МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

І. М. Килимник, Д. С. Яримбаш

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
(видання 2-е, виправлене і доповнене)

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2024

УДК 517.91(075.8)
К 39

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національного університету «Запорізька політехніка»,
(Протокол № 2 від 01.10.2024 р.)

Рецензенти:

Туровцев Г. В., доктор фізико-математичних наук, професор, ректор Запорізького інституту економіки та інформаційних технологій;

Гребенюк С. М., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізького національного університету.

К39 **Килимник І. М., Яримбаш Д.С.**
Диференціальні рівняння : Навчальний посібник. Вид. 2-е, виправлене і доповнене / І. М. Килимник, Д. С. Яримбаш – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 212 с.

ISBN 978-617-529-476-5

У посібнику «Диференціальні рівняння» представлені основні поняття і теореми теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку в обсязі, передбаченому програмою курсу вищої математики для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки.

Наводяться всі необхідні теоретичні відомості з курсу «Диференціальні рівняння» для того, щоб студент міг виконати завдання без використання додаткової літератури. Теоретичний матеріал доповнено численними прикладами з докладним розв'язанням та завданнями для самостійної роботи з відповідями.

Навчальний посібник «Диференціальні рівняння» може бути корисним для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки денної, заочної (дистанційної) форми навчання а також може бути використаний студентами інших напрямів підготовки, які вивчають у тому чи іншому обсязі курс звичайних диференціальних рівнянь.

УДК 517.91(075.8)

ISBN 978-617-529-476-5

ЗМІСТ

Присвячується 125 річниці Національного університету «Запорізька політехніка»

ВСТУП

Курс «Диференціальні рівняння» – один з провідних розділів дисципліни «Вища математика» для студентів, які навчаються за спеціальностями інженерної спрямованості, а також є одним з основних компонентів формування основних компетентностей при набутті програмних результатів навчання.

Стандартний курс вищої математики у закладах вищої освіти, як правило, охоплює вивчення лише найбільш важливих класів звичайних диференціальних рівнянь. Обсяг всього курсу може варіюватися залежно від спеціальності і необхідного рівня підготовки фахівців.

Мета цього навчального посібника – допомогти студентам опанувати вузівський курс звичайних диференціальних рівнянь, навчитися розв’язувати (інтегрувати) ряд простих типів таких рівнянь та їх систем. Посібник охоплює основну частину програми з диференціальних рівнянь для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки.

Навчальний посібник присвячений деяким основним розділам курсу звичайних диференціальних рівнянь. У посібнику стисло викладено теоретичний матеріал поєднаний з великою кількістю прикладів. Також належну увагу приділено викладенню методів розв’язування типових завдань теорії звичайних диференціальних рівнянь; підбору та розв’язуванню завдань, що роз’яснюють основні ідеї, поняття та їх практичне застосування. Окрім того, кожна тема доповнена великою кількістю задач для самостійного опрацювання, що дозволяє викладачу індивідуалізувати підготовку студента як під час аудиторної роботи так і в поза аудиторний час.

При цьому передбачається, що необхідні відомості щодо диференціального та інтегрального числення читачеві відомі.

У другому виданні в розділі «Диференціальні рівняння першого порядку» суттєво розширений перелік розглянутих типів диференціальних рівнянь першого порядку. Додано підрозділ «Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно

y'» та розглянуто «Окремі випадки диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно y'», рівняння Клеро і Лагранжа.

У розділі «Диференціальні рівняння другого порядку» в підрозділі «Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку», збільшено кількість розглянутих типів таких диференціальних рівнянь та їх розв'язування.

У підрозділі «Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами» розглянуто методи розв'язування однорідних і неоднорідних рівнянь та наведено приклади.

У підрозділи «Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами» додано розв'язування рівнянь Ейлера.

У розділі «Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку» в підрозділі «Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами» розглянуто методи розв'язування систем, як однорідних, так і неоднорідних диференціальних рівнянь.

Після вивчення курсу «Диференціальні рівняння» студент набуває не тільки загальних теоретичних навичок у розв'язанні диференціальних рівнянь, але й отримує необхідний досвід застосування набутих знань в практиці виконання професійних завдань.

Автори висловлюють подяку рецензентам доктору фізико-математичних наук, професору Туровцеву Г. В., доктору технічних наук, професору Гребенюку С. М. за корисні зауваження та поради, що сприяли покращенню цього видання.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

***<u>Означення</u>* <u>1.1</u>**. Рівняння, яке, крім незалежних змінних і невідомих функцій цих змінних, має в своєму складі і похідні невідомих функцій або їх диференціали, називається *диференціальним рівнянням* (ДР).

***<u>Означення</u>* <u>1.2</u>**. Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо невідомі функції, які входять в нього, є функціями однієї незалежної змінної. Якщо ж невідома функція залежить від кількох незалежних змінних, то диференціальне рівняння називається *рівнянням у частинних похідних*.

***<u>Означення</u>* <u>1.3</u>**. *Порядок диференціального рівняння* визначається найвищим порядком похідної або диференціала невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння.

Наприклад.

1) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy = ydx$ – звичайне диференціальне рівняння першого порядку;

2) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$ – звичайне диференціальне рівняння другого порядку;

3) $xy''' - y'' = x^2 e^x$ – звичайне диференціальне рівняння третього порядку.

Диференціальне рівняння n-го порядку (ДР-n) у *неявній формі* можна записати:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

де F – відома функція аргументів: x – незалежна змінна, $y = y(x)$ – невідома функція аргумента x, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – похідні невідомої функції.

Якщо рівняння (1.1) може бути розв’язано відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то матимемо ДР-n записане у *явній формі*:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{1.2}$$

<u>Зауваження 1.1</u>. У диференціальне рівняння n-го порядку обов'язково має входити похідна (або диференціал) n−го порядку невідомої функції, а незалежні змінні, сама невідома функція та її похідні (або диференціали) порядку, нижче, ніж n можуть і не входити.

<u>Означення 1.4</u>. *Загальним розв'язком* або *загальним інтегралом* диференціального рівняння є диференційована функція, яка при підстановці в диференціальне рівняння перетворює його в тотожність.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння*.

Розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння означає знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл.

Таким чином, загальний розв'язок (або загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, кожна з яких відповідає певному набору значень довільних постійних.

Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою*.

<u>Означення 1.5</u>. *Розв'язком* або *інтегралом* диференціального рівняння називається будь-яка диференційована функція $y = \phi(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння при будь-якому значенні аргументу x в деякій області.

Розв'язок ДР-n можна подати у явному вигляді:

$$y = \phi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \text{ – загальний розв'язок,} \tag{1.3}$$

або неявному вигляді:

$$\phi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0 \text{ – загальний інтеграл,} \tag{1.4}$$

де C_i – довільні сталі $\left(i=\overline{1,n}\right)$, кількість яких відповідає порядку диференціального рівняння.

***Зауваження* 1.2**. Диференціальне рівняння може мати не один, а кілька загальних розв'язків.

***Означення* 1.6**. *Особливим розв'язком* ДР стосовно даного загального розв'язку називається такий розв'язок, який не може бути отриманий за жодних значень довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, що входять до загального розв'язку.

Диференціальне рівняння n-го порядку може мати сімейство особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, кількість яких може бути $n-1$.

Кожна функція, яку виокремимо з загального розв'язку при певних значеннях довільних сталих, називається *частинним розв'язком* або *частинним інтегралом* диференціального рівняння. Для визначення довільних сталих необхідно задати стільки умов, скільки є сталих:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2, ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}. \qquad (1.5)$$

Числа $x_0, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ називають *початковими значеннями*, а рівності (1.5) – *початковими умовами*.

Задача розв'язування диференціального рівняння з заданими початковими умовами називається *задачею Коші*. Загальний розв'язок ДР – це множина інтегральних кривих. Частинний розв'язок ДР – це одна інтегральна крива, яка проходить через точку $(x_{0,}\, y_0)$.

***Теорема* 1.1** (про існування і єдиність розв'язку задачі Коші). Якщо у рівнянні (1.2) функція $f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ в деякій області D зміни своїх аргументів неперервна і має неперервні частинні похідні за змінними $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$, то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y_1, y_2, y_3, ..., y_{n-1})\in D$ знайдеться такий інтервал

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, на якому існує і до того ж єдиний розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам (1.5).

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1 Загальні поняття

<u>Означення 2.1</u>. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називається співвідношення, що пов'язує незалежну змінну, шукану функцію та її похідну.

Існують три форми запису диференціального рівняння першого порядку (ДР-1):

- неявна форма

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – невідома функція;

- явна форма (ДР-1 розв'язане відносно похідної y')

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

де $f(x, y)$ – задана і неперервна функція двох змінних x і y в деякій області на площині;

- диференціальна форма

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{2.3}$$

де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – задані та неперервні функції двох змінних x і y в деякій області на площині.

<u>Означення 2.2</u>. *Розв'язком диференціального рівняння* (2.1) на деякому проміжку називається будь-яка диференційована функція $y = \varphi(x)$, що має на цьому проміжку похідну і задовольняє диференціальне рівняння, тобто $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Диференціальне рівняння має нескінченну кількість різних розв'язків. Кожен з таких розв'язків називається *частинним розв'язком*. Сукупність усіх частинних розв'язків називають *загальним розв`язком* (*загальним інтегралом*) диференціального рівняння.

Розв'язати ДР-1 означає знайти його загальний розв'язок або загальний інтеграл.

Загальний розв'язок ДР-1 має вигляд:

$$y = \varphi(x, C), \tag{2.4}$$

де C – довільна стала.

Загальний інтеграл ДР-1 має вигляд:

$$\phi(x, y, C) = 0, \tag{2.5}$$

з якого y визначається неявно, як функція аргументу x.

Загальний розв'язок ДР-1 містить одну довільну сталу C (як довільну сталу для зручності можна писати $\ln C$).

Для будь-якого значення $C = C_0$ функція $y_0 = \phi(x, C_0)$ є розв'язком і будь-який частинний розв'язок можна знайти з загального, підібравши відповідне значення сталої C.

Нехай $y = \varphi(x, C)$ є загальним розв'язком рівняння (2.2). Цей загальний розв'язок визначає сімейство інтегральних кривих. Для того, щоб із цього сімейства виділити якийсь частинний розв'язок, необхідно задати ще додаткові умови, зокрема, частинний розв'язок можна виділити шляхом завдання на площині точки (x_0, y_0), через яку проходить шукана інтегральна крива. Отже, виникає завдання серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2.2) знайти такий розв'язок, який при заданому $x = x_0$ прийме задане значення $y = y_0$.

Така задача називається *задачею Коші* і записується у вигляді:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

або

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

а умова

$$y(x_0)=y_0 \text{ або } y\big|_{x=x_0}=y_0. \qquad (2.8)$$

називається *початковою умовою*.

Теорема Коші. Якщо в деякій області D функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ неперервні і точці $M_0 \in D$, то існує єдина інтегральна крива $y=\varphi(x)$, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$.

Частинний розв`язок ДР-1 має вигляд:

$$\phi(x,y,C_0)=0 \quad \text{або} \quad y=\phi(x,C_0), \qquad (2.9)$$

де C_0 – дійсне число, визначене з початкової умови.

2.2 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними

Означення 2.3. *Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними* називається диференціальне рівняння виду:

$$P(x)dx+Q(y)dy=0. \qquad (2.10)$$

Розв’язування рівняння ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема 2.1 Якщо функція $P(x)$ має первісну $F_1(x)$, а функція $Q(y)$ – первісну $F_2(y)$, то загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$F_1(x)+F_2(y)=C. \qquad (2.11)$$

Приклад 1. Знайти розв’язок ДР-1 $\left(x+\mathrm{e}^x\right)dx+y^3\,dy=0$.

Розв’язання. Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними. Інтегруємо обидві частини рівняння, отримаємо загальний інтеграл рівняння:

$$\frac{x^2}{2}+e^x+\frac{y^4}{4}=C \text{ або } 0{,}5x^2+e^x+0{,}25y^4=C.$$

Відповідь: $0{,}5x^2+e^x+0{,}25y^4=C$.

2.3 Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

***Означення* 2.4**. Рівняння $y'=f(x,y)$ називається з *відокремлюваними змінними*, якщо функцію $f(x,y)$ можна зобразити як добуток функцій $P(x)$ та $Q(y)$: $f(x,y)=P(x)\cdot Q(y)$.

Маємо рівняння $y'=P(x)\cdot Q(y)$. Враховуючи що $y'=\frac{dy}{dx}$, при dy збираємо всі вирази зі змінною y, а при dx – зі змінною x, тобто ділимо рівняння на $Q(y)$ і помножуємо на dx.

Рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dy}{Q(y)}=P(x)dx. \quad (2.12)$$

Його називають ДР-1 з *відокремленими змінними*.

Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx+C. \quad (2.13)$$

Після обчислення інтегралів знайдемо *загальний розв'язок* (*загальний інтеграл*) ДР-1.

