МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Приклади розв'язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики з тем: «Елементи теорії поля», «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання

2025

Приклади розв'язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики з тем: «Елементи теорії поля», «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Н.М. Антоненко, І.І. Зіненко. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 62 с.

Укладачі: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент,
Зіненко І.І., асистент

Рецензент: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Відповідальний за випуск: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент

Затверджено
на засіданні кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 6 від 21.03.2025 р.

Затверджено
НМК машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 18.04.2025 р.

ЗМІСТ

1 ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Розв'язування типового варіанта

Завдання 1.1 (до ***Завдання 1.2.1*** **[6]**). Скалярне поле визначене функцією $f=\ln\left(9x^2+y^2-z^2\right)$. Знайти його градієнт та побудувати поверхню рівня $f=1$.

Розв'язання. *Градієнт* функції $u=u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ обчислюється за формулою

$$\overline{grad}\,u(M)=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\,. \tag{1.1}$$

Знаходимо частинні похідні заданої функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{18x}{9x^2+y^2-z^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{9x^2+y^2-z^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{2z}{9x^2+y^2-z^2}\,.$$

Знаходимо градієнт заданої функції за формулою (1.1):

$$\overline{grad}\,f(M)=\frac{18x}{9x^2+y^2-z^2}\bar{i}+\frac{2y}{9x^2+y^2-z^2}\bar{j}-\frac{2z}{9x^2+y^2-z^2}\bar{k}\,.$$

За означенням *поверхнею рівня скалярного поля* $u=u(x,y,z)$ називається сукупність точок простору, в яких функція цього поля приймає однакові значення, тобто $u(x,y,z)=C$.

Знайдемо поверхню рівня для заданого скалярного поля при $C=1$: $\ln\left(9x^2+y^2-z^2\right)=1$, $9x^2+y^2-z^2=e$, $\frac{x}{e/9}^2+\frac{y}{e}^2-\frac{z}{e}^2=1$ – однопорожнинний гіперболоїд. Поверхня рівня зображена на рис. 1.1.

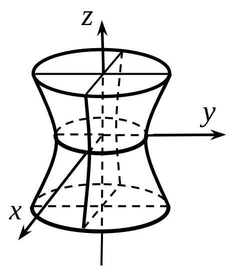

Рисунок 1.1

Відповідь: $\overline{grad}\, f(M)=\dfrac{18x}{9x^2+y^2-z^2}\bar{i}+\dfrac{2y}{9x^2+y^2-z^2}\bar{j}-$

$-\dfrac{2z}{9x^2+y^2-z^2}\bar{k}$, $\dfrac{x^2}{e/9}+\dfrac{y^2}{e}-\dfrac{z^2}{e}=1$ – однопорожний гіперболоїд, рис. 1.1.

Завдання 1.2 (до ***Завдання 1.2.2*** **[6]**). Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні $xy^2-3x^3y-2z^3=0$ в точці $M_0(1;2;-1)$.

Розв'язання. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $\Phi(x,y,z)=C$, то *одиничний вектор нормалі* $\bar{n}^0$ обчислюється за формулою $\bar{n}^0=\pm\dfrac{\overline{grad}\,\Phi(x,y,z)}{\left|\overline{grad}\,\Phi(x,y,z)\right|}$ (знак в правій частині формули визначається вибором нормалі до поверхні S).

За умовою $\Phi(x,y,z)=xy^2-3x^3y-2z^3$. Знайдемо градієнт $\Phi(x,y,z)$ за формулою (1.1) та його модуль в точці M_0:

$$\overline{grad}\,\Phi=\left(y^2-9x^2y\right)\bar{i}+\left(2xy-3x^3\right)\bar{j}+\left(-6z^2\right)\bar{k},$$

$$\overline{grad}\,\Phi(M_0)=-14\bar{i}+\bar{j}-6\bar{k}.$$

$$\left|\overline{grad}\,\Phi(M_0)\right|=\sqrt{(-14)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{233}.$$

Знаходимо одиничний вектор нормалі до заданої поверхні в точці M_0:

$$\bar{n}^0(M_0)=\pm\frac{\overline{grad}\,\Phi(M_0)}{\left|\overline{grad}\,\Phi(M_0)\right|}=\pm\left(-\frac{14}{\sqrt{233}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{233}}\bar{j}-\frac{6}{\sqrt{233}}\bar{k}\right).$$

Відповідь: $\pm\left(-\dfrac{14}{\sqrt{233}}\bar{i}+\dfrac{1}{\sqrt{233}}\bar{j}-\dfrac{6}{\sqrt{233}}\bar{k}\right)$.

Завдання 1.3 (до ***Завдання 1.2.3*** **[6]**). Знайти значення похідної функції $u=u(x,y,z)$ в точці M_1 за напрямком вектора $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{grad}\,u(M_1)$, якщо $u=\sqrt{2x^2-2y^2+z^2}$, $M_1(-3;-1;3)$, $M_2(-1;1;2)$.

Розв'язання. *Похідна функції* $u = u(x, y, z)$ за напрямком вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (1.2)$$

де $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$ – напрямні косинуси вектора $\bar{a}$, $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Знайдемо частині похідні заданої функції та обчислимо їх значення в точці M_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 2y^2 + z^2}}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = -\frac{6}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{\sqrt{2x^2 - 2y^2 + z^2}}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{2x^2 - 2y^2 + z^2}}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \frac{3}{5}.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{M_1M_2} = (-1-(-3); 1-(-1); 2-3) = (2; 2; -1), \quad \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \ \cos\beta = \frac{2}{3}, \ \cos\gamma = -\frac{1}{3}.$$

За формулою (1.2) отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}}(M_1) = \left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{15}.$$

За формулою (1.1) знаходимо градієнт заданої функції:

$$\overline{grad}\ u(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\bar{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\bar{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\bar{k} = -\frac{6}{5}\bar{i} + \frac{2}{5}\bar{j} + \frac{3}{5}\bar{k}.$$

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial \overline{M_1M_2}}(M_1) = -\frac{11}{15}$, $\overline{grad}\ u(M_1) = -\frac{6}{5}\bar{i} + \frac{2}{5}\bar{j} + \frac{3}{5}\bar{k}$.

Завдання 1.4 (до ***Завдання 1.2.4*** **[6]**). Знайти $\overline{rot}\,\overline{F}\left(M_0\right)$, $\left|\overline{rot}\,\overline{F}\left(M_0\right)\right|$, $div\,\overline{F}\left(M_0\right)$ для векторного поля $\overline{F}\left(M\right)=\left(x^2-z\right)\bar{i}+xz\,\bar{j}-3y^2z\,\bar{k}$ в точці $M_0(1;-1;2)$.

Розв'язання. *Ротором* або *вихором* векторного поля $\bar{a}\left(M\right)=P(x,y,z)\,\bar{i}+Q(x,y,z)\,\bar{j}+R(x,y,z)\,\bar{k}$ в точці $M\left(x,y,z\right)$ називається вектор

$$\overline{rot}\,\bar{a}\left(M\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}\,. \quad (1.3)$$

Для заданого векторного поля $P(x,y,z)=x^2-z$, $Q(x,y,z)=xz$, $R(x,y,z)=-3y^2z$. За формулою (1.3) отримуємо:

$$\overline{rot}\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-z & xz & -3y^2z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-3y^2z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(xz\right)\right)\bar{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-3y^2z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2-z\right)\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xz\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-z\right)\right)\bar{k}=$$

$$=\left(-6yz-x\right)\bar{i}-\left(0+1\right)\bar{j}+\left(z-0\right)\bar{k}=\left(-6yz-x\right)\bar{i}-\bar{j}+z\,\bar{k}\,.$$

$$\overline{rot}\,\overline{F}\left(M_0\right)=11\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\,;\ \left|\overline{rot}\,\overline{F}\left(M_0\right)\right|=\sqrt{11^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{126}\,.$$

Дивергенція векторного поля $\bar{a}\left(M\right)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ в точці $M\left(x,y,z\right)$ обчислюється за формулою

$$div\,\bar{a}\left(M\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,. \quad (1.4)$$

За формулою (1.4) маємо:

$$div\,\overline{F}\left(M\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(xz\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-3y^2z\right)=2x-3y^2\,,$$

$$div\,\overline{F}\left(M_0\right)=2\cdot 1-3\cdot(-1)^2=-1\,.$$

Відповідь: $\overline{rot}\,\overline{F}(M_0)=11\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\left|\overline{rot}\,\overline{F}(M_0)\right|=\sqrt{126}$, $div\,\overline{F}(M_0)=-1$.

Завдання 1.5 (до ***Завдання 1.2.5*** **[6]**). Обчислити потік векторного поля $\bar{a}(M)=(4x+1)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+2x\bar{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, яка утворена площиною Р: $2x-2y+3z=6$ та координатними площинами: 1) за означенням; 2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

1) Зобразимо піраміду, обмежену заданою площиною та координатними площинами (рис. 1.2).

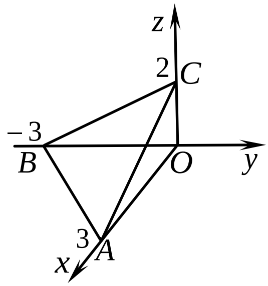

Рисунок 1.2

За означенням потік векторного поля $\bar{a}(M)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ через поверхню S в сторону одиничного вектора нормалі $\bar{n}^0=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ до цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\Pi=\iint_S \bar{a}\cdot\bar{n}^0 dS. \qquad (1.5)$$

В даному випадку S – зовнішня поверхня піраміди $OABC$. Обчислимо потік векторного поля через кожну з граней піраміди $OABC$.

Розглянемо грань ABO: $z=0$, $2x-2y=6$, $x-y=3$, $\bar{n}^0=-\bar{k}$, $dS=dxdy$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0=-2x$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0\Big|_{z=0}=-2x$.

$$\Pi_1=\iint\limits_{\Delta ABO}\bar{a}\cdot\bar{n}^0dS=-2\iint\limits_{\Delta ABO}xdxdy=-2\int\limits_0^3 xdx\int\limits_{x-3}^{0}dy=-2\int\limits_0^3 x\cdot y\Big|_{x-3}^{0}dx=$$

$$=-2\int\limits_0^3 x\big(0-(x-3)\big)dx=-2\int\limits_0^3\left(3x-x^2\right)dx=-2\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=-2\left(\frac{27}{2}-9\right)=-9\,.$$

Розглянемо грань OBC: $x=0$, $-2y+3z=6$, $\bar{n}^0=-\bar{i}$, $dS=dydz$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0=-4x-1$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0\Big|_{x=0}=-1$.

$$\Pi_2=\iint\limits_{\Delta OBC}\bar{a}\cdot\bar{n}^0dS=-\iint\limits_{\Delta OBC}dydz=-S_{\Delta OBC}=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=-3\,.$$

Розглянемо грань OAC: $y=0$, $2x+3z=6$, $\bar{n}^0=\bar{j}$, $dS=dxdz$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0=2y+z$, $\bar{a}\cdot\bar{n}^0\Big|_{y=0}=z$.

$$\Pi_3=\iint\limits_{\Delta OAC}\bar{a}\cdot\bar{n}^0dS=\iint\limits_{\Delta OAC}zdxdz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\frac{6-2x}{3}}zdz=\int\limits_0^3\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{6-2x}{3}}dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int\limits_0^3(6-2x)^2dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{(6-2x)^3}{(-2)\cdot 3}\Bigg|_0^3=\frac{1}{18}\big(0-(-36)\big)=2\,.$$

