
2. а) $\int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}$ б) $\int_0^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$
3. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$ б) $\int_1^3 \frac{dx}{3-x}$
4. а) $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$ б) $\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{(2x+1)^2}$

- | | |
|--|--|
| 5. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ | б) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{(3x-1)^3}$ |
| 6. а) $\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ | б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-3x}}$ |
| 7. а) $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ | б) $\int_{-5/3}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$ |
| 8. а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$ | б) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-4)^4}$ |
| 9. а) $\int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2}$ | б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{16-4x}}$ |
| 10. а) $\int_1^{\infty} \frac{2x dx}{3+x^4}$ | б) $\int_2^{2.5} \frac{dx}{(2x-5)^3}$ |

Завдання 10. Обчислити площу фігури, обмежену лініями

- | | |
|---|---|
| 1. а) $y = x^2, y = 3 - 2x$ | 2. а) $y = \sqrt{x}, y = x^3$ |
| б) $\begin{cases} x = 7 \cos^3 t \\ y = 7 \sin^3 t \end{cases}$ | б) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ |
| в) $\rho = 3 \cos 2\varphi$ | в) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ |
| 3. а) $y = 1 + x^3, y = 9, x = 0$ | 4. а) $xy = 1, x = 1, x = 2; y = 0$ |
| б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ | б) $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 6 \sin t \end{cases}$ |
| $y = 0; 0 \leq t \leq 2\pi$ | |
| в) $\rho = 2 \sin 3\varphi$ | в) $\rho = 4 \cos 3\varphi$ |
| 5. а) $y^2 = 1 + x, y^2 = 9 - x$ | 6. а) $y^2 = 4x; x^2 = 4y$ |

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \rho = 2(1 + \cos \varphi)$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \rho = 3\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$7. \quad \text{а)} \quad y^2 = 9x; y = 3x$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi/3$$

$$\text{в)} \quad \rho = 2 \sin 4\varphi$$

$$8. \quad \text{а)} \quad y = x^2, y = 2 - x^2$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

$$y = 0; 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{в)} \quad \rho = 1 - \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$9. \quad \text{а)} \quad xy = 6; x + y = 7$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = t^3 \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \rho = e^{2\varphi}, \ln 3 \leq \varphi \leq \ln 4$$

$$10. \quad \text{а)} \quad y \leq x + 1; y = \cos x; y = 0$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t + t^3 \end{cases}, 1 \leq t \leq 3$$

$$\text{в)} \quad \rho = 2(1 + \sin \varphi)$$

Завдання 11. Знайти довжину дуги лінії.

$$1. \quad \text{а)} \quad y = 1 - \ln \cos x \quad 0 \leq x \leq \pi/3$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = \sqrt{3}t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} \text{ (петля)}$$

$$\text{в)} \quad \rho = \sin^3(\varphi/3), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$2. \quad \text{а)} \quad y^2 = (x+1)^3, x = 4$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$\text{в)} \quad \rho = 5 \sin \varphi$$

$$3. \quad \text{а)} \quad y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1/2$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x = 3 \cos^3 t \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3$$

$$\text{в)} \quad \rho = 5(1 + \cos \varphi)$$

4. а) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq \ln 2$ б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$ (петля)
- в) $\rho = e^{4\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$
5. а) $y^2 = x^3, x = 5$ б) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases};$
 $0 \leq t \leq \pi$
- в) $\rho = 6 \cos^3 \varphi / 3, 0 \leq \varphi \leq \pi / 2$
6. а) $y = \ln \sin x,$
 $\pi / 3 \leq x \leq \pi / 2$ б) $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases};$
 $0 \leq t \leq \pi$
- в) $\rho = 4 \cos \varphi$
7. а) $y = \frac{1}{2} x^2; 0 \leq x \leq 1$ б) $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$
- в) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$
8. а) $y = e^x + 4,$
 $\ln \sqrt{2} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$ б) $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 5 \sin^2 t \end{cases};$
 $0 \leq t \leq \pi / 2$
- в) $\rho = e^{2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$
9. а) $y = \ln(x^2 - 1); 2 \leq x \leq 3$ б) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2$
- в) $\rho = 1 + \sin \varphi$
10. а) $y = \ln \cos x; \pi / 6 \leq x \leq \pi / 3$ б) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
- в) $\rho = 3 \sin \varphi$

Завдання 12 Обчислити площу поверхні, утворену обертанням лінії L навколо вказаної осі.

1. L $y = x^3$, відсічена прямими $y = 0$; $x = 2$ (Ox)
2. L $y^2 = 2 + x$, відсічена прямою $x = 1$ (Ox)
3. L $y = 5x$, між прямими $x = 0$; $x = 1$ (Ox)
4. L $y = \frac{x^3}{3}$, між прямими $x = -1$; $x = 1$ (Ox)
5. L $2y = x^2$, відсічена прямою $y = \frac{3}{2}$; (Oy)
6. L $y = \sqrt{x}$, відсічена прямою $y = x$ (Ox)
7. L $x^2 = 4 + y$, відсічена прямою $y = 2$; (Oy)
8. L $3x = y^3$, між прямими $y = 0$; $y = 2$ (Oy)
9. L $y^2 = 2x$, відсічена прямою $2x = 3$ (Ox)
10. L $y^2 = 4 + x$, відсічена прямою $x = 2$ (Ox)

Завдання 13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вказаної осі.

1. $y = x^2$; $y^2 = 8x$ (Oy)
2. $y = 4 \sin x$; $y = 2 \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$ (Ox)
3. $y = e^{-x}$; $x = -3$; $x = 1$; $y = 0$ (Ox)
4. $y = 2 - x^2 / 2$; $x + y = 2$ (Oy)
5. $y = \operatorname{tg} x$; $y = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$ (Ox)
6. $y = 2x - x^2$; $y = 0$ (Ox)
7. $y = x^3$; $x = 0$; $y = 8$ (Oy)
8. $xy = 4$; $2x + y - 6 = 0$ (Ox)
9. $y = 2^x$; $y = 2$; $x = 0$ (Ox)
10. $y^2 = 4 - x$; $x = 0$ (Oy)

Завдання 14. Знайти координати центра маси однорідної плоскої фігури Φ :

1. Φ $x + y = 4; x = 0; y = 0$
2. Φ $y = x^2; y = 0; x = 2$
3. Φ $y = \sqrt{4 - x^2}; y = 0$
4. Φ $y = 2\sqrt{x}; x = 2; y = 0$
5. Φ $y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi; y = 0$
6. Φ $x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \geq 0$
7. Φ $y = 4 - x^2; y = 0$
8. Φ $y = \cos x; y = 0; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
9. Φ $y = e^{2x}; y = 0; 0 \leq x \leq \ln 3$
10. Φ $y = 2x - x^2; y = 0$

Завдання 15. Знайти координати центра маси однорідної плоскої кривої L .

1. L $y = 2ch \frac{x}{2}, -2 \leq x \leq 2$
2. L перша арка циклоїди:
 $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
3. L $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ у першому квадранті.
4. L $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3, 0 \leq t \leq 1$
5. L $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
6. L $x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t$ у другому квадранті.
7. L $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, 0 \leq t \leq \pi / 2$
8. L $x = (\cos t + t \sin t), y = (\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \pi$
9. L $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
10. L $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, \pi / 2 \leq t \leq \pi$

2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

2.1 Вказівки до виконання контрольної роботи по темі «Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли. Теорія поля»

2.1.1 Подвійний інтеграл. Його обчислення

Подвійний інтеграл у декартових координатах записується $\iint_D f(x, y) dx dy$, де $f(x, y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y , D – область інтегрування.

Основні властивості подвійного інтеграла

$$\text{а) } \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy ;$$

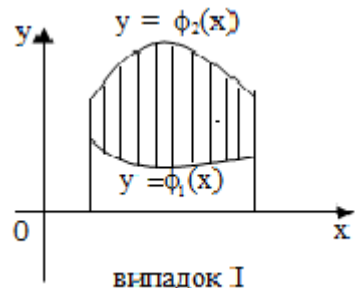
$$\text{б) } \iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ де } k - \text{const} ;$$

в) Якщо область D розбита на дві області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy .$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів.