Якщо ДР-1 записано в диференціальній формі:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

то воно є з відокремлюваними змінними, якщо $P(x,y)=M(x)\cdot N(y)$, $Q(x,y)=S(x)\cdot T(y)$. Тоді матимемо ДР-1

$$M(x)\cdot N(y)dx + S(x)\cdot T(y)dy = 0, \tag{2.14}$$

яке шляхом ділення на $S(x)\cdot N(y)$ зводиться до ДР-1 з відокремленими змінними:

$$\frac{M(x)}{S(x)}dx + \frac{T(y)}{N(y)}dy = 0. \tag{2.15}$$

Інтегруючи його, знайдемо *загальний розв'язок* або *загальний інтеграл* ДР-1:

$$\int \frac{M(x)}{S(x)}dx + \int \frac{T(y)}{N(y)}dy = C. \tag{2.16}$$

<u>Зауваження 2.1</u>. При діленні на вирази $Q(y)$ або $S(x)\cdot N(y)$, можемо втратити розв'язки, що обертають ці вирази в нуль. У зв'язку з цим потрібно перевірити, чи не є $Q(y)=0$ розв'язком рівняння (2.1), а $S(x)=0$ або $N(y)=0$ розв'язком рівняння (2.13). Тому, якщо втрачений розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку при якомусь $C = C_0$, його також необхідно включити у відповідь.

Приклад 2. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx + xy\,dy = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx = -xy\,dy.$$

Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x\cdot\left(y^2-1\right)$. Тоді

$$\frac{\left(x^2+1\right)}{x}dx = -\frac{y}{y^2-1}dy \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x^2+1}{x}dx + C = -\int \frac{ydy}{y^2-1}.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|.$$

Оскільки при діленні на вираз $x \cdot \left(y^2 - 1\right)$ могли бути втрачені розв'язки $x = 0$ або $y = \pm 1$, то потрібно зробити перевірку. Підставляючи в задане рівняння переконуємося, що $x = 0$ і $y = \pm 1$ – є розв'язками заданого рівняння і не можуть бути отримані з загального інтегралу ні за якого значення C, тому що не входять в область його визначення.

Відповідь: $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right|$, $x = 0$, $y = \pm 1$.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$2\left(1 + e^x\right)yy' = e^x, \quad y(0) = 0.$$

Розв'язання. Рівняння можна записати у вигляді $y' = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \frac{1}{2y}$, поділивши на $\left(1 + e^x\right)y$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи що $y' = \frac{dy}{dx}$, для відокремлення змінних помножимо обидві частини рівняння на $2y \cdot dx$. Тоді матимемо:

$$2ydy = \frac{e^x}{1 + e^x}dx \;\Rightarrow\; \int 2ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x}dx + C.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є $y^2 = \ln\left|1 + e^x\right| + C$.

Оскільки при діленні на $\left(1 + e^x\right)y$ міг бути втрачений розв'язок $y = 0$ $\left(1 + e^x \neq 0\right)$, то підставимо його в задане рівняння. Переконуємось, що $y = 0$ не є розв'язком рівняння.

Знайдемо значення сталої C, застосовуючи початкову умову:

$$0 = \ln\left|1 + e^0\right| + C \;\Rightarrow\; C = -\ln 2.$$

Розв'язок задачі Коші:

$$y^2 = \ln\left|1 + e^x\right| - \ln 2 \;\Rightarrow\; y^2 = \ln\frac{1 + e^x}{2}.$$

Відповідь: $y^2 = \ln\frac{1 + e^x}{2}$.

Приклад 4. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(xy+y\right)^2\ dx+\left(xy-x\right)^2 dy=0 .$$

Розв'язання. Розкладемо вирази при dx і dy на множники:

$$y^2\left(x+1\right)^2\ dx+x^2\left(y-1\right)^2 dy=0 .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2. Матимемо $\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2}\ dx+\dfrac{\left(y-1\right)^2}{y^2}dy=0$ або $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}\ dx+\dfrac{y^2-2y+1}{y^2}dy=0$. Почлено ділимо чисельники на знаменник і інтегруємо рівняння:

$$\int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int\left(1-\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=C .$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є

$$x+2\ln\left|x\right|-\frac{1}{x}+y-2\ln\left|y\right|-\frac{1}{y}=C\ \Rightarrow\ x+y+2\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=C\ .$$

Оскільки при діленні на x^2y^2 міг бути втрачений розв'язок $x=0$ або $y=0$, то підставимо їх у задане рівняння. Переконуємося, що $x=0$ і $y=0$ – є розв'язками заданого рівняння і не можуть бути отримані з загального інтегралу ні за якого значення C, тому що не входять в область його визначення.

Відповідь: $x+y+2\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=C$, $x=0$, $y=0$.

2.4 Диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

1) ДР-1 вигляду

$$y'=f\left(ax+by\right)\ , \tag{2.17}$$

де $a\neq0,\ b\neq0$ зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними введенням нової змінної: $\mathrm{z}=ax+by$, де z є функцією аргументу x. У цьому випадку

$$y=\frac{1}{b}(z-ax),\ y'=\frac{1}{b}(z'-a),\ f(ax+by)=f(z). \tag{2.18}$$

Після підстановки у задане ДР-1 вказаної заміни матимемо ДР-1 з відокремлюваними змінними

$$\frac{1}{b}(z'-a)=f(z) \quad \Rightarrow \quad z'=b\,f(z)+a \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=b\,f(z)+a\,.$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{dz}{b\,f(z)+a}=dx$. Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int\frac{dz}{b\,f(z)+a}=x+C$$

при умові, що $b\,f(z)+a\neq 0$.

Після обчислення інтегралів знайдемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) ДР-1 відносно функції z. Зробимо зворотну підстановку у розв'язок: $z=ax+by$ замість z.

<u>Зауваження 2.2</u>. Слід розглянути корні рівняння $b\,f(z)+a=0$, які можуть давати розв'язки, не включені в загальний інтеграл. У цьому випадку враховуємо їх, у розв'язку ДР-1.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок ДР-1

$$y'=\frac{1}{\ln(x+2y)}-\frac{1}{2},\quad y(0)=1\,.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $z=x+2y$.

Тоді $y=\dfrac{1}{2}(z-x) \quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{2}(z'-1)$. Підставимо $x+2y=z$ і y' в задане рівняння: $\dfrac{1}{2}(z'-1)=\dfrac{1}{\ln z}-\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2}{\ln z}$.

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні

$$\ln z\,dz=2\,dx \quad \Rightarrow \quad \int\ln z\,dz=2\int dx$$

Знайдемо інтеграл у лівій частині методом інтегрування частинами

$$\int \ln z dz = \left[\begin{array}{c} u = \ln z, du = \frac{1}{z} dz \\ dv = dz, v = z \end{array} \right] = z \cdot \ln z - \int z \cdot \frac{1}{z} dz = z \cdot \ln z - z .$$

У лівій частині $\quad 2\int dx = 2x + C$.

Тоді $z \cdot \ln z - z = 2x + C$ або $z \cdot (\ln z - 1) = 2x + C$.

Зробимо зворотну підстановку: $z = x + 2y$. Матимемо загальний інтеграл заданого ДР-1

$$(x + 2y) \cdot (\ln(x + 2y) - 1) = 2x + C .$$

Знайдемо частинний інтеграл, застосовуючи початкову умову:

$$(0 + 2 \cdot 1) \cdot (\ln(0 + 2 \cdot 1) - 1) = 2 \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (\ln(2) - 1) = C .$$

Частинний інтеграл має вигляд

$$(x + 2y) \cdot (\ln(x + 2y) - 1) = 2x + 2 \cdot (\ln(2) - 1)$$

або $$(x + 2y) \cdot \ln(x + 2y) = 3x + 2y - 2 + \ln 4 .$$

За умови завдання нічого не сказано про інтервал, на якому потрібно знайти загальний розв’язок ДР-1. У цьому випадку розв’язування проводимо для всіх значень аргументу x, для яких задане ДР-1 та його розв’язок мають сенс.

Задане ДР-1 має сенс при $\begin{cases} \ln(x + 2y) \neq 0, \\ x + 2y > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq \frac{1}{2}(1 - x), \\ y > -\frac{x}{2}. \end{cases}$

Відповідь: $(x + 2y) \cdot \ln(x + 2y) = 3x + 2y - 2 + \ln 4$ при $\begin{cases} y \neq 1 - 2x, \\ y > -2x. \end{cases}$.

2) Аналогічно розв’язуються ДР-1 вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \tag{2.19}$$

де $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. ДР-1 зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними введенням нової змінної: $z = ax + by + c$ або $z = ax + by$, де z є функцією аргументу x .

Для заміни $z = ax + by + c$ матимемо

$$y = \frac{1}{b}\left(\mathrm{z} - ax - c\right),\ y' = \frac{1}{b}\left(\mathrm{z}' - a\right),\ f\left(ax + by + c\right) = f\left(\mathrm{z}\right). \qquad (2.20)$$

Після підстановки у задане ДР-1 вказаної заміни матимемо ДР-1 з відокремлюваними змінними

$$\frac{1}{b}\left(\mathrm{z}' - a\right) = f\left(\mathrm{z}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z}' = b\, f\left(\mathrm{z}\right) + a \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b\, f\left(\mathrm{z}\right) + a .$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{dz}{b\, f\left(\mathrm{z}\right) + a} = dx$. Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int \frac{dz}{b\, f\left(\mathrm{z}\right) + a} = x + C \qquad (2.21)$$

при умові, що $b\, f\left(\mathrm{z}\right) + a \neq 0$.

Після обчислення інтегралів дістанемо загальний розв’язок (загальний інтеграл) ДР-1 відносно функції z. Зробимо зворотну підстановку у розв’язок: $z = ax + by + c$ замість z.

Для заміни $z = ax + by$ матимемо

$$y = \frac{1}{b}\left(\mathrm{z} - ax\right),\ y' = \frac{1}{b}\left(\mathrm{z}' - a\right),\ f\left(ax + by + c\right) = f\left(\mathrm{z} + \mathrm{c}\right). \qquad (2.22)$$

Після підстановки у задане ДР-1 вказаної заміни матимемо ДР-1 з відокремлюваними змінними

$$\frac{1}{b}\left(\mathrm{z}' - a\right) = f\left(\mathrm{z} + \mathrm{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{z}' = b\, f\left(\mathrm{z} + \mathrm{c}\right) + a \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b\, f\left(\mathrm{z} + \mathrm{c}\right) + a .$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{dz}{b\, f\left(\mathrm{z} + \mathrm{c}\right) + a} = dx$. Візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int \frac{dz}{b\,f(\mathrm{z}+\mathrm{c})+a} = x + C \qquad (2.23)$$

при умові, що $b\,f(\mathrm{z}+\mathrm{c})+a \neq 0$.

Після обчислення інтегралів дістанемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) ДР-1 відносно функції z. Зробимо зворотну підстановку у розв'язок: $\mathrm{z} = ax + by$ замість z.

Приклад 6. Знайти розв'язок ДР-1 $y' = 2x + y - 3, \quad y(0) = 1$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = 2x + y$. Тоді $y = z - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = z' - 2$. Підставимо заміну в задане рівняння $z' - 2 = z - 3$. Матимемо $z' = z - 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{z-1} = dx$. Інтегруємо отримане рівняння: $\int \dfrac{dz}{z-1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|z-1| = x + \ln C$.

Матимемо $z - 1 = C \cdot \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad z = C \cdot \mathrm{e}^x + 1$. Оскільки вираз $z - 1$ перетворюється на нуль при значенні $\mathrm{z} = 1$, яке не належить області визначення знайденого розв'язку, то втрати розв'язку не сталося.

Зробимо зворотну підстановку $z = 2x + y$, отримаємо загальний розв'язок:

$$2x + y = C \cdot \mathrm{e}^x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot \mathrm{e}^x - 2x + 1.$$

Оскільки при діленні на $z - 1$ міг бути втрачений розв'язок $\mathrm{z} = 1 \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x$, то перевіримо чи є функція $y = 1 - 2x$ розв'язком заданого ДР-1. Для цього підставляємо її разом з її похідною $y' = -2$ в задане рівняння: $-2 = 2x + 1 - 2x - 3 \Rightarrow -2 = -2$. Переконуємось, що $y = 1 - 2x$ є розв'язком рівняння і може бути отриманий із загального розв'язку при значенні $C = 0$.

Знайдемо частинний розв'язок, застосовуючи початкову умову:

$$1 = C \cdot \mathrm{e}^0 - 2 \cdot 0 + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$y_{\text{част}} = 1 - 2x.$$

Відповідь: $y_{\text{част}} = 1 - 2x$.

Приклад 7. Знайти розв'язок ДР-1 $y' = (x + y + 1)^2$.

Розв'язання. Зробимо заміну $z = x + y + 1$. Тоді $y = z - x - 1 \;\Rightarrow\; y' = z' - 1$. Підставимо заміну в задане рівняння $z' - 1 = z^2$. Матимемо $z' = z^2 + 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{z^2 + 1} = dx$. Інтегруємо отримане рівняння: $\int \dfrac{dz}{z^2 + 1} = \int dx \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg} z = x + C$.

Матимемо $z = \operatorname{tg}(x + C)$. Оскільки вираз $z^2 + 1$ не перетворюється на нуль у жодному значенні z, втрати розв'язку не сталося.

Зробимо зворотну підстановку $z = x + y + 1$, отримаємо загальний розв'язок:

$$x + y + 1 = \operatorname{tg}(x + C) \;\Rightarrow\; y = \operatorname{tg}(x + C) - x - 1.$$

Відповідь: $y = \operatorname{tg}(x + C) - x - 1$.

3) Розглянемо ДР-1 вигляду $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$.