Розглянемо грань ABC: $2x-2y+3z=6$, $z=\dfrac{6-2x+2y}{3}$,

$\bar{n}=2\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$, $|\bar{n}|=\sqrt{17}$, $\bar{n}^0=\dfrac{2}{\sqrt{17}}\bar{i}-\dfrac{2}{\sqrt{17}}\bar{j}+\dfrac{3}{\sqrt{17}}\bar{k}$,

$$\bar{a}\cdot\bar{n}^0=\frac{1}{\sqrt{17}}\big((4x+1)\cdot 2+(2y+z)\cdot(-2)+2x\cdot 3\big)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{17}}(14x-4y-2z+2),\ \bar{a}\cdot\bar{n}^0\Big|_{z=\frac{6-2x+2y}{3}}=\frac{1}{3\sqrt{17}}(46x-16y-6).$$

Оскільки грань ABC однозначно проектується на площину Oxy, то $dS=\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$. Маємо $z=\dfrac{6-2x+2y}{3}$, $z'_x=-\dfrac{2}{3}$, $z'_y=\dfrac{2}{3}$,

$$dS=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{17}}{3}\,dxdy.$$

$$\Pi_4=\iint\limits_{\Delta ABC}\bar{a}\cdot\bar{n}^0dS=\iint\limits_{\Delta ABC}\frac{1}{3\sqrt{17}}\left(46x-16y-6\right)\frac{\sqrt{17}}{3}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{9}\iint\limits_{\Delta ABC}\left(46x-16y-6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3dx\int_{x-3}^0\left(46x-16y-6\right)dy=\frac{1}{9}\int_0^3\left(46xy-8y^2-6y\right)\Big|_{x-3}^0dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3\left(-46x(x-3)+8(x-3)^2+6(x-3)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3\left(-46x^2+144x-18+8(x-3)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{9}\left(-\frac{46x^3}{3}+72x^2-18x+\frac{8(x-3)^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{1}{9}\cdot 252=28\,.$$

Використовуючи адитивність потоку, отримуємо:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4=-9-3+2+28=18\,.$$

2) *Формула Остроградського-Гаусса у векторній формі*. Нехай задано векторне поле $\bar{a}(M)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\,\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$. Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області V простору, яка обмежена замкненою кусково-гладкою поверхнею S, тоді

$$\Pi=\iint\limits_{S}\bar{a}\cdot\bar{n}^0dS=\iiint\limits_{V}div\,\bar{a}(M)\,dxdydz, \qquad (1.6)$$

де $\bar{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – зовнішній нормальний одиничний вектор до поверхні S.

За умовою $P(x,y,z)=4x+1$, $Q(x,y,z)=2y+z$, $R(x,y,z)=2x$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x+1)=4,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2y+z)=2,\ \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(2x)=0;$$

$$div\ \overline{a}(M)=4+2+0=6.$$

За формулою (1.6) отримуємо:

$$\Pi=\iiint\limits_V 6\,dxdydz=6\iiint\limits_V dxdydz.$$

Потрійний інтеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ дорівнює об’єму піраміди $OABC$.

$$V_{OABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABO}\cdot CO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\cdot CO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot 2=3.$$

$$\Pi=6\iiint\limits_V dxdydz=6\cdot 3=18.$$

Відповідь: 1) 18; 2) 18.

Завдання 1.6 (до ***Завдання 1.2.6*** **[6]**). За допомогою формули Остроградського-Гаусса знайти потік векторного поля $\overline{a}(M)$ через зовнішню поверхню тіла, обмеженого поверхнею S:

а) $\overline{a}=(3x^2+z)\overline{i}+3y\,\overline{j}-5z\,\overline{k}$, $S:\ x^2+z^2=9,\ y=1,\ y=5;$

б) $\overline{a}=(2x+z)\overline{i}-7z\,\overline{j}+(x^2+y)\overline{k}$, $S:\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4.$

Розв’язання.

а) $\overline{a}=(3x^2+z)\overline{i}+3y\,\overline{j}-5z\,\overline{k}$, $S:\ x^2+z^2=9,\ y=1,\ y=5.$

Зобразимо поверхню, через яку треба знайти течію векторного поля (рис. 1.3).

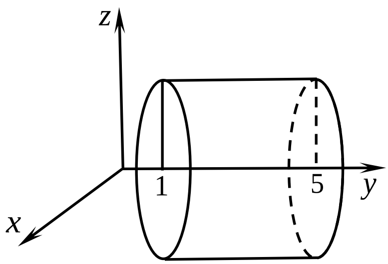

Рисунок 1.3

За умовою $P(x,y,z)=3x^2+z$, $Q(x,y,z)=3y$, $R(x,y,z)=-5z$.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=6x,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=3,\ \frac{\partial R}{\partial z}=-5;$$

$$div\ \overline{a}(M)=6x+3-5=6x-2.$$

За формулою (1.6) отримуємо:

$$\Pi=\iiint\limits_V (6x-2)dxdydz=\left|\begin{array}{l|l} \begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ z=r\sin\varphi, \\ y=y. \end{cases} & \begin{array}{l} 0\le r\le 3, \\ 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 1\le y\le 5. \end{array} \\ dxdydz=r\,drd\varphi dy. & \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r\,dr\int_1^5(6r\cos\varphi-2)dy=4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3 r(6r\cos\varphi-2)dr=$$

$$=4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3(6r^2\cos\varphi-2r)dr=4\int_0^{2\pi}\left(2r^3\cos\varphi-r^2\right)\Big|_0^3 d\varphi=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\left(2\cdot 3^3\cos\varphi-3^2-0\right)d\varphi=4\int_0^{2\pi}(54\cos\varphi-9)d\varphi=$$

$$=4(54\sin\varphi-9\varphi)\Big|_0^{2\pi}=4(54\sin(2\pi)-9\cdot 2\pi-0)=-72\pi.$$

б) $\overline{a}=(2x+z)\overline{i}-7z\,\overline{j}+\left(x^2+y\right)\overline{k}$, $S:\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$.

За умовою $P(x,y,z)=2x+z$, $Q(x,y,z)=-7z$, $R(x,y,z)=x^2+y$. $x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$ – сфера з центром у точці $(0;1;-1)$ та радіусом 2.

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\ \frac{\partial R}{\partial z}=0;$$

$$div\ \overline{a}(M)=2+0-0=2.$$

За формулою (1.6) отримуємо:

$$\Pi=\iiint\limits_V 2\,dxdydz=2V_{кулі}=2\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3=\frac{64}{3}\pi.$$

Відповідь: **а)** -72π; **б)** $\dfrac{64}{3}\pi$.

Завдання 1.7 (до ***Завдання 1.2.7*** **[6]**). Знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F}=(x+2y)\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(4y+1)\overline{k}$ по замкненому контуру трикутника, який утворюється внаслідок перетинів координатних площин з площиною P: $-x+2y+2z=4$ (нормаль до трикутника спрямована від початку координат):

1) за означенням; 2) застосувавши формулу Стокса.

Розв'язання.

1) *Циркуляцією* векторного поля $\overline{a}(M)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$ по замкненому контуру L (з обраним напрямком обходу) називається лінійний інтеграл цього поля вздовж контуру L:

$$Ц=\oint\limits_L \overline{a}\cdot d\overline{r}=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz, \tag{1.7}$$

де $d\overline{r}=\overline{i}\,dx+\overline{j}\,dy+\overline{k}\,dz$.

Зобразимо контур L $(ABCA)$ заданого трикутника (рис. 1.4). Оскільки за умовою задачі нормаль до трикутника спрямована від початку координат, то обхід контура необхідно вибрати так, як зображено на рис. 1.4.

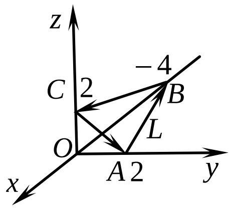

Рисунок 1.4

Контур L складається з трьох відрізків AB, BC, CA, тому для заданого векторного поля циркуляція дорівнює

$$Ц=\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r}=\int\limits_{AB}\overline{F}\cdot d\overline{r}+\int\limits_{BC}\overline{F}\cdot d\overline{r}+\int\limits_{CA}\overline{F}\cdot d\overline{r}.$$

На відрізку AB: $z=0$, $-x+2y=4$, $x=2y-4$, $dx=2dy$, y змінюється від 2 до 0, $d\bar{r}=\bar{i}\,dx+\bar{j}\,dy$.

$$Ц_1=\int_{AB}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_{AB}(x+2y)dx+ydy=\int_2^0((2y-4+2y)\cdot 2+y)dy=$$

$$=\int_2^0(9y-8)dy=\left(9\cdot\frac{y^2}{2}-8y\right)\Bigg|_2^0=0-\left(9\cdot\frac{2^2}{2}-8\cdot 2\right)=0-(18-16)=-2.$$

На відрізку BC: $y=0$, $-x+2z=4$, $x=2z-4$, $dx=2dz$, $0\le z\le 2$, $d\bar{r}=\bar{i}\,dx+\bar{k}\,dz$.

$$Ц_2=\int_{BC}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_{BC}x\,dx+dz=\int_0^2((2z-4)\cdot 2+1)dz=\int_0^2(4z-7)dz=$$

$$=\left(4\cdot\frac{z^2}{2}-7z\right)\Bigg|_0^2=4\cdot\frac{2^2}{2}-7\cdot 2-0=-6.$$

На відрізку CA: $x=0$, $2y+2z=4$, $z=2-y$, $dz=-dy$ $0\le y\le 2$, $d\bar{r}=\bar{j}\,dy+\bar{k}\,dz$.

$$Ц_3=\int_{CA}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_{CA}(y-2z)dy+(4y+1)dz=\int_0^2[(y-2(2-y))-(4y+1)]dy=$$

$$=\int_2^0(-y-5)dy=\left(-\frac{y^2}{2}-5y\right)\Bigg|_0^2=\left(-\frac{2^2}{2}-5\cdot 2\right)-0=-12.$$

Остаточно отримуємо:

$$Ц=Ц_1+Ц_2+Ц_3=-2-6-12=-20.$$

2) *Формула Стокса у векторному вигляді*. Нехай задано векторне поле $\bar{a}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$, де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Циркуляція вектора $\bar{a}$ по замкненому контуру L дорівнює потоку вектора $\overline{rot\bar{a}}$ через будь-яку поверхню S, натягнуту на контур L:

$$Ц=\oint_L\bar{a}\cdot d\bar{r}=\iint_S\overline{rot\bar{a}}\cdot\bar{n}^0\,dS, \qquad (1.8)$$

де орієнтація нормалі $\bar{n}^0$ до поверхні узгоджена з орієнтацією контура L таким чином, що з кінця нормалі обхід контура спостерігається проти руху годинникової стрілки.

В якості поверхні S візьмемо частину площини $-x+2y+2z=4$, яка обмежена контуром ΔABC. Виконаємо допоміжні розрахунки:

$$\overline{rot}\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+2y & y-2z & 4y+1\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(4y+1)-\frac{\partial}{\partial z}(y-2z)\right)\bar{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(4y+1)-\frac{\partial}{\partial z}(x+2y)\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(y-2z)-\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\right)=6\,\bar{i}+0\,\bar{j}-2\,\bar{k}\,.$$

$$\bar{n}=(-1;2;2),\ |\bar{n}|=3,\ \bar{n}^0=\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Оскільки поверхня S однозначно проектується на площину Oxy, то $dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$. Маємо $z=\dfrac{4+x-2y}{2}$, $z'_x=\dfrac{1}{2}$, $z'_y=-1$, $dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\dfrac{3}{2}dxdy$.

