

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи
з вищої математики.
РОЗДІЛ «РЯДИ»**

**для студентів електротехнічного факультету
заочної форми навчання**

2024

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з вищої математики. Розділ «Ряди» для студентів електротехнічного факультету заочної форми навчання / Укл. : І. М. Килимник, А. В. Засовенко. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 59 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Засовенко А.В., к.т.н., доцент.

Рецензент: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
«Математика» НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 2 від 04.10.2024 р..

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 3 від 11.12.2024 р.

ЗМІСТ

	Стор
Правила оформлення та виконання контрольної роботи	4
1 Числові ряди	5
1.1 Загальні поняття	5
1.2 Знакододатні числові ряди	6
1.2.1 Необхідна умова збіжності ряду	8
1.2.2 Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами	9
1.3 Знакозмінні числові ряди	15
2 Функціональні ряди. Степеневі ряди	18
2.1 Функціональні ряди	18
2.2 Степеневі ряди	21
2.2.1 Ряд Тейлора	24
2.2.2 Розвинення функцій в степеневий ряд	27
2.2.3 Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів	29
3 Тригонометричні ряди Фур'є	33
3.1 Ряди Фур'є для 2π - періодичних функцій	33
3.2 Ряди Фур'є для парних і непарних 2π - періодичних функцій	38
3.3 Ряди Фур'є для $2l$ - періодичних функцій	41
3.4 Ряди Фур'є для парних і непарних $2l$ - періодичних функцій	44
4 Індивідуальні завдання	47
4.1 Числові ряди	47
4.2 Функціональні ряди. Степеневі ряди	52
4.3 Ряди Фур'є	57
Література	59

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (КР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита посередині треба записати:

- тему КР,
- прізвище, ім'я, по батькові повністю;
- номер академічної групи;
- номер варіанта (*варіанти вказує викладач*).

3. У КР повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю. Розв'язування кожного завдання повинно бути повністю наведено.

4. КР подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях.

5. КР, що виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

Зауваження. У випадку дистанційної форми навчання студент завантажує виконану КР у відповідне завдання курсу «Вища математика» на загальноуніверситетській платформі MOODLE.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА «РЯДИ»

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Загальні поняття

Нехай задана послідовність дійсних чисел $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

Означення 1.1. Вираз виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1.1)$$

де $u_n \in R$, $n \in N$ називається *числовим рядом*.

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ називаються *членами ряду*, а $u_n = f(n)$ – n -й член (*загальний член*) ряду (1.1). Ряд вважається заданим, якщо задано правило, що дозволяє за відомим номером n його члена записати цей член ряду.

Означення 1.2. Сума $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ перших n членів ряду називається n -ою *частковою сумою ряду*

Розглянемо часткові суми:

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

.....

Означення 1.3. Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ то ряд (1.1) називається *збіжним*, а число S називається *сумою ряду*. Якщо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує (або нескінченна), то ряд (1.1) називається *розбіжним*.

Якщо в ряді (1.1) відкинути перші n членів, то одержимо ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, який називають n -м залишком ряду і позначають $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$.

Теорема 1.1 (критерій Коші збіжності ряду). Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geq N(\varepsilon)$ і будь-якого цілого $k \geq 0$ виконувалась нерівність

$$|S_{n+k} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon.$$

Деякі властивості збіжних рядів

1. Якщо ряд збіжний, то збіжним є будь-який ряд, отриманий з нього приписуванням або відкиданням скінченного числа членів.

2. Якщо ряди

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ і $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$ збіжні і мають відповідно суми S_1 і S_2 , то збіжним є ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$ і має суму $S_1 \pm S_2$, тобто збіжні ряди можна почлено додавати і віднімати.

3. Якщо ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ збіжний і має суму S , то його можна почлено помножити на одне й теж саме число C ($C \neq 0$). При цьому отриманий ряд $Cu_1 + Cu_2 + Cu_3 + \dots + Cu_n + \dots$ теж є збіжним і має суму $C \cdot S$.

1.2 Знакододатні числові ряди

Означення 1.4. Якщо всі члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є додатними, то ряд називається *знакододатним*.

Розглянемо ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots, \quad (1.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (1.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots. \quad (1.4)$$

Ряд (1.2) утворений із членів геометричної прогресії. Він збігається при $|q| < 1$, його сума $S = \frac{a}{1-q}$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

Ряд (1.3) називається *гармонічним рядом*. Він розбігається і $S = +\infty$.

Ряд (1.4) називається *узагальненим гармонічним рядом*. Він збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$ (при $\alpha = 1$ маємо гармонічний ряд).

Задача 1. Знайти суму ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

Розв'язання. Знайдемо суму $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Розкладемо загальний член ряду $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ на суму простих дробів.

Матимемо $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$. Приведемо праву частину до спільного знаменника та прирівняємо чисельники початкового та отриманого дробів. Знайдемо коефіцієнти A і B :

$$1 = A(n+1) + B(n-1) \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Отже, } u_n = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

По цій формулі знайдемо:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \quad u_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right), \quad u_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right), \dots,$$

$$u_{n-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right), \quad u_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right).$$

Знаходимо S_n – n -у часткову суму ряду:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

(Всі інші проміжні члени ряду взаємно знищились)

Знайдемо суму ряду

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Відповідь: $S = 0,75$.

Найчастіше точне значення суми ряду знайти неможливо. Проте, питання про збіжність ряду можна вирішити за допомогою ознак збіжності ряду.

1.2.1 Необхідна умова збіжності ряду

Теорема 1.1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то границя загального

члена дорівнює нулю, тобто,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (1.5)$$

Наслідок (достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Зауваження 1.1. Умова (1.5) є необхідною, але не є достатньою для збіжності ряду. Існують розбіжні ряди, для яких $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Задача 2. Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \arccos \frac{1}{n}$ за необхідною умовою.

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{n} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Згідно наслідку з теореми ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Задача 3. Дослідити збіжність числового ряду за необхідною умовою $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^2 + 1}$.

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 \cdot \left(5 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0/$$

Отже, ряд може бути збіжним.

Відповідь: ряд може бути збіжним.

1.2.2 Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

Ознаки порівняння

Теорема 1.2 (ознака порівняння або перша ознака порівняння).

Нехай задано два ряди з невід'ємними членами: а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та б) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

і для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $u_n \leq v_n$. Тоді із збіжності ряду б) випливає збіжність ряду а), а із розбіжності ряду а) випливає розбіжність ряду б).

Теорема 1.3 (гранична ознака порівняння або друга ознака порівняння). Якщо задано два ряди з додатними членами: а) та б) і існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = r, \quad (1.6)$$

де $0 < r < +\infty$, то ряди або одночасно збіжні, або розбіжні.

Зауваження 1.2. При дослідженні рядів за допомогою ознак порівняння необхідно заздалегідь знати збіжний чи розбіжний ряд, вибраний для порівняння.

На практиці найчастіше досліджувані ряди порівнюють або з нескінченною геометричною прогресією:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} \quad \begin{cases} \text{збіжний при } |q| < 1, \\ \text{розбіжний при } |q| \geq 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

або з узагальненим гармонічним рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha > 1, \\ \text{розбіжний при } \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Зауваження 1.3. Якщо досліджуємо на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$,

то при застосуванні граничної ознаки порівняння в якості ряду для порівняння беремо ряд (1.8), де $\alpha = m - k$.

Задача 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^4 + 5}}$.