Якщо $a_1 \neq 0,\; b_1 \neq 0$ і $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямі $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ і $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ паралельні, а коефіцієнти при поточних координатах пропорційні, тобто $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = t$. Тоді ДР-1 може бути записано у вигляді: $y' = f\left(\dfrac{(a_2 x + b_2 y)t + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$. Робимо заміну $a_2 x + b_2 y = z$. Тоді $y = \dfrac{1}{b_2}(z - a_2 x)$ і $y' = \dfrac{1}{b_2}(z' - a_2)$. Підставимо заміну в отримане рівняння. Матимемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{b_2}(z' - a_2) = f\left(\frac{zt + c_1}{z + c_2}\right). \tag{2.24}$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо його. Після обчислення інтегралів знайдемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) ДР-1 відносно функції z. Зробимо зворотну підстановку у розв'язок: $z = a_2 x + b_2 y$ замість z.

Якщо $a_1 = b_1 = 0$, маємо $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$=0 і робимо заміну: $a_2 x + b_2 y = z$. Тоді $y = \frac{1}{b_2}(z - a_2 x)$ і $y' = \frac{1}{b_2}(z' - a_2)$. Підставимо заміну в задане рівняння. Матимемо рівняння:

$$\frac{1}{b_2}(z' - a_2) = f\left(\frac{c_1}{z + c_2}\right), \tag{2.25}$$

яке є ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо його. Після обчислення інтегралів дістанемо загальний розв'язок (загальний інтеграл) ДР-1 відносно функції z. Зробимо зворотну підстановку у розв'язок: $z = a_2 x + b_2 y$ замість z.

Приклад 8. Знайти розв'язок ДР-1 $y' = \dfrac{2}{2x + y - 1}$.

Розв'язання. Маємо $a_1 = b_1 = 0$ і $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Зробимо заміну $2x + y = z \;\Rightarrow\; z' = 2 + y'$. Підставимо заміну в задане рівняння

$$z' - 2 = \frac{2}{z-1} \;\Rightarrow\; z' = \frac{2z}{z-1} \;\Rightarrow\; \frac{(z-1)dz}{z} = 2dx.$$

Отримане рівняння не є рівносильним, оскільки виконано ділення на функцію z, яка може дорівнювати нулю. Зробимо перевірку цього перетворення наприкінці розв'язування. Інтегруємо рівняння

$$\int \frac{(z-1)dz}{z} = 2\int dx \;\Rightarrow\; z - \ln|z| = 2x + C.$$

Робимо зворотну заміну $2x+y-\ln|2x+y|=2x+C$. Матимемо загальний інтеграл $y-\ln|2x+y|=C$.

Тепер перевіримо, чи не є функція $z=0 \;\Rightarrow\; 2x+y=0 \;\Rightarrow\; y=-2x$ втраченим розв'язком заданого ДР-1. Для цього підставляємо її разом з її похідною $y'=-2$ в задане ДР-1:

$$-2=\frac{2}{2x-2x-1} \quad\Rightarrow\quad -2=-2.$$

Так, вона є розв'язком і не входить у загальний інтеграл при жодному значенні сталої C.

Відповідь: $y-\ln|2x+y|=C$ і $y=-2x$.

Приклад 9. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x-2y-5)dx=(3x-6y+4)dy.$$

Розв'язання. Маємо $a_1=1$, $b_1=-2$, $c_1=-5$, $a_2=3$, $b_2=-6$, $c_2=4$. Перевіримо виконання умови $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}=-6-(-6)=0$.

Умова виконується. Рівняння можна привести до ДР-1 з відокремлюваними змінними. Записуємо рівняння у вигляді $(x-2y-5)dx=(3(x-2y)+4)dy$ і робимо заміну

$$x-2y=z \quad\Rightarrow\quad dz=d(x-2y)=dx-2dy \quad\Rightarrow\quad dy=\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dz.$$

Підставимо заміну в отримане рівняння

$$(z-5)dx=(3z+4)\cdot\left(\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dz\right)=0\,\Big|\cdot(-2),$$

$$-2\cdot(z-5)dx=(3z+4)\cdot(dz-dx).$$

Розкриємо дужки і приведемо подібні:

$$(3z+4)dz=(z+14)dx.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{(3z+4)dz}{z+14}=dx.$$

Отримане рівняння не є рівносильним, оскільки виконано ділення на вираз $z+14$, який може дорівнювати нулю. Зробимо перевірку цього перетворення наприкінці розв'язування. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{(3z+4)dz}{z+14} = \int dx \quad \Rightarrow \quad 3z - 38 \cdot \ln|z+14| = x + C .$$

Робимо зворотну заміну: $3(x-2y) - 38\ln|x-2y+14| = x + C$. Матимемо загальний інтеграл

$$2x - 6y - 38\ln|x-2y+14| = C \,|: 2,$$

$$x - 3y - 19\ln|x-2y+14| = C_1 ,\; C_1 = \frac{C}{2} .$$

Тепер перевіримо, чи не є функція $z+14=0 \Rightarrow x-2y+14=0 \Rightarrow y = \frac{x}{2}+7$ втраченим розв'язком заданого ДР-1. Для цього підставляємо її разом з її диференціалом $y' = \frac{1}{2}$, $dy = \frac{1}{2}dx$
у задане ДР-1:

$$(x - x - 19)dx = (3(x - x - 14) + 4)\frac{1}{2}dx \quad \Rightarrow \quad -19\,dx = -19\,dx .$$

Так, $y = \frac{x}{2}+7$ є розв'язком і не входить у загальний інтеграл при жодному значенні сталої C .

Відповідь: $x - 3y - 19\ln|x-2y+14| = C_1$ і $y = \frac{x}{2}+7$.

2.5 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

<u>Означення 2.5</u>. Функція $f(x,y)$ є *однорідною* k*-го виміру* (степеню), якщо для будь-яких x, y, t справедлива тотожність:

$$f(tx, ty) = t^k f(x,y) . \tag{2.26}$$

<u>Означення 2.6</u>. ДР-1 $y' = f(x,y)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною 0-го виміру (степеню), тобто

$$f(tx, ty) = f(x, y)\ . \tag{2.27}$$

1) Однорідне диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни:

$$y = u(x) \cdot x = u \cdot x\ ,\ \ y' = u'x + u\ . \tag{2.28}$$

Після підстановки заміни в ДР-1 $y' = f(x, y)$ матимемо ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = f(1, u) \Rightarrow \frac{du}{dx} x = f(1, u) - u\ .$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{du}{f(1, u) - u} = \dfrac{dx}{x}$.

Візьмемо інтеграл від обох його частин: $\displaystyle\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + C$.

Якщо $F(u)$ – первісна для інтегралу зліва, то $F(u) = \ln|x| + C$.

Зробимо зворотну підстановку $u = \dfrac{y}{x}$ у розв’язок Загальний інтеграл однорідного диференціального рівняння

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C\ . \tag{2.29}$$

2) Якщо ДР-1 $y' = f(x, y)$ можна привести до вигляду $y' = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ або $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то воно зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни: $u = \dfrac{x}{y}$ або $u = \dfrac{y}{x}$.

Для заміни $u = \dfrac{x}{y}$ маємо $y = \dfrac{x}{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u - x \cdot u'}{u^2}$. Отримаємо ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни:

$$\frac{u - x \cdot u'}{u^2} = f(u) \text{ або } \frac{u - x \cdot u'}{u^2} = f\left(\frac{1}{u}\right). \tag{2.30}$$

Для заміни $u = \dfrac{y}{x}$, маємо $y = u \cdot x \Rightarrow y' = u'x + u$. Отримаємо ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни:

$$u'x + u = f\left(\frac{1}{u}\right) \text{ або } u'x + u = f(u). \tag{2.31}$$

<u>Зауваження 2.3</u>. ДР-1 вигляду

$$y' = \frac{a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} x + a_{n-2} y^{n-2} x^2 + \ldots + a_1 y x^{n-1} + a_0 x^n}{b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} x + b_{n-2} y^{n-2} x^2 + \ldots + b_1 y x^{n-1} + b_0 x^n}$$

діленням чисельника і знаменника правої частини на y^n або x^n зводиться до рівняння вигляду $y' = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ або $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Якщо диференціальне рівняння подано в диференціальній формі $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, то воно є однорідним, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ однорідні однакового виміру (степеню). Із заміни $y = u(x) \cdot x = u \cdot x$ матимемо $d\,y = x \cdot du + u \cdot dx$.

Приклад 10. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо, чому дорівнює y'. Для цього обидві частини рівняння поділимо на $d\,x$ і, враховуючи, що $y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$, матимемо рівняння у вигляді:

$$y' = -\frac{x - y\cos\frac{y}{x}}{x\cos\frac{y}{x}} \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}.$$

Позначимо $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$. Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(xt, yt) = \frac{yt}{xt} - \frac{1}{\cos\frac{yt}{xt}} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}} = f(x, y).$$

Функції $f(x, y)$ є однорідною 0-го виміру, тому задане ДР-1 однорідне. Зробимо заміну: $y = u \cdot x, \quad y' = u' \cdot x + u$. Підставимо її в задане рівняння: $u' \cdot x + u = u - \frac{1}{\cos u} \;\Rightarrow\; u' \cdot x = -\frac{1}{\cos u}$.

Відокремимо змінні: $\cos u\, du = -\frac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int \cos u\, du = -\int \frac{dx}{x} + C \;\Rightarrow\; \sin u = -\ln|x| + C, \text{ де } u = \frac{y}{x}.$$

Загальним інтегралом заданого ДР-1 є $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$.

Оскільки при діленні на x міг бути втрачений розв’язок $x = 0$, то підставимо його в задане рівняння і переконуємось, що $x = 0$ не може бути розв’язком, тому що не входять в область його визначення.

Відповідь: $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$.

Приклад 11. Знайти частинний розв’язок ДР-1

$$y' x^2 = x\,y + y^2\, e^{-\frac{x}{y}}, \quad y(1) = 1.$$

Розв'язання. Записуємо рівняння у вигляді: $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$,

де $f(x, y) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}$. Перевіримо однорідність функції $f(x, y)$:

$$f(xt, yt) = \frac{yt}{xt} + \left(\frac{yt}{xt}\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{xt}{yt}} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}} = f(x, y).$$

Задане ДР-1 є однорідним. Зробимо заміну: $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$. Підставимо її в задане рівняння:

$$u' \cdot x + u = u + u^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{u}} \;\Rightarrow\; u' \cdot \mathrm{x} = u^2\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}.$$

Відокремимо змінні: $\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}}{u^2} du = \frac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{u}}}{u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C \;\Rightarrow\; -\mathrm{e}^{\frac{1}{u}} = \ln|x| + C, \text{ де } u = \frac{y}{x}.$$

Маємо загальний інтеграл: $-\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$.

Оскільки при діленні на x міг бути втрачений розв'язок $x = 0$, то підставимо його в задане рівняння і переконуємось, що $x = 0$ не є його розв'язком.

Знайдемо значення C, застосовуючи початкову умову:

$$-\mathrm{e}^{-1} = \ln 1 + C \;\Rightarrow\; C = -\mathrm{e}^{-1}.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$-\mathrm{e}^{-x/y} = \ln|x| - e^{-1}.$$

Відповідь: $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x/y} = \ln|x|$.

Приклад 12. Знайти розв'язок ДР-1 $x y' = \frac{3y^3 + 2x^2 y}{2y^2 + x^2}$.

Розв'язання. Записуємо рівняння у вигляді: $y' = \dfrac{3\dfrac{y^3}{x^3} + 2\dfrac{y}{x}}{2\dfrac{y^2}{x^2} + 1}$,

поділивши спочатку все рівняння на x, а потім чисельник і знаменник на x^3. Маємо рівняння виду: $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, де

$f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{3\dfrac{y^3}{x^3} + 2\dfrac{y}{x}}{2\dfrac{y^2}{x^2} + 1}$. Задане ДР-1 є однорідним і зводиться до ДР-1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни: $u = \dfrac{y}{x}$ (див. випадок **2**)).

Тоді $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$. Підставимо заміну в отримане рівняння:

$$u' \cdot x + u = \frac{3u^3 + 2u}{2u^2 + 1} \Rightarrow u' \cdot x = \frac{3u^3 + 2u}{2u^2 + 1} - u \Rightarrow u' \cdot x = \frac{u^3 + u}{2u^2 + 1}.$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні: $\dfrac{2u^2 + 1}{u\left(u^2 + 1\right)} du = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{2u^2 + 1}{u\left(u^2 + 1\right)} du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u^2 + u^2 + 1}{u\left(u^2 + 1\right)} du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{u}{u^2 + 1} + \frac{1}{u} \right) du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u}{u^2 + 1} du + \int \frac{1}{u} du = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|u^2 + 1\right| + \ln|u| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad |u|\sqrt{u^2 + 1} = C|x| \;\Big|\uparrow 2.$$

$$u^2\left(u^2 + 1\right) = C^2 x^2.$$

Робимо зворотну заміну. Отримаємо загальний інтеграл заданого ДР-1: $\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=C^2x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2\left(y^2+x^2\right)=C_1x^6$, де $C_1=C^2$.

Оскільки при діленні на x міг бути втрачений розв'язок $x=0$, то підставимо його в задане рівняння і переконуємось, що $x=0$ не може бути розв'язком, тому що не входять в область його визначення.