Обчислюємо циркуляцію за формулою (1.8):

$$Ц=\iint_S \overline{rot}\,\overline{F}\cdot\bar{n}^0\,dS=\frac{3}{2}\iint_{\Delta ABO}\left(-\frac{1}{3}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot(-2)\right)dxdy=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)\iint_{\Delta ABO}dxdy=-5\cdot S_{\Delta ABO}=-5\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO=-5\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=-20\,.$$

Відповідь: 1) –20; 2) –20.

Завдання 1.8 (до ***Завдання 1.2.8*** **[6]**). Довести, що поле $\bar{a}=\left(y^2+z^2;2xy;2xz\right)$ є потенціальним та знайти його потенціал.

Розв'язання. За означенням *векторне поле* $\bar{a}$ називається *потенціальним*, якщо в кожній його точці ротор дорівнює нулю.

Знайдемо ротор заданого векторного поля:

$$\overline{rot}\,\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z^2 & 2xy & 2xz\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(2xz)-\frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right)\bar i-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(2xz)-\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2+z^2\right)\right)\bar j+\left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+z^2\right)\right)\bar k=$$

$$=(0-0)\bar i-(2z-2z)\bar j+(2y-2y)\bar k=0\bar i-0\,\bar j+0\bar k=\bar 0\,.$$

Таким чином задане поле потенціальне.

Знайдемо потенціал заданого поля. *Потенціал поля* обчислюється за формулою:

$$U(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,dz\,, \qquad (1.9)$$

де (x,y,z) – координати довільної точки, (x_0,y_0,z_0) – координати фіксованої точки.

В якості фіксованої точки візьмемо початок координат $(0;0;0)$, тобто $x_0=y_0=z_0=0$. За формулою (1.9) отримуємо:

$$U(x,y,z)=\int_0^x\left(0^2-0^2\right)dx+\int_0^y 2xy\,dy+\int_0^z 2xz\,dz=\int_0^y 2xy\,dy+\int_0^z 2xz\,dz=$$

$$=xy^2\Big|_0^y+xz^2\Big|_0^z=xy^2+xz^2\,.$$

Отже, $U(x,y,z)=xy^2+xz^2+C$.

Відповідь: $U(x,y,z)=xy^2+xz^2+C$.

2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1 Диференціальні рівняння першого порядку

Розв'язування типового варіанта

Завдання 2.1.1 (до ***Завдання 2.1.2.1*** **[6]**). Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1) з відокремлюваними змінними:

а) $x\left(y^2+3\right)dx-ydy=0$;

б) $y'\sin x=\dfrac{y}{\ln y}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

Розв'язання.

а) $x\left(y^2+3\right)dx-ydy=0$.

Для відокремлення змінних поділимо обидві частини заданого рівняння на $y^2+3\neq 0$, отримаємо:

$$xdx-\frac{ydy}{y^2+3}=0,\ xdx=\frac{ydy}{y^2+3}.$$

Інтегруємо обидві частини отриманого диференціального рівняння:

$$\int xdx=\int\frac{ydy}{y^2+3},\ \frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+3\right|+\frac{C}{2},\ x^2=\ln\left|y^2+3\right|+C.$$

Загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$x^2=\ln\left(y^2+3\right)+C.$$

Відповідь: $x^2=\ln\left(y^2+3\right)+C$.

б) $y'\sin x=\dfrac{y}{\ln y}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

У заданому диференціальному рівнянні y' запишемо у вигляді $y'=\dfrac{dy}{dx}$ та відокремимо змінні, отримаємо:

$$\frac{dy}{dx}\sin x=\frac{y}{\ln y},\ \frac{\ln y\,dy}{y}=\frac{dx}{\sin x}.$$

Інтегруємо обидві частини диференціального рівняння:

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{\sin x}, \ \int \ln y \, d(\ln y) = \int \frac{dx}{\sin x}, \ \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння: $\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

Використовуючи початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$, знайдемо C. Для цього в загальний інтеграл рівняння підставимо $y = e$, $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1}{2}\ln^2 e = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right| + C, \ \frac{1}{2} = \ln 1 + C, \ C = \frac{1}{2}.$$

Підставимо $C = \frac{1}{2}$ в загальний інтеграл рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}, \ \ln^2 y = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 1.$$

Частинний інтеграл заданого рівняння: $\ln^2 y = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 1$.

Відповідь: $\ln^2 y = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 1$.

Завдання 2.1.2 (до ***Завдання 2.1.2.2*** **[6]**). Розв'язати однорідні ДР-1:

а) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$;

б) $\left(3x^2 - yx\right)dy + \left(y^2 - 9x^2\right)dx = 0$;

в) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = xdy$, $y(3) = -4$;

г) $4xy' - 4y = x\sin\frac{4y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання.

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається *однорідним ДР-1*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто $f(xt, yt) = f(x, y)$. За допомогою підстановки $y = u(x) \cdot x = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$ однорідне ДР-1 зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними.

а) $y' = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.

Для заданого рівняння $f(x, y) = 4 + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$. Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(tx, ty) = 4 + \frac{ty}{x} + \left(\frac{ty}{x}\right)^2 = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = f(x, y).$$

$f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру, тому задане рівняння однорідне.

Зробимо заміну: $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$. Підставимо вирази для y та y' у задане рівняння, матимемо:

$$u' \cdot x + u = 4 + \frac{u \cdot x}{x} + \left(\frac{u \cdot x}{x}\right)^2,\ u' \cdot x + u = 4 + u + u^2,\ u' \cdot x = 4 + u^2.$$

Останнє рівняння – ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні:

$$x\,\frac{du}{dx} = 4 + u^2,\ \frac{du}{4 + u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини отриманого рівняння:

$$\int \frac{du}{4 + u^2} = \int \frac{dx}{x},\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} = \ln|x| + C.$$

Оскільки $u = \dfrac{y}{x}$, то загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x} = \ln|x| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2x}=\ln|x|+C$.

б) $(3x^2-yx)dy+(y^2-9x^2)dx=0$.

Запишемо задане диференціальне рівняння у вигляді:

$$y'=\frac{9x^2-y^2}{3x^2-yx}. \qquad (*)$$

Переконаємось, що задане рівняння є однорідним. Для заданого рівняння $f(x,y)=\frac{9x^2-y^2}{3x^2-yx}$. Перевіримо однорідність функції $f(x,y)$:

$$f(tx,ty)=\frac{9(tx)^2-(ty)^2}{3(tx)^2-ty\cdot tx}=\frac{t^2(9x^2-y^2)}{t^2(3x^2-yx)}=\frac{9x^2-y^2}{3x^2-yx}=f(x,y).$$

$f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, тому задане рівняння однорідне.

Зробимо заміну: $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$. Підставимо вирази для y та y' у рівняння (*), матимемо:

$$u'\cdot x+u=\frac{9x^2-(ux)^2}{3x^2-ux\cdot x},\ u'\cdot x+u=3+u,\ u'\cdot x=3,$$

$$x\frac{du}{dx}=3,\ du=\frac{3dx}{x},\ \int du=3\int\frac{dx}{x},\ u=3\ln|x|+C.$$

Оскільки $u=\frac{y}{x}$, то загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$\frac{y}{x}=3\ln|x|+C \text{ або } y=(3\ln|x|+C)x.$$

Відповідь: $y=(3\ln|x|+C)x$.

в) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=xdy$, $y(3)=-4$.

Запишемо задане диференціальне рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}\ .$$

Переконаємось, що задане рівняння є однорідним. Для заданого рівняння $f(x, y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$. Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(tx, ty) = \frac{ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}}{tx} = \frac{t\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{tx} = f(x, y).$$

$f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру, тому задане рівняння однорідне.

Зробимо заміну: $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$. Підставимо вирази для y та y' в задане рівняння, матимемо:

$$u' \cdot x + u = \frac{u \cdot x + \sqrt{x^2 + (u \cdot x)^2}}{x},\ u' \cdot x + u = u + \sqrt{1 + u^2}\ ,$$

$$x\,\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}\ ,\quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x},\quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|u + \sqrt{1 + u^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|,\ u + \sqrt{1 + u^2} = Cx.$$

Оскільки $u = \dfrac{y}{x}$, то загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx \text{ або } y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо C. Для цього в загальний інтеграл підставимо $y = -4$, $x = 3$:

$$-4 + \sqrt{3^2 + (-4)^2} = C \cdot 3^2,\ -4 + 5 = 9C,\ C = \frac{1}{9}.$$

Підставимо $C = \dfrac{1}{9}$ у загальний інтеграл, матимемо:

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{9}x^2,\ 9y+9\sqrt{x^2+y^2}=x^2.$$

Частинний інтеграл заданого рівняння: $9y+9\sqrt{x^2+y^2}=x^2$.

Відповідь: $9y+9\sqrt{x^2+y^2}=x^2$.

г) $4xy'-4y=x\sin\frac{4y}{x},\ y(1)=\frac{\pi}{8}$.

Запишемо задане диференціальне рівняння у вигляді:

$$y'=\frac{x\sin\frac{4y}{x}+4y}{4x},\ y'=\frac{1}{4}\sin\frac{4y}{x}+\frac{y}{x}. \qquad (*)$$

Переконаємось, що задане рівняння є однорідним. Для заданого рівняння $f(x,y)=\frac{1}{4}\sin\frac{4y}{x}+\frac{y}{x}$. Перевіримо однорідність функції $f(x,y)$:

$$f(tx,ty)=\frac{1}{4}\sin\frac{4ty}{tx}+\frac{ty}{tx}=\frac{1}{4}\sin\frac{4y}{x}+\frac{y}{x}=f(x,y).$$

$f(x,y)$ – однорідна функція нульового виміру, тому задане рівняння однорідне.

Зробимо заміну: $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$. Підставимо вирази для y та y' в рівняння (*), матимемо:

$$u'\cdot x+u=\frac{1}{4}\sin\frac{4ux}{x}+\frac{ux}{x},\ u'\cdot x+u=\frac{1}{4}\sin 4u+u,$$

$$u'\cdot x=\frac{1}{4}\sin 4u,\ \frac{4du}{\sin 4u}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{4du}{\sin 4u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\operatorname{tg}2u|=\ln|x|+\ln C,\ \operatorname{tg}2u=Cx.$$

Оскільки $u=\frac{y}{x}$, то загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$\operatorname{tg}\frac{2y}{x}=Cx.$$

Використовуючи початкову умову $y(1)=\frac{\pi}{8}$, знайдемо C. Для цього в загальний інтеграл підставимо $y=\frac{\pi}{8}$, $x=1$:

$$\operatorname{tg}\frac{2\cdot\frac{\pi}{8}}{1}=C\cdot 1,\ C=1.$$

Підставимо $C=1$ у загальний інтеграл, матимемо:

$$\operatorname{tg}\frac{2y}{x}=x.$$

Частинний інтеграл заданого рівняння: $\operatorname{tg}\frac{2y}{x}=x$.

Відповідь: $\operatorname{tg}\frac{2y}{x}=x$.

Завдання 2.1.3 (до ***Завдання 2.1.2.3*** **[6]**). Розв'язати лінійні ДР-1:

а) $y'+\frac{xy}{1-x^2}=\arcsin x+x$;

б) $(y+1)dx=(y+1-2x)dy$;

в) $y'\cos^2 x+y=\operatorname{tg} x$, $y(0)=0$;

г) $\frac{y'}{x}+2y=8e^{-x^2}$, $y(0)=-2$.

Розв'язання.