Розв'язання. Для дослідження ряду на збіжність застосуємо граничну ознаку порівняння. Загальний член ряду

$u_n = \sqrt[3]{\frac{n}{n^4 + 5}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^4 + 5)^{\frac{1}{3}}}$, тобто степінь чисельника $\frac{1}{3}$, степінь знаменника $\frac{4}{3}$. Тоді ряд, з яким порівнюємо, беремо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{маємо гармонічний ряд; він є розбіжним}).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n^4 + 5)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{3}} \cdot n}{(n^4 + 5)^{\frac{1}{3}}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}} \cdot \left(1 + \frac{5}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left\| \frac{5}{n^4} \rightarrow 0 \right\| = 1, \end{aligned}$$

тобто гранична ознака порівняння виконана: границя дорівнює сталій (не дорівнює нулю або нескінченності). Тоді, ряди ведуть себе однаково: оскільки ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то і досліджуваний ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n^4 + 5}} \quad \text{також розбіжний.}$$

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збіжний

(узагальнений гармонічний ряд, $\alpha > 1$), то згідно ознаки порівняння заданий ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збіжний.

Ознака Д'Аламбера

Теорема 1.4. Якщо для ряду (1.1) з додатними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D, \quad (1.9)$$

то при $D < 1$ ряд збігається,

при $D > 1$ розбігається,

при $D = 1$ питання про збіжність ряду потребує додаткових досліджень.

Зауваження 1.4. Ознаку Д'Аламбера, як правило, застосовують, якщо загальний член ряду (1.1) містить показникові функції, або факторіал (!), або обидва.

Задача 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}, \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+2}}{(n+2)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } D &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4^{n+2}}{(n+2)!} : \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2)} \cdot \frac{4^{n+2}}{4^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n+2} = 4 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Відповідь: ряд збіжний.

Задача 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2 + 3}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2 + 3}, \quad u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)^2 + 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{n^2 + 2n + 4}.$$

Знайдемо

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4^{n+1}}{n^2 + 2n + 4}}{\frac{4^n}{n^2 + 3}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (n^2 + 3)}{n^2 + 2n + 4} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Оскільки $D = 4 > 1$, то заданий ряд є розбіжним.

Відповідь: ряд розбіжний.

Ознака Коші (радикальна)

Теорема 1.5. Якщо для ряду (1.1) з додатними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K, \quad (1.10)$$

то при $K < 1$ ряд збігається,

при $K > 1$ розбігається,

при $K = 1$ питання про збіжність ряду потребує додаткових досліджень.

Зауваження 1.5. Ознаку Коші зручно застосовувати, якщо загальний член ряду складається з множників, степінь яких кратний n .

Задача 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{2n+3} \right)^{n^2}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Коші (радикальною).

Знайдемо

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n = [1^\infty] = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n+3)-3}{2n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+3}{-3}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+3}{-3}}\right)^{\frac{2n+3}{-3} \cdot n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+3}{-3}}\right)^{\frac{-3}{2n+3} \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n}{2n+3}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{e^3}}.
\end{aligned}$$

Оскільки $K = \frac{1}{\sqrt[2]{e^3}} < 1$, то заданий ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збіжний.

Зауваження 1.6. Якщо ознака Д'Аламбера (радикальна ознака Коші), дає значення $D=1$ ($K=1$), то буває зручно перевірити необхідну умову збіжності ряду.

Ознака Коші (інтегральна)

Теорема 1.6. Якщо функція $f(x) \geq 0$ неперервна та монотонно спадна на проміжку $[1; +\infty)$, то невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$ одночасно збіжні або розбіжні (тут усі члени ряду $u_n = f(n)$ для $n=1, 2, \dots$).

Зауваження 1.7. Твердження справедливе, якщо всі умови виконані на проміжку $[n; +\infty)$.

Задача 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}$.

Розв'язання. Застосуємо до ряду інтегральну ознаку для дослідження його збіжності. Загальний член ряду

$$u_n = \frac{1}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot \ln^2(x+1)}$

(в загальному члені ряду замінили n на x). Ця функція задовольняє всім умовам інтегральної ознаки: вона додатна, неперервна і не зростає на проміжку $[1; +\infty)$ і $u_n = f(n)$ для $n=1, 2, \dots$

Знайдемо невластний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \cdot \ln^2(x+1)} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \\ &= - \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^B = - \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(B+1)} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \neq \infty. \end{aligned}$$

Невластний інтеграл збіжний, тому заданий ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

Зауваження 1.8. Є випадки, коли при з'ясуванні питання про збіжність ряду потрібно застосовувати декілька ознак збіжності рядів.

1.3 Знакозмінні числові ряди

Означення 1.5. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається *знакозмінним*,

якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні члени.

Теорема 1.7. Знакозмінний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається

абсолютно збіжним, якщо ряд, складений з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (1.11)$$

є збіжним.

Окремим випадком знакозмінного числового ряду є знакопереміжний ряд, знаки членів якого строго чергуються:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (1.12)$$

де $u_n > 0$ для $n=1, 2, \dots$

Цей ряд досліджують на збіжність за *ознакою Лейбніца*.

Теорема 1.8 (ознака Лейбніца). Якщо в знакопереміжному ряді (1.12) члени такі, що

$$u_k \geq u_{k+1} \geq u_{k+2} \geq \dots, \quad (1.13)$$

де $k \in N$, але не обов'язково $k=1$, і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (1.14)$$

то ряд (1.12) є збіжним.

Ряд виду (1.12), що задовольняє умовам (1.13) і (1.14), називається *рядом Лейбніца*.

Враховуючи теорему 1.7 і теорему 1.8, можна запропонувати наступну схему дослідження на збіжність знакопереміжного ряду (1.12):

- потрібно скласти ряд (1.11) з модулів членів ряду (1.12) і дослідити знакододатний ряд (1.11) на збіжність по одній з достатніх ознак збіжності для знакододатних числових рядів, наведених вище.

- при цьому може виникнути одна із наступних ситуацій:

- 1) якщо ряд (1.11) збігається, то за теоремою 1.7 ряд (1.12) збігається абсолютно;

- 2) якщо ряд (1.11) розбігається і ознака Лейбніца (теорема 1.8) не виконується, то ряд (1.12) розбіжний.
- 3) якщо ряд (1.11) розбігається і ознака Лейбніца (теорема 1.8) виконується, то ряд (1.12) збігається умовно.

Зауваження 1.9.

1) З розбіжності ряду (1.11) не впливає розбіжність ряду (1.12): ряд (1.12) при цьому може бути або збіжним умовно (див. п.3 схеми дослідження), або розбіжним (див. п.2 тієї ж схеми).

2) Можна дослідження на збіжність ряду (1.12) починати з перевірки ознаки Лейбніца (теорема 1.8), а при виконанні її перевіряти збіжність ряду (1.11).

Задача 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^3 - n + 2}$.

Розв'язання. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - n + 2}$. Досліджуємо отриманий ряд на збіжність за граничною ознакою порівняння.

Виберемо для порівняння збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (узагальнений гармонічний ряд, $\alpha > 1$). Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3 - n + 2} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 - n + 2} = 1.$$

Згідно граничної ознаки порівняння ряд з модулів також є збіжним. Тоді за теоремою 1.7 заданий ряд є абсолютно збіжним. Відповідь: ряд абсолютно збіжний.

Задача 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$.

Розв'язання. Заданий ряд є числовим знакопереміжним рядом. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ (він розбіжний

як гармонічний). Перевіримо ознаку Лейбніца. Знайдемо границю загального члена $u_n = \frac{1}{n+3}$ заданого ряду

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$$

Маємо випадок, описаний в п.3 схеми дослідження. Перевіримо, чи буде заданий ряд рядом Лейбніца. Заданий ряд знакопереміжний, його загальний член прямує до нуля. Крім того, виконана умова (1.13).