Відповідь: $y^2\left(y^2+x^2\right)=C_1x^6$.

2.6 Диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до однорідних диференціальних рівнянь

1) Розглянемо диференціальне рівняння виду

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{2.32}$$

коли $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тобто $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ $\left(a_1b_2 \neq a_2b_1\right)$. У цьому випадку прямі $a_1x+b_1y+c_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2=0$ перетинаються у точці (α, β). ДР-1 зводиться до однорідного рівняння за допомогою перенесення початку координат у точку перетину прямих шляхом заміни $\left\{\begin{array}{l} x=\bar{x}+\alpha \\ y=\bar{y}+\beta \end{array}\right\}$, де сталі α і β добираються так, щоб $\left\{\begin{array}{l} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{array}\right\}$. Підставивши в рівняння замість x і y їх значення з заміни, отримаємо

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}=f\left(\frac{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}+\overbrace{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}^{0}}{a_2\bar{x}+b_2\bar{y}+\underbrace{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}_{0}}\right)=f\left(\frac{a_1\bar{x}+b_1\bar{y}}{a_2\bar{x}+b_2\bar{y}}\right).$$

Маємо однорідне рівняння відносно $\bar{y}$ та $\bar{x}$:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = f\left(\frac{a_1\overline{x} + b_1\overline{y}}{a_2\overline{x} + b_2\overline{y}}\right). \qquad (2.33)$$

Знайшовши його загальний інтеграл і змінивши в ньому $\overline{x} = x - \alpha$ і $\overline{y} = y - \beta$ матимемо загальний інтеграл заданого ДР-1.

Приклад 13. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0 .$$

Розв'язання. Записуємо рівняння у вигляді $y' = \dfrac{-(x + y - 2)}{x - y + 4}$

Перевіримо можна чи ні привести його до однорідного. Маємо $a_1 = -1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 4$. Умова $a_1b_2 \neq a_2b_1$ виконується. Рівняння можна привести до однорідного.

Знайдемо сталі α і β з системи рівнянь $\begin{cases} -\alpha - \beta + 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$. Маємо $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{cases}$. Зробимо заміну $\begin{cases} x = \overline{x} - 1 \\ y = \overline{y} + 3 \end{cases}$. Підставивши в задане рівняння замість x і y їх значення, отримаємо рівняння $\dfrac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \dfrac{-\overline{x} - \overline{y}}{\overline{x} - \overline{y}}$.

Маємо однорідне диференціальне рівняння. Зробимо заміну: $\overline{y} = u \cdot \overline{x}$, $\overline{y}' = u' \cdot \overline{x} + u$ Підставимо її в отримане рівняння: $u' \cdot \overline{x} + u = \dfrac{-\overline{x} - u\overline{x}}{\overline{x} - u\overline{x}}$ $\Rightarrow u' \cdot \overline{x} = \dfrac{-1 - u}{1 - u} - u$. Відокремимо змінні $\dfrac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1}du = \dfrac{d\overline{x}}{\overline{x}}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{u - 1}{-u^2 + 2u + 1}du = \int \frac{d\overline{x}}{\overline{x}} + \ln C \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}\ln\left|u^2 - 2u - 1\right| = \ln\left|\overline{x}\right| + \ln C \;\Rightarrow$$

$$\left(u^2 - 2u - 1\right)^{-\frac{1}{2}} = C\overline{x}, \text{ де } u = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} .$$

Маємо загальний інтеграл

$$\left(\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right)^2-2\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right)-1\right)^{-\frac{1}{2}}=C\overline{x}\quad\Rightarrow\quad\left(\overline{y}^2-2\overline{y}\,\overline{x}-\overline{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\overline{x}=C\overline{x}\quad\Rightarrow$$

$$\overline{y}^2-2\overline{y}\,\overline{x}-\overline{x}^2=C.$$

Оскільки $\overline{x}=x+1$ і $\overline{y}=y-3$, матимемо загальний інтеграл заданого ДР-1: $y^2-2xy-x^2+4x-8y+14=C$.

Відповідь: $y^2-2xy-x^2+4x-8y+14=C$.

2) ***<u>Означення 2.7</u>***. Диференціальне рівняння першого порядку називається *узагальненим однорідним*, якщо його можна призвести до однорідного заміною $y=z^m$, де m – деяке дійсне число.

Роблячи в ДР-1 заміну $y=z^m$, $y'=m\cdot z^{m-1}\cdot z'$, враховуємо що отримаємо однорідне рівняння щодо x і z, якщо степені всіх одночленів, які містить рівняння будуть однаковими. З цієї умови визначаємо m.

<u>Зауваження 2.4</u>. Щоб визначити, чи буде рівняння узагальненим однорідним, зручно ввести поняття *виміру*. Так, змінній x ставлять у відповідність вимір 1, шуканій функції y – вимір m, а похідної y' – вимір $m-1$. Число m намагаються підібрати так, щоб виміри всіх членів, що входять до рівняння, були однаковими. Дії з вимірами аналогічні діям зі ступенями: якщо два члени рівняння перемножуються, їх виміри складаються, якщо якийсь член рівняння зводиться у степінь, його вимір множиться на показник степеня.

Приклад 14. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(3x^2y^2+1\right)dy+3xy^3\,dx=0.$$

Розв'язання. Рівняння не є однорідним. Спробуємо звести дане рівняння до однорідного за допомогою заміни $y=z^m$, $dy=m\cdot z^{m-1}dz$. Після заміни рівняння воно набуває вигляду

$$\left(3x^2 z^{2m}+1\right)m\cdot z^{m-1}dz+3xz^{3m}\,dx=0\,.$$

Останнє рівняння буде однорідним у разі, коли степені всіх його доданків рівні між собою, тобто число m повинно задовольняти умові: $2+2m+m-1=m-1=1+3m$. Таке число m існує: $m=-1$ Отже, задане рівняння є узагальненим однорідним. Зробимо в ньому заміну: $y=z^{-1}$, $dy=-z^{-2}dz$. Отримаємо однорідне рівняння:

$$\left(3x^2 z^{-2}+1\right)z^{-2}dz-3xz^{-3}\,dx=0$$

або $$\frac{3x^2+z^2}{z^2}\cdot\frac{1}{z^2}dz-\frac{3x}{z^3}\,dx=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=\frac{3xz}{3x^2+z^2}\,.$$

Поділимо чисельник і знаменник на x^2. Матимемо рівняння виду: $z'=f\left(\frac{z}{x}\right)$: $\frac{dz}{dx}=\frac{3\cdot\frac{z}{x}}{3+\frac{z^2}{x^2}}$. Задане ДР-1 є однорідним і зводиться до ДР -1 з відокремлюваними змінними шляхом заміни: $u=\frac{z}{x}$. Тоді $z=u\cdot x$, $z'=u'\cdot x+u$. Підставимо заміну в отримане рівняння:

$$u'\cdot x+u=\frac{3\cdot u}{3+u^2}\ \Rightarrow\ u'\cdot x=-\frac{u^3}{3+u^2}\,.$$

Відокремимо змінні: $\frac{3+u^2}{u^3}du=-\frac{dx}{x}$. Інтегруємо рівняння:

$$\int\left(\frac{3}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du=-\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{2u^2}+\ln|u|=-\ln|x|-\ln C\,.$$

Маємо загальний інтеграл: $\ln|Cux|=\frac{3}{2u^2}$. Робимо зворотну заміну: $u=\frac{z}{x}=\frac{y^{-1}}{x}=\frac{1}{xy}$. Отримаємо загальний інтеграл заданого ДР-1:

$$\ln\left|C\frac{1}{xy}x\right|=\frac{3x^2y^2}{2} \quad\Rightarrow\quad 2\ln\left|\frac{C}{y}\right|=3x^2y^2 \quad\Rightarrow\quad C^2=y^2\,\mathrm{e}^{3x^2y^2}.$$

Відповідь: $C^2=y^2\,\mathrm{e}^{3x^2y^2}$.

2.7 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення 2.8. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння лінійне відносно шуканої функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$:

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{2.34}$$

де $p(x)$, $q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку.

Означення 2.9. Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння називають *лінійним однорідним*, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то *лінійним неоднорідним*.

Розв’яжемо лінійне неоднорідне рівняння. Існують два способи розв’язування цього рівняння. Розглянемо їх.

Перший спосіб (метод Бернуллі) полягає в застосуванні заміни:

$$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v,\;\; y'=u'\cdot v+u\cdot v'. \tag{2.35}$$

Підставимо її в рівняння (2.34). Воно матиме вигляд:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+u\cdot v\,p(x)=q(x).$$

Згрупуємо другий і третій доданки в лівій частині:

$$u'\cdot v+u\cdot\left(v'+v\cdot p(x)\right)=q(x).$$

Знайдемо такий розв’язок отриманого рівняння, щоб вираз у дужках дорівнював нулю: $v'+v\cdot p(x)=0$, тоді $u'\cdot v=q(x)$. Матимемо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v \cdot p(x) = 0, \\ u' \cdot v = q(x). \end{cases} \tag{2.36}$$

Розв’язуємо рівняння системи, починаючи з першого. Матимемо $\dfrac{dv}{dx} = -v \cdot p(x) \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \dfrac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx.$
Розв’язок першого рівняння:

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{2.37}$$

Підставимо $v(x)$ в друге рівняння системи: $e^{-\int p(x)dx} \cdot \dfrac{du}{dx} = q(x)$.

Відокремимо зміні: $du = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\,dx$. Інтегруємо отримане рівняння:

$$u = \int q(x) \cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx} \cdot dx + C. \tag{2.38}$$

Загальний розв’язок лінійного ДР-1 має вигляд:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) \cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx} \cdot dx + C\right). \tag{2.39}$$

Другий спосіб (метод Лагранжа – варіації довільної сталої) полягає в тому, що спочатку розв’язують відповідне лінійне однорідне ДР-1:

$$y' + p(x)y = 0.$$

Відокремимо змінні в цьому рівнянні: $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$. Інтегруємо отримане рівняння: $\int \dfrac{dy}{y} = -\int p(x)dx$. Матимемо

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \qquad \text{або} \qquad y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Розв’язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}, \tag{2.40}$$

де $C(x)$ – невідома функція.

Для знаходження $C(x)$ підставимо розв'язок $y = C(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ і похідну $y' = C'(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\cdot p(x)$ в лінійне неоднорідне рівняння.

Матимемо $C'(x) = q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx}$. Інтегруємо отриманий вираз:

$$C(x) = \int q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Знайдене $C(x)$ підставимо в (2.40). Отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\int q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right)\cdot \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{2.41}$$

Зауваження 2.5. У тих диференціальних рівняннях, де x і dx входять лінійно, а y і dy – нелінійно, доцільно поміняти місцями шукану функцію і незалежну змінну. Отримаємо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $x(y)$ і її похідної $x'(y)$.

Приклад 15. Знайти розв'язок ДР-1

$$\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2.$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно y і y'. Перепишемо його у вигляді:

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, \text{ де } p(x) = -\frac{2x}{1 + x^2} \text{ і } q(x) = 1 + x^2.$$

Для знаходження розв'язку ДР-1 застосуємо метод Бернуллі. Зробимо заміну: $y = u\cdot v$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$ і підставимо її в рівняння. Маємо

$$u'v + uv' - \frac{2xuv}{1 + x^2} = 1 + x^2 \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1 + x^2}\right) = 1 + x^2.$$

Отримаємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2x\,v}{1+x^2} = 0, & (1) \\ u'v = 1 + x^2. & (2) \end{cases}$$

Розв`язуємо рівняння (1): $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2x\,v}{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$.

Інтегруємо отримане рівняння: $\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$. Матимемо

$$\ln|\,v\,| = \ln\left|\,1+x^2\,\right| \text{ або } v = 1+x^2.$$

Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v.

Тоді $u'\left(1+x^2\right) = 1+x^2 \Rightarrow u' = 1$. Інтегруємо отримане рівняння

$$\int du = \int dx \quad \text{або } u = x + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = u \cdot v = \left(1+x^2\right)(x+C).$$

Відповідь: $y = \left(1+x^2\right)(x+C)$.

Приклад 16. Знайти частинний розв'язок ДР-1

$$2y\,dx - \left(y^2 - 6x\right)dy = 0, \; x(1) = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно x та x'. Перепишемо його у вигляді:

$$x' + \frac{3}{y}x = \frac{y}{2}, \text{ де } p(y) = \frac{3}{y} \text{ і } q(y) = \frac{y}{2}.$$

Для знаходження розв'язку ДР-1 застосуємо метод Бернуллі. Зробимо заміну: $x = u \cdot v$, $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Підставимо її в рівняння. Маємо

$$u'v + uv' + \frac{3}{y}uv = \frac{y}{2} \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + \frac{3}{y}v\right) = \frac{y}{2}.$$

Отримаємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + v\dfrac{3}{y} = 0, & (1) \\ u'v = \dfrac{y}{2}. & (2) \end{cases}$$

Розв`язком рівняння (1) є $v = \mathrm{e}^{-\int \frac{3}{y} d\,y} = \mathrm{e}^{-3\ln|y|} = y^{-3}$. Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v.

Матимемо $u' \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow d\,u = \dfrac{y^4}{2} d\,y$. Інтегруємо отримане рівняння

$$\int d\,u = \int \frac{y^4}{2} d\,y + C \quad \Rightarrow \quad u = 0{,}1 y^5 + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $x = u \cdot v = y^{-3}\left(0{,}1 y^5 + C\right)$.