Лінійні неоднорідні ДР-1 – це рівняння вигляду $y'+p(x)\,y=q(x)$, де функція y та її похідна y' утворюють лінійну залежність, $p(x)$, $q(x)$ – задані та неперервні на деякому проміжку функції, що не рівні тотожно нулю. Одним з методів їх розв'язання є метод Бернуллі.

Ідея методу. Невідому функцію шукають у вигляді: $y=u\cdot v$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$ – невідомі функції змінної x.

Оскільки $y=u\cdot v$, то $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Підставимо ці вирази для y та y' в задане рівняння, отримаємо:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+u\cdot v\,p(x)=q(x),\ u'\cdot v+u\cdot\left(v'+v\cdot p(x)\right)=q(x).$$

Знайдемо такий розв'язок отриманого рівняння, щоб $v' + v \cdot p(x) = 0$. Тоді задане рівняння набуде вигляду $u' \cdot v(x) = q(x)$. Таким чином, отримаємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v \cdot p(x) = 0, \\ u' \cdot v = q(x). \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо один нетривіальний частинний розв'язок $v = v(x)$ (при цьому сталу C не додаємо, вважаючи її рівною нулю). Підставляємо $v = v(x)$ в друге рівняння системи та знаходимо з нього $u = u(x, C)$. Добуток знайдених функцій є розв'язком заданого лінійного рівняння: $y = u \cdot v$.

а) $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x$.

Маємо лінійне ДР-1, у якому функція y та її похідна y' утворюють лінійну залежність. Зробимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо вирази для y та y' в задане рівняння, матимемо:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{x \cdot uv}{1 - x^2} = \arcsin x + x, \; u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{x \cdot v}{1 - x^2} \right) = \arcsin x + x.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{x \cdot v}{1 - x^2} = 0, \\ u' \cdot v = \arcsin x + x. \end{cases}$$

Знайдемо функцію v, розв'язавши перше рівняння системи:

$$v' + \frac{x \cdot v}{1 - x^2} = 0, \; \frac{dv}{dx} = -\frac{x \cdot v}{1 - x^2}, \; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x\,dx}{1 - x^2},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1 - x^2\right)}{1 - x^2}, \; \ln v = \frac{1}{2} \ln\left|1 - x^2\right|, \; v = \sqrt{1 - x^2}.$$

Для того, щоб знайти функцію u підставимо $v = \sqrt{1 - x^2}$ в друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u'\cdot\sqrt{1-x^2}=\arcsin x+x\,,\; u'=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

$$u=\int\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\int\arcsin x\;d\left(\arcsin x\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y=u\cdot v=\left(\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\sqrt{1-x^2}+C\right)\sqrt{1-x^2}\,.$$

Відповідь: $y=\left(\frac{1}{2}\arcsin^2 x-\sqrt{1-x^2}+C\right)\sqrt{1-x^2}\,.$

б) $(y+1)dx=(y+1-2x)dy\,.$

Поділимо обидві частини заданого рівняння на dy та перетворимо отримане рівняння:

$(y+1)\dfrac{dx}{dy}=y+1-2x\,,\quad (y+1)x'+2x=y+1\,,\quad x'+\dfrac{2x}{y+1}=1$ – лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $x=x(y)$ та її похідної $x'=x'(y)$.

Зробимо заміну: $x=u\cdot v\,,\; x'=u'\cdot v+u\cdot v'$ (тут $u=u(y),\; v=v(y)$). Маємо:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{2uv}{y+1}=1\,,\; u'\cdot v+u\cdot\left(v'+\frac{2v}{y+1}\right)=1\,.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{2v}{y+1}=0,\\ u'\cdot v=1.\end{cases}$$

Знайдемо функцію v, розв'язавши перше рівняння системи:

$$v'+\frac{2v}{y+1}=0\,,\; \frac{dv}{dy}=-\frac{2v}{y+1}\,,\; \frac{dv}{v}=-\frac{2\,dy}{y+1}\,,\; \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{2\,dy}{y+1}\,,$$

$$\ln|v| = -2\ln|y+1|,\ \ln|v| = \ln(y+1)^{-2},\ v = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

Для того, щоб знайти функцію u підставимо $v = \frac{1}{(y+1)^2}$ в друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u' \cdot v = 1,\ \frac{1}{(y+1)^2}\frac{du}{dy} = 1,\ du = (y+1)^2\, dy,\ u = \int (y+1)^2\, dy = \frac{(y+1)^3}{3} + C.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$x = u \cdot v = \left(\frac{(y+1)^3}{3} + C\right)\frac{1}{(y+1)^2} = \frac{y+1}{3} + \frac{C}{(y+1)^2}.$$

$$x = \frac{y+1}{3} + \frac{C}{(y+1)^2}.$$

Відповідь: $x = \frac{y+1}{3} + \frac{C}{(y+1)^2}$.

в) $y'\cos^2 x + y = tgx,\ y(0) = 0$.

Маємо лінійне ДР-1, у якому функція y та її похідна y' утворюють лінійну залежність. Запишемо задане диференціальне рівняння у вигляді:

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg} x}{\cos^2 x}.$$

Зробимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо вирази для y та y' в задане рівняння, матимемо:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{u \cdot v}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x},\ u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{v}{\cos^2 x}\right) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x}.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{\cos^2 x} = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Знайдемо функцію v, розв'язавши перше рівняння системи:

$$v' + \frac{v}{\cos^2 x} = 0,\ \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{\cos^2 x},\ \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x},\ \ln v = -\operatorname{tg} x,\ v = e^{-\operatorname{tg} x}.$$

Для того, щоб знайти функцію u підставимо $v = e^{-\operatorname{tg} x}$ в друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u' \cdot e^{-\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},\ u' = \frac{\operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x},\ u = \int \frac{\operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx,$$

Знайдемо інтеграл, що стоїть у правій частині останньої рівності:

$$\int \frac{\operatorname{tg} x \cdot e^{tgx}}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \end{matrix} \right| = \int t\, e^t\, dt = \left| \begin{matrix} U = t, & dU = dt \\ dV = e^t dx, & V = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$= te^t - \int e^t dt = t\, e^t - e^t + C = \operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

Отже, $u = \operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C$. Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = u \cdot v = \left(\operatorname{tg} x\, e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C\right) e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x - 1 + C\, e^{-\operatorname{tg} x}.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо C. Для цього в загальний розв'язок рівняння підставимо $y = 0$, $x = 0$:

$$0 = \operatorname{tg} 0 - 1 + C \cdot e^0,\ C = 1.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}.$$

Відповідь: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

г) $\dfrac{y'}{x} + 2y = 8e^{-x^2}$, $y(0) = -2$.

Маємо лінійне ДР-1, у якому функція y та її похідна y' утворюють лінійну залежність.

Помножимо обидві частини заданого рівняння на x, отримаємо:

$$y' + 2xy = 8xe^{-x^2}. \qquad (*)$$

Зробимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо вирази для y та y' у рівняння (*), матимемо:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2xuv = 8x e^{-x^2},\ u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 8x e^{-x^2}.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0, \\ u' \cdot v = 8xe^{-x^2}. \end{cases}$$

Знайдемо функцію v, розв'язавши перше рівняння системи:

$$v' + 2xv = 0\,,\ \frac{dv}{dx} = -2xv\,,\ \frac{dv}{v} = -2xdx\,,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int xdx\,,\ \ln|v| = -x^2\,,\ v = e^{-x^2}\,.$$

Для того, щоб знайти функцію u підставимо $v = e^{-x^2}$ в друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u' \cdot e^{-x^2} = 8xe^{-x^2}\,,\ u' = 8x\,,\ u = \int 8x\,dx = 4x^2 + C\,.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = u \cdot v = \left(4x^2 + C\right)e^{-x^2}\,.$$

Використовуючи початкову умову $y(0) = -2$, знайдемо C. Для цього в загальний розв'язок рівняння підставимо $y = -2$, $x = 0$:

$$-2 = (0 + C) \cdot e^0\,,\ C = -2\,.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}\,.$$

Відповідь: $y = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$.

Завдання 2.1.4 (до ***Завдання 2.1.2.4*** **[6]**). Розв'язати ДР-1 Бернуллі:

а) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$;

б) $y' + \dfrac{2y}{\sin x} = y^2 \cdot 2tg^2\,\dfrac{x}{2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Розв'язання.

Диференціальне рівняння Бернуллі – це рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)y^n$, де ліва частина лінійна відносно функції y та її похідної y', а права частина містить y^n, n – дійсне число ($n \neq 0$,

$n \neq 1$), $p(x)$, $q(x)$ – задані та неперервні на деякому проміжку функції, що не рівні тотожно нулю. За допомогою підстановки $z = y^{1-n}$, $z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного ДР-1.

а) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$.

Маємо рівняння Бернуллі, у якого $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = x^2$, $n = 4$.

Поділимо задане рівняння на y^4:

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{xy^3} = x^2 .$$

Зробимо заміну: $z = y^{-3}$, тоді $z' = -3y^{-4}y'$. Підставимо отримані вирази для z та z' в останнє рівняння, отримаємо лінійне ДР-1 відносно нової функції z:

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{z}{x} = x^2 ,\ z' - \frac{3z}{x} = -3x^2 .$$

Зробимо заміну: $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Матимемо

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{3uv}{x} = -3x^2 ,\ u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{3v}{x} \right) = -3x^2 .$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3v}{x} = 0, \\ u' \cdot v = -3x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо функцію v:

$$v' - \frac{3v}{x} = 0 ,\ \frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x} ,\ \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x} ,\ \ln v = 3\ln x ,\ v = x^3 .$$

Підставимо $v = x^3$ в друге рівняння системи та знайдемо з нього u:

$$u' \cdot x^3 = -3x^2 ,\ u' = -\frac{3}{x} ,\ u = -3\int \frac{dx}{x} ,\ u = \ln x^{-3} + \ln C = \ln \frac{C}{x^3} .$$

Загальний розв’язок рівняння відносно змінної z:

$$z = x^3 \ln \frac{C}{x^3} .$$

Оскільки $z = y^{-3}$, то $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln\frac{C}{x^3}\cdot x}}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\ln\frac{C}{x^3}\cdot x}}$.

б) $y' + \frac{2y}{\sin x} = y^2 \cdot 2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Маємо рівняння Бернуллі, у якому $p(x) = \frac{2}{\sin x}$, $q(x) = 2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$, $n = 2$.

Поділимо задане рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{\sin x \cdot y} = 2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Зробимо заміну: $z = y^{-1}$, тоді $z' = -y^{-2}y'$. Підставимо отримані вирази для z та z' в останнє рівняння, отримаємо лінійне ДР-1 відносно нової функції z:

$$-z' + \frac{2z}{\sin x} = 2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2},\ z' - \frac{2z}{\sin x} = -2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Зробимо заміну: $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Матимемо

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{\sin x} = -2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2},\ u' \cdot v + u\left(v' - \frac{2v}{\sin x}\right) = -2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{\sin x} = 0, \\ u' \cdot v = -2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо функцію v:

$$v' - \frac{2v}{\sin x} = 0,\ \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{\sin x},\ \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{\sin x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{\sin x}, \ \ln v = 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|, \ v = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Підставимо $v = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ в друге рівняння системи та розв’яжемо його:

$u'\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = -2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$,. $u' = -2$, $u = -2x + C$. Запишемо загальний розв’язок відносно змінної z: $z = (-2x + C)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.

Оскільки $z = \frac{1}{y}$, то $y = \frac{1}{z}$. $y = \dfrac{1}{(-2x + C)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ – загальний розв’язок заданого рівняння.