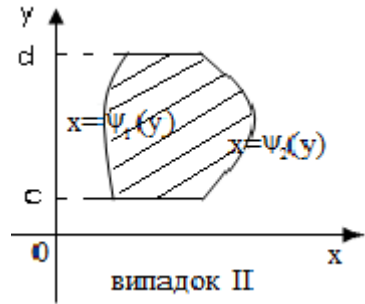
Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $x = a$ та $x = b$ ($a < b$) і двома неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$, кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній



точці, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, то область D називають правильною в напрямі осі Oy . В цьому випадку справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (\text{випадок I}).$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $y = c$ та $y = d$ ($c < d$) і двома неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою лише в одній точці, причому $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, то область D називають правильною в напрямі осі Ox . В цьому випадку справедлива формула



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (\text{випадок II}).$$

У випадку I інтеграл по y називають внутрішнім, а по x – зовнішнім, для випадку II – навпаки.

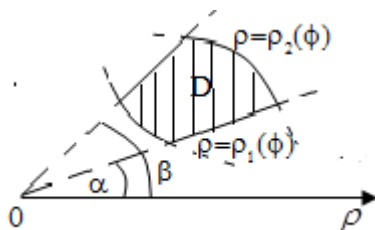
Спочатку знаходимо внутрішній інтеграл, враховуючи, що змінна інтегрування зовнішнього інтеграла є сталою, а потім знаходимо зовнішній інтеграл.

Зауваження: 1) межі інтегрування зовнішнього інтегралу завжди стали, а межі інтегрування внутрішнього інтегралу у загальному випадку є функціями зовнішньої змінної інтегрування; 2) якщо область D є більш складною, ніж області у випадках I і II, то її необхідно розбити прямими, перпендикулярними до осі Ox (випадок I) або до осі Oy (випадок II) на такі частини, до яких можна застосувати формули наведені вище. Інтеграл по області D буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній частині. 3) Якщо область D прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то межі інтегрування внутрішнього інтегралу є сталими.

В деяких випадках подвійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши від декартової системи координат до полярної системи координат. Перехід здійснюється за формулами: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho.$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) і двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:



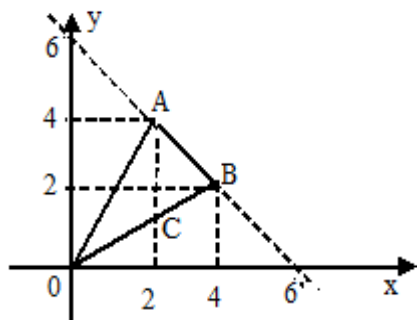
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Задача 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy$ по прямокутній області інтегрування $D: 0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 4$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy &= \int_0^1 dx \int_1^4 (x^3 - \sqrt{y}) dy = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Big|_1^4 dx = \\ &= \int_0^1 \left(4x^3 - \frac{2}{8} \cdot 8 - x^3 + \frac{2}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{14}{3} \right) dx = \\ &= \left(3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{14}{3} x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{14}{3} = \frac{9 - 56}{12} = -\frac{47}{12}. \end{aligned}$$

Задача 2. Записати подвійний інтеграл через повторний, якщо область D обмежена лініями: $y = 2x$, $2y - x = 0$, $x + y - 6 = 0$.



Розв'язання.

Побудуємо область D .

Розв'язуючи системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 2y - x = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{дістанемо} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ці розв'язки є координатами точок $A(2,4)$ і $B(4,2)$. Область

D – це трикутник OAB .

Розіб'ємо її на дві області D_1

(трикутник OAC) і D_2 (трикутник CAB). Область D_1 обмежена

лініями: $y = 2x$; $x = 2$; $y = \frac{x}{2}$, а область D_2 обмежена лініями:

$$x + y - 6 = 0; y = \frac{x}{2}; x = 2.$$

$$\text{Маємо} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

$$\text{Тоді} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} f(x, y) dy.$$

Можна записати подвійний інтеграл через повторний по випадку II.

Задача 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі.

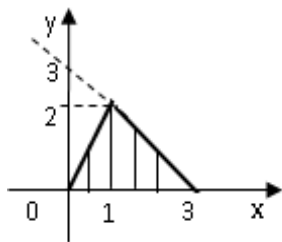
$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^{3-y} f(x, y) dx.$$

Розв'язання.

Записуємо рівняння ліній, які обмежують область інтегрування D .

Для цього прирівнюємо змінну інтегрування до її меж інтегрування:

$$D: \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} x=y/2 \\ x=3-y \end{cases}.$$



Намалюємо область D . Змінити порядок інтегрування – означає перейти від повторного інтегралу (випадок II) до повторного інтегралу (випадок I). У випадку II мали один повторний інтеграл, так як область D знаходилась між двома перпендикулярами $y_1=0, y_2=2$ і двома неперервними

лініями: $x_1 = y/2, x_2 = 3 - y$.

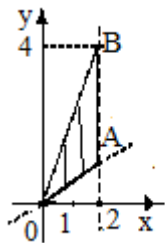
У випадку I необхідно опустити перпендикуляри на вісь Ox з точок перетину ліній, що обмежують область D . Таких перпендикулярів буде три: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$. Вони розіб'ють область D на дві частини D_1 і D_2 , для кожної з яких записуємо повторні інтеграли. Для D_1 маємо $0 \leq x \leq 1; y_1 = 0; y_2 = 2x$. Для D_2 маємо $1 \leq x \leq 3; y_1 = 0; y_2 = 3 - x$.

$$\text{Тоді } \int_0^2 dy \int_{y/2}^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$$

Задача 4. Знайти інтеграл $\iint_D (2x + y) dx dy$, де $D: \begin{cases} y = 2x \\ y = x/2 \\ x = 2 \end{cases}$

Розв'язання.

Побудуємо область D . Область D - це трикутник OAB .



Маємо випадок I, тому що область D знаходиться між двома перпендикулярами: $x=0; x=2$. Зміну x дивимось зліва направо (від лівого перпендикуляра до правого), а зміну y – знизу вгору, розв'язуючи рівняння ліній, через які входимо в область (нижня межа внутрішнього інтеграла) і виходимо з неї (верхня межа внутрішнього інтеграла) відносно

змінної y . В нашому випадку $0 \leq x \leq 2$; $y_1 = x/2$; $y_2 = 2x$.

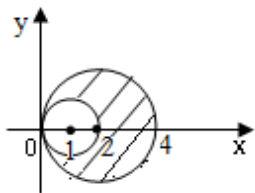
$$\begin{aligned} \iint_D (2x + y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} (2x + y) dy = \int_0^2 dx \cdot \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x/2}^{2x} = \\ &= \int_0^2 \left(2x \cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x}{2} + \frac{(x/2)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(4x^2 + 2x^2 - x^2 + \frac{x^2}{8} \right) dx = \int_0^2 5\frac{1}{8} x^2 dx = \frac{41}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{41}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{41}{3}. \end{aligned}$$

Задача 5. Перейшовши до полярних координат, обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, якщо область D обмежена колами: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Розв'язання.

Деякі подвійні інтеграли легше обчислити у полярній системі координат ніж у прямокутній декартовій системі координат. Відомо, що полярні координати ρ і φ довільної точки зв'язані з її декартовими координатами x і y формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, а елемент площі $dx dy$ у декартових координатах зв'язаний з елементом площі у полярних координатах формулою:

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi$$



Побудуємо область D . Записуємо рівняння кіл у канонічному вигляді:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Знайдемо центри і радіуси кіл. У заданому подвійному інтегралі перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді

підінтегральна функція матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\ \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} &= \sqrt{\rho^2} = \rho. \end{aligned}$$

Записуємо полярні рівняння заданих кіл:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \quad \text{або} \quad \rho = 2 \cos \varphi,$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi \quad \text{або} \quad \rho = 4 \cos \varphi.$$

Якщо кут φ змінюватиметься на відрізьку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то ρ змінюється від $2 \cos \varphi$ до $4 \cos \varphi$. Подвійний інтеграл записуємо у полярних координатах і обчислюємо його через повторний інтеграл.

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \rho^2 d\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^3 \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (64 \cos^3 \varphi - 8 \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{56}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{112}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \frac{112}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{112}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{224}{9}. \end{aligned}$$

2.1.2 Застосування подвійних інтегралів

1) Обчислення площі плоскої фігури.