Знайдемо значення C, застосовуючи початкову умову:

$$0 = 1^{-3}\left(0{,}1 \cdot 1^5 + C\right), \quad C = -0{,}1.$$

Частинний розв'язок заданого рівняння:

$$x = y^{-3}\left(0{,}1 y^5 - 0{,}1\right) = 0{,}1\, y^2 - 0{,}1\, y^{-3}.$$

Відповідь: $x = 0{,}1\, y^2 - 0{,}1\, y^{-3}$.

Приклад 17. Знайти розв'язок ДР-1

$$y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x.$$

Розв'язання. Це рівняння є лінійним відносно y і y', де $p(x) = \cos x$ і $q(x) = \sin x \cdot \cos x$.

Для знаходження розв'язку ДР-1 застосуємо метод Лагранжа. Знайдемо розв'язок відповідного лінійного однорідного ДР-1:

$$y' + y \cos x = 0.$$

Відокремимо змінні в цьому рівнянні: $\dfrac{dy}{y} = -\cos x\, d\,x$. Інтегруємо отримане рівняння: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x\, d\,x$. Матимемо $\ln|y| = -\sin x + \ln|C|$.

Звідси $y = C\mathrm{e}^{-\sin x}$. Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді: $y = C(x)\,\mathrm{e}^{-\sin x}$.

Для знаходження $C(x)$ підставимо розв'язок $y = C(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$ і похідну $y' = C'(x)\cdot\mathrm{e}^{-\sin x} - C(x)\cdot \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot\cos x$ в задане ДР-1. Матимемо $C'(x)\cdot \mathrm{e}^{-\sin x} = \sin x\cdot\cos x$ або $C'(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cdot\cos x$. Інтегруємо отриманий вираз:

$$C(x) = \int \mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cdot\cos x dx = \int \mathrm{e}^{\sin x}\sin x d\sin x = \left[\begin{array}{c|c} u = \sin x & du = d\sin x \\ dv = \mathrm{e}^{\sin x}\, d\sin x & v = \mathrm{e}^{\sin x} \end{array}\right] = \mathrm{e}^{\sin x}\sin x - \int \mathrm{e}^{\sin x}\, d\sin x = \mathrm{e}^{\sin x}\sin x - \mathrm{e}^{\sin x} + C.$$

Знайдене $C(x)$ підставимо в $y = C(x)\mathrm{e}^{-\sin x}$. Отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\mathrm{e}^{\sin x}\sin x - \mathrm{e}^{\sin x} + C\right)\mathrm{e}^{-\sin x} = \sin x - 1 + C\,\mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Відповідь: $y = \sin x - 1 + C\,\mathrm{e}^{-\sin x}$.

2.8 Диференціальні рівняння першого порядку Бернуллі

***Означення* 2.10**. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{2.42}$$

де $p(x), q(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку, n – дійсне число, відмінне від нуля $(n \neq 0)$ і одиниці $(n \neq 1)$, називається *рівнянням Бернуллі*.

Рівняння Бернуллі може бути розв'язано шляхом зведення його до лінійного. Для цього ділимо рівняння на y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = q(x). \tag{2.43}$$

Заміна $z = y^{-n+1}$ зводить рівняння до лінійного відносно z і z'. Підставимо z і $z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$ в рівняння (2.43). Тоді

$$\frac{z'}{-n+1} + p(x)z = q(x)\Big| \cdot (-n+1) \Rightarrow$$

$$z' + p(x)(-n+1)z = q(x)\cdot(-n+1).$$

Маємо лінійне ДР-1:

$$z' + p_1(x)\,z = q_1(x), \qquad (2.44)$$

де $p_1(x) = p(x)\cdot(-n+1)$, $q_1(x) = q(x)\cdot(-n+1)$.

Зробимо заміну $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u за формулами (2.37) і (2.38):

$$v = \mathrm{e}^{-\int p_1(x)dx}, \quad u = \int q_1(x)\mathrm{e}^{\int p_1(x)dx} \cdot dx + C.$$

Загальний розв’язок відносно z:

$$z = \mathrm{e}^{-\int p_1(x)dx}\left(\int q_1(x)\mathrm{e}^{\int p_1(x)\,dx} \cdot dx\right) + C. \qquad (2.45)$$

Для знаходження загального розв’язку заданого рівняння Бернуллі в отриманий розв’язок для z (2.45) підставимо $z = y^{-n+1}$ і піднесемо обидві частини рівняння до степеня $\dfrac{1}{1-n}$.

<u>Зауваження 2.6</u>. Рівняння Бернуллі може бути розв’язано методом Бернуллі, тобто підстановкою $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, аналогічно розв’язуванню лінійного ДР-1.

Приклад 18. Знайти розв’язок ДР-1 $xy' = 3y - 4x^4y^2$.

Розв’язання. Маємо ДР-1 Бернуллі. Записуємо його у вигляді:

$$y' - \frac{3}{x}y = -4x^3y^2, \text{ де } p(x) = -\frac{3}{x},\ q(x) = -4x^3,\ n = 2.$$

Зведемо його до лінійного ДР-1. Ділимо рівняння на y^2 і перейдемо до лінійного ДР-1 шляхом підстановки: $z = y^{-2+1} = y^{-1}$, $z' = -y^{-2} \cdot y'$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{z'}{-1} - \frac{3}{x} z = -4x^3 \Big| \cdot (-1).$$

Маємо лінійне ДР-1 $z' + \frac{3}{x} z = 4x^3$, де $p_1(x) = \frac{3}{x}$, $q_1(x) = 4x^3$.

Зробимо заміну: $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u за формулами (2.37) і (2.38):

$$v = \mathrm{e}^{-\int \frac{3}{x} dx} = \mathrm{e}^{-3\ln|x|} = x^{-3}, \; u = \int 4x^3\, \mathrm{e}^{\int \frac{3}{x} dx} \cdot dx + C =$$

$$= 4\int x^3\, \mathrm{e}^{3\ln|x|} \cdot dx + C = 4\int x^3 \cdot x^3 dx + C = 4\int x^6 dx + c = \frac{4}{7} x^7 + C.$$

Тоді $z = u \cdot v = x^{-3}\left(\frac{4}{7} x^7 + C\right)$. Оскільки $z = y^{-1}$, матимемо загальний розв’язок заданого рівняння Бернуллі

$$y = \left(x^{-3}\left(\frac{4}{7} x^7 + C\right)\right)^{-1} = \frac{x^3}{\frac{4}{7} x^7 + C}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{x^3}{\frac{4}{7} x^7 + C}$.

Приклад 19. Знайти частинний розв’язок ДР-1

$$x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right) dy, \quad y(0) = 1.$$

Розв’язання. Маємо ДР-1 Бернуллі відносно функції $x(y)$. Перепишемо його у вигляді

$$x' - \frac{1}{y} x = -y^3 \cdot x^{-1}, \text{ де } p(y) = -\frac{1}{y}, \; q(y) = -y^3, \; n = -1.$$

Застосуємо метод Бернуллі для знаходження загального розв’язку заданого ДР-1. Зробимо заміну $x = u \cdot v,\ x' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Підставимо її в ДР-1: $u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{1}{y} u \cdot v = -y^3 \cdot (u \cdot v)^{-1}$.

Згрупуємо другий і третій доданки в лівій частині:

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{v}{y} \right) = -y^3 \cdot (u \cdot v)^{-1}.$$

Отримаємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{y} = 0, & (1) \\ u'v = -y^3 \cdot (u \cdot v)^{-1}. & (2) \end{cases}$$

Розв`язуємо рівняння (1): $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{1}{y} dy$. Інтегруємо отримане рівняння: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{y}$. Матимемо $\ln|v| = \ln|y|$ або $v = y$.

Підставимо в рівняння (2) знайдене значення v. Тоді $u' y = -y^3 \cdot (u \cdot y)^{-1} \Rightarrow u' = -\frac{y}{u}$. Відокремлюємо змінні і Інтегруємо отримане рівняння

$$\int u\, du = -\int y\, dy \quad \text{або} \quad \frac{u^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C \ \Rightarrow\ u = \pm\sqrt{2C - y^2}.$$

Загальний розв’язок має вигляд:

$$x = u \cdot v = \pm y \sqrt{2C - y^2}.$$

Знайдемо C, застосовуючи початкову умову: $0 = \pm 1 \cdot \sqrt{2C - 1}$, $2C = 1$. Частинний розв’язок заданого рівняння Бернуллі

$$x = \pm y \sqrt{1 - y^2}.$$

Відповідь: $x = \pm y \sqrt{1 - y^2}$.

2.9 Узагальнені диференціальні рівняння першого порядку Бернуллі

***Означення* 2.11**. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x), \tag{2.46}$$

де $f(y)$ – деяка диференційована функція, називається *узагальненим рівнянням Бернуллі*.

Заміна $z = f(y)$, $z' = f'(y) \cdot y'$ призводить рівняння (2.46) до лінійного $z' + p(x)\,z = q(x)$.

Приклад 20. Знайти розв'язок ДР-1

$$y' \sin y \cdot \cos x + \cos y \cdot \sin x = x^2 .$$

Розв'язання. Маємо узагальнене рівняння Бернуллі. Записуємо його у вигляді: $y' \sin y + \cos y \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x^2}{\cos x}$. Зробимо заміну $z = \cos y$, $z' = -\sin y \cdot y'$. Підставимо її в отримане рівняння і помножимо рівняння на (-1): $-z' + z \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x^2}{\cos x} \Bigg| \cdot (-1)$. Маємо лінійне ДР-1

$$z' - z \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{x^2}{\cos x} .$$

Зробимо заміну: $z = u \cdot v$, $z' = u'v + uv'$. Знайдемо v і u за формулами (2.37) і (2.38):

$$v = \mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx} = \mathrm{e}^{-\ln|\cos x|} = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x},$$

$$u = -\int \frac{x^2}{\cos x} \mathrm{e}^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} dx = -\int \frac{x^2}{\cos x} \mathrm{e}^{\ln|\cos x|} dx = -\int \frac{x^2}{\cos x} \cos x \cdot dx + C =$$

$$= -\int x^2 \cdot dx + C = -\frac{x^3}{3} + C .$$

Тоді $z = u \cdot v = \dfrac{1}{\cos x}\left(-\dfrac{x^3}{3} + C\right)$. Оскільки $z = \cos y$, матимемо загальний інтеграл заданого узагальненого рівняння Бернуллі

$$\cos y = \frac{1}{\cos x}\left(-\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{3C - x^3}{3\cos x}.$$

Відповідь: $\cos y = \dfrac{3C - x^3}{3\cos x}$

2.10 Диференціальні рівняння першого порядку Ріккаті

***Означення* 2.12**. Диференціальне рівняння першого порядку виду

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x), \tag{2.47}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції від x і $x \in (a,b)$, $(a \geq -\infty, b \leq \infty)$, називається *загальним рівнянням Ріккаті*.

Якщо в рівнянні (2.47) $q(x) \equiv 0$, то маємо лінійне ДР-1, якщо $f(x) \equiv 0$, то маємо ДР-1 Бернуллі.

У загальному випадку рівняння Ріккаті не інтегрується у квадратурах.

Якщо відомий частинний розв'язок y_1 цього рівняння, то заміною $y = y_1 + z$, де z – нова шукана функція аргументу x, воно зводиться до рівняння Бернуллі.

Підставимо заміну в (2.47) матимемо:

$$y_1' + z' + p(x)\cdot(y_1 + z) + q(x)\cdot(y_1 + z)^2 = f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (2.47), то підстановка його в рівняння має місце тотожність $y_1' + p(x)y_1 + q(x){y_1}^2 \equiv f(x)$. Враховуючи це, матимемо

$$z' + \left(p(x) + 2q(x)y_1\right)\cdot z = -q(x)\cdot z^2.$$

Це рівняння Бернуллі відносно функції z.

Застосовуючи заміну $y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - y_1}$, рівняння Ріккаті зводиться до лінійного рівняння.

Якщо відомі два частинні розв'язки y_1 і y_2 цього рівняння, то мають місце тотожності: $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$ і $y_2' + p(x)y_2 + q(x)y_2^2 \equiv f(x)$. Тому рівняння (2.47) може бути представлено відповідно у вигляді:

$$\left(\ln(y - y_1)\right)' = -q(x)(y + y_1) - p(x), \tag{2.48}$$

$$\left(\ln(y - y_2)\right)' = -q(x)(y + y_2) - p(x). \tag{2.49}$$

Знайдемо різницю рівнянь (2.48) і (2.49). Матимемо

$\left(\ln \frac{y - y_1}{y - y_2}\right)' = q(x)(y_2 - y_1)$. Звідки $\ln \frac{y - y_1}{y - y_2} = \int q(x)(y_2 - y_1)\,dx + \ln C$ або

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C\,\mathrm{e}^{\int q(x)(y_2 - y_1)\,dx}. \tag{2.50}$$

<u>Зауваження 2.7</u>. Іноді частинний розв'язок вдається підібрати за виглядом функції $f(x)$.

Якщо рівняння Ріккаті має вигляд:

$$y' + \frac{A}{x}y + By^2 = \frac{C}{x^2}, \tag{2.51}$$

де A, B, C – сталі, причому $(1 - A)^2 + 4BC \geq 0$, то частинний розв'язок рівняння (2.51), має вигляд: $y_1 = \frac{a}{x}$, де a знаходиться шляхом підстановки y_1 в рівняння (2.51).