Використовуючи початкову умову, знайдемо C. Для цього в загальний розв’язок підставимо $y = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \frac{1}{\left(-\frac{2\pi}{2} + C\right)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}}, \ C - \pi = 1, \ C = 1 + \pi.$$

Частинний розв’язок заданого рівняння:

$$y = \frac{1}{(1 + \pi - 2x)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{(1 + \pi - 2x)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Завдання 2.1.5 (до ***Завдання 2.1.2.5*** **[6]**). Розв’язати ДР-1 у повних диференціалах:

а) $(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$;

б) $(\frac{1}{x} + \frac{2}{y})dx + (y - \frac{2x}{y^2})dy = 0$.

Розв’язання.

ДР-1 виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ називається *ДР - 1 у повних* *диференціалах*, якщо його ліва частина є повний диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто виконується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Тоді $P(x, y)dx + Q(x, x)dy = du(x, y) = 0$, тому загальним інтегралом рівняння в повних диференціалах є $u(x, y) = C$.

1 спосіб. Ліва частина заданого рівняння повинна дорівнювати повному диференціалу деякої функції $u(x, y)$, тобто $du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, то $u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ – невідома функція змінної y. Знайдемо $\varphi(y)$, скориставшись умовою $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right) = Q(x, y),\ \varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx,$$

$$\varphi(y) = \int\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx\right)dy.$$

При знаходженні $\varphi(y)$ сталу C не додаємо, вважаємо її рівною нулю. Підставимо $\varphi(y)$ у вираз для $u(x, y)$, отримаємо загальний розв’язок ДР-1 у повних диференціалах:

$$\int P(x, y)\,dx + \int\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right) = C.$$

2 спосіб. Загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах можна знайти за однією із двох формул [5]:

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C \tag{2.2}$$

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C, \tag{2.3}$$

де точка $M_0(x_0,\, y_0)$ належить області визначення функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$.

а) $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$.

1 спосіб. Розглянемо задане рівняння $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$. Перевіримо для нього виконання умови (2.1):

$$P(x,y)=3x^2y+\sin x,\; Q(x,y)=x^3-\cos y;$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=3x^2,\; \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=3x^2.$$

Умова (2.1) виконується, тому задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y+\sin x \Rightarrow u(x,y)=\int(3x^2y+\sin x)dx=x^3y-\cos x+\varphi(y).$$

Для знаходження $\varphi(y)$ скористаємось рівністю $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y-\cos x+\varphi(y)\right)=x^3-\cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+\varphi'(y)=x^3-\cos y \Rightarrow \varphi'(y)=-\cos y \Rightarrow \varphi(y)=-\sin y.$$

Тоді $u(x,y)=x^3y-\cos x-\sin y$, а загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $x^3y-\cos x-\sin y=C$.

2 спосіб. Розв'яжемо задане рівняння, використовуючи формулу (2.2). В якості точки $M_0(x_0,\, y_0)$ візьмемо точку $M_0(0,\,0)$. Маємо:

$$P(x,y_0)=P(x,0)=3x^2\cdot 0+\sin x=\sin x,$$

$$\int_0^x \sin x\,dx+\int_0^y\left(x^3-\cos y\right)dy=C,\; -\cos x\Big|_0^x+\left(x^3y-\sin y\right)\Big|_0^y=C,$$

$$-\cos x+1+x^3y-\sin y=C \text{ або } x^3y-\cos x-\sin y=C.$$

Відповідь: $x^3y-\cos x-\sin y=C$.

б) $(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})dx+(y-\frac{2x}{y^2})dy=0$.

1 спосіб. Перевіримо виконання умови (2.1):

$$P(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\,,\ Q(x,y)=y-\frac{2x}{y^2}\,;$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{2}{y^2}\,,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{2}{y^2}\,.$$

Умова (2.1) виконується, тому задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\Rightarrow u(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)dx=\ln|x|+\frac{2x}{y}+\varphi(y).$$

Для знаходження $\varphi(y)$ скористаємось рівністю $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$.

Матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln|x|+\frac{2x}{y}+\varphi(y)\right)=y-\frac{2x}{y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2x}{y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{2x}{y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=y\Rightarrow\varphi(y)=\frac{y^2}{2}\,.$$

Тоді $u(x,y)=\ln|x|+\frac{2x}{y}+\frac{y^2}{2}$, а загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд: $\ln|x|+\frac{2x}{y}+\frac{y^2}{2}=C$.

2 спосіб. Розв’яжемо задане рівняння, використовуючи формулу (2.2). В якості точки $M_0(x_0,\,y_0)$ візьмемо точку $M_0(1,1)$. Маємо:

$$P(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\,,\ Q(x,y)=y-\frac{2x}{y^2}$$

$$P(x,y_0)=P(x,1)=\frac{1}{x}+\frac{2}{1}=\frac{1}{x}+2\,,$$

$$\int_1^x\left(\frac{1}{x}+2\right)dx+\int_1^y\left(y-\frac{2x}{y^2}\right)dy=C_1\,,\ \left(\ln|x|+2x\right)\Big|_1^x+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{2x}{y}\right)\Bigg|_1^y=C_1\,,$$

$$\ln|x|+2x-(\ln 1+2)+\frac{y^2}{2}+\frac{2x}{y}-\left(\frac{1}{2}+2x\right)=C_1,\ \ln|x|+\frac{y^2}{2}+\frac{2x}{y}=C,$$

де $C=C_1+2\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\ln|x|+\frac{2x}{y}+\frac{y^2}{2}=C$.

Завдання 2.1.6 (до ***Завдання 2.1.2.6*** **[6]**). Розв'язати задачі.

1. Крива проходить через точку $M(0;5)$. Записати рівняння кривої, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює абсцисі цієї точки, збільшеній у 1,6 разів.

2. Крива проходить через точку $N(32;0)$. Записати рівняння кривої, якщо відомо, що відрізок, відсічений від вісі ординат дотичною до кривої, дорівнює півсумі координат точки дотику.

Розв'язання.

1. Нехай $y=y(x)$ – рівняння шуканої кривої. Оберемо на кривій довільну точку $A(x;y)$. Відповідно до геометричного змісту похідної кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, проведеної в точці $A(x;y)$, дорівнює похідній функції $y=y(x)$ в цій точці. За умовою задачі для кожної точки кривої $y'=1{,}6\,x$. Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння:

$$y=\int 1{,}6x\,dx,\ y=0{,}8x^2+C.$$

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння, тобто рівняння кривої, яка проходить через точку $M(0;5)$. Підставимо в загальний розв'язок координати точки $x=0$, $y=5$: $5=0{,}8\cdot 0^2+C$, $C=5$. Отже, рівняння шуканої кривої $y=0{,}8x^2+5$.

Відповідь: $y=0{,}8x^2+5$.

2. Нехай $y=y(x)$ – рівняння шуканої кривої. Оберемо на кривій довільну точку $M(x;y)$ та проведемо через неї дотичну (рис. 2.1).

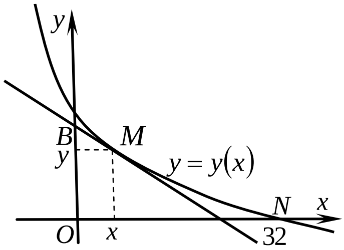

Рисунок 2.1

Рівняння дотичної проведеної в будь-якій точці $(x;y)$ кривої має вигляд: $Y-y=y'(X-x)$, де X, Y – координати точки, що належить дотичній. Поклавши $X=0$, знайдемо ординату Y_0 точки перетину дотичної з віссю ординат: $Y_0-y=y'(0-x)$, $Y_0=y-xy'$. Отже, довжина відрізка, відсіченого дотичною до кривої від осі ординат $OB=Y_0=y-xy'$. За умовою $OB=\dfrac{x+y}{2}$. Маємо $y-xy'=\dfrac{x+y}{2}$, $2y-2xy'=x+y$, $y'-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{1}{2}$. Отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $y=y(x)$. Розв'яжемо його. Зробимо заміну: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Маємо

$$u'v+uv'-\frac{1}{2x}uv=-\frac{1}{2},\ u'v+u\left(v'-\frac{1}{2x}v\right)=-\frac{1}{2}.$$

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} v'-\dfrac{1}{2x}v=0, \\ u'v=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знайдемо функцію v:

$$v'-\frac{1}{2x}v=0,\ \frac{dv}{dx}=\frac{1}{2x}v,\ \frac{dv}{v}=\frac{1}{2x}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx,\ \ln|v|=\frac{1}{2}\ln|x|,\ \ln|v|=\ln|x^{\frac{1}{2}}|, v=x^{\frac{1}{2}},\ v=\sqrt{x}.$$

Підставимо $v=\sqrt{x}$ у друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u'\sqrt{x}=-\frac{1}{2},\ u'=-\frac{1}{2\sqrt{x}},\ u=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}},\ u=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x}+C=-\sqrt{x}+C.$$

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y=uv=\left(-\sqrt{x}+C\right)\cdot\sqrt{x}=-x+C\sqrt{x}.$$

Знайдемо частинний розв’язок диференціального рівняння, тобто рівняння кривої, яка проходить через точку $N(32;0)$. Підставимо у загальний розв’язок диференціального рівняння $x=32$, $y=0$:

$$0=-32+C\sqrt{32},\ C=\sqrt{32}.$$

Рівняння шуканої кривої: $y=-x+\sqrt{32x}$.

Відповідь: $y=-x+\sqrt{32x}$.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків та системи диференціальних рівнянь

Завдання 2.2.1 (до ***Завдання 2.2.2.1*** **[6]**) Розв’язати диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку:

а) $x^2y''=5$;

б) $xy''=y'\cdot\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$;

в) $1+y'^2=yy''$;

г) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1),\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$;

д) $y''=y'e^y\ \ y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Розв’язання.

а) $x^2y''=5$.

Задане рівняння запишемо у вигляді $y''=\frac{5}{x^2}$. Маємо ДР-2 виду $y''=f(x)$. Для отримання загального розв’язку треба двічі послідовно проінтегрувати його праву частину.

Для заданого рівняння отримуємо:

$$y' = 5\int \frac{dx}{x^2} = -5x^{-1} + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{5}{x} + C_1 \right) dx = -5\ln x + C_1 x + C_2$$ – загальний розв'язок.

Відповідь: $y = -5\ln x + C_1 x + C_2$.

б) $xy'' = y' \cdot \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Задане рівняння не містить невідому функцію y. Знизимо порядок заданого рівняння за допомогою заміни: $y' = z(x)$, $y'' = z'$. Маємо:

$$x z' = z \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right), \; z' = \frac{z}{x} \cdot \ln\left(\frac{z}{x}\right).$$

Отримали однорідне рівняння першого порядку. Зробимо підстановку: $z = u \cdot x$, $z' = u'x + u$. Отримаємо

$$u'x + u = u \cdot \ln u, \; \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}, \; \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|, \; \ln u - 1 = C_1 x, \; u = e^{1 + C_1 x}.$$

Зробимо обернену заміну $u = \frac{z}{x} = \frac{y'}{x}$:

$$\frac{y'}{x} = e^{1 + C_1 x}, \; y' = xe^{1 + C_1 x}.$$

Інтегруємо останнє рівняння:

$$y = \int xe^{1+C_1 x} dx = \begin{vmatrix} U = x, & dU = dx, \\ dV = e^{1+C_1 x} dx, & V = \frac{1}{C_1} e^{1+C_1 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1} \int e^{1+C_1 x} dx =$$

$$= \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

Відповідь: $y=\frac{1}{C_1}xe^{1+C_1x}-\frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1x}+C_2$.