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots > \frac{1}{n+3} > \dots$$

Всі умови ознаки Лейбніца виконано. Заданий ряд є умовно збіжний.

Відповідь: ряд умовно збіжний.

Задача 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+100}$.

Розв'язання. Перевіримо ознаку Лейбніца. Знайдемо границю загального члена $u_n = \frac{n}{3n+100}$ заданого ряду.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n+100} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Оскільки границя відмінна від нуля, то ознака Лейбніца (теорема 1.8) не виконується, тому заданий ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний.

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1 Функціональні ряди

Означення 2.1. Функціональним рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (2.1)$$

де функції $f_i(x)$ визначені на деякій множині D дійсної осі.

Якщо взяти довільну точку $x_0 \in D$ і розглянути в ній ряд (2.1), то матимемо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots, \quad (2.2)$$

який може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо ряд (2.2) збігається, точка x_0 – точка збіжності функціонального ряду (2.1). Якщо ряд (2.2) розбігається то точка x_0 – точка розбіжності функціонального ряду (2.1).

Означення 2.2. Частковими сумами функціонального ряду (2.1) називаються функції $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$

Означення 2.3. Функціональний ряд (2.1) називається збіжним у точці x_0 , якщо в цій точці збіжною є послідовність його часткових сум, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$. Число $S(x_0)$ називається сумою ряду (2.1) у точці x_0 .

Означення 2.4. Множина всіх точок, в яких ряд (2.1) збігається, називається областю збіжності функціонального ряду і на цій множині визначена функція $S(x)$, яка є сумою ряду.

Означення 2.5. Вираз виду $S(x) - S_n(x) = R_n(x)$ називається залишком ряду (2.1).

В області збіжності функціонального ряду (2.1) його часткова сума $S_n(x)$, а також сума $S(x)$ і залишок ряду $R_n(x)$ будуть функціями від x . Оскільки при фіксованому x функціональний ряд (2.1) стає числовим, то для його дослідження можна застосовувати ознаки збіжності числових рядів. Наприклад, ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \varphi(x) \quad (2.3)$$

і радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \varphi(x). \quad (2.4)$$

Інтервал збіжності функціонального ряду (2.1) знаходять з нерівності $\varphi(x) < 1$. Дослідивши кінці отриманого інтервалу на збіжність, визначимо область збіжності функціонального ряду.

Зауваження 2.1. При застосуванні ознаки Коші (радикальної) зручно користуватись тим, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1, p = \text{const} \right)$.

Задача 13. Визначити область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \dots$$

Розв'язання. Всі члени ряду визначені і неперервні на всій числовій прямій, крім точки $x = -1$. Якщо $|x| < 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = 1,$$

тобто не виконується необхідна умова збіжності.

Якщо $x = 1$, то $f_n(1) = \frac{1}{2}$ і необхідна умова збіжності також не виконується.

Якщо $|x| > 1$, то даний ряд збігається абсолютно, бо збігається ряд з модулів. Це впливає з граничної теореми порівняння. За теоремою 1.3 ряд з модулів поводить себе так само, як ряд з загальним членом $g_n(x) = \frac{1}{|x^n|}$. Дійсно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x)|}{|g_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{|1+x^n|}}{\frac{1}{|x^n|}} = 1.$$

Але ряд $\sum_{k=1}^n \frac{1}{|x^n|}$ є геометричною прогресією із знаменником $\frac{1}{|x|}$. З

того, що знаменник менший за одиницю, впливає що і прогресія збігається. Тобто заданий ряд збігається абсолютно при $|x| > 1$.

Відповідь: область збіжності заданого ряду $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

2.2 Степеневі ряди

Означення 2.6. Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (2.7)$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots \quad (2.8)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots$ – дійсні числа (коефіцієнти ряду) називається *степеневим рядом*.

Зазначимо, що при $x_0 = 0$ степеневий ряд (2.8) перетворюється у ряд (2.7).

Теорема 2.5 (Абеля). Якщо степеневий ряд (2.7) збігається в точці $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збіжний $\forall x$ таких що $|x| < |x_1|$. Якщо ряд (2.7) розбіжний в точці $x = x_2 \neq 0$, то він розбігається $\forall x$ таких що $|x| > |x_2|$.

Із теореми Абеля випливає, що для кожного степеневому ряду (2.7) існує дійсне невід'ємне число R таке, що всередині інтервалу $(-R; R)$ степеневий ряд збіжний абсолютно, а поза цим інтервалом розбіжний.

Означення 2.7. Інтервал $(-R; R)$ називається інтервалом збіжності, а число R ($0 \leq R \leq \infty$) – радіусом збіжності степеневому ряду.

На кінцях інтервалу збіжності степеневий ряд може бути як збіжним так і розбіжним. Для кожного конкретного ряду необхідні окремі дослідження його поведінки на кінцях інтервалу збіжності.

Радіус збіжності степеневому ряду можна знайти за однією з формул:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (2.9)$$

або

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (2.10)$$

при умові, що границі існують.

Інтервал збіжності ряду (2.8) має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$. Область збіжності степеневому ряду завжди не пуста. Для ряду (2.7) вона містить принаймні одну точку $x = 0$, а для ряду (2.8) – $x = x_0$.

Зауваження 2.2. Якщо $0 \leq R \leq \infty$, то $(x_0 - R; x_0 + R)$ – інтервал збіжності. Якщо $R = 0$, то інтервал збіжності вироджується в точку $x = 0$. Якщо $R = \infty$, то інтервал збіжності співпадає з усією числовою віссю, в цьому випадку кажуть, що степеневий ряд збіжний всюди.

Задача 14. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3) \cdot 3^n}.$$

Розв'язання. Маємо $x_0 = 6$, $a_n = \frac{1}{(n+3) \cdot 3^n}$. Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою (2.9):

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(n+3) \cdot 3^n} : \frac{1}{(n+4) \cdot 3^{n+1}} \right) = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3 \cdot 1 = 3$$

Ряд збігається абсолютно в інтервалі:

$$|x - 6| < 3 \Rightarrow -3 < x - 6 < 3 \Rightarrow 3 < x < 9.$$

З'ясуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності: $x = 3$ і $x = 9$.

а) $x = 3$. Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-6)^n}{(n+3) \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}.$

Цей ряд знакопереміжний. Він умовно збіжний (розглянутий в *Задачі 11*). Складемо ряд з модулів членів цього ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$. З'ясуємо його збіжність за граничною ознакою порівняння. Порівняємо його з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n} = 1 \neq 0. \text{ Робимо висновок, що ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$$

розбіжний. Всі умови ознаки Лейбніца виконано. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3}$ є умовно збіжний.

б) $x = 9$. Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9-6)^n}{(n+3) \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+3) \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}.$

Це знакододатний числовий ряд. Він розбіжний як гармонічний. Отже, точка $x = 9$ не входить в область збіжності заданого степеневому ряду.

Областю збіжності заданого степеневому ряду є $3 \leq x < 9$.

Відповідь: область збіжності $[3; 9)$; на інтервалі $(3; 9)$ ряд збіжний абсолютно і рівномірно (за теоремою Абеля), в точці $x = 3$ ряд збіжний умовно, в точці $x = 9$ ряд розбіжний.