Частинний випадок рівняння Ріккаті має вигляд:

$$y' + By^2 = C\,x^n, \tag{2.52}$$

де n, B, C – сталі, де $x \in (a, +\infty)$.

Якщо $n = 0$, то рівняння (2.52) приймає вигляд: $y' + By^2 = C$ – ДР-1 з відокремлюваними змінними.

Якщо $n = -2$, то рівняння (2.52) приймає вигляд: $y' + By^2 = \dfrac{C}{x^2}$.

Зробимо заміну $y = \dfrac{1}{z}$. Матимемо рівняння $z' = B - C \cdot \left(\dfrac{z}{x}\right)^2$ – ДР-1 однорідне.

Крім, розглянутих випадків для n існують інші, коли рівняння (2.52) зводиться до інтегрування елементарних функцій тільки у випадку, коли $n = \dfrac{4m}{\pm 1 - 2m}$, де m – будь-яке ціле число або ∞.

Якщо $n = \dfrac{4m}{1 - 2m}$ виконується при $m > 0$, то заміна $y = \dfrac{u(x)}{x^2} + \dfrac{1}{Bx}$ приводить рівняння (2.52) до вигляду: $u' + \dfrac{Bu^2}{x^2} = C\,x^{n+2}$. Вважаючи, що $u(x) = \dfrac{t}{v(x)}$, матимемо рівняння у вигляді $v' + C\,x^{n+2} v^2 = B\,x^{-2}$, а після заміни $x^{n+3} = t$ матимемо рівняння

$$\frac{dv}{dt} + \frac{C}{n+3} v^2 = \frac{B}{n+3} t^{-\frac{n+4}{n+3}}.$$

Ці перетворення застосовуємо до тих пір, поки не отримаємо ДР-1 з відокремлюваними змінними.

Якщо $n = \dfrac{4m}{1 - 2m}$ виконується при $m < 0$, то зроблені перетворення треба виконувати в зворотному порядку.

Приклад 21. Знайти розв’язок ДР-1 $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті. Записуємо його у вигляді $y' - \dfrac{2x+1}{x}y + \dfrac{1}{x}y^2 = -x$. Функція в правій частині $f(x) = -x$ – многочлен першого степеня. Частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $y_1 = ax + b$ (згідно Зауваження 2.6). Підставимо в задане рівняння $y_1 = ax + b$ і $y_1' = a$:

$$xa - (2x+1)\cdot(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2 \text{ або}$$
$$x^2\left(a^2 - 2a\right) + x(2ab - 2b) + b^2 - b = -x^2.$$

Записуємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів a і b:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a^2 - 2a = -1 \\ x^1 & 2ab - 2b = 0 \\ x^0 & b^2 - b = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \\ b = 0 \end{cases}$$

Система сумісна. Частинний розв'язок $y_1 = x$. В заданому рівнянні робимо підстановку $y = y_1 + z = x + z$, $y' = 1 + z'$. Рівняння матиме вигляд $x(1+z') - (2x+1)\cdot(x+z) + (x+z)^2 = -x^2$. Розкриємо дужки і приведемо подібні. Матимемо $xz' - z = -z^2$ – рівняння Бернуллі. Розв'яжемо його методом Бернуллі. Зробимо підстановку: $z = u \cdot v,\ z' = u'v + uv'$. Маємо $x\left(u'v + uv'\right) - u \cdot v = -u^2 \cdot v^2$ або $xu'v + u\cdot(v'x - v) = -u^2 \cdot v^2$. Знайдемо розв'язок цього рівняння, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Отримаємо систему двох ДР-1 з відокремлюваними змінними $\begin{cases} v'x - v = 0, & (1) \\ u'vx = -u^2 \cdot v^2. & (2) \end{cases}$ З рівняння (1) матимемо $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v}{x} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow n|\,v\,| = \ln|\,x| \Rightarrow v = x$. З рівняння (2) матимемо

$$u'x^2 = -u^2x^2 \Rightarrow -\frac{du}{u^2} = dx \Rightarrow -\int \frac{du}{u^2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{u} = x + C \Rightarrow u = \frac{1}{x+C}.$$

Тоді $z = u \cdot v = \dfrac{x}{x+C}$. Загальний розв'язок заданого ДР-1

$$y = x + \frac{x}{x + C}.$$

Відповідь: $y = x + \dfrac{x}{x + C}$.

Приклад 22. Знайти розв'язок ДР-1 $y' + y^2 = -x^{-4}$.

Розв'язання. Маємо частинний випадок рівняння Ріккаті. Оскільки $n = -4$, а $m = 1 > 0$, то зробимо заміну $y = \dfrac{u}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

Отримаємо рівняння $u' + \dfrac{u^2}{x^2} = -x^{-2}$ або $x^2 u' = -\left(1 + u^2\right)$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та знайдемо інтеграли від обох його частин:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + C \Rightarrow \operatorname{arctg} u = \frac{1}{x} + C \Rightarrow u = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + C\right).$$

Зробимо зворотну заміну: $u = x^2 y - x$. Отримаємо загальний інтеграл заданого ДР-1 $x^2 y - x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x} + C\right)$. Загальний розв'язок ДР-1

$$y = \frac{1}{x^2}\left(x + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} + C\right)\right).$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{x^2}\left(x + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x} + C\right)\right)$.

2.11 Диференціальні рівняння першого порядку в повних диференціалах

<u>Означення</u> **<u>2.13</u>**. Диференціальне рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (2.53)$$

називається *ДР-1 у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто рівняння може бути записане $du(x, y) = 0$. Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах: $u(x, y) = C$.

<u>Теорема 2.2</u> Нехай функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ неперервні в однозв'язній області D. Для того, щоб у цій області вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, необхідно і достатньо, щоб у всіх точках цієї області справджувалась рівність: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

ДР-1 в повних диференціалах може бути розв'язане двома способами.

<u>Перший спосіб</u>. Оскільки ліва частина рівняння є повним диференціалом функції $u(x, y)$, то

$$P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Знайдемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y), \qquad (2.54)$$

де $\varphi(y)$ – невідома функція аргументу y. Знаходимо її з умови, що $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$. Матимемо $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx + \varphi(y)\right) = Q(x, y)$.

Звідси випливає, що

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx. \qquad (2.55)$$

Знайдемо

$$\varphi(y) = \int\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right)dy$$

і підставимо у вираз (2.53). Загальний інтеграл ДР-1 у повних диференціалах має вигляд:

$$\int P(x, y)\,dx + \int\left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx \right)dy = C\ . \qquad (2.56)$$

Другий спосіб. Якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом, то криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,d\,x + Q(x, y)\,d\,y$$

не залежить від шляху інтегрування і загальний інтеграл ДР-1 в повних диференціалах можна знайти за однією із двох формул:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = C \qquad (2.57)$$

або

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy = C\ , \qquad (2.58)$$

де точка $M_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. Зручно в якості точки $M_0(x_0, y_0)$ вибирати одну з точок: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ за змістом.

Приклад 23. Знайти розв'язок ДР-1

$$(2x\sin\ y - \sin\ x \cdot y^2)dx + \left(x^2\cos y + 2y\cos x + 1\right)dy = 0\ .$$

Розв'язання. Перевіримо, що вираз в лівій частині рівняння є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Позначимо

$$P(x, y) = 2x\sin\ y - y^2\sin\ x\ ,\ Q(x, y) = x^2\cos y + 2y\cos x + 1\ .$$

Знайдемо $P'_y = 2x\cos y - 2y\sin\ x$, $Q'_x = 2x\cos y - 2y\sin\ x$. Маємо $P'_y = Q'_x$. Задане рівняння є ДР-1 в повних диференціалах. Знайдемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) = \int (2x\sin\ y - y^2\sin\ x)dx + \varphi(y) =$$

$$= x^2 \sin y + y^2 \cos x + \varphi(y).$$

Диференціюємо знайдений вираз функції $u(x, y)$ по y:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^2 \cos y + 2y \cos x + \phi'(y).$$

З умови $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$ матимемо:

$$x^2 \cos y + 2y \cos x + \phi'(y) = x^2 \cos y + 2y \cos x + 1.$$

Звідси $\phi'(y) = 1$. Тоді $\varphi(y) = \int \varphi'(y)\, dy = \int dy = y + C$. Загальний інтеграл заданого ДР-1 в повних диференціалах має вигляд:

$$x^2 \sin y + y^2 \cos x + y = C.$$

Відповідь: $x^2 \sin y + y^2 \cos x + y = C$.

Приклад 24. Знайти розв'язок ДР-1

$$(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, що вираз в лівій частині рівняння є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Позначимо

$$P(x, y) = u'_x = x + y, \quad Q(x, y) = u'_y = x + 2y.$$

Знайдемо $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ виконується. Задане рівняння є ДР-1 в повних диференціалах. Розв'яжемо його застосувавши формулу (2.57). Як точку $M_0(x_0, y_0)$ візьмемо точку $O(0, 0)$. Тоді $P(x, y_0) = P(x, 0) = x + 0 = x$. Маємо

$$\int_0^x x\, dx + \int_0^y (x + 2y)dy = C \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x + \left.\left(x y + y^2\right)\right|_0^y = C.$$

Підставимо межі інтегрування. Загальний інтеграл заданого ДР-1 в повних диференціалах має вигляд: $\frac{x^2}{2} + yx + y^2 = C$.

Відповідь: $\frac{x^2}{2} + yx + y^2 = C$.

2.12 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно y'

Означення 2.14. Диференціальне рівняння першого порядку, не розв’язане відносно y' має вигляд

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.59}$$

Означення 2.15. Функція $y = \varphi(x)$, що має неперервну похідну та перетворює рівняння (2.59) у тотожність, називається *розв'язком* цього рівняння.

Розв’язок може бути задано в неявній формі $\phi(x, y) = 0$ і в параметричній формі $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$

В загальному випадку диференціальне рівняння (2.59) не вдається розв’язати відносно y' в елементарних функціях. В цих випадках шукають сімейство інтегральних кривих у вигляді

$$\varphi(x, y, C) = 0, \tag{2.60}$$

яке називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння (2.59).

Якщо сімейство інтегральних кривих задано у вигляді

$$y = \varphi(x, C), \tag{2.61}$$

то воно називається *загальним розв’язком* диференціального рівняння (2.59).

Сімейство інтегральних кривих, знайдене в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \psi(t, C) \end{cases} \tag{2.62}$$

будемо називати *загальним розв’язкам* диференціального рівняння в параметричній формі.

Теорема 2.3 (існування та єдиності розв'язків для рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно y'). Розглянемо рівняння (2.59). Нехай функція $F(x, y, y')$ в околі точки (x_0, y_0, y_0'), де y_0' – один з коренів рівняння $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, неперервна по x і неперервно диференційована по y і y', а її похідна $\frac{\partial}{\partial y'} F(x_0, y_0, y_0') \neq 0$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$, визначений в достатньо малому околі точки x_0, для якого $\varphi'(x_0) = y_0'$.

Як і рівняння, що розв'язані відносно похідної, рівняння виду (2.59) можуть мати особливі розв'язки, тобто такі розв'язки, відповідна інтегральна крива яких повністю складається з точок неєдиності.

***Означення* 2.16**. Розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2.59) називається *особливим*, якщо через кожну його точку, крім цього розв'язку, проходить і інший розв'язок, що має в цій точці ту саму дотичну, що і розв'язок $y = \varphi(x)$, але не співпадає з ним у як завгодно малому околу цієї точки.

Це означає, що у точках особливого розв'язку порушується теорема про єдиність розв'язку задачі Коші.

2.12.1 Знаходження особливого розв'язку рівняння $F(x, y, y') = 0$

Розглянемо методи знаходження особливого розв'язку рівняння (2.59).

1) ***Перший метод*** полягає в знаходженні p-дискримінантної кривої рівняння (2.59).

Якщо функція $F(x, y, y')$ неперервна і неперервно диференційована по y і y', то особливий розв'язок рівняння (2.59), якщо він існує, задовольняє системі рівнянь:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Для знаходження особливого розв'язку рівняння (2.59) необхідно вилучити y' з системи (2.63).

Ліва частина другого рівняння системи (2.60) є похідною по y' від лівої частини першого рівняння цієї системи. Підсумком розв'язування системи (2.63) є рівняння

$$\Psi(x, y) = 0, \tag{2.64}$$

яке визначає одну або кілька *дискримінантних кривих* і називається *дискримінантним рівнянням*.

Дискримінантна крива містить усі точки порушення єдиності, але може містити деякі інші точки. Для кожної гілки дискримінантної кривої (якщо їх кілька) потрібно перевірити, чи вона є розв'язком рівняння (2.59) і в тому випадку, якщо є, перевірити, чи буде цей розв'язок особливим. Тобто особливим розв'язком рівняння (2.59) можуть бути лише функції, що визначаються рівнянням (2.64).

Система рівнянь (2.64) частіше записується у вигляді

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \quad y' = p, \\ \dfrac{\partial}{\partial p} F(x, y, p) = 0. \end{cases} \tag{2.65}$$

Рівняння системи (2.64) визначають одну або кілька кривих, які називаються p*-дискримінантними кривими* рівняння (2.59). Кожний особливий розв'язок рівняння є дискримінантною кривою цього рівняння. Однак зворотне твердження неправильне: не всяка дискримінантна крива є особливим розв'язком.