Площа плоскої області D , заданої в площині xOy , дорівнює

$$S = \iint_D dx dy.$$

а) якщо область D визначена нерівностями: $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, то площа області D дорівнює

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

б) якщо область D визначена нерівностями: $c \leq y \leq d$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, то площа області D дорівнює

$$S = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx.$$

в) якщо область D визначена нерівностями у полярних координатах: $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, то площа області D дорівнює

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho.$$

2) Обчислення об'єму тіла.

а) об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D , що лежить на площині xOy , а зверху поверхнею $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$), яка неперервна в області D , знаходиться за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

б) якщо циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = f_2(x, y)$, а знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$ і проектується на площину xOy в область D , то об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy.$$

3) Обчислення площі поверхні.

а) якщо поверхня, яка задана рівнянням $z = f(x, y)$, проектується на площину xOy в область D і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$

неперервні в цій області, то площу Q поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy.$$

б) якщо поверхня задана рівнянням виду $x = f(y, z)$, то площу Q поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f_y'^2(y, z) + f_z'^2(y, z)} dy dz,$$

де D – проекція поверхні на площину yOz .

в) якщо поверхня задана рівнянням виду $y = f(x, z)$, то площу Q поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, z) + f_z'^2(x, z)} dx dz,$$

де D – проекція поверхні на площину xOz .

4) Маса плоскої пластини.

Нехай на площині xOy пластина має форму замкненої області D , в кожній точці якої відома густина $\gamma = \gamma(x, y)$. Маса такої пластини визначиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

5) Центр маси пластини, статичні моменти.

Центр $(x_c; y_c)$ маси пластини обчислюється за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де $M_x = \iint_D y\gamma(x, y)dx dy$, $M_y = \iint_D x\gamma(x, y)dx dy$ – статичні моменти

пластини відносно осей Ox та Oy відповідно.

Якщо пластина однорідна, то густина $\gamma = const$.

б) Моменти інерції пластини.

Моменти інерції пластини I_x та I_y , відносно координатних осей Ox і Oy обчислюється за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат:

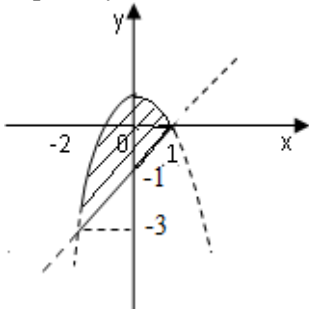
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy.$$

Зауваження: якщо в формулах для обчислення моментів інерції покласти $\gamma(x, y) = 1$, то одержимо геометричні моменти інерції.

Задача 6. Обчислити площу області D , обмежену лініями: $y = 1 - x^2$; $x - y = 1$.

Розв'язання.

Побудуємо область обмежену заданими лініями. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру.



Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x - y = 1 \end{cases}. \text{ Дістанемо } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

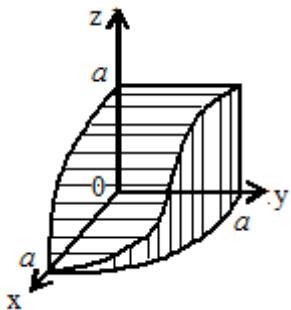
Фігура знаходиться між двома перпендикулярами $x = -2$ та $x = 1$. В цей час y змінюється від $y_1 = x - 1$ до $y_2 = 1 - x^2$. Запишемо подвійний інтеграл через повторний (випадок I):

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy = \int_{-2}^1 dx \cdot y \Big|_{x-1}^{1-x^2} = \int_{-2}^1 (1 - x^2 - x + 1) dx = \\
 &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 5 - \frac{1}{2} = \\
 &= 4,5 \text{ (кв. од.)}
 \end{aligned}$$

Задача 7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = a^2$ та $x^2 + z^2 = a^2$.

Розв'язання.

Розглянемо восьму частину заданого тіла. Поверхня, яка обмежує її зверху проєктується в площину xOy у чверть кола радіуса a з центром в точці O . Зробимо рисунок цієї частини тіла:



Для обчислення об'єму циліндричного тіла, яке обмежене знизу поверхнею $z_1 = f_1(x, y)$ а зверху - поверхнею $z_2 = f_2(x, y)$, твірні якого паралельні осі Oz , застосовують формулу:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D [z_2 - z_1] dx dy = \\
 &= \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy.
 \end{aligned}$$

В нашому випадку $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Тоді

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} V &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\
 &= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3.
 \end{aligned}$$

Маємо $V = 8 \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{16}{3} a^3$ (куб.од).

Задача 8. Знайти площу частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що міститься в середині циліндру $x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання.

Зробимо малюнок поверхні. Площу поверхні $z = f(x, y)$, яка проєкується на площину xOy у вигляді області D обчислюють за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

D - проєкція даної поверхні на площину xOy . Розв'язуємо рівняння конуса відносно z : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Знайдемо частинні похідні по x та y :

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Область D у площині xOy є круг,

обмежений колом $x^2 + y^2 = 2x$.

Знайдемо підінтегральну функцію:

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2$$

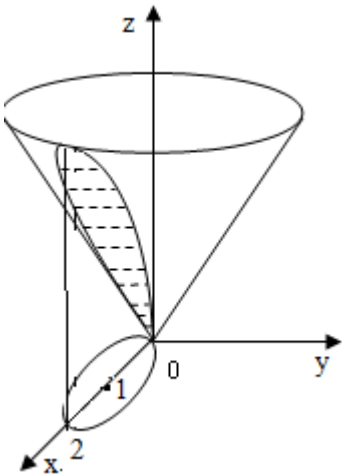
$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2};$$

Так як область інтегрування D є круг, то перейдемо у полярну систему координат:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, dx dy = \rho d\rho d\varphi.$$

Запишемо рівняння кола у полярних координатах:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

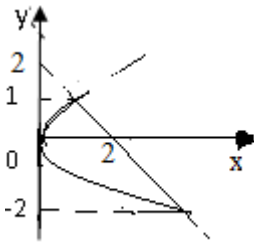


$$\begin{aligned}
 Q &= \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \rho^2 \Big|_0^{2\cos\varphi} = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2\sqrt{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2} \text{ (кв. од.)}.
 \end{aligned}$$

Задача 9. Знайти масу пластинки, яка обмежена лініями $x = y^2$ і $x + y = 2$, що утворюють замкнену область D на площині xOy , а густина в кожній точці визначається неперервною функцією $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$.

Розв'язання.

Побудуємо область D .



Маса такої пластинки визначається за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$$

Подвійний інтеграл відповідає випадку II. Опускаємо перпендикуляри на вісь Oy .

Маємо $-2 \leq y \leq 1$, $y^2 \leq x \leq 2 - y$. Тоді маса пластинки:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \int_{-2}^1 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{y^2}^{2-y} = \\
 &= \int_{-2}^1 \left(\frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \frac{y^6}{3} - y^4 \right) dy = \\
 &= \int_{-2}^1 \left(-\frac{1}{3}(y-2)^3 + 2y^2 - y^3 - \frac{1}{3}y^6 - y^4 \right) dy =
 \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \frac{(y-2)^4}{4} + \frac{2}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + 4 - \frac{128}{21} - \frac{32}{5} = \frac{639}{35}.$$

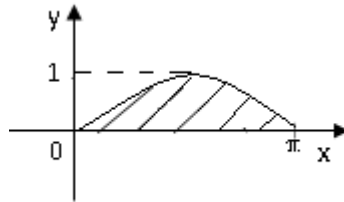
Задача 10. Знайти центр маси однорідної пластинки, обмеженої кривою $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ та віссю Ox .

Розв'язання.

Так як пластинка однорідна, то $\gamma(x, y) = \text{const}$. Координати x_c та y_c центра маси пластинки D знаходимо за формулами:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}$$

Зробимо рисунок пластинки:



Обчислимо інтеграли.

$$\iint_D dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^\pi x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi x dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi x \sin x dx =$$

$$= \left[u = x, dv = \sin x dx \right] = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^{\pi} dx \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Тоді $x_c = \frac{\pi}{2}$; $y_c = \frac{\pi}{8}$.

2.1.3 Потрійний інтеграл

Потрійний інтеграл в декартових прямокутних координатах зводиться до обчислення трикратного інтеграла.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

де V – циліндричне тіло, проекція якого на площину xOy є область D . Воно обмежене знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, а зверху – $z = z_2(x, y)$.

На практиці найбільш вживаними у просторі є циліндричні та сферичні координати.

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz,$$

де $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Добуток $\rho d\rho d\varphi dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат.