2.2.1 Ряд Тейлора

Сума довільного збіжного степеневому ряду є функцією, яка неперервна та нескінченну кількість разів диференційовна в інтервалі збіжності цього ряду. Припустимо, що функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0 має нескінченну кількість похідних, тому вона є сумою степеневому ряду в цьому околі:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (2.11)$$

Вираз (2.11) називають також *розвиненням функції $f(x)$ в околі точки x_0* або *розвиненням функції за степенями $x - x_0$* . Числа $a_0, a_1, a_2, \dots$ називають *коефіцієнтами розкладу*

Знайдемо коефіцієнти розвинення в ряді (2.11). За властивістю степеневих рядів, ряд (2.11) можна диференціювати скільки завгодно раз і одержані в результаті цього ряду будуть мати інтервали збіжності $(x_0 - R; x_0 + R)$. Якщо послідовно диференціювати вираз (2.11) і в отримані рівняння підставляти $x = x_0$, матимемо значення коефіцієнтів *розвинення*:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots \quad (2.12)$$

Функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і в самій точці x_0 має похідні всіх порядків. Підставляючи знайдені коефіцієнти (2.12) в (2.11), матимемо представлення функції $f(x)$ *формулою Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n, \quad (2.13)$$

де $R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ — залишковий член формули Тейлора, $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Означення 2.7. Степеневий ряд в правій частині формули (2.13)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2.14)$$

називається *рядом Тейлора*.

Теорема 2.6. Якщо функція $f(x)$ на $(x_0 - R; x_0 + R)$ подана у вигляді степеневого ряду (2.14), то цей розклад є єдиним, а сам ряд, що стоїть в правій частині, є рядом Тейлора функції $f(x)$, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Теорема 2.7. Для того щоб ряд Тейлора збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція мала похідні всіх порядків і залишковий член формули Тейлора $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

Якщо $x_0 = 0$, то ряд Тейлора називають *рядом Маклорена* і тоді

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (2.15)$$

Справедливі розвинення елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$1. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in R$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in R$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R$$

$$4. sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in R$$

$$5. ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in R$$

$$6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$7. arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad |x| \leq 1$$

$$8. (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \dots, \\ \alpha \in R, |x| < 1$$

$$9. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$10. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$11. \frac{1}{(1 \pm x)^2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \dots \quad |x| < 1$$

2.2.2 Розвинення функцій в степеневий ряд

Порядок дій для розвинення в ряд Тейлора в околі точки x_0 функції $f(x)$:

- а) знайти похідні функції $f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$;
- б) знайти значення знайдених похідних у точці x_0 : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$;
- в) написати формально відповідний ряд Тейлора;
- г) скласти вираз залишкового члена $R_n(x)$ формули Тейлора даної функції;
- д) знайти сукупність значень x , при яких виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, тобто знайти область, у якій складений ряд Тейлора збігається саме до функції $f(x)$.

Описана послідовність дій називається способом безпосереднього розвинення функції в степеневий ряд.

Зауваження 2.3. Однак на практиці, в переважній більшості випадків, користуються іншими способами розвинення, що передбачають використання так званих найпростіших розвинень, тотожних перетворень заданої функції і різноманітних штучних прийомів, так як переважна більшість функцій, що зустрічаються у практичних застосуваннях математичного аналізу, подається відповідним рядом Тейлора в усій області збіжності цього ряду. Отже, щоб розвинути функцію в ряд Тейлора в околі деякої точки, необхідно лише написати цей ряд та знайти його область збіжності як звичайного степеневого ряду.

Задача 15. Розвинути в ряд Тейлора функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ за степенями: а) x , б) $(x-1)$.

Розв'язання. а) Перетворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ так, щоб можна було застосувати формулу:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ де } |x| < 1.$$

Маємо
$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{3^{n+1}}.$$

Область збіжності: $\frac{|x|}{3} < 1 \Rightarrow |x| < 3.$

б) Перетворимо функцію $f(x) = \frac{1}{x+3}$ так, щоб можна було при розвиненні її в ряд в околі точки $x = 1$ використати розвинення в ряд функції $\frac{1}{1-x}$. Нехай $\frac{1}{x+3} = \frac{m}{1-n(x-1)}$, тоді $1-n(x-1) = m(x+3)$.

Визначимо звідси m і n . При $x = 1$ маємо $1 = 4m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$. При $x = -3$ маємо $1 + 4n = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$. Отже, $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{-4}}$.

Замінімо x у формулі $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, де

$|x| < 1$ на $\frac{x-1}{-4}$, матимемо

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-4}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}.$$

Це розвинення має місце, якщо $\left|\frac{x-1}{-4}\right| < 1$, $|x-1| < 4$. Звідси

$-4 < x-1 < 4$, отже, $-3 < x < 5$.

Відповідь: а) $\frac{1}{x+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{3^{n+1}}, |x| < 3,$

б) $\frac{1}{x+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}}, -3 < x < 5.$

2.2.3 Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

1) Наближене обчислення значень функції

Для обчислення наближеного значення функції $f(x)$ в її розвиненні в степеневий ряд зберігаються перші n членів, а останні члени відкидаються. Для оцінки похибки знайденого наближеного значення потрібно оцінити суму відкинутих членів. Якщо ряд знакододаєтний, то ряд складений з відкинутих членів, порівнюють з нескінченно спадною геометричною прогресією. Якщо ряд знакозмінний, члени якого задовольняють ознаку Лейбніца, то використовують оцінку $|R_n(x)| < |u_{n+1}|$, де u_{n+1} – перший з відкинутих членів ряду.

Задача 16. Обчислити $\sin 1$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Згідно формули

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \text{ де } x = 1, \text{ матимемо}$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Ряд, що написаний справа, є абсолютно збіжним. Оскільки $\frac{1}{5!} \approx 0,008(3) > 0,001$, то для знаходження $\sin 1$ з точністю до 0,001 досить перших трьох доданків:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0,842.$$

Помилка, що припускається при цьому, менша, ніж перший відкинутий член (тобто менша, ніж 0,0002).

Відповідь: $\sin 1 \approx 0,842$.

2) Знаходження границі функції

При обчисленні границь функцій можна використовувати розвинення їх у ряд Маклорена.

Задача 17. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$, використовуючи розвинення функцій в ряд Маклорена.

Розв'язання. Використаємо розвинення функцій e^x та $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ і } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Підставимо їх у вираз під границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \dots - 2 - 2x - x^2}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \dots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}x + \dots \right)}{x^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{5!} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{12}x + \dots}{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{5!} + \dots} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2. \end{aligned}$$

Відповідь: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = 2.$

2) Наближене обчислення визначених інтегралів

Іноді при розв'язанні певних задач буває зручно подавати інтеграл у вигляді степеневому ряду. В першу чергу це стосується випадків, коли первісну не можна знайти у скінченному вигляді (у таких випадках кажуть, що інтеграл “не береться”), але підінтегральна функція може бути розкладена в степеневий ряд. Тоді цей ряд інтегрують почлено на деякому проміжку всередині області збіжності. Цей проміжок – довільний, якщо інтеграл невизначений, і заданий,

якщо інтеграл визначений. В першому випадку після застосування формули Ньютона-Лейбніца отримаємо невизначений інтеграл у вигляді степеневого ряду, а у другому випадку – точне значення визначеного інтеграла як суму числового ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Зауваження 2.4. Якщо проміжок інтегрування у випадку визначеного інтеграла повністю або частково розташований поза областю збіжності степеневого ряду, що подає підінтегральну функцію, то застосування цього способу дуже ускладнене, або взагалі неможливе.

Задача 18. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ з точністю $\varepsilon = 0,0001$.