<u>Теорема 2.4</u>. Якщо функція $y = \varphi(x)$ є особливим розв'язком рівняння (2.59), то вона задовольняє систему рівнянь (2.65).

<u>Означення 2.17</u>. Інтегральна крива, що відповідає особливому розв’язку, називається *особливою інтегральною кривою*.

Для знаходження особливих розв’язків потрібно знайти всі дискримінантні криві рівняння (2.59), вилучивши із системи (2.65) параметр p, і для кожної кривої перевірити:

1) чи є вона розв’язком рівняння (2.59);

2) чи дотикаються її в кожній точці інші розв’язки.

Ця крива буде особливим розв’язком, якщо отримані позитивні відповіді на обидва питання.

<u>Зауваження 2.8</u>. Криві $y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ дотикаються в точці з абсцисою x_0, якщо виконано усі *умови дотикання*:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \qquad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{2.66}$$

Якщо сімейство розв’язків записана у параметричному вигляді, виконання умов дотикання перевіряється аналогічно. При цьому треба врахувати, що $y' = p$.

2) ***Другий метод*** пов'язаний з поняттям обвідної.

Припустимо, що загальний інтеграл рівняння (2.59) подано у вигляді (2.60).

<u>Означення 2.18</u>. *Обвідною сімейства кривих* $\varphi(x, y, C) = 0$ називається крива, яка в кожній своїй точці дотикається деякої кривої даного сімейства і кожного відрізка якої дотикається нескінчена множина кривих, що задовольняють умові: криві γ_1 і γ_2 дотикаються в точці M_0, якщо в ній мають спільну дотичну.

З означення слідує, що обвідна сімейства інтегральних кривих рівняння (2.59) завжди буде особливою інтегральною кривою. Знаючи сімейство інтегральних кривих (2.60) рівняння (2.59), можна визначити його особливі розв’язки шляхом знаходження обвідної.

Якщо функція $\varphi(x, y, C)$ має неперервні перші похідні, то для знаходження обвідної необхідно виключити C з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C}\varphi(x, y, C) = 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

та перевірити, чи буде отримана C -дискримінантна крива $\Psi(x, y) = 0$ обвідною, тобто чи дотикаються її у кожній точці інші криві сімейства. Для цього з кривої $\Psi(x, y) = 0$ вилучаємо ті точки, в яких одночасно $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ і $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ Та частина дискримінантної кривої, що залишилась, і є обвідною сімейства інтегральних кривих, тобто особливим розв'язком рівняння (2.59).

Одним з методів розв'язування рівняння (2.59) є метод введення параметру.

2.12.2 Метод введення параметру

Це стосується випадків, коли рівняння (2.59) розв'язане відносно x або y.

1) ***Диференціальні рівняння, розв'язані відносно шуканої функції***

Нехай рівняння (2.59) зводиться до вигляду:

$$y = f(x, y'). \tag{2.68}$$

За параметри приймають x і $y' = p$. Застосовуючи $dy = p\,dx$ матимемо

$$y = f(x, p), \qquad \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}dp = p\,dx$$

або

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{2.69}$$

Розв'язуємо рівняння (2.64) відносно $\frac{dp}{dx}$. Інтегруючи його, знайдемо $\varphi(x, p, C) = 0$. Система рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x, p, C) = 0, \\ y = f(x, p) \end{cases} \tag{2.70}$$

визначає сімейство інтегральних кривих рівняння (2.69).

<u>Зауваження 2.9</u>. Виключаючи змінну p з системи (2.70) отримаємо загальний інтеграл $\varphi(x, y, C) = 0$ рівняння (2.68) без подальшого інтегрування.

2) Диференціальні рівняння, *розв'язані* відносно незалежної змінної

Нехай рівняння (2.59) зводиться до вигляду:

$$x = f(y, y'). \tag{2.71}$$

За параметри приймають y і $y' = p$. Застосовуючи $dy = p\,dx$ матимемо

$$x = f(y, p), \qquad \frac{\partial f(x, p)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} dp = \frac{dy}{p}$$

або

$$\frac{\partial f(x, p)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p}. \tag{2.72}$$

Розв'язуємо рівняння (2.67) відносно $\frac{dp}{dy}$. Інтегруючи його, знайдемо $\varphi(y, p, C) = 0$. Система рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(y, p, C) = 0, \\ x = f(y, p) \end{cases} \tag{2.73}$$

визначає сімейство інтегральних кривих рівняння (2.71).

Рівняння (2.72), розв'язане відносно похідної, можна отримати, диференціюючи обидві частини рівняння (2.71) по змінній y, враховуючи, що $\dfrac{dy}{dx}=p \Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{p}$.

Рівняння виду (2.68) і (2.71) можуть мати також особливі розв'язки, для кожної точки яких порушується єдиність розв'язку. Для знаходження особливого розв'язку рівняння (2.68) необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y=f\left(x,y'\right), \\ \dfrac{\partial f\left(x,y'\right)}{\partial y'}=0. \end{cases} \qquad (2.74).$$

Для знаходження особливого розв'язку рівняння (2.71) записується система

$$\begin{cases} x=f\left(y,y'\right), \\ \dfrac{\partial f\left(y,y'\right)}{\partial y'}=0. \end{cases} \qquad (2.75).$$

Виключення з систем (2.74) або (2.75) змінної y' призводить до залежності між змінними x та y, яка може виявитися особливим розв'язком вихідного рівняння, а може й ні. Для підтвердження чи спростування того, що маємо особливий розв'язок, треба безпосередньо підставити отриманий розв'язок у вихідне рівняння.

Приклад 25. Знайти розв'язки ДР-1 $y=\left(x+1\right)y'-\left(y'\right)^2$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (2.68). Позначимо $y'=p$. Задане рівняння матиме вигляд $y=\left(x+1\right)p-p^2$. Диференціюємо його по x: $y'=p+\left(x+1\right)p'-2p\cdot p'$. Враховуючи $y'=p$, матимемо

$$p=p+\left(x+1\right)p'-2p\cdot p' \Rightarrow p'\cdot\left(x+1-2p\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p'=0, \\ x+1=2p. \end{array}\right.$$

Маємо два випадки:

а) $p'=0 \Rightarrow p=C$. Загальний розв'язок заданого рівняння може бути знайдений з системи:

$$\begin{cases} p=C, \\ y=(x+1)p-p^2 \end{cases} \Rightarrow y=(x+1)C-C^2.$$

б) $x+1=2p \Rightarrow x=2p-1$. Розв'язок заданого рівняння в цьому випадку записується параметрично у вигляді системи:

$$\begin{cases} x=2p-1, \\ y=(x+1)p-p^2 \end{cases}.$$

Виключаємо p із системи. Отримуємо розв'язок $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$, Перевіримо, чи є він особливим, тобто задовольняє він систему (2.74), записану для заданого рівняння: $\begin{cases} y=(x+1)y'-(y')^2, \\ x+1-2y'=0. \end{cases}$ Розв'яжемо її.

Її розв'язок $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$, який співпадає з знайденим.

Відповідь: $y=(x+1)C-C^2$, $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

Приклад 26. Знайти розв'язки ДР-1 $(y')^3-2xyy'+4y^2=0$.

Розв'язання. Розв'язуємо рівняння відносно x: $x=\frac{(y')^2}{2y}+\frac{2y}{y'}$.

Маємо рівняння виду (2.71). Позначимо $y'=p$. Тоді рівняння матиме вигляд $x=\frac{p^2}{2y}+\frac{2y}{p}$. Враховуючи, що $dy=p\,dx$ і $dx=x'_p dp+x'_y dy$, знайдемо $dy=p\left(\left(\frac{p}{y}-\frac{2y}{p^2}\right)dp+\left(-\frac{p^2}{2y^2}+\frac{2}{p}\right)dy\right)$ або

$$\left(\frac{p^2}{y}-\frac{2y}{p}\right)dp+\left(-\frac{p^3}{2y^2}+1\right)dy=0 \Rightarrow \frac{p^3-2y^2}{yp}dp-\frac{p^3-2y^2}{2y^2}dy=0.$$

Винесемо спільний множник за дудки: $\dfrac{p^3-2y^2}{y}\left(\dfrac{dp}{p}-\dfrac{dy}{2y}\right)=0$.

Тоді $\left[\begin{array}{l}\dfrac{p^3-2y^2}{y}=0,\\ \dfrac{dp}{p}-\dfrac{dy}{2y}=0.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p^3-2y^2=0,\\ \displaystyle\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{2y}.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}p=\sqrt[3]{2y^2},\\ p=C\sqrt{y}.\end{array}\right.$

Маємо два випадки:

а) $\begin{cases}p=\sqrt[3]{2y^2},\\ x=\dfrac{p^2}{2y}+\dfrac{2y}{p}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\sqrt[3]{2y^2},\\ x=\dfrac{\sqrt[3]{4y^4}}{2y}+\dfrac{2y}{\sqrt[3]{2y^2}}\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{y}\Rightarrow y=\dfrac{2}{27}x^3$.

Отримали розв'язок $y=\dfrac{2}{27}x^3$. Перевіримо, чи є він є особливим.

Записуємо систему (2.75) для заданого рівняння та розв'язуємо її.

$$\begin{cases}x=\dfrac{(y')^2}{2y}+\dfrac{2y}{y'},\\ \dfrac{y'}{y}-\dfrac{2y}{(y')^2}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{(y')^2}{2y}+\dfrac{2y}{y'},\\ (y')^3=2y^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\left(\sqrt[3]{2y^2}\right)^2}{2y}+\dfrac{2y}{\sqrt[3]{2y^2}},\\ y'=\sqrt[3]{2y^2}.\end{cases}$$

$$x=\frac{\left(\sqrt[3]{2y^2}\right)^2}{2y}+\frac{2y}{\sqrt[3]{2y^2}}=\frac{3y}{\sqrt[3]{2y^2}}=\frac{3\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow y=\frac{2}{27}x^3.$$

Отримали розв'язок, який співпадає зі знайденим. Особливим розв'язком також є $y=0$.

б) Загальний розв'язок заданого рівняння може бути знайдений з системи:

$$\begin{cases}p=C\sqrt{y}\ \ (y>0),\\ x=\dfrac{p^2}{2y}+\dfrac{2y}{p}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=C\sqrt{y},\\ x=\dfrac{C^2}{2}+\dfrac{2\sqrt{y}}{C}.\end{cases}\Rightarrow\sqrt{y}=\frac{Cx}{2}-\frac{C^3}{4}.$$

Загальний розв'язок рівняння $y = \left(\frac{Cx}{2} - \frac{C^3}{4}\right)^2 = \frac{C^2}{16}\left(2x - C^2\right)^2$.

Відповідь: $y = \frac{C^2}{16}\left(2x - C^2\right)^2$, $y = \frac{2}{27}x^3$, $y = 0$.

Приклад 27. Знайти розв'язки ДР-1 $\frac{1}{4}(y')^2 - y' + y = 2x - 3$ і дослідити його особливий розв'язок.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $F(x, y, y') = 0$:
$\frac{1}{4}(y')^2 - y' + y - 2x + 3 = 0$, де $F(x, y, y') = \frac{1}{4}(y')^2 - y' + y - 2x + 3$.

Знайдемо $\frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = \frac{1}{2}y' - 1$. Тоді система (2.63) матиме вигляд

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(y')^2 - y' + y - 2x + 3 = 0, \\ \frac{1}{2}y' - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2, \\ y' = 2. \end{cases} \Rightarrow$$

$y = 2x - 2$ – дискримінантна крива. Перевіримо чи буде вона особливим розв'язком. Підставимо $y = 2x - 2$ у задане рівняння, розв'язавши його відносно y:

$$\frac{1}{4}2^2 - 2 + 2x - 2 = 2x - 3 \Rightarrow 2x - 3 = 2x - 3.$$

Отримали тотожність. $y = 2x - 2$ – розв'язок заданого рівняння. Перевіряємо, чи торкається пряма $y = 2x - 2$ в кожній її точці інших інтегральних кривих вихідного рівняння.

Записуємо задане рівняння у вигляді: $y = 2x - 3 - \frac{1}{4}(y')^2 + y'$.

Введемо параметр $p = y'$. Тоді $y = 2x - 3 - \frac{1}{4}p^2 + p$. Знайдемо $dy = 2dx - \frac{1}{2}pdp + dp$. Оскільки $dy = p\,dx$, матимемо

$$pdx = 2dx - \left(\frac{1}{2}p - 1\right)dp \Rightarrow (p-2)dx = -\frac{1}{2}(p-2)dp \text{ або } \left[\begin{array}{l} p = 2, \\ dx = -\frac{1}{2}dp. \end{array}\right.$$

З другого рівняння $x = -\frac{1}{2}p + C$. Розв'язками заданого рівняння є: $y = 2x - 2$ і $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}p + C, \\ y = 2x - 3 - \frac{1}{4}p^2 + p. \end{cases}$ Виключимо параметр p із системи: $\begin{cases} p = 2(C - x), \\ y = 2x - 3 - (C - x)^2 + 2(C - x) \end{cases} \Rightarrow y = 2C - 3 - (C - x)^2$.