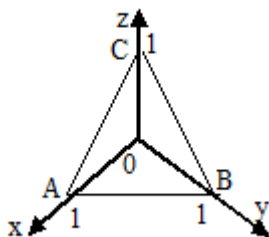
У сферичній системі координат $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$; $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$; $z = \rho \cos \theta$. Елементом об'єму в сферичних координатах є добуток $x = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$. Потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Задача 11. Обчислити $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, якщо область V обмежена площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання.

Область V – піраміда, область D в площині xOy – прямокутний трикутник AOB .



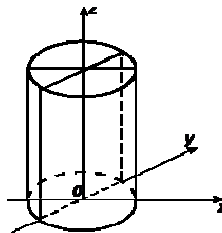
$$\begin{aligned} \iiint_V (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \right]_0^{1-x} dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right] dx = \left(\frac{1}{6}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{(1-x)^4}{24} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

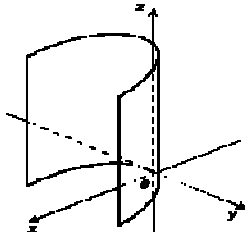
Зауваження. При розв'язуванні деяких задач необхідно використовувати поверхні другого порядку. До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, конічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо їх і наведемо канонічні рівняння та вигляд цих поверхонь.

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напряму). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. Наприклад, рівняння $f(x, y) = 0$ описує циліндричну поверхню з напрямними в площині xOy і твірними, паралельними осі Oz . Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають **циліндричними поверхнями другого порядку**.

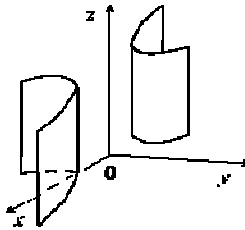
Циліндри поділяються на *еліптичний* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x^2 + y^2 = R^2$ – *круговий циліндр*)



параболічний $y^2 = 2px$

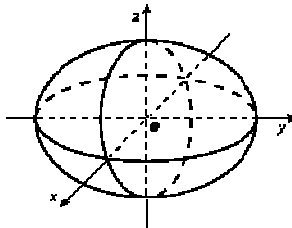


гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої L , називають **поверхнею обертання**. Розглянемо деякі з них.

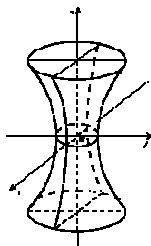
Канонічне рівняння **еліпсоїда** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Числа a, b, c називаються **півосями** еліпсоїда.



Якщо $a=b=c$ маємо **сферу** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з центром в початку координат.

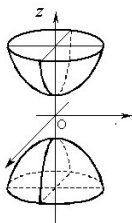
Канонічне рівняння *однопорожнинного гіперboloїда*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



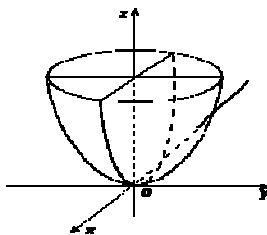
Канонічне рівняння *двопорожнинного гіперboloїда*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

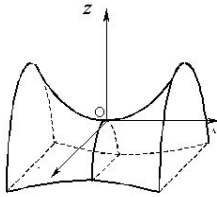


Обидва гіперboloїди є симетричні відносно координатних площин, а початок координат точка O є їх *центром* симетрії. Числа a, b, c називаються *півосями* гіперboloїда.

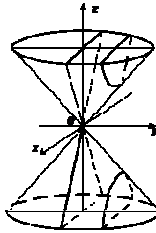
Канонічне рівняння *еліптичного параболоїда* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$



Канонічне рівняння *гіперболічного параболоїда* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$



Канонічне рівняння *конуса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



2.1.4 Криволінійні інтеграли

1) Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги кривої).

Це інтеграл виду $\int_L f(x, y) dl$, де функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L .

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду:

а) криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl ;$$

$$\text{б) } \int_L (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl \pm \int_L f_2(x, y) dl ;$$

$$\text{в) } \int_L k \cdot f(x, y) dl = k \int_L f(x, y) dl , \text{ де } k = \text{const} ;$$

г) якщо крива $L = L_1 + L_2$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl .$$

Криволінійний інтеграл першого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу:

а) якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx ;$$

б) якщо крива L задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , t \in [t_1, t_2] \text{ то}$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt .$$

в) у випадку просторової кривої, яка має рівняння $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) матимемо

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt ;$$

Криволінійний інтеграл першого роду застосовують для знаходження:

а) обчислення довжини кривої AB здійснюється за формулою:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl ;$$

б) якщо циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі Oz , опирається на криву L в площині xOy , а зверху обмежена поверхнею $z = f(x, y)$, то площа такої циліндричної поверхні обчислюється за формулою:

$$Q = \int_L f(x, y) dl ;$$

в) маса матеріальної кривої обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl ,$$

де $\gamma(x, y)$ – лінійна густина;

г) координати $(x_c; y_c)$ центра маси кривої L знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_L x \gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_L y \gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} ,$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої відносно осей Ox і Oy . У випадку, коли розглядається однорідна матеріальна крива, слід покласти $\gamma(x, y) = 1$;

д) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат обчислюються за формулами:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl , \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl , \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl .$$

Задача 12. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 y dl$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 4$, розміщена в першій чверті ($x \geq 0, y \geq 0$).

Розв'язання.

Записуємо рівняння кола у вигляді $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x < 2$. Знайдемо

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx, \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$\text{Тоді } \int_L x^2 y dl = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

2) Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах).

Це інтеграл виду $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, де функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ визначені і обмежені на кривій L .

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду:

а) криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

$$\text{б) } \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy;$$

Інші властивості аналогічні властивостям інтеграла першого роду.

Криволінійний інтеграл другого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу:

а) якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx;$$

б) якщо крива L задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_1; t_2], \text{ то}$$

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не

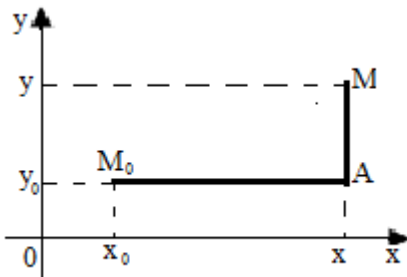
залежить від форми кривої AB , яка сполучає точки A та B і $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, а вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU$ (є

повним диференціалом функції $U(x, y)$).

Якщо вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. В цьому випадку можна поновити функцію по її повному диференціалу $dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Для цього інтегруємо вираз $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ до довільної точки $M(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

Точку M_0 вибираємо так, щоб функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ були визначені в ній.



Виберемо шлях інтегрування від точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$ у вигляді ламаної M_0AM . Координати точки $A(x, y_0)$. Матимемо

$$U(x, y) = \int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

1) пряма M_0A має рівняння $y = y_0$, $dy = 0$, $x_0 \leq x \leq x$:

$$\int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx;$$

2) пряма AM має рівняння $x = const$, $dx = 0$, $y_0 \leq y \leq y$:

$$\int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

Остаточнo маємо

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C.$$

Аналогічно можна отримати, що

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C.$$

Якщо L – замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними першого порядку: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D включаючи межу

L , то справедлива формула Гріна:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

де L – замкнений контур, який обмежує область D і обхід його вибирається таким, щоб область D залишалась зліва.

Криволінійний інтеграл другого роду застосовують для знаходження:

а) площі плоскої фігури D , обмеженої кривою L , за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx;$$

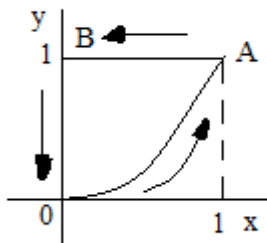
б) роботи сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L :

$$A = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Задача 13. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L xy dx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Розв'язання.

Для замкнутого контуру існує лише два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контуру). При додатній орієнтації контуру він завжди залишається зліва при його обході. Маємо



$$\oint_L xy dx + dy = \int_{OA} xy dx + dy + \int_{AB} xy dx + dy + \int_{BO} xy dx + dy.$$

а) рівняння OA : $y = x^2$; $dy = 2x dx$; $0 \leq x \leq 1$

$$\int_{OA} xydx + dy = \int_0^1 x^3 dx + 2x dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4};$$

б) рівняння AB : $y=1$; $dy=0$, x змінюється від 1 до 0

$$\int_{AB} xydx + dy = \int_1^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2};$$

в) рівняння BO : $x=0$; $dx=0$, y змінюється від 1 до 0

$$\int_{BO} xydx + dy = \int_1^0 dy = y \Big|_1^0 = -1.$$

$$\text{Тоді } \oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Задача 14. Знайти функцію $U(x, y)$, якщо відомий її повний диференціал

$$dU = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$$

Розв'язання.