Розв’язання. Розкладемо в ряд функцію $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ і підставимо в підінтегральну функцію. Матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots\right)}{x^2} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} x^2 + \frac{1}{6!} x^4 - \frac{1}{8!} x^6 + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4! \cdot 3} + \frac{x^5}{6! \cdot 5} - \frac{x^7}{8! \cdot 7} + \dots \right) \bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4! \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6! \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{8! \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^7} + \\ &+ \dots - 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{576} + \frac{1}{115200} - \dots \approx 0,25 - 0,00174 = 0,24826 \approx 0,2483. \end{aligned}$$

Враховуємо у відповіді перші два доданки, оскільки всі доданки, починаючи з третього, за модулем менші за ε .

Відповідь: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \approx 0,2483.$

3) Наближене інтегрування диференціальних рівнянь

Для наближеного інтегрування можна скористатись рядом Тейлора. Розглянемо задачу знаходження частинного розв'язку $y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Припустимо, що шуканий розв'язок рівняння в околі точки x_0 можна розкласти в ряд

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Треба знайти $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ... Значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою. Значення $y'(x_0)$ знайдемо з заданого рівняння, поклавши в ньому $x = x_0$, $y = y_0$. Значення $y''(x_0)$ знаходимо диференціюванням заданого рівняння, поклавши в ньому $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'(x_0)$ і т. д. (кількість членів розкладу в ряд розв'язку диференціального рівняння задається умовою задачі).

Цей спосіб також застосовують, коли треба знайти наближений частинний розв'язок диференціального рівняння будь-якого порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}.$$

Зауваження 2.5. Формулу загального члена ряду знайти вдається далеко не завжди, отже, й дослідити ряд на збіжність теж не вдається. Однак з загальної теорії відомо, що знайдене розвинення справедливе в деякому околі точки x_0 . Розглянутий спосіб застосовний також у випадку, коли треба знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, якщо початкові умови розглядати як довільні сталі.

Задача 19. Записати розвинення в ряд Маклорена (до x^4 включно) розв'язку диференціального рівняння при заданих умовах:

$$y'' = \cos 3x - (y')^3, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = -1.$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ заданого ДР у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) \approx y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{y^{iv}(0)}{4!} \cdot x^4.$$

За умовою $y(0) = -3$, $y'(0) = -1$. З рівняння знаходимо

$$y''(0) = \cos(3 \cdot 0) - (-1)^3 = \cos 0 - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

Диференціюючи задане рівняння, знаходимо $y'''(x)$ і підставляємо $x = 0$:

$$y'''(x) = (y'')' = -3 \sin 3x - 3(y')^2 y'',$$

$$y'''(0) = -3 \cdot \sin(3 \cdot 0) - 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -3 \cdot \sin 0 - 6 = -6.$$

Аналогічно знаходимо $y^{iv}(0)$:

$$y^{iv}(x) = (y''')' = -9 \cos 3x - 3 \cdot (2 \cdot y' \cdot y'' \cdot y'' + (y')^2 \cdot y'''),$$

$$y^{iv}(0) = -9 \cos(3 \cdot 0) - 3 \cdot (2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot (-6)) = -9 \cos 0 - 3 \cdot (-8 - 6) = -9 - 3 \cdot (-14) = -9 + 42 = 33.$$

Таким чином, частинний розв'язок рівняння буде

$$\begin{aligned} y(x) &\approx -3 - x + \frac{2}{2!} \cdot x^2 + \frac{-6}{3!} \cdot x^3 + \frac{33}{4!} x^4 = -3 - x + x^2 - x^3 + \frac{33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 = \\ &= -3 - x + x^2 - x^3 + \frac{11}{8} x^4 = -3 - x + x^2 - x^3 + 1,375 \cdot x^4. \end{aligned}$$

Відповідь: $y(x) \approx -3 - x + x^2 - x^3 + 1,375 \cdot x^4$.

3 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ ФУР'Є

3.1 Ряди Фур'є для 2π -періодичних функцій

Означення 3.1. Тригонометричним рядом називається функціональний ряд виду:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

або

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.1)$$

Якщо ряд (3.1) збіжний, то його сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π , тому що функції $\sin x$ та $\cos x$ також періодичні функції з періодом 2π .

Нехай $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[-\pi, +\pi]$.

Означення 3.2. Числа a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$), що визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (3.2)$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є для функції $f(x)$* .

Означення 3.3. Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, називається *рядом Фур'є функції $f(x)$* і записується у вигляді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3.3)$$

У формулі (3.3) знак « $\sim$ » означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi, +\pi]$ функції $f(x)$ ставиться у відповідність її ряд Фур'є.

З означення ряду Фур'є аж ніяк не випливає, що функція $f(x)$ повинна розкладатися у свій ряд Фур'є. Ряд Фур'є може розбігатись для всіх x , може збігатись, але не до функції $f(x)$; існують ряди Фур'є, які не збігаються для жодного x .

Зауважимо, що значення коефіцієнтів ряду Фур'є визначаються, якщо використовувати властивість ортогональності системи тригонометричних функцій на відрізку $[-\pi, +\pi]$. Ця властивість є основою всієї теорії тригонометричних рядів.

Означення 3.4. Дві функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються взаємно ортогональними на проміжку $[a; b]$, якщо

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0. \quad (3.4)$$

Достатні умови розвинення 2π -періодичної функції в ряд Фур'є визначаються теоремою Діріхле.

Теорема (Діріхле). Якщо функція $f(x)$ має період 2π на відрізку $[-\pi, +\pi]$, неперервна або має скінчене число точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi, +\pi]$ можна розбити на скінчене число відрізків так, що всередині кожного з них $f(x)$ монотонна, то ряд Фур'є для функції $f(x)$ збіжний на цьому відрізку і при цьому:

1) у точках неперервності функції $f(x)$ його сума дорівнює $f(x)$, а в кожній точці x_0 розриву функції сума ряду дорівнює

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}, \quad (3.5)$$

тобто середньому арифметичному границь зліва і справа;

2) у точках $x = -\pi$ і $x = \pi$ (на кінцях відрізка) сума ряду дорівнює

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}. \quad (3.6)$$

При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збіжний рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Означення 3.5. Функція $f(x)$, для якої виконуються умови теореми Діріхле, називається *кусково-монотонною на відрізку $[-\pi, +\pi]$* .

Таким чином, якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле, то на відрізку $[-\pi, +\pi]$ має місце розвинення

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3.7)$$

причому коефіцієнти обчислюються за формулами (3.2). Ця рівність може порушуватись тільки у точках розриву функції і на кінцях відрізка $[-\pi, +\pi]$.

Нехай функція $f(x)$, яка визначена для $x \in (-\infty, +\infty)$, має період 2π і розвинена в ряд (3.7) на $[-\pi, +\pi]$. Тоді це розвинення зберігає силу для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$, оскільки функції з цього ряду $\sin nx$, $\cos nx$ визначені для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-\pi, +\pi]$, то її можна довизначити на всю числову вісь, зберігаючи її періодичність

Якщо функція $f(x)$ з періодом 2π на відрізку $[0, 2\pi]$ задовольняє умовам Діріхле, то для неї має місце розвинення (3.7), де коефіцієнти обчислюються за формулами ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (3.8)$$

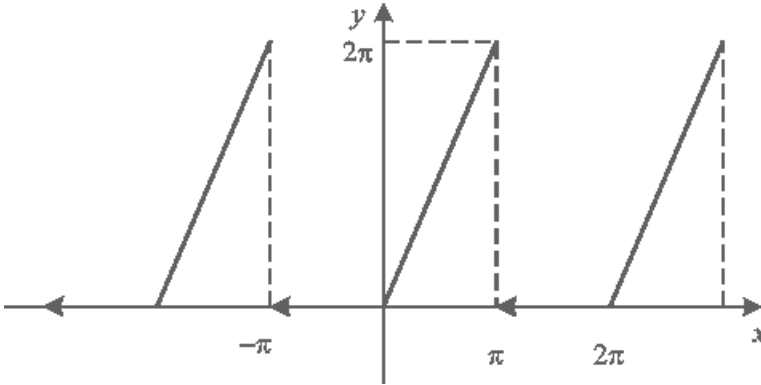
$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right)$ і $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ рівні в силу властивості періодичної функції).