в) $1+y'^2=yy''$.

Задане рівняння не містить незалежну змінну x. Зниження порядку зробимо за допомогою заміни $y'=p(y)$, тоді $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$. Маємо

$$1+p^2=y\,p\frac{dp}{dy}.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функції p. Відокремимо змінні та проінтегруємо обидві частини отриманого рівняння:

$$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y},\ \int\frac{pdp}{1+p^2}=\int\frac{dy}{y},\ \frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln|y|+\ln|C_1|,$$

$$\ln\left(1+p^2\right)=\ln(C_1y)^2,\ \text{тоді}\ 1+p^2=(C_1y)^2,\ p=\pm\sqrt{(C_1y)^2-1}.$$

Зробимо обернену заміну $y'=p(y)$:

$$y'=\pm\sqrt{(C_1y)^2-1},\ \frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\pm dx,\ \int\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^2-1}}=\pm\int dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{(C_1y)^2-1}\right|=\pm x+C_2\ \text{– загальний інтеграл.}$$

Відповідь: $\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{(C_1y)^2-1}\right|=\pm x+C_2$.

г) $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1),\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$.

Задане рівняння не містить невідому функцію y. Понизимо порядок заданого рівняння за допомогою заміни: $y'=z(x)$, $y''=z'$. Маємо

$$z'-\frac{z}{x-1}=x(x-1).$$

Отримали лінійне рівняння першого порядку відносно функції z. Розв'яжемо його за допомогою методу Бернуллі. Зробимо підстановку: $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Матимемо

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x-1} = x(x-1),\; u'v + u\left(v' - \frac{v}{x-1}\right) = x(x-1).$$

Складемо систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x-1} = 0, \\ u'v = x(x-1). \end{cases}$$

З першого рівняння системи знайдемо функцію v:

$$v' - \frac{v}{x-1} = 0,\; \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x-1},\; \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x-1},\; \ln v = \ln(x-1),\; v = x-1.$$

Підставимо $v = x-1$ у друге рівняння системи та розв'яжемо його:

$$u'v = x(x-1),\; u'(x-1) = x(x-1),\; u' = x,\; u = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Отже, $z = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)(x-1)$. Повернемось до змінної y:

$$y' = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)(x-1).$$

Знайдемо константу C_1, використовуючи початкові умови:

$$-1 = \left(\frac{2^2}{2} + C_1\right)(2-1),\; C_1 = -3.$$

Підставимо значення C_1 у вираз для похідної y' та знайдемо функцію y:

$$y' = \left(\frac{x^2}{2} - 3\right)(x-1),\; y' = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 3x + 3,$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 3x + 3\right)dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + C_2.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_2:

$$1=\frac{2^4}{8}-\frac{2^3}{6}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+3\cdot 2+C_2\,,\; C_2=\frac{1}{3}\,.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y=\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{1}{3}\,.$$

Відповідь: $y=\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{3x^2}{2}+3x+\dfrac{1}{3}$.

д) $y''=y'e^y \quad y(0)=0\,,\; y'(0)=1$.

Задане рівняння не містить незалежну змінну x. Понизимо його порядок за допомогою заміни $y'=p(y)$, тоді $y''=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$. Маємо

$$p\frac{dp}{dy}=pe^y\,,\; dp=e^y dy\,,\; p=e^y+C_1\,.$$

Оскільки $y'=p(y)$, то $y'=e^y+C_1$. Знайдемо константу C_1, використовуючи початкові умови:

$$1=e^0+C_1,\; 1=1+C_1\,,\; C_1=0\,.$$

Тоді $y'=e^y$. Знайдемо функцію y:

$$\frac{dy}{dx}=e^y\,,\; \frac{dy}{e^y}=dx\,,\; -e^{-y}=x+C_2\,.$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_2: $-1=C_2$. Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$-e^{-y}=x-1\,,\; e^{-y}=1-x \text{ або } y=-\ln(1-x)\,.$$

Відповідь: $y=-\ln(1-x)$.

Завдання 2.2.2 (до ***Завдання 2.2.2.2*** **[6]**). Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2 і ЛОДР-4):

а) $25y''+36y=0$;

б) $2y''-7y'=0, \quad y(0)=3, y'(0)=-7$;

в) $y''+7y'+10y=0$;

г) $y'' - 2y' + 50y = 0$;

д) $y^{\mathrm{IV}} + 16y''' + 64y'' = 0$.

Розв'язання.

а) $25y'' + 36y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$25k^2 + 36 = 0\,;\ k^2 = -\frac{36}{25}\,;$$

$$k = \pm\sqrt{-\frac{36}{25}} = \pm\sqrt{\frac{36}{25}} \cdot \sqrt{-1} = \pm\frac{6}{5}i = 0 \pm 1{,}2i\,.$$

Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то загальний розв'язок диференціального рівняння має структуру $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Для заданого диференціального рівняння: $\alpha = 0$; $\beta = 1{,}2$; $y = e^{0x}(C_1 \cos 1{,}2x + C_2 \sin 1{,}2x)$, $y = C_1 \cos 1{,}2x + C_2 \sin 1{,}2x$.

Відповідь: $y = C_1 \cos 1{,}2x + C_2 \sin 1{,}2x$.

б) $2y'' - 7y' = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -7$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$2k^2 - 7k = 0\,;\ k(2k-7) = 0\,;\ k_1 = 0\,;\ 2k - 7 = 0\,;\ k_2 = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, то загальний розв'язок диференціального рівняння має структуру $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Для заданого диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3{,}5x} = C_1 + C_2 e^{3{,}5x}\,.$$

Знайдемо такі значення сталих C_1 і C_2, при яких розв'язок диференціального рівняння задовольняє заданим початковим умовам. Знайдемо y': $y' = (C_1 + C_2 e^{3{,}5x})' = 3{,}5C_2 e^{3{,}5x}$. З початкових умов отримуємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{3{,}5\cdot 0} = 3; \\ 3{,}5C_2 e^{3{,}5\cdot 0} = -7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ 3{,}5C_2 = -7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 3 - C_2; \\ C_2 = \dfrac{-7}{3{,}5} = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - \left(-2\right) = 5; \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Підставивши знайдені значення сталих C_1 і C_2 у загальний розв'язок рівняння, отримаємо частинний розв'язок: $y = 5 - 2e^{3{,}5x}$.

Відповідь: $y = 5 - 2e^{3{,}5x}$.

в) $y'' + 7y' + 10y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 7k + 10 = 0;\ D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9;\ \sqrt{D} = 3;$$

$$k_1 = \frac{-7-3}{2 \cdot 1} = -5;\ k_2 = \frac{-7+3}{2} = -2.$$

Структура загального розв'язку: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Загальний розв'язок заданого рівняння: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}$.

Відповідь: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}$.

г) $y'' - 2y' + 50y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 50 = 0;\ D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 50 = -196;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-196} = 14i;\ k_{1,\,2} = \frac{2 \pm 14i}{2} = 1 \pm 7i.$$

Структура загального розв'язку: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Маємо: $\alpha = 1$; $\beta = 7$; $y = e^{1 \cdot x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$.

Відповідь: $y = e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$.

д) $y^{\mathrm{IV}} + 16y''' + 64y'' = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^4 + 16k^3 + 64k^2 = 0;\ k^2(k^2 + 16k + 64) = 0;$$

$$k^2(k+8)^2 = 0;\ k_{1,\,2} = 0;\ k_{3,\,4} = -8.$$

У фундаментальній системі розв'язків кожному дійсному кореню k кратності 2 відповідає два частинних розв'язки: e^{kx}, xe^{kx}. Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 x e^{0\cdot x} + C_3 e^{-8x} + C_4 x e^{-8x},\ y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-8x} + C_4 x e^{-8x}.$$

Відповідь: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-8x} + C_4 x e^{-8x}$.

Завдання 2.2.3 (до ***Завдання 2.2.2.3*** **[6]**). Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2):

а) $y'' + 2y' = -10xe^{-2x}$;

б) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$;

в) $y'' + 6y' + 18y = 90\cos 3x$;

г) $4y'' + 4y' + y = 2x^2 - 48,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -15$.

Розв'язання.

Нехай задано ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{2.4}$$

де a_1, a_2 – дійсні числа.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 має структуру: $y = y_{одн} + \bar{y}$, де $y_{одн}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР, $\bar{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР.

Якщо права частина рівняння (2.4) має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \tag{2.5}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n, то частинний розв'язок ЛНДР-2 $\bar{y}$ шукають у вигляді:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^s,$$

де α – дорівнює значенню α з функції $f(x)$; $Q_n(x)$ – многочлен такого ж степеня що і $P_n(x)$, але записаний у загальному вигляді:

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

де b_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ – невідомі коефіцієнти; s – кількість коренів k_i характеристичного рівняння відповідного ЛОДР-2, які дорівнюють α.

Якщо права частина ЛНДР-2 (2.4) має вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \quad (2.6)$$

де α і β – дійсні числа, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени степенів n та m відповідно, то частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукають у вигляді:

$$\bar{y}=e^{\alpha x}\left(S_r(x)\cos\beta x+R_r(x)\sin\beta x\right)\cdot x^s,$$

де α і β –дорівнюють значенням α і β з функції $f(x)$ відповідно; $S_r(x)$, $R_r(x)$ – многочлени степеня r, записані в загальному вигляді, $r=\max\{n,m\}$; s – кількість коренів k_i характеристичного рівняння відповідного ЛОДР-2, які дорівнюють $\alpha+\beta i$.

Вигляд $\bar{y}$ зберігається незалежно від того, дорівнює чи не дорівнює тотожно нулю один з многочленів перед $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$ у функції $f(x)$.

а) $y''+2y'=-10xe^{-2x}$.

Знайдемо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y''+2y'=0$. Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2+2k=0;\ k(k+2)=0;\ k_1=0;\ k_2=-2.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y_{одн}=C_1+C_2e^{-2x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок заданого рівняння. Для заданого диференціального рівняння:

$$f(x)=-10xe^{-2x};\ \alpha=-2,\ \alpha=k_2=-2, \text{ тому } s=1;$$

$$n=1,\ Q_1(x)=Ax+B.$$

Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y}=e^{-2x}(Ax+B)\,x^1=(Ax^2+Bx)e^{-2x}.$$

Знайдемо вирази для $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$:

$$\bar{y}'=(Ax^2+Bx)'e^{-2x}+(Ax^2+Bx)(e^{-2x})'=(2Ax+B)e^{-2x}-2(Ax^2+Bx)e^{-2x}=$$

$$=(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B)e^{-2x};$$

$$\bar{y}''=(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B)'e^{-2x}+(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B)(e^{-2x})'=$$

$$=(-4Ax-2B+2A)e^{-2x}-2(-2Ax^2-2Bx+2Ax+B)e^{-2x}=$$

$= (4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A)e^{-2x}$.

Підставимо отримані вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$ і $\bar{y}''$ в задане диференціальне рівняння та скоротимо його на e^{-2x}:

$$(4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A) + 2(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B) = -10x;$$

$$4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A - 4Ax^2 - 4Bx + 4Ax + 2B = -10x;$$

$$-4Ax + 2A - 2B = -10x.$$

Щоб знайти A і B, прирівняємо вирази, що стоять при однакових степенях змінної x зліва та справа в останній тотожності:

$$\begin{array}{c|ll} x^1 & -4A = -10; & A = 2{,}5; \\ x^0 & 2A - 2B = 0; & B = A = 2{,}5. \end{array}$$

Отже, $\bar{y} = e^{-2x}(2{,}5x + 2{,}5)x = 2{,}5x(x+1)e^{-2x}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2{,}5x(x+1)e^{-2x}.$$

Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 2{,}5x(x+1)e^{-2x}$.

б) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$.

Знайдемо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 25 = 0; \; D = 6^2 - 4 \cdot 25 = -64;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-64} = 8i; \; k_{1,2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i \; (\alpha = 3, \beta = 4).$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y_{одн} = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Права частина заданого рівняння виду (2.6). Для заданого диференціального рівняння:

$$f(x) = 9\sin 4x - 24\cos 4x,$$

$$\alpha = 0, \; \beta = 4, \; \alpha + \beta i = 0 + 4i \neq 3 + 4i, \text{ тому } s = 0;$$

$$n = 0, \; m = 0, \; r = 0, \; S_0(x) = A, \; R_0(x) = B.$$

Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Знайдемо $\bar{y}'$ і $\bar{y}''$:

$$\bar{y}' = A(\cos 4x)' + B(\sin 4x)' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x;$$
$$\bar{y}'' = -4A(\sin 4x)' + 4B(\cos 4x)' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x.$$

Підставимо отримані вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$ у задане диференціальне рівняння, отримаємо:

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 6(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) +$$
$$+25(A\cos 4x + B\sin 4x) = 9\sin 4x - 24\cos 4x;$$
$$9A\cos 4x + 9B\sin 4x + 24A\sin 4x - 24B\cos 4x = 9\sin 4x - 24\cos 4x;$$
$$(9A - 24B)\cos 4x + (24A + 9B)\sin 4x = 9\sin 4x - 24\cos 4x.$$

Прирівнявши вирази, що стоять при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ зліва та справа в останній тотожності, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно A і B:

$$\begin{array}{l|} \sin 4x \\ \cos 4x \end{array} \begin{cases} 24A + 9B = 9; \\ 9A - 24B = -24; \end{cases} \begin{cases} 8A + 3B = 3; \\ 3A - 8B = -8; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0; \\ B = 1. \end{cases}$$

Отже, $\bar{y} = \sin 4x$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \sin 4x.$$

Відповідь: $y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \sin 4x$.

в) $y'' + 6y' + 18y = 90\cos 3x$.

Знайдемо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y'' + 6y' + 18y = 0$.

Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 6k + 18 = 0; \ D = 6^2 - 4\cdot 18 = -36;$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i; \ k_{1,2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} = -3 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y_{одн} = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Права частина заданого рівняння виду (2.6). Для заданого диференціального рівняння:

$$f(x) = 90\cos 3x,$$
$$\alpha = 0, \ \beta = 3, \ \alpha + \beta i = 0 + 3i \neq -3 \pm 3i, \text{ тому } s = 0;$$
$$n = 0, \ m = 0, \ r = 0, \ S_0(x) = A, \ R_0(x) = B.$$

Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x .$$

Знайдемо $\bar{y}'$ і $\bar{y}''$:

$$\bar{y}' = A(\cos 3x)' + B(\sin 3x)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x ;$$

$$\bar{y}'' = -3A(\sin 3x)' + 3B(\cos 3x)' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x .$$

Підставимо отримані вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$ у задане диференціальне рівняння, отримаємо:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 6(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) +$$

$$+18(A\cos 3x + B\sin 3x) = 90\cos 3x ;$$

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 18A\sin 3x + 18B\cos 3x +$$

$$+18A\cos 3x + 18B\sin 3x = 90\cos 3x ;$$

$$(9A + 18B)\cos 3x + (-18A + 9B)\sin 3x = 90\cos 3x .$$

Прирівнявши вирази, що стоять при $\sin 3x$ та $\cos 3x$ зліва та справа в останній тотожності, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно A і B:

$$\begin{array}{c|} \sin 3x \\ \cos 3x \end{array}\begin{cases} -18A + 9B = 0; \\ 9A + 18B = 90; \end{cases} \quad \begin{cases} -2A + B = 0; \\ A + 2B = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2A; \\ A + 2\cdot 2A = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 2A; \\ 5A = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2; \\ B = 4. \end{cases}$$

Отже, $\bar{y} = 2\cos 3x + 4\sin 3x$.

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння:

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 2\cos 3x + 4\sin 3x .$$

Відповідь: $y = e^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 2\cos 3x + 4\sin 3x$.

г) $4y'' + 4y' + y = 2x^2 - 48,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -15$.

Знайдемо розв’язок відповідного ЛОДР-2: $4y'' + 4y' + y = 0$.

Складемо та розв’яжемо характеристичне рівняння:

$$4k^2 + 4k + 1 = 0 ;\ D = 4^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0 ;\ k_{1,2} = \frac{-4}{2\cdot 4} = -\frac{1}{2} = -0{,}5 .$$

Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння: $y_{одн} = (C_1 + C_2 x)e^{-0{,}5x}$.

Знайдемо частинний розв'язок заданого рівняння. Права частина заданого рівняння має структуру (2.5):

$$f(x) = 2x^2 - 48, \ \alpha = 0, \ \alpha \neq k_{1,2}, \text{ тому } s = 0;$$

$$n = 2, \ Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Знайдемо $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$:

$$\bar{y}' = (Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B;$$

$$\bar{y}'' = (2Ax + B)' = 2A.$$

Підставимо отримані вирази для $\bar{y}$, $\bar{y}'$ та $\bar{y}''$ в задане диференціальне рівняння:

$$4 \cdot 2A + 4(2Ax + B) + Ax^2 + Bx + C = 2x^2 - 48;$$

$$8A + 8Ax + 4B + Ax^2 + Bx + C = 2x^2 - 48;$$

$$Ax^2 + (8A + B)x + 8A + 4B + C = 2x^2 - 48.$$

Прирівняємо вирази, що стоять при однакових степенях змінної x зліва та справа в останній тотожності:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ 1 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} A = 2; \\ B + 8A = 0; \\ 8A + 4B + C = -48. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 2; \\ B = -8A; \\ C = -48 - 8A - 4B. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = 2; \\ B = -8 \cdot 2 = -16; \\ C = -48 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot (-16) = 0. \end{array}\right.$$

Отже, $\bar{y} = 2x^2 - 16x$.

Загальний розв'язок заданого рівняння: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-0,5x} + 2x^2 - 16x$.

Щоб знайти частинний розв'язок необхідно знати y':

$$y' = (C_1 + C_2 x)' e^{-0,5x} + (C_1 + C_2 x)(e^{-0,5x})' + (2x^2 - 16x)' =$$

$$= C_2 e^{-0,5x} - 0,5(C_1 + C_2 x)e^{-0,5x} + 4x - 16;$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0 = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-0,5\cdot 0} + 2\cdot 0^2 - 16\cdot 0; \\ -15 = C_2 e^{-0,5\cdot 0} - 0,5(C_1 + C_2\cdot 0)e^{-0,5\cdot 0} + 4\cdot 0 - 16. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ -15 = C_2 - 0,5C_1 - 16. \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$y = xe^{-0,5x} + 2x^2 - 16x .$$

Відповідь: $y = xe^{-0,5x} + 2x^2 - 16x$.

Завдання 2.2.4 (до ***Завдання 2.2.2.4*** **[6]**). Знайти частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР $y'' - 7y' + 12y = 2e^{-4x} + xe^{3x} + 3x\sin 4x$ у загальному вигляді.

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного рівняння відповідного ЛОДР-2:

$$k^2 - 7k + 12 = 0;\ D = (-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 12 = 1;\ k_1 = \frac{7-1}{2} = 3;\ k_2 = \frac{7+1}{2} = 4 .$$

Відомо, що якщо функція в правій частині ЛНДР-2 є сумою k функцій виду (2.5) або (2.6), тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$, то частинний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді: $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_k$, де $\bar{y}_i$ є частинним розв'язком ЛНДР-2 з функціями $f_i(x)$ у правій частині рівнянь $\left(i = \overline{1,k} \right)$.

Для заданого диференціального рівняння $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, де $f_1(x) = 2e^{-4x}$, $f_2(x) = xe^{3x}$, $f_3(x) = 3x\sin 4x$, тому частинний розв'язок матиме вигляд $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3$.

Функція $f_1(x) = 2e^{-4x}$ є функцією виду (2.5). Маємо $\alpha = -4$, $\alpha \neq k_{1,2}$, тому $s = 0$; $n = 0$, $Q_0(x) = A$; $\bar{y}_1 = Ae^{-4x}$.

Функція $f_2(x) = xe^{3x}$ є функцією виду (2.5). Маємо $\alpha = 3$, $\alpha = k_1 = 3$, тому $s = 1$; $n = 1$, $Q_1(x) = Bx + C$; $\bar{y}_2 = e^{3x}(Bx + C)\cdot x^1$.

Функція $f_3(x)=3x\sin 4x$ є функцією виду (2.6). Маємо $\alpha=0$, $\beta=4$, $\alpha+\beta i=0+4i\neq k_{1,2}$, тому $s=0$; $n=0$, $m=1$, $r=\max\{0,1\}=1$ $S_1(x)=Dx+E$; $R_1(x)=Fx+G$; $\bar{y}_3=(Dx+E)\cdot\cos 4x+(Fx+G)\cdot\sin 4x$.
Отже, $\bar{y}=Ae^{-4x}+x(Bx+C)e^{3x}+(Dx+E)\cdot\cos 4x+(Fx+G)\cdot\sin 4x$

Відповідь: $\bar{y}=Ae^{-4x}+x(Bx+C)e^{3x}+(Dx+E)\cdot\cos 4x+$
$+(Fx+G)\cdot\sin 4x$.

Завдання 2.2.5 (до ***Завдання 2.2.2.5*** **[6]**). Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа):

а) $y''+3y'+2y=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$; **б)** $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x}$;

в) $y''+2y'+5y=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$; **г)** $y''+9y=\mathrm{tg}3x$.

Розв'язання.

Алгоритм розв'язування рівняння $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ методом Лагранжа:

1) знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 $y''+a_1y'+a_2y=0$:

$$y_{одн}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x);$$

2) загальний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x), \qquad (*)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції змінної x, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки відповіного ЛОДР-2;

3) складаємо та розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'y_1(x)+C_2'y_2(x)=0, \\ C_1'\,y_1'(x)+C_2'y_2'(x)=f(x); \end{cases}$$

4) інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ та підставляємо знайдені $C_1(x)=\varphi_1(x)+\overline{C}_1$ і $C_2(x)=\varphi_2(x)+\overline{C}_2$ в (*).

а) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

1) Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння відповідного ЛОДР-2:

$$k^2 + 3k + 2 = 0\,,\ k_1 = -1\,,\ k_2 = -2\,.$$

Загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}\,.$$

2) Загальний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}\,. \qquad (*)$$

3) Враховуючи, що $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_1'(x) = -e^{-x}$, $y_2'(x) = -2e^{-2x}$, складаємо та розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}\,,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}\,,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^{2x}}\,.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,,\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,.$$

4) Інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x)=\int\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx=\begin{vmatrix}t=e^{2x},\\ dt=2e^{2x}dx\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t+1)}{t+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t+1|+\overline{C}_1=\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+\overline{C}_1 .$$

$$C_2(x)=-\int\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx=\begin{vmatrix}t=e^{x},\\ dt=e^{x}dx\end{vmatrix}=-\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=-\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=$$

$$=-\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-t+\operatorname{arctg}t+\overline{C}_2=-e^x+\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+\overline{C}_2 .$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (*), отримуємо загальний розв’язок заданого рівняння:

$$y=\left(\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+\overline{C}_1\right)e^{-x}+\left(-e^x+\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+\overline{C}_2\right)e^{-2x} .$$

Відповідь: $y=\left(\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+\overline{C}_1\right)e^{-x}+\left(-e^x+\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+\overline{C}_2\right)e^{-2x}$.