В нашому прикладі позначимо $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ і $Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Перевіримо, що заданий вираз є повним диференціалом функції $U(x, y)$. Знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y \text{ та } \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вираз є повним диференціалом і інтеграл від нього не залежить від шляху інтегрування. Інтегруємо вираз від точки $O(0,0)$ до довільної точки $M(x, y)$.

Згідно наведеної вище формули маємо:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x (x^2 + 2x \cdot 0 - 0)dx + \int_0^y (x^2 - 2xy + y^2)dy + C = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y + C = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C.$$

2.1.5 Елементи теорії поля

Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля

Скалярне поле задано, якщо кожній точці M поставлено у відповідність певне число $u(M)$. В прямокутній декартовій системі координат скалярне поле може бути задано функцією $u(M) = u(x, y, z)$.

Похідна скалярного поля $u(M)$ в напрямі l , заданому вектором $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Якщо в просторі вибрана декартова система координат, то градієнт функції $u(M)$ обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Між похідною поля $u(M)$ за напрямом l і градієнтом існує наступний зв'язок

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{a}^o \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u = |\overrightarrow{\text{grad}} u| \cdot \cos \theta = \text{пр}_{\vec{a}^o} \overrightarrow{\text{grad}} u,$$

де $\vec{a}^o = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \cos \beta \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}$ – одиничний вектор напрямку l , а θ – кут між градієнтом та вектором $\vec{a}^o$. З попередньої формули випливає, що максимальне значення похідної за напрямом досягається в напрямі градієнта і її значення дорівнює модулю градієнта

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{\text{grad}} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Якщо у тривимірному просторі поверхня задана рівнянням $\varphi(x, y, z) = c$, то градієнт буде перпендикулярний до цієї поверхні в довільній її точці. Тобто нормальний до поверхні вектор $\vec{n}$ може бути записаний у вигляді $\vec{n} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$, а нормальний одиничний вектор буде дорівнювати $\vec{n}^o = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi}{|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi|}$.

Векторне поле. Дивергенція, ротор, циркуляція векторного поля

Якщо кожній точці M в деякій області V поставлено у відповідність вектор $\vec{F}(M)$, то задано векторне поле. У прямокутній декартовій системі координат вектор $\vec{F}(M)$ можна записати у вигляді

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Дивергенцією векторного поля $\vec{F}(M)$ в точці M називається об'ємна густина потоку векторного поля

$$\text{div } \vec{F}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_o \, d\sigma,$$

де V – об'єм, обмежений замкненою поверхнею σ , яка містить точку M .

В декартовій системі координат дивергенція обчислюється за формулою

$$\text{div } \vec{F}(M) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}.$$

Векторному полю $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається ротором поля $\vec{F}(M)$ і визначається рівністю

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Лінійним інтегралом векторного поля

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

повздож лінії l називається криволінійний інтеграл

$$w = \int_l P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Оскільки $d\vec{r} = d(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$, лінійний інтеграл можна записати у векторній формі $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Циркуляцією векторного поля $\vec{F}(M)$ називається лінійний інтеграл цього поля повздож замкнутого шляху l : $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Формула Остроградського – Гаусса

Нехай задано векторне $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області V простору, яка обмежена замкнутою гладкою поверхнею S , то справедлива формула Остроградського – Гаусса

$$\oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S . Ліва частина формули може бути записана інакше. Тоді

$$\oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Формулі Остроградського – Гаусса можна надати векторний зміст

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^o \cdot ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV, \text{ де } \vec{n}^o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) - \text{зовнішній}$$

нормальний одиничний вектор до поверхні S . За допомогою формули

Остроградського – Гаусса зручно обчислювати потік векторного поля через замкнену поверхню.

Формула Стокса

Нехай задано векторне $\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$.

Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку на поверхні S і l – замкнений контур, який обмежує поверхню S , то справедлива формула Стокса

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS$$

Цій формулі можна надати векторний зміст

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS.$$

Тобто циркуляція по замкнутому контуру l дорівнює потоку ротора через поверхню S , яка натягнута на контур l .

Задача 15. Знайти похідну функції $u(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ у напрямі вектору $\overline{M_1 M_2}$ в т. M_1 та $\overline{\text{grad } u}(M_1)$, якщо $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(-2, -1, 1)$.

Розв'язання.

Похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектору $\overline{M_1 M_2}$ в точці M_1 обчислюємо за формулою

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overline{M_1 M_2}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - напрямні косинуси вектору $\overline{M_1 M_2}$.

Знайдемо вектор $\overline{M_1 M_2} = (-3, -2, 2)$, його напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{17}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} = -\frac{3}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_1} = -\frac{5}{2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\sqrt{x}}{z^2} + 2xy, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_1} = 1.$$

Маємо

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial M_1 M_2} = -\frac{3}{2} \left(-\frac{3}{\sqrt{17}} \right) - \frac{5}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}.$$

Гradient функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_1 знайдемо за формулою:

$$\overrightarrow{grad} u(M_1) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} \bar{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_1} \bar{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_1} \bar{k},$$

$$\overrightarrow{grad} u(M_1) = -\frac{3}{2} \bar{i} - \frac{5}{2} \bar{j} + \bar{k}$$

Задача 16. Знайти для векторного поля $\bar{a} = xy^2 z^2 \bar{i} + x^2 yz^2 \bar{j} + xyz \bar{k}$ $\overrightarrow{rot} \bar{a}(M_0)$, $|\overrightarrow{rot} \bar{a}(M)|$, $div \bar{a}(M_0)$, $de M_0(2, -1, 1)$.

Розв'язання.

За означенням ротор векторного поля $\bar{a} = \bar{a}(M)$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходиться за формулою

$$\overrightarrow{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \text{ де } \bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

В нашому прикладі

$$\overline{rot \vec{a}}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z} \right) -$$

$$- \vec{j} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} \right) =$$

$$= (xz - 2x^2yz)\vec{i} - (yz - 2xy^2z)\vec{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\vec{k}$$

Знайдемо ротор в точці M_0 і його модуль

$$\overline{rot \vec{a}}(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j}, \quad |\overline{rot \vec{a}}(M_0)| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}.$$

За означенням, дивергенція векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходиться за формулою:

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В нашому випадку

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = y^2z^2 + x^2z^2 + xy.$$

Дивергенція в точці M_0 : $\text{div } \vec{a}(M_0) = 4$.

Задача 17. Обчислити потік векторного поля

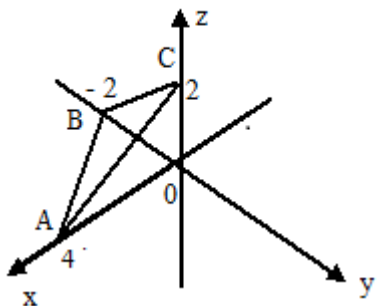
$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x - 2y + 2z = 4$ та координатними площинами, двома способами:

1) за означенням;

2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

1) Записуємо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$ і побудуємо її. Маємо піраміду $AOBC$. Обчислимо потік за допомогою



поверхневого інтеграла

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^\circ dS, \text{ де } S - \text{зовнішня}$$

поверхня піраміди $AOBC$. Обчислимо потік через кожну грань піраміди:

а) $\triangle AOC$ лежить у площині xOz і має рівняння $y=0$, нормальний

вектор $\vec{n} = (0; 1; 0)$, $\vec{n}^\circ = j$, $dS = dx dz$. $AC: x + 2z = 4$,

$0 \leq x \leq 4$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ = 2y - x$; $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ \Big|_{y=0} = -x$. Потік через $\triangle AOC$:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_{\triangle AOC} x dS = - \iint_{\triangle AOC} x dx dz = - \int_0^4 x dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dz = - \int_0^4 x \left(2 - \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= - \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^4 = - \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

б) $\triangle AOB$ лежить у площині xOy і має рівняння $z=0$, нормальний вектор $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Так як мається на увазі зовнішня сторона, то

$\vec{n} = (0; 0; -1)$, $\vec{n}^\circ = -k$, $dS = dx dy$, $AB: x - 2y = 0$; $0 \leq x \leq 4$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ = -z$; $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ \Big|_{z=0} = 0$. Потік через $\triangle AOB$: $\Pi_2 = \iint_{\triangle AOB} 0 \cdot dx dy = 0$.