Зауваження 3.1. При знаходженні коефіцієнтів a_n , b_n слід враховувати, що $\cos \pi n = (-1)^n$, $\cos(-\pi n) = (-1)^n$ і $\sin nx = 0$.

Задача 20. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x + |x|$ на інтервалі $(-\pi; \pi]$. Вважати функцію $f(x)$ 2π -періодичною.

Розв'язання. Розкриємо модуль, тобто $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Графік такої функції матиме вигляд^



Функція задовольняє умовам теореми Діріхле: в кожній точці $(-\pi; \pi]$ функція має похідну і

$$f(-\pi + 0) = 0, \quad f(0 - 0) = 0, \quad f(0 + 0) = 0, \quad f(\pi - 0) = 2\pi.$$

Згідно із формулою (3.6) маємо: $S(\pm\pi) = \pi$. Так як функція $f(x)$ 2π -періодична, то $S(\pm(2n-1)\pi) = \pi$, $n = 1, 2, \dots$.

Знайдемо коефіцієнти a_0, a_n, b_n :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} 2x \cdot dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (\pi^2 - 0^2) = \pi; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} 2x \cdot \cos nx \, dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \cos nx \, dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx \, dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{n} \cdot \sin nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{x \cdot \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi \cdot \sin \pi n}{n} - \right. \\ &\left. - \frac{0 \cdot \sin 0}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left[0 + \frac{1}{n^2} \cdot (\cos \pi n - \cos 0) \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin nx \, dx \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin nx \, dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{n} \cdot \cos nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{x \cdot \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\pi \cdot \cos \pi n}{n} + 0 + \frac{1}{n^2} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\pi}{n} \cdot (-1)^n \right] = \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$x + |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2} \cdot ((-1)^n - 1) \cdot \cos nx + \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin nx \right).$$

$$\text{Відповідь: } f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2} \cdot ((-1)^n - 1) \cdot \cos nx + \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin nx \right).$$

3.2 Ряди Фур'є для парних і непарних 2π -періодичних функцій

Зазначимо такі властивості парних та непарних функцій:

$$1) \int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ — непарна,} \\ 2 \int_0^a f(x) \, dx, & f(x) \text{ — парна,} \end{cases}$$

2) добуток двох парних (непарних) функцій є парна функція,

3) добуток парної та непарної функцій — непарна функція.

Справедливість цих властивостей може бути легко доведена, виходячи з визначення парності та непарності функцій.

Якщо $f(x)$ — парна періодична функція з періодом 2π , яка задовольняє умовам розвинення в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, +\pi]$, тобто $f(-x) = f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (3.9)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0, \quad (n=1, 2, 3...). \quad (3.10)$$

Якщо функція $f(x)$ – непарна на відрізку $[-\pi, +\pi]$, тобто $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

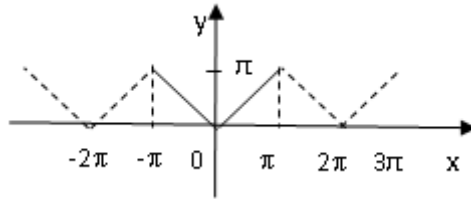
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (3.11)$$

де

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n=1, 2, 3...). \quad (3.12)$$

Задача 21. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ з періодом 2π , задану на відрізку $[-\pi, +\pi]$.

Розв'язання. Графік даної функції має вигляд



Задана функція задовольняє умовам теореми про розвинення в ряд Фур'є. Вона парна. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ за формулами (3.10). Маємо $b_n = 0$. Знайдемо a_0 і a_n :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos nx dx \\ du = dx, & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} (\cos \pi n - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в (3.9). Тоді ряд Фур'є заданої функції

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$$

Задана функція неперервна на всій числовій осі, отже, її сума дорівнює $f(x)$.

Відповідь: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x.$

Задача 22. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^3$ з періодом 2π , задану на відрізку $[-\pi, +\pi]$.

Розв'язання. Ця функція визначена на всій осі Ox , неперервна і монотонна на відрізку $[-\pi, +\pi]$, отже, вона задовольняє умовам Діріхле. Оскільки задана функція є непарною, то коефіцієнти Фур'є знаходимо за формулами (3.12). Маємо $a_0 = 0$, $a_n = 0$. Знайдемо b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^3, \, du = 3x^2 dx \\ dv = \sin nx \, dx, \, v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^3}{n} \cos nx \right)_0^{\pi} + \\ &+ \frac{3}{n} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2, \, du = 2x dx \\ dv = \cos nx \, dx, \, v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} \cos n\pi + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{n} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx \right)_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) = \left[\begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \sin nx \, dx, \, v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} \cos n\pi - \frac{6}{n^2} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \right)_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi^3}{n} \cos n\pi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{n^2} \cdot \frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{6}{n^3} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi = -\frac{2\pi^2}{n} \cos n\pi + \frac{12}{n^3} \cos n\pi = \\
& = \cos n\pi \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) = (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right).
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в (3.11). Тоді ряд Фур'є заданої функції

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx.$$

Так як ряд Фур'є співпадає з функцією $f(x)$ в точках неперервності, і враховуючи періодичність функції і ряду Фур'є, матимемо

$$S(x) = f(x) = x^3 \text{ при } x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

У точках $x_k = \pm\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) сума ряду дорівнює

$$S(x_k) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-\pi^3 + \pi^3}{2} = 0.$$

$$\text{Відповідь: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx.$$

3.3 Ряд Фур'є для $2l$ - періодичної функції

Розвинути в ряд Фур'є можна і періодичні функції з довільним періодом $T = 2l$, відмінним від числа 2π . Нехай функція $f(x)$, що визначена на відрізку $[-l, +l]$, має період $T = 2l$, тобто $f(x + 2l) = f(x)$, де l – довільне додатне число, і задовольняє на цьому відрізку умовам Діріхле. Зробивши підстановку $x = \frac{l \cdot t}{\pi}$, дану

функцію перетворимо на функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{l \cdot t}{\pi}\right)$, яка визначена на відрізку $[-\pi, +\pi]$ і має період 2π .

Розвинення функції $\varphi(t)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, +\pi]$ має вигляд

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

($n=1, 2, 3, \dots$).

Повертаючись до змінної x і враховуючи, що $t = \frac{\pi \cdot x}{l}$ і $dt = \frac{\pi}{l} dx$ матимемо розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-l, +l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (3.13)$$

де коефіцієнтами Фур'є a_0, a_n, b_n визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \left(\frac{\pi n}{l} \cdot x \right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{l} \cdot x \right) dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$n=1, 2, 3, \dots$

Усі теореми, що мають місце для рядів Фур'є 2π -періодичних функцій, залишаються в силі і для рядів Фур'є функцій, період яких $T = 2l$.

Задача 23. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

скориставшись отриманим розвиненням.