б) $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x}$.

1) Складемо та розв’яжемо характеристичне рівняння відповідного ЛОДР-2:

$$k^2-4k+4=0\,;\ k_{1,\,2}=2 .$$

Загальний розв’язок відповідного ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x} .$$

2) Загальний розв’язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)xe^{2x} .$$

3) Враховуючи, що $y_1(x)=e^{2x}$, $y_2(x)=xe^{2x}$, $y_1'(x)=2e^{2x}$, $y_2(x)=e^{2x}+2xe^{x}$, складаємо та розв’язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases}C_1'e^{2x}+C_2'xe^{2x}=0;\\ C_1'2e^{2x}+C_2'(e^{2x}+2xe^{2x})=\dfrac{e^{2x}}{x}.\end{cases}\quad\begin{cases}C_1'+C_2'x=0;\\ C_1'2+C_2'(1+2x)=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок за формулами Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x\\ 2 & 1+2x\end{vmatrix}=1+2x-2x=1,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & x\\ \frac{1}{x} & 1+2x\end{vmatrix}=0\cdot(1+2x)-x\cdot\frac{1}{x}=-1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=1\cdot\frac{1}{x}-0\cdot 2=\frac{1}{x},\ C_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{1}=-1,\ C_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}.$$

4) Інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x)=\int(-1)dx=-x+\overline{C}_1,\ C_2(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+\overline{C}_2.$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (*), отримуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y=(-x+\overline{C}_1)e^{2x}+(\ln|x|+\overline{C}_2)\,x\,e^{2x}.$$

Відповідь: $y=(-x+\overline{C}_1)e^{2x}+(\ln|x|+\overline{C}_2)\,x\,e^{2x}$.

в) $y''+2y'+5y=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

1) Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння відповідного ЛОДР-2:

$$k^2+2k+5=0,\ k_{1,2}=-1\pm 2i.$$

Загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

2) Загальний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y=C_1(x)e^{-x}\cos 2x+C_2(x)e^{-x}\sin 2x. \qquad (*)$$

3) Враховуючи, що $y_1(x)=e^{-x}\cos 2x$, $y_2(x)=e^{-x}\sin 2x$, $y_1'(x)=-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)$, $y_2'(x)=e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$, складаємо та розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases}C_1'(x)e^{-x}\cos 2x+C_2'(x)e^{-x}\sin 2x=0,\\ -C_1'(x)e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)+C_2'(x)e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x},\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -C_1'(x)(\cos 2x + 2\sin 2x) + C_2'(x)(-\sin 2x + 2\cos 2x) = \dfrac{1}{\sin 2x}. \end{cases}$$

Знаходимо її розв'язок за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x & -\sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x} & -\sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -\cos 2x - 2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x}{2\sin 2x}.$$

4) Інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{2}dx = -\frac{x}{2} + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos 2x}{2\sin 2x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} = \frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + \overline{C}_2.$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (*), отримуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \left(-\frac{x}{2} + \overline{C}\right)e^{-x}\cos 2x + \left(\frac{1}{4}\ln|\sin 2x| + \overline{C}_2\right)e^{-x}\sin 2x.$$

Відповідь: $y = \left(-\dfrac{x}{2} + \overline{C}\right)e^{-x}\cos 2x + \left(\dfrac{1}{4}\ln|\sin 2x| + \overline{C}_2\right)e^{-x}\sin 2x.$

г) $y'' + 9y = \mathrm{tg}3x$.

1) Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння відповідного ЛОДР-2:

$$k^2 + 9 = 0, \quad k_{1,2} = \pm 3i.$$

Загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 має вигляд:

$$y_{одн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

2) Загальний розв’язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,. \qquad (*)$$

3) Враховуючи, що $y_1(x) = \cos 3x$, $y_2(x) = \sin 3x$, $y_1'(x) = -3\sin 3x$, $y_2'(x) = 3\cos 3x$, складаємо та розв’язуємо систему рівнянь Лагранжа відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ C_1'(x)(-3\sin 3x) + C_2'(x)3\cos 3x = \mathrm{tg}3x. \end{cases}$$

Знаходимо її розв’язок за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \mathrm{tg}3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 3x}{\cos 3x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \mathrm{tg}3x \end{vmatrix} = \sin 3x\,.$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\sin^2 3x}{3\cos 3x},\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sin 3x}{3}\,.$$

4) Інтегруємо знайдені функції $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{\sin^2 3x}{3\cos 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1-\cos^2 3x}{\cos 3x}dx = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{\cos 3x} - \cos 3x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\ln\left|tg\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin 3x\right) + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{3}\int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{9}\cos 3x + \overline{C}_2\,.$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в (*), отримуємо загальний розв’язок заданого рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{9}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin 3x\right) + \overline{C}_1\right)\cos 3x + \left(-\frac{1}{9}\cos 3x + \overline{C}_2\right)\sin 3x\,.$$

Відповідь:

$$y = \left(\frac{1}{9}\left(\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin 3x\right) + \overline{C}_1\right)\cos 3x + \left(-\frac{1}{9}\cos 3x + \overline{C}_2\right)\sin 3x\,.$$

Завдання 2.2.6 (до ***Завдання 2.2.2.6*** **[6]**). Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x' = x - y; \\ y' = x + y + e^t. \end{cases}$

Розв'язання.

Одним із методів розв'язування систем диференціальних рівнянь є зведення системи ДР до одного ДР більш високого порядку відносно одного невідомого. В даному випадку система двох ДР-1 з двома невідомими зводиться до ДР-2 відносно одного невідомого. Невідомими є функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$.

а) $\begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

Продиференціюємо перше рівняння системи по змінній t: $x'' = 2x' + y'$. Замінимо в отриманому рівнянні y' його виразом з другого рівняння заданої системи, отримаємо: $x'' = 2x' + 3x + 4y$ (*).

З першого рівняння системи знаходимо: $y = x' - 2x$ (**). Підставимо (**) в рівняння (*), маємо: $x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x)$; $x'' - 6x' + 5x = 0$. Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x = x(t)$. Знайдемо його розв'язок. Складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 5 = 0$, $k_1 = 1$; $k_2 = 5$. Шукана функція x має вигляд: $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$.

Для того, щоб знайти функцію $y = y(t)$ треба знати x': $x' = (C_1e^t + C_2e^{5t})' = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$.

Для знаходження функції y підставимо вирази для функцій x та x' в (**):

$$y = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}),$$

$$y = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{5t};\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}; \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{5t}; \\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = x - y; \\ y' = -4x + y + 9e^{2t}. \end{cases}$

Продиференціюємо перше рівняння системи по змінній t: $x'' = x' - y'$. Замінимо в отриманому рівнянні y' його виразом з другого рівняння заданої системи, отримаємо: $x'' = x' - \left(-4x + y + 9e^{2t}\right)$, $x'' = x' + 4x - y - 9e^{2t}$ (*).

З першого рівняння системи виразимо y: $y = -x' + x$ (**).

Підставимо (**) в (*): $x'' = x' + 4x - \left(-x' + x\right) - 9e^{2t}$, $x'' = 2x' + 3x - 9e^{2t}$,

$$x'' - 2x' - 3x = -9e^{2t} \qquad (***).$$

Отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно невідомої функції $x = x(t)$. Розв'яжемо його. Характеристичне рівняння відповідного ЛОДР: $k^2 - 2k - 3 = 0$. $k_1 = -1$; $k_2 = 3$. Загальний розв'язок відповідного (***) однорідного рівняння: $x_{одн} = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$. Частинний розв'язок рівняння (***) шукатимемо у вигляді $\bar{x} = Ae^{2t}$. Тоді $\bar{x}' = A(e^{2t})' = 2Ae^{2t}$; $\bar{x}'' = 2A(e^{2t})' = 4Ae^{2t}$. Підставимо $\bar{x}$, $\bar{x}'$ та $\bar{x}''$ у рівняння (***), отримаємо:

$$4Ae^{2t} - 2 \cdot 2Ae^{2t} - 3Ae^{2t} = -9e^{2t};$$
$$-3Ae^{2t} = -9e^{2t}; \ A = 3.$$

Частинний розв'язок рівняння (***): $\bar{x} = 3e^{2t}$. Загальний розв'язок рівняння (***): $x = x_{одн} + \bar{x} = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t}$.

Для того, щоб знайти функцію $y = y(t)$ треба знати x':

$$x' = (C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t})' = -C_1e^{-t} + 3C_2e^{3t} + 6e^{2t}.$$

Підставимо знайдені вирази для x та x' в (**):

$$y = -(-C_1e^{-t} + 3C_2e^{3t} + 6e^{2t}) + C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t},$$

$$y = C_1e^{-t} - 3C_2e^{3t} - 6e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t},$$

$$y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} - 3e^{2t}.$$

Загальний розв’язок заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t}; \\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} - 3e^{2t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 3e^{2t}; \\ y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t} - 3e^{2t}. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи. – 400 с.

2. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи. – 368 с.

3. Вища математика: збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2005. – 480 с.

4. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Вид. 2-е, виправлене і доповнене / І. М. Килимник, Д. С. Яримбаш. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 212 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

6. Індивідуальні завдання до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Елементи теорії поля», «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Засовенко А. В., Килимник І. М. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. –72 с.

7. Килимник І. М. Практикум з інтегрування функції однієї змінної : навчальний посібник / І. М. Килимник, Т. Г. Полякова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 306 с.

8. Овчинников П. П. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація та керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П. П. Овчинников, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2004. – 792 с.

9. Потаніна Т. В. Вища математика: «Векторний аналіз і теорія поля». Теорія і практика: навч. посібник / Т. В. Потаніна. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – 151 с.

ДОДАТОК

Правила диференціювання

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$ – диференційовні функції.

1. $(C\cdot u)'=C\cdot u'$, $C-const$;
2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$.

Таблиця похідних для функцій $u=u(x)$

1) $(C)'=0$
2) $(x)'=1$
3) $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
4) $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
5) $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$, $a-const$
6) $(e^u)'=e^u\cdot u'$
7) $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
8) $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
9) $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
10) $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
11) $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
12) $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
13) $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
14) $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
15) $(arctgu)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
16) $(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
17) $(shu)'=chu\cdot u'$
18) $(chu)'=shu\cdot u'$
19) $(thu)'=\dfrac{1}{ch^2u}\cdot u'$
20) $(cthu)'=-\dfrac{1}{sh^2u}\cdot u'$

Таблиця інтегралів

$$u = u(x), \quad du = u'(x)dx;$$

1) $\int du = u + C$;

2) $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1$; $\quad \int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;

3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$;

5) $\int e^u du = e^u + C$;

6) $\int \sin u \, du = -\cos u + C$;

7) $\int \cos u \, du = \sin u + C$;

8) $\int tgu \, du = -\ln|\cos u| + C$;

9) $\int ctgu \, du = \ln|\sin u| + C$;

10) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C$;

11) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$;

12) $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + C$;

13) $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

14) $\int sh u \, du = ch u + C$;

15) $\int ch u \, du = sh u + C$;

16) $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th u + C$;

17) $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth u + C$;

18) $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C$;

19) $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$;

20) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

21) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

22) $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{1}{2} u\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{1}{2} a^2 \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

23) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \dfrac{1}{2} u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{1}{2} a^2 ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.