в) $\triangle BOC$ лежить у площині yOz і має рівняння $x=0$, нормальний вектор $\vec{n} = (1; 0; 0)$. Так як мається на увазі зовнішня сторона, то

$\vec{n} = (-1; 0; 0)$, $\vec{n}^\circ = -i$, $dS = dy dz$. $BC: -2y + 2z = 4$, $0 \leq z \leq 2$.

Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ = -(x + z)$, $\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ \Big|_{x=0} = -z$. Потік через $\triangle BOC$:

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= - \iint_{\Delta BOC} z dy dz = - \int_0^2 z dz \int_{z-2}^0 dy = - \int_0^2 z(-z+2) dz = \\ &= - \left(-\frac{z^3}{3} + z^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

г) ΔABC належить площині $x - 2y + 2z - 4 = 0$, нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; -2; 2)$

$$\vec{n}^\circ = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3}, \quad dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

$$z = -\frac{1}{2}x + y + 2, \quad z'_x = -\frac{1}{2}, \quad z'_y = 1; \quad dS = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dx dy = \frac{3}{2} dx dy.$$

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^\circ = \frac{1}{3} [x + z - 2(2y - x) + 2z] = \frac{1}{3} (3x - 4y + 3z),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^\circ \Big|_{z = -\frac{1}{2}x + y + 2} = \frac{1}{3} \left(3x - 4y - \frac{3}{2}x + 3y + 6 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right).$$

Слід площини ABC в площині xOy — це пряма $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 2y + 4, -2 \leq y \leq 0$

Потік через ΔABC :

$$\begin{aligned}\Pi_4 &= \iint_{\Delta ABC} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) \cdot \frac{3}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \left(\frac{3}{4}x^2 + (6-y)x \right) \Big|_0^{2y+4} = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (y^2 + 20y + 36) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{52}{3}.\end{aligned}$$

Потік через повну поверхню піраміди $AOBC$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

2) За формулою Остроградського - Гаусса $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{a} dx dy dz$, де

$$\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}, \operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial y} = 2, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \operatorname{div} \bar{a} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Інтеграл $\iiint_V dx dy dz$ дорівнює об'єму піраміди $AOBC$. Маємо

$$V = \frac{1}{3} S_{AOB} \cdot CO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot CO = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

$$\Pi = 4 \iiint_V dx dy dz = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Задача 18. Обчислити циркуляцію векторного поля

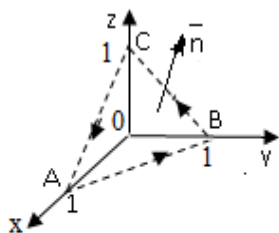
$$\bar{a}(M) = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$$

по контуру трикутника, який з'являється внаслідок перетину площини $x + y + z = 1$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектору $\bar{n} = (1, 1, 1)$ цієї площини двома способами:

- 1) за означенням;
- 2) за допомогою формули Стокса.

Розв'язання.

Побудуємо площину $x + y + z = 1$, маємо $\triangle ABC$.



1) За означенням циркуляція

$$\Pi = \oint_{ABCA} \bar{a} d\bar{l} = \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} + \int_{BC} \bar{a} d\bar{l} + \int_{CA} \bar{a} d\bar{l}$$

а) На відрізку AB маємо: $z = 0$,

$$x + y = 1, y = 1 - x, dy = -dx,$$

$$\bar{a} = x\bar{i} + (x + 3y)\bar{j} + (5x + y)\bar{k},$$

$$d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j},$$

$$\bar{a} \cdot d\bar{l} = xdx + (x + 3y)dy.$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_{AB} \bar{a} \cdot d\bar{l} = \int_{AB} xdx + (x + 3y)dy = \int_0^1 (x - x - 3(1 - x))dx = \\ &= \int_1^0 (3x - 3)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_1^0 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

б) На відрізку BC : $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$.

$$\bar{a} = -2z\bar{i} + (3y + z)\bar{j} + y\bar{k}, \quad d\bar{l} = \bar{j}dy + \bar{k}dz, \quad \bar{a} \cdot d\bar{l} = (3y + z)dy + ydz.$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int_{BC} \bar{a} \cdot d\bar{l} = \int_{BC} (3y + z)dy + ydz = \int_1^0 (3y + 1 - y - y)dy = \int_0^1 (y + 1)dy = \\ &= \frac{(y + 1)^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

в) На відрізку CA : $y = 0$, $x + z = 1$, $dz = -dx$, $\bar{a} \cdot d\bar{l} = (x - 2z)dx + 5xdz$.

$$\begin{aligned} \int_{CA} \bar{a} \cdot d\bar{l} &= \int_{CA} (x - 2z)dx + 5xdz = \int_0^2 (x - 2 + 2x - 5x)dx = \\ &= \int_0^1 (-2x - 2)dx = \left(-x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Маємо: } \Pi = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.$$

2) Обчислимо циркуляцію векторного поля за допомогою формули Стокса

$$\Pi = \oint_{\Gamma} \bar{a} \cdot d\bar{l} = \iint_S \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}^\circ dS, \quad \text{де } \bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

Ротор векторного поля обчислюємо за формулою

$$\overrightarrow{\text{rot } a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \quad \text{у випадку, коли}$$

поверхня S проектується у площину xOy .

Знайдемо ротор заданого векторного поля

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\bar{j} + \bar{k}.$$

В нашому випадку поверхня S – частина площини, обмеженої ΔABC , який лежить у площині $x+y+z=1$. Нормальний вектор площини $\bar{n}=(1; 1; 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні.

Орт цього вектору $\bar{n}^0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(1;1;1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;1;1)$, Знайдемо

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} a}(M) \cdot \bar{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-7+1) = -\frac{6}{\sqrt{3}}. \text{ З рівняння площини маємо}$$

$$z=1-x-y, \quad z'_x=-1, \quad z'_y=-1, \quad dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1+1+1} dx dy = \sqrt{3} dx dy. \text{ Тоді}$$

$$I = \iint_S \frac{-6}{\sqrt{3}} dS = \iint_{\Delta AOB} \frac{-6}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dx dy = -6 \iint_{\Delta AOB} dx dy.$$

$$\iint_{\Delta AOB} dx dy \text{ дорівнює площі } \Delta AOB: S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тоді } I = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3.$$

2.2 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області інтегрування.

$$1 \quad \iint_D \sin(x+5y) dx dy \quad D: \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$2. \quad \iint_D \frac{dx dy}{(x+2y)^2} \quad D: \quad 2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$$

3. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x+3y}}$ $D: 1 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 1$
4. $\iint_D \cos(x+7y)dxdy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
5. $\iint_D \sqrt[3]{x+2y} dxdy$ $D: -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1$
6. $\iint_D \sin(5x+y)dxdy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
7. $\iint_D \frac{dxdy}{(2x+y)^3}$ $D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$
8. $\iint_D \cos(5x+y)dxdy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
9. $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2x+y}}$ $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$
10. $\iint_D e^{2x+3y} dxdy$ $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

Завдання 2. Записати подвійний інтеграл $\iint_D f(x; y)dxdy$ через повторний, якщо область D задана лініями.