Розв'язання. Задана функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, $l=3$. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ за формулами (3.14):

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-3}^0 0 \cdot dx + \int_0^3 x \cdot dx \right) = \frac{1}{3} \int_0^3 x dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{1}{6} \cdot (3^2 - 0^2) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-3}^0 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx + \int_0^3 x \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 x \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx \quad v = \frac{3}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3x \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right)}{\pi n} \Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n} \cdot \int_0^3 \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx \right) = \frac{3 \cdot \sin \pi n}{\pi n} - \frac{0 \cdot \sin 0}{\pi n} - \\ &- \frac{1}{\pi n} \int_0^3 \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = 0 + \frac{3}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \Big|_0^3 = \frac{3}{\pi^2 n^2} \cdot (\cos \pi n - \cos 0) = \\ &= \frac{3}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-3}^0 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx + \int_0^3 x \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 x \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx \quad v = -\frac{3}{\pi n} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3x \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right)}{\pi n} \Big|_0^3 + \frac{3}{\pi n} \cdot \int_0^3 \cos\left[\frac{\pi n}{3} x\right] dx \right) = -\frac{3 \cos \pi n}{\pi n} + \frac{0 \cdot \cos 0}{\pi n} + \\ &+ \frac{1}{\pi n} \int_0^3 \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) dx = \frac{3}{\pi n} (-1)^{n+1} + \frac{3}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \Big|_0^3 = \frac{3}{\pi n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в (3.13). Тоді ряд Фур'є заданої функції

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) + \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \right) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{3} x\right) + \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \right). \end{aligned}$$

Якщо $x = 0$, то

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &= \frac{3}{4} - \frac{3}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cdot \cos 0 + \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin 0 \right) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Звідки } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Відповідь:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{3} x\right) + \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} x\right) \right), \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

3.4 Ряди Фур'є для парних і непарних $2l$ -періодичних функцій

Якщо функція $f(x)$ – парна на відрізку $[-l, +l]$, тобто $f(-x) = f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.15)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (3.16)$$

Якщо функція $f(x)$ – непарна на відрізку $[-l, +l]$, тобто $f(-x) = -f(x)$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.17)$$

де

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (3.18)$$

Задача 24. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{3}$ на інтервалі $-3 < x \leq 3$.

Розв'язання. Задана функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, $l=3$. Оскільки функція непарна ($f(-x) = -f(x)$), то обчислюємо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ за формулами (3.18):

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{3} \cdot \int_0^3 \frac{x}{3} \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) dx = \frac{2}{9} \cdot \int_0^3 x \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) dx = \\ &= \left[dv = \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) dx \quad v = -\frac{3}{\pi n} \cdot \cos \left(\frac{\pi n}{3} x \right) \right] = \frac{2}{9} \cdot \left[-\frac{3x \cdot \cos \left(\frac{\pi n}{3} x \right)}{\pi n} \right]_0^3 + \\ &+ \frac{3}{\pi n} \cdot \int_0^3 \cos \left(\frac{\pi n}{3} x \right) dx = \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{9 \cos \pi n}{\pi n} + \frac{0 \cdot \cos 0}{\pi n} + \frac{3}{\pi n} \int_0^3 \cos \left(\frac{\pi n}{3} x \right) dx \right) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left[\frac{9(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) \right]_0^3 = \frac{2}{\pi n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в (3.17), дістанемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) \right).$$

Відповідь: $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin \left(\frac{\pi n}{3} x \right) \right)$

4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

4.1 Числові ряди

Завдання 4.1.1. За допомогою необхідної ознаки збіжності ряду встановити, які ряди напевно розбігаються.

1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+4}{n}$	2.	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \arctg \frac{1}{n}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot n}{4n+1}$	4.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n^3 + 5n^2 + 3}$	6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 5}{4n^2 - 2}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$	8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{4}{\sqrt{n}}$
9.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$	12.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{\sqrt{n^3}}$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{5n + 1}$	14.	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{3^n}$	16.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)\sqrt{n}}{\ln n}$

Завдання 4.1.2. За допомогою достатніх ознак збіжності рядів (ознаки порівняння, радикальної ознаки Коші, Д'Аламбера та інтегральної ознаки Коші) дослідити збіжність заданих рядів.

1.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n+9} \right)^n,$
----	----	--	----	--

	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$,	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.
2.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+5)^3}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 4^n}$,
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$,	Г)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.
3.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{(n^2+n+6)^5}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$,
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9^n \cdot (n^2+1)}}{n \cdot \sqrt{3^n}}$,	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\ln(n+1)}$.
4.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$,
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n^3-1}{n!}$,	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+3}}$.
5.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n^3}{8+n^7}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$,
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}$,	Г)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.
6.	а)	$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{n^3}$,
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$,	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.
7.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}$,

	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n^2}{(n+1)!},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \cdot (3 + e^{-n})}.$
8.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+10}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 2n} \right)^n,$
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^2 + 1}.$
9.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n,$
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$
10.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{2+3n^2} \right)^2,$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)},$
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 8n + 3}{3^{n+4}(n^2 + 5)},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg}^3 n}.$
11.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 5}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\frac{n^3}{3}},$
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$
12.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 5}{9n + 4n^6},$	б)	$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n-8}{1+3n^2} \right)^n,$
	В)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n \cdot (2n-1)},$	Г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(\ln^4 n + 1) \cdot n}.$
13.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 6n}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3n^2},$

	в)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!},$	г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^{n^2}}.$
14.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2+9)^3}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{6}{n^2},$
	в)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(n+3)!},$	г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$
15.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+7}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{6+n} \right)^{\frac{n}{2}},$
	в)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!},$	г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sin \sqrt{n}}.$
16.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+3} \right)^{n^3},$
	в)	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2^n},$	г)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}.$

Завдання 4.1.3. Встановити, які знакопереміжні ряди збігаються абсолютно чи умовно або розбігаються.

1.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n}.$
2.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n,$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}.$
3.	а)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n},$	б)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln n}.$

4.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{n^4 + n^2},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}.$
5.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$
6.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{4^n},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(2n)}.$
7.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (2n+1)},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n.$
8.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[4]{2n+3}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}.$
9.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+2} \right)^n.$
10.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-3}.$
11.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+3n}{(n+1)!},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{n^2 + 2n}.$
12.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot (2n+1)},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^2 + 1}.$
13.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n^2 + n)^3},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+4}{n^2 + 3n - 1}.$
14.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \cdot (n+1)},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$
15.	a)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln^4 n},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n \sqrt[3]{n}}.$

16.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{3n-2} \right)^n$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
-----	----	--	----	---

4.2 Функціональні ряди. Степеневі ряди

Завдання 4.2.1. Знайти область збіжності степеневих рядів.

1.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)!} \cdot x^n$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} \cdot (x-10)^n$.
2.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \cdot (x+2)^n}{(2n)!}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot (x-11)^n$.
3.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n \cdot n^2}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+4)!}$.
4.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} \cdot (x+6)^n$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n^2}}$.
5.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \cdot (2n+1)!}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^3} \cdot (x-7)^n$.
6.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot x^n$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)! \cdot (x+1)^n$.
7.	a)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot \ln^3 n}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+12)^n$
8.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{4^n \cdot (2n^2+5n)}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^2+5n} \cdot (x-9)^n$
9.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3n-2}$,	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} 8^{n^2} \cdot (x+8)^n$.
10.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n} \cdot (x+4)^n$,	б)	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n \cdot (x+2)^n}{\ln^n n}$.