1. $D: \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ x = 0; (x \geq 0) \end{cases}$
2. $D: \begin{cases} y = 3\sqrt{x} \\ y = \frac{3}{x} \\ x = 9 \end{cases}$
3. $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 3\sqrt{2}y = x^2 \\ y \geq 0, x > 0 \end{cases}$
4. $D: \begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ y = \sqrt{25 - x^2} \\ x = 0, x = 3 \end{cases}$
5. $D: \begin{cases} y = 20 - x^2 \\ y = -8x \end{cases}$
6. $D: \begin{cases} y = x^3 \\ y = -\sqrt{x}; x = 1 \end{cases}$

$$7. \quad D: \begin{cases} y = -x^2 \\ y = \sqrt{x}; x = 1 \end{cases}$$

$$9. \quad D: \begin{cases} x = 5 - y^2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$8. \quad D: \begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$10. \quad D: \begin{cases} y = x^2, x > 0 \\ 4y = x^2, y = 4 \end{cases}$$

Завдання 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$1. \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{y}} f(x; y) dx$$

$$3. \quad \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x; y) dy$$

$$5. \quad \int_0^{2/3} dx \int_{2x}^{2-x} f(x; y) dy$$

$$7. \quad \int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x; y) dx$$

$$9. \quad \int_{-3}^3 dx \int_{x^2-5}^{\sqrt{25-x^2}} f(x; y) dy$$

$$2. \quad \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x; y) dx$$

$$4. \quad \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{2y^2-2} f(x; y) dx$$

$$6. \quad \int_{-1}^4 dx \int_{-3x}^{4-x^2} f(x; y) dy$$

$$8. \quad \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{3-x}}^{1+x^2} f(x; y) dy$$

$$10. \quad \int_{-1}^3 dy \int_{y^2}^{2y+3} f(x; y) dx$$

Завдання 4. Знайти подвійний інтеграл.

$$1. \quad \iint_D xy dx dy;$$

$$D: x + y = 1, x = 0; y = 0$$

$$2. \quad \iint_D 2y dx dy;$$

$$D: x + y = 2, y = \sqrt{x}; y = 0$$

$$3. \quad \iint_D (x + 6y) dx dy;$$

$$D: y = x, x = 1; y = 5x$$

4. $\iint_D (2x + y) dx dy;$ $D: x + y = 3, x = 0; y = 0$
5. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy;$ $D: x = y, x = 2; y = \frac{1}{x}$
6. $\iint_D \sin y dx dy;$ $D: y = 2x, x = \pi; 2y = x$
7. $\iint_D xy dx dy;$ $D: y = x - 4; y^2 = 2x$
8. $\iint_D \frac{y^3}{y^2 + x^2} dx dy;$ $D: x = y, y = 2; y = 4, x = 0$
9. $\iint_D \sqrt{4 + x + y} dx dy;$ $D: y = 5 - x, x = 0; x = 5; y = 0$
10. $\iint_D (x - y) dx dy;$ $D: y = 2 - x^2, y = 2x - 1$

Завдання 5. Перейшовши до полярних координат, обчислити подвійний інтеграл.

1. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = 4x;$
2. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1};$ $D: y = \sqrt{1 - x^2}; y = 0$
3. $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = e^2; x^2 + y^2 = e^4$
4. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = 8y$
5. $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy;$ $D: y = \sqrt{4 - x^2}; x \geq 0$
6. $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0$

7. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{9-x^2-y^2}};$ $D: x^2 + y^2 = 9; x \geq 0; y \geq 0$
8. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1};$ $D: x = \sqrt{1-y^2}; x = 0$
9. $\iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = 4; y = x; y \geq 0$
10. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy;$ $D: x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 25$

Завдання 6. Обчислити площу фігури, обмежену лініями.

1. $\begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = -6x + 9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 4x \\ y = x; y \geq 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \cos 2x \\ y = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y = e^x \\ x = 2 \\ x = 0; y = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x + 2 \\ y = 2; y = -2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ x^2 + y^2 = 8y \\ y = x; y = x\sqrt{3} \end{cases}$
7. $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = x; x = 4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$
9. $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = x; y = 2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Завдання 7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

1. $y = x^2; z = 1 - y; z = 0.$
2. $z = 2 - y; y = 2x^2; z = 0$

3. $x^2 + y^2 = 9; z = x; z = 0.$ 4. $2z = 4 - x^2 - y^2; z = 0.$
 5. $z = x^2 + y^2; y = x^2; y = 1; z = 0$ 6. $z + x = 5; y = \sqrt{x}; z = 0; y = 0$
 7. $z = 3 - x^2 - y^2; z = 0$ 8. $x + y = 4; z = \sqrt{x}; z = 0$
 9. $z = x^2 + y^2 - 1; x = 0; y = 0; z = 0$ 10. $z = 3x^2; 2x - y = 0; x + y = 9; z = 0$

Завдання 8. Знайти площу поверхні I відсіченою поверхнею II.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. I: $x + 2y + z - 3 = 0$ | II: $y = x^2$ |
| 2. I: $x^2 + y^2 = 25 - z$ | II: $x^2 + y^2 = 9; z = 0$ |
| 3. I: $z = 2y$ | II: $x^2 + y^2 = 1; z = 0$ |
| 4. I: $z = 1 - x^2 - y^2$ | II: $x^2 + y^2 = 1$ |
| 5. I: $z = y;$ | II: $x^2 + y^2 = 9; z = 0$ |
| 6. I: $x + 2y + z = 4;$ | II: $x = 2y^2; z = 0$ |
| 7. I: $z = 2x;$ | II: $x^2 + y^2 = 4; z = 0$ |
| 8. I: $x + 2y + z = 12;$ | II: $x^2 + y^2 = 2x$ |
| 9. I: $x + z = 9;$ | II: $y^2 = x; y^2 = 4x; z = 0$ |
| 10. I: $x + 2y + z = 12;$ | II: $x^2 + y^2 = 2y$ |

Завдання 9. Знайти масу матеріальної пластинки, яка має форму замкненої області D з густиною $\gamma(x; y)$ в кожній точці.

1. $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; \sqrt{3}x - y = 0; y = 0;$ $\gamma(x; y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$
 2. $x + y = 6; y = 2x; y = x;$ $\gamma(x; y) = x.$
 3. $x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x;$ $\gamma(x; y) = 9\sqrt{x^2 + y^2}.$
 4. $y = \frac{1}{x}; x = 2; y = x;$ $\gamma(x; y) = \frac{x^2}{y^2}$
 5. $y = 2x^2; 4x + y = 6;$ $\gamma(x; y) = x^2$

6. $x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = 3y; \quad \gamma(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$
7. $x = y^2; x + y = 2; \quad \gamma(x; y) = x^2 + y^2$
8. $y = x; y = x\sqrt{3}; x = 2 \quad \gamma(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
9. $y = \frac{2}{x}; x = 2y; y = 2 \quad \gamma(x; y) = \frac{y^2}{x^2}.$
10. $x^2 + y^2 = 25; x \geq 0; y \geq 0; \quad \gamma(x; y) = e^{x^2 + y^2}$

Завдання 10. Знайти координати центра маси однорідної пластини D

1. $y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4.$ 2. $y = \sqrt{2x - x^2}; y = 0$
3. $y^2 = 3x; x = 3; y = 0.$ 4. $y = x^2; y = 2x^2; x = 1; x = 2$
5. $y^2 = 2x; y = 2x^3.$ 6. $y = 2x - 3x^2; y = 0.$
7. $y = x^2; x + y = 2; y = 0.$ 8. $y = \sin x; x = \frac{\pi}{2}; y = 0.$
9. $x^2 = 2y; x + y = 4; y = 0$ 10. $y^2 = x; 2y^2 = x; y = 1; y = 2$

Завдання 11. Обчислити потрійний інтеграл по області V .

1. $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz \quad V: 2 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 4$
2. $\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz \quad V: -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; -1 \leq z \leq 1$
3. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad V: 0 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 2$
4. $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz \quad V: 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 0; 1 \leq z \leq 2$
5. $\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz \quad V: 1 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 2; -1 \leq z \leq 0$

6. $\iiint_V (x^2 + y^2 - z) dx dy dz \quad V: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3; -1 \leq z \leq 2$
7. $\iiint_V (x + 2yz) dx dy dz \quad V: -2 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 2$
8. $\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz \quad V: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; -1 \leq z \leq 3$
9. $\iiint_V (xy - z^2) dx dy dz \quad V: 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 3$
10. $\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz \quad V: -1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 1$

Завдання 12. Обчислити криволінійний інтеграл I роду по кривій L , де L – відрізок прямої від точки A до точки B .

1. $\int_L (x + 2y) dl \quad A(0,1) \quad B(-1,0)$
2. $\int_L xy dl \quad A(0,-1) \quad B(-1,-2)$
3. $\int_L x^2 dl \quad A(0,2) \quad B(-1,1)$
4. $\int_L (x + y) dl \quad A(0,-2) \quad B(-1,-3)$
5. $\int_L y^2 dl \quad A(0,-3) \quad B(-1,-4)$
6. $\int_L (2x + y) dl \quad A(0,4) \quad B(-1,3)$
7. $\int_L (x - y) dl \quad A(0,-1) \quad B(-1,-3)$
8. $\int_L xy^2 dl \quad A(1,0) \quad B(-1,-2)$
9. $\int_L x^2 y dl \quad A(1,2) \quad B(-1,0)$

$$10. \int_L (2x-y) dl \quad A(0,3) \quad B(-1,2)$$

Завдання 13. Обчислити криволінійний інтеграл II роду по кривій L , якщо $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

- | | | |
|-----|---------------------------|---|
| 1. | $\int_L 2y dx + 3x dy$ | $L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ |
| 2. | $\int_L 2x dx + y^2 dy$ | $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ |
| 3. | $\int_L y^2 dx + xy dy$ | $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ |
| 4. | $\int_L y dx + x^2 dy$ | $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ |
| 5. | $\int_L x^2 dx - xy dy$ | $L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ |
| 6. | $\int_L y dx - 2x dy$ | $L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ |
| 7. | $\int_L xy dx - 2y dy$ | $L: \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ |
| 8. | $\int_L 3x dx + y dy$ | $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$ |
| 9. | $\int_L xy^2 dx - x dy$ | $L: \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ |
| 10. | $\int_L x^2 y dx + 2y dy$ | $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$ |

Завдання 14. Знайти функцію $U(x, y)$, якщо її повний диференціал відомий.

1. $dU = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
2. $dU = (20x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$
3. $dU = (3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$
4. $dU = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
5. $dU = (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2)dy$
6. $dU = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
7. $dU = \left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy$
8. $dU = \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy$
9. $dU = (10xy^2 + 12x^3 + 6)dx + (10x^2y - 5)dy$
10. $dU = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

Завдання 15. Знайти похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ в т. M_1 та $\overrightarrow{grad} u(M_1)$.

- | | | | |
|----|-----------------------------|-------------------|------------------|
| 1. | $u = x^2y + y^2z + z^2x$ | $M_1 (1, -1, 2)$ | $M_2 (3, 4, -1)$ |
| 2. | $u = \ln(xy + yz + xz)$ | $M_1 (-2, 3, -1)$ | $M_2 (2, 1, -3)$ |
| 3. | $u = x^2y + xz^2 - 2$ | $M_1 (1, 1, -1)$ | $M_2 (2, -1, 3)$ |
| 4. | $u = xe^y + ye^x - z^2$ | $M_1 (3, 0, 2)$ | $M_2 (4, 1, 3)$ |
| 5. | $u = 3xy^2 + z^2 - xyz$ | $M_1 (1, 1, 2)$ | $M_2 (3, -1, 4)$ |
| 6. | $u = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$ | $M_1 (1, 1, 1)$ | $M_2 (9, -3, 9)$ |
| 7. | $u = y^2z - 2xyz + z^2$ | $M_1 (3, 1, -1)$ | $M_2 (-2, 1, 4)$ |
| 8. | $u = e^{xy+yz}$ | $M_1 (-5, 0, 2)$ | $M_2 (2, 4, -3)$ |

$$9. \quad u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x} \quad M_1 (-1, 1, 1) \quad M_2 (2, 3, 4).$$

$$10. \quad u = e^{x-yz} \quad M_1 (1, 0, 3) \quad M_2 (2, -4, 5).$$

Завдання 16. Знайти $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0), |\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)|, \text{div} \vec{a}(M_0)$ для векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

$$1. \quad \vec{a} = xy\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + xz\vec{k} \quad M_0 (2, 0, 3)$$

$$2. \quad \vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} - x^2\vec{k} \quad M_0 (1, -2, 0)$$

$$3. \quad \vec{a} = yz\vec{i} - z^2\vec{j} + xyz\vec{k} \quad M_0 (2, 1, -1)$$

$$4. \quad \vec{a} = xz\vec{i} - xyz\vec{j} + x^2z\vec{k} \quad M_0 (0, 1, 1)$$

$$5. \quad \vec{a} = xy\vec{i} - y^2z\vec{j} - xz\vec{k} \quad M_0 (0, -2, 1)$$

$$6. \quad \vec{a} = y^2\vec{i} - xy^2\vec{j} + z^2\vec{k} \quad M_0 (-1, 2, 1)$$

$$7. \quad \vec{a} = xy\vec{i} - xy^2\vec{j} + z^2\vec{k} \quad M_0 (1, -1, 1)$$

$$8. \quad \vec{a} = yz\vec{i} - z^2\vec{j} + (x + y)z\vec{k} \quad M_0 (1, 3, 0)$$

$$9. \quad \vec{a} = xz\vec{i} + (x - y)\vec{j} + x^2z\vec{k} \quad M_0 (1, 1, -2)$$

$$10. \quad \vec{a} = (x - z)\vec{i} + xy\vec{j} + y^2z\vec{k} \quad M_0 (2, 2, 1)$$

Завдання 17. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною (P) та координатними площинами;

1) за означенням;

2) за допомогою формули Остроградського - Гаусса.

$$1. \quad \vec{a} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k} \quad (P): x + 3y + z = 3$$

$$2. \quad \vec{a} = x\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + z)\vec{k} \quad (P): 3x + 3y + z = 3$$

$$3. \quad \vec{a} = (y + 2z)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k} \quad (P): 2x + y + 2z = 2$$

$$4. \quad \vec{a} = (x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - z)\vec{k} \quad (P): x + 2y + z = 2$$

$$5. \quad \vec{a} = (x + y - z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x + 2z)\vec{k} \quad (P): x + 2y + z = 2$$

- | | |
|--|-------------------------|
| 6. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + z\vec{k}$ | $(P): 2x + y + z = 2$ |
| 7. $\vec{a} = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}$ | $(P): x + 2y + 2z = 2$ |
| 8. $\vec{a} = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}$ | $(P): 3x + 2y + 2z = 6$ |
| 9. $\vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$ | $(P): x + 4y + 2z = 8$ |
| 10. $\vec{a} = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7z)\vec{k}$ | $(P): 2x + 3y + z = 6$ |

Завдання 18. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру трикутника, який з'являється внаслідок перетину площини (P) з координатними площинами:

- 1) за означенням;
- 2) за допомогою формули Стокса.

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $\vec{a} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ | $(P): 2x + y + 2z = 2$ |
| 2. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ | $(P): 3x + 2y + z = 6$ |
| 3. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$ | $(P): 2x + 2y + z = 2$ |
| 4. $\vec{a} = (2y - z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}$ | $(P): x + 3y + 2z = 6$ |
| 5. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + 6y)\vec{j} + y\vec{k}$ | $(P): x + 2y + 2z = 2$ |
| 6. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$ | $(P): 2x + y + 3z = 6$ |
| 7. $\vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + y\vec{k}$ | $(P): x + 2y + z = 2$ |
| 8. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ | $(P): 2x + 2y + z = 4$ |
| 9. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}$ | $(P): x + y + 2z = 2$ |
| 10. $\vec{a} = (2y - z)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + x\vec{k}$ | $(P): x + 2y + 2z = 4$ |

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. (В 3-х томах). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. (В 3-х томах). Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
3. Высшая математика: Учеб. пособие / Под общ. ред. П.Ф.Овчинникова. – К.: Вища шк., 1989. – 679 с.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: Учеб.пособие для вузов:В 2-х ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ОНИКС 21 век;Мир и Образование, 2002. — 304с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : Учеб.пособие для вузов: В 2-х ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ОНИКС 21 век;Мир и Образование, 2002. — 416с
6. Дубовик, В. П. Вища математика : Навч. посіб. для студ. техн. і технол. спец. вищ. навч. закл. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. — Київ : Вид-во А.С.К., 2003. — 648 с.
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. школа, 1964. –480 с.
8. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Ч.1, Ч.2, Ч.3. – Харьков, Изд. ХГУ, 1972. –946 с.
9. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Ч.3, Ч.4. – Харьков, Изд. ХГУ, 1972. –498 с.
10. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды. – М. : Физматлит, 2005. – 400 с.
11. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие для вузов. Под ред. В.Ф.Бутузова.- М.: Высш.шк., 1984. – 200 с.
12. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення //П.П. Овчинников, Ф.Я.Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. –600 с.

13. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; за заг. Ред. П.П.Овчинникова.– К.: Техніка, 2004.–792 с.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1: - М. : Интеграл-Пресс, 2001. – 416 с.

15. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2:- М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.

16. Сборник задач по курсу высшей математики/ Под ред. Г.И.Кручковича. Учебное пособие для втузов.– М. : Высш школа, 1973. – 576 с.