11.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot (x-3)^n}{(n^4+1)^2},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \cdot (x-6)^n.$
12.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n^3+4n)} \cdot x^n,$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n^5} \cdot (x+6)^n}{7^n}.$
13.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1) \cdot \ln(n+1)},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot (n+3)^n}.$
14.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{n^n},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! \cdot (x-5)^n}{4^n}.$
15.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[7]{n^6+5n}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)! \cdot (x-1)^n}{n^3}.$
16.	a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n^2+1}},$	б)	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} \cdot (x-3)^n.$

Завдання 4.2.2. Розвинути в ряд Маклорена задану функцію $f(x)$.

1.	$f(x) = x \ln(1+x^2).$	2.	$f(x) = \cos(x^2).$
3.	$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$	4.	$f(x) = \sin \frac{x}{2}.$
5.	$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$	6.	$f(x) = 2^x.$
7.	$f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}.$	8.	$f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}.$
9.	$f(x) = \arctg^2 x.$	10.	$f(x) = e^{-2x}.$
11.	$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{3}.$	12.	$f(x) = 5^x.$

13.	$f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}.$	14.	$f(x) = \ln(1 + x^3).$
15.	$f(x) = \frac{\arctg x}{5x}.$	16.	$f(x) = 3^{x^2}.$

Завдання 4.2.3. Обчислити границю функції за допомогою теорії рядів.

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\sin x} \right)$	2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi + \operatorname{sh} 2x - 4 \arctg(e^x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2} - 1}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{x^3 \cdot \sin x} - \frac{3}{x^4} \right)$
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$	8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)e^{-x} - (1-x)e^x}{\arcsin x - \arctg x}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$
11.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3 - 3x - \frac{3}{2}x^2}{x - \sin x}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - \cos x}{3x^2}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-x} - 2}{\ln(x+e) - 1}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$
-----	---	-----	---

Завдання 4.2.4. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$.

1.	$\int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right)}{x} dx$	2.	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27 + x^3}}$
3.	$\int_0^{0,2} \sin(25x^2) dx$	4.	$\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx$
5.	$\int_0^{0,2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$	6.	$\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} dx$
7.	$\int_0^{0,2} \sin(x^2) dx$	8.	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64 + x^3}}$
9.	$\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81 + x^4}}$	10.	$\int_0^{0,4} \frac{1 - e^{-0,5x}}{x} dx$
11.	$\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125 + x^3}}$	12.	$\int_0^{0,4} \cos(6,25x^2) dx$
13.	$\int_0^{0,4} e^{-2x^2} dx$	14.	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256 + x^4}}$
15.	$\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625 + x^4}}$	16.	$\int_0^{0,75} \sin(x^2) dx$

Завдання 4.2.5. Знайти чотири перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння при заданих початкових умовах.

1.	$y'' = yy' - x^2$	$y(0) = y'(0) = 1$
2.	$y'' = -xy' + 5$	$y(0) = y'(0) = 1$
3.	$y'' = -2xy + 3$	$y(0) = y'(0) = 1$
4.	$y'' = -xy' - y + 8$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
5.	$y'' = xy' - y + x^2$	$y(0) = y'(0) = 1$
6.	$y'' = y' + 4x$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
7.	$y'' = -y' - y$	$y(0) = 1, y'(0) = 0$
8.	$y'' = x + y^2 - 7$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
9.	$y'' = xy - \sin x \cdot y'$	$y(0) = 1, y'(0) = -1$
10.	$y'' = x + \cos y' - 4$	$y(0) = 1, y'(0) = \frac{3\pi}{2}$
11.	$y'' = xe^y - y'$	$y(0) = 0, y'(0) = 1$
12.	$y'' = xy' + y^2$	$y(0) = 1, y'(0) = -1$
13.	$y'' = yy' + x$	$y(0) = 1, y'(0) = 1$
14.	$y'' = e^{2y} + \sin x$	$y(0) = y'(0) = 1$
15.	$y'' = \sin y' + \cos 2x$	$y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{2}$
16.	$y'' = xy^3$	$y(0) = -1, y'(0) = 1$

4.3 Ряди Фур'є

Завдання 4.3.1. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$:

а) вважаємо її 2π -періодичною, $f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } -\pi < x \leq 0 \\ b, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi \end{cases}$;

б) $f(x) = cx + d$ на інтервалі $-l < x \leq l$;

в) $f(x) = kx + m$ на інтервалі $0 < x \leq r$ (в непарних варіантах – розвинути «по косинусах», в парних варіантах – розвинути «по синусах»).

1.	а)	$a = 1, b = 2$;	б)	$c = -1, d = 4, l = 3$;	в)	$k = 4, m = -3, r = 2$.
2.	а)	$a = 3, b = -1$;	б)	$c = 1, d = 2, l = 2$;	в)	$k = -1, m = 3, r = 3$.
3.	а)	$a = 2, b = -2$;	б)	$c = 2, d = -1, l = 4$;	в)	$k = 5, m = 1, r = 2$.
4.	а)	$a = 4, b = -1$;	б)	$c = 3, d = -2, l = 6$;	в)	$k = -2, m = 3, r = 4$.
5.	а)	$a = 2, b = 9$;	б)	$c = -3, d = 2, l = 2$;	в)	$k = 3, m = 7, r = 4$.
6.	а)	$a = 2, b = -1$;	б)	$c = 5, d = -1, l = 4$;	в)	$k = -4, m = 5, r = 5$.
7.	а)	$a = 4, b = -4$;	б)	$c = 1, d = 1, l = 4$;	в)	$k = -2, m = 3, r = 2$.
8.	а)	$a = -3, b = 5$;	б)	$c = 2, d = -3, l = 6$;	в)	$k = 7, m = 2, r = 4$.
9.	а)	$a = 4, b = 3$;	б)	$c = 1, d = 6, l = 2$;	в)	$k = -2, m = 5, r = 4$.
10.	а)	$a = -4, b = 1$;	б)	$c = 3, d = -1, l = 5$;	в)	$k = -6, m = 2, r = 5$.
11.	а)	$a = 2, b = 3$;	б)	$c = -4, d = 5, l = 6$;	в)	$k = 2, m = -5, r = 4$.
12.	а)	$a = 2, b = -3$;	б)	$c = 4, d = -1, l = 3$;	в)	$k = 5, m = -12, r = 6$.

13.	a)	$a = 5, b = -1;$	б)	$c = 3, d = -2, l = 4;$	В)	$k = -3, m = 8, r = 2.$
14.	a)	$a = -4, b = 2;$	б)	$c = 2, d = -5, l = 6;$	В)	$k = 4, m = -6, r = 5.$
15.	a)	$a = 5, b = 1;$	б)	$c = 8, d = 10, l = 4;$	В)	$k = -1, m = 7, r = 2.$
16.	a)	$a = 6, b = 4;$	б)	$c = 1, d = -2, l = 2;$	В)	$k = -2, m = 7, r = 4.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Модуль 6. Ряди. Операційне числення: Навч. Посібник / Л. В. Андрощук, Є. Ю. Корнілович, Т. В. Лубенська, І. П. Шмаков – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 180 с.
2. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред. : В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478с.
3. Вища математика в прикладах та задачах. Частина V: Навч. посібник / Т.М. Кадильникова, Л. П. Кагадій, І. Б. Кочеткова, Л. Ф. Сушко, О. Є. Запороженко – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. – 88 с.
4. Дубовик В. П. Вища математика Навч. посібник. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.
5. Методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання РГР (для студентів денної форми навчання) та КР (для студентів заочної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання). Розділ «Ряди» / Укл. : І. М. Килимник, Т. Г. Полякова – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2022 – 85 с.
6. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. – К. : Техніка, 2003. – 792 с.