Перевіримо виконання умов дотикання (2.66). У даному випадку $y_1 = 2x - 2$ і $y_2 = 2C - 3 - (C - x)^2$. Припустимо, що прямі y_1 і y_2 дотикаються в точці з абсцисою x_0. Тоді матимемо:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2 = 2C - 3 - (C - x_0)^2, \\ 2 = 2(C - x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 2(1 + x_0) - 3 - (1 + x_0 - x_0)^2 \\ C = 1 + x_0 \end{cases}.$$

Перше рівняння є тотожність $(-2 = -2)$, яка справедлива для будь-якого x_0.

Це означає, що для будь-якого значення x_0 пряма $y = 2x - 2$ у точці з абсцисою x_0 дотикається однієї з парабол $y = 2C - 3 - (C - x)^2$, саме тієї, для якої $C = 1 + x_0$. Отже, $y = 2x - 2$ – особливий розв'язок.

Відповідь: $y = 2C - 3 - (C - x)^2$, $y = 2x - 2$ – особливий розв'язок.

Приклад 28. Знайти особливі розв'язки ДР-1 $(xy' + y)^2 = y^2 y'$, якщо кожна з гіпербол $y(C - x) = C^2$ є інтегральною кривою цього рівняння.

Розв'язання. Для знаходження обвідної складемо систему рівнянь (2.67):

$$\begin{cases}\varphi(x,y,C)=C^2-y(C-x)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial C}\varphi(x,y,C)=2C-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-y\left(\dfrac{y}{2}-x\right)=0,\\ C=\dfrac{y}{2}.\end{cases}$$

Тоді $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}+xy=0 \Rightarrow y\left(x-\dfrac{y}{4}\right)=0 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=4x$. Обидві вітки $y=0,\ y=4x$ дискримінантної кривої є інтегральними кривими. Перевіримо чи вони обвідними даної сім'ї гіпербол.

Пряма $y=0$ в точці $(x_0;\,0)$ перетинається з однією з гіпербол даної сім'ї $y=\dfrac{C^2}{C-x}$, для якої $C=\dfrac{0}{2}=0$, а саме в точці $(x_0;\,0)$. Пряма $y=0$ є обвідною даної сім'ї гіпербол, а тому є особливим розв'язком заданого рівняння.

Пряма $y=4x$ в точці $(x_0;\,4x_0)$ перетинається з однією з гіпербол даної сім'ї $y=\dfrac{C^2}{C-x}$, а саме з тією, для якої $C=2x_0$, тобто з гіперболою $y=\dfrac{4(x_0)^2}{2x_0-x}$. Похідна від цієї функції $y'=\dfrac{4(x_0)^2}{(2x_0-x)^2}$ в точці $x=x_0$ дорівнює 4. Пряма $y=4x$ в цій точці дотикається гіперболи і є обвідною даної сім'ї гіпербол, а тому є особливим розв'язком заданого рівняння.
Відповідь: $y=0,\ y=4x$.

2.12.3 Окремі випадки диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно y'

1) ***Диференціальні рівняння, що допускають розкладання на множники***

Розглянемо рівняння (2.59). Припустимо, що вдалося знайти все корені рівняння цього рівняння щодо y', наприклад, n коренів. Тоді рівняння (2.59) буде еквівалентно кільком (за кількістю знайдених коренів) рівнянням виду

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), . \tag{2.76}$$

де $f_i(x, y)$ – дійсні функції від x та y. Інтегрування рівняння (2.59) зводиться до інтегрування рівнянь (2.76).

***<u>Означення</u>* <u>2.19</u>**. Сукупність загальних інтегралів рівнянь (2.76) називають *загальним інтегралом* рівняння (2.59).

Якщо хоч одне з рівнянь (2.76) має особливі розв'язки, вони будуть особливим розв'язками і для рівняння (2.59).

Приклад 29. Знайти розв'язки ДР-1 $xy(y')^2 + (y^2 + x^2)y' + xy = 0$.

Розв'язання. Для зручності позначимо $y' = p$. Отримаємо квадратне рівняння відносно p: $xyp^2 + (y^2 + x^2)p + xy = 0$. Знайдемо корені цього рівняння. $D = (y^2 + x^2)^2 - 4x^2y^2 = (y^2 - x^2)^2$, $\sqrt{D} = y^2 - x^2$. Маємо $p_{1,2} = \dfrac{-(y^2 + x^2) \pm (y^2 - x^2)}{2xy}$ і

$$p_1 = \frac{-(y^2 + x^2) + (y^2 - x^2)}{2xy} = -\frac{x}{y}, \; p_2 = \frac{-(y^2 + x^2) - (y^2 - x^2)}{2xy} = -\frac{y}{x}.$$

Або $\left[\begin{array}{ll} y' = -\dfrac{x}{y}, & (1) \\ y' = -\dfrac{y}{x}. & (2) \end{array}\right.$ З рівняння (1): $\int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{C}{2}$.

Тоді $y^2 + x^2 = C$. З рівняння (2): $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln x + \ln C$.

Тоді $yx = C$.

Відповідь: $y^2 + x^2 = C$, $yx = C$.

Приклад 30. Знайти розв'язки ДР-1

$$(y')^3 - y(y')^2 - x^2y' + x^2y = 0.$$

Розв'язання. Для зручності позначимо $y' = p$. Матимемо кубічне рівняння відносно p: $p^3 - yp^2 - x^2 p + x^2 y = 0$. Знайдемо корені цього рівняння. $p^2(p-y) - x^2(p-y) = 0 \Rightarrow (p-y)\cdot\left(p^2 - x^2\right) = 0$ або

$$\left[\begin{array}{l} p = y, \\ p = \pm x. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y' = y, \\ y' = \pm x. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} = dx, \\ dy = \pm x dx. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln|y| = x + \ln C, \\ y = \pm\dfrac{x^2}{2} + C. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = Ce^x, \\ y = \pm\dfrac{x^2}{2} + C. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} y = Ce^x, \\ y = \pm\dfrac{x^2}{2} + C. \end{array}\right.$

2) ***Диференціальні рівняння, що не містять*** x **і** y

Тоді рівняння (2.59) матиме вигляд:

$$F(y') = 0. \tag{2.77}$$

У рівнянні (2.77) похідна y' є сталою. Знаходимо корені рівняння $F(a_k) = 0$. Воно може мати скінчену або нескінчену кількість дійсних розв'язків. Для кожного кореня a_k матимемо: $y' = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Інтегруємо рівняння: $y = \int a_k dx + C = a_k x + C$.

Отримали загальний розв'язок рівняння (2.77) у вигляді:

$$y = a_k x + C \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.78}$$

де k – кількість коренів рівняння $F(a_k) = 0$.

З рівняння (2.78) матимемо $a_k = \dfrac{y - C}{x}$. Отже, загальний інтеграл рівняння (2.69) має вигляд:

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{2.79}$$

Приклад 31. Знайти розв'язки ДР-1

$$(y')^3 + 2(y')^2 - y' + 3 = 0.$$

Розв'язання. Маємо рівняння виду (2.77). Загальний інтеграл рівняння знаходимо за формулою (2.78). Матимемо

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+2\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-\frac{y-C}{x}+3=0$$

або $(y-C)^3+2x(y-C)^2-x^2(y-C)+3x^3=0$.

Відповідь: $(y-C)^3+2x(y-C)^2-x^2(y-C)+3x^3=0$.

Приклад 32. Знайти розв'язки ДР-1

$$(y')^3+2(y')^2+3=0.$$

Розв'язання. Згідно формули (2.79) загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+2\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+3=0 \text{ або } (y-C)^3+2x(y-C)^2+3x^3=0.$$

Знайдемо розв'язки, які входять до нього. Розв'язуємо рівняння $(a_k)^3+2(a_k)^2+3=0$. Коренями цього рівняння є $a_1=-1$ і $a_{2,3}=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\cdot i}{2}$.

Тому в загальний інтеграл, крім дійсного розв'язку $y=-x+C$, входять розв'язки комплексних диференціальних рівнянь $y'=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\cdot i}{2}$.

Відповідь: $(y-C)^3+2x(y-C)^2+3x^3=0$, $y=-x+C$, $y'=\dfrac{1\pm\sqrt{11}\cdot i}{2}$.

3) ***Диференціальні рівняння, що не містять*** x **або** y

1. Нехай рівняння (2.59) не містить x, тобто має вигляд:

$$F(y,y')=0. \qquad (2.80)$$

Якщо його можна розв'язати відносно y', то матимемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' = f(y). \tag{2.81}$$

Якщо його можна розв'язати відносно y, то матимемо рівняння:

$$y = f(y'). \tag{2.82}$$

Покладемо $y' = p$. Матимемо $y = f(p)$. Диференціюємо рівняння по x: $\frac{dy}{dx} = p = f'(p) \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{f'(p)dp}{p} = dx$. Інтегруємо отримане рівняння:

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C, \qquad y = f(p). \tag{2.83}$$

Якщо рівняння кривої $F(y, p) = 0$ задано в параметричному вигляді: $\begin{cases} y = \varphi(t), \\ p = \psi(t), \end{cases}$ то диференціюючи перше співвідношення по t, матимемо $p \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Rightarrow dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$. Інтегруємо отримане рівняння:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \qquad y = \varphi(t). \tag{2.84}$$

2. Нехай рівняння (2.59) не містить y, тобто має вигляд:

$$F(x, y') = 0. \tag{2.85}$$

Якщо його можна розв'язати відносно y', то матимемо рівняння

$$y' = f(x), \tag{2.86}$$

тоді

$$y = \int f(x) dx + C. \tag{2.87}$$

Якщо його можна розв'язати відносно x, то матимемо рівняння:

$$x = f\left(y'\right). \qquad (2.88)$$

Покладемо $y' = p$. Матимемо $x = f\left(p\right)$. Враховуючи, що $d\,y = p\,d\,x$, отримаємо:

$$x = f\left(p\right), \qquad y = \int p\,f'\left(p\right)d\,p + C. \qquad (2.89)$$

Якщо рівняння кривої $F\left(x, p\right) = 0$ задано в параметричному вигляді: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ p = \psi(t), \end{cases}$ то, аналогічно попередньому випадку параметрично заданої кривої, матимемо:

$$x = \varphi\left(t\right), \qquad y = \int \psi\left(t\right)\cdot \varphi'\left(t\right)dt + C\,.. \qquad (2.90)$$

Приклад 33. Знайти розв'язки ДР-1 $y' + 1 = \mathrm{e}^{y}$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (2.80). Розв'яжемо його відносно y: $y = \ln\left(y' + 1\right)$. Покладемо $y' = p$. Матимемо $y = \ln\left(p + 1\right)$. Знайдемо y': $y' = \dfrac{1}{p+1}p'$. Перепишемо рівняння у вигляді: $p = \dfrac{1}{p+1}\dfrac{d\,p}{dx}$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо: $\int dx = \int \dfrac{1}{p\left(p+1\right)}d\,p$. Матимемо $x + \ln C = \ln\left|\dfrac{p}{p+1}\right| \Rightarrow \dfrac{p}{p+1} = C\,\mathrm{e}^{x} \Rightarrow p = \dfrac{C\,\mathrm{e}^{x}}{1 - C\,\mathrm{e}^{x}}$. Підставимо знайдене значення p в $y = \ln\left(p+1\right)$:

$y = \ln\left(\dfrac{C\,\mathrm{e}^{x}}{1 - C\,\mathrm{e}^{x}} + 1\right) = \ln\dfrac{C\,\mathrm{e}^{x} + 1 - C\,\mathrm{e}^{x}}{1 - C\,\mathrm{e}^{x}} = \ln\dfrac{1}{1 - C\,\mathrm{e}^{x}} = -\ln\left(1 - C\,\mathrm{e}^{x}\right)$ або $\mathrm{e}^{-y} = 1 - C\,\mathrm{e}^{x}$.

Відповідь: $\mathrm{e}^{-y} = 1 - C\,\mathrm{e}^{x}$.

Приклад 34. Знайти розв’язки ДР-1 $x=(y')^3-y'+2$.

Розв’язання. Маємо рівняння виду (2.85), яке розв’язано відносно x. Покладемо $y'=p$. Матимемо $x=p^3-p+2$. Знайдемо $dx=\left(3p^2-1\right)dp$. Враховуючи, що $dy=pdx$, отримаємо: $dy=p\left(3p^2-1\right)dp=\left(3p^3-p\right)dp$. Інтегруємо рівняння:

$$y=\int\left(3p^3-p\right)dp+C=\frac{3}{4}p^4-\frac{1}{2}p^2+C.$$

Загальний розв’язок заданого рівняння

$$x=p^3-p+2, \qquad y=\frac{3}{4}p^4-\frac{1}{2}p^2+C.$$

Відповідь: $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{1}{2}p^2+C$.

4) ***Диференціальні рівняння однорідні***

Нехай функція $F(x,y,p)$, де $p=y'$, однорідна виміру k відносно x і y, тобто

$$F(tx,ty,p)=t^kF(x,y,p). \tag{2.91}$$

Тоді рівняння $F(x,y,p)=0$ може бути записано у вигляді:

$$x^kf\left(\frac{y}{x},p\right)=0. \tag{2.92}$$

Якщо p виражається через $\frac{y}{x}$: $p=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, то матимемо однорідне рівняння, розглянуте в п. 2.5.

Якщо $\frac{y}{x}$ виражається через p: $y=x\varphi(p)$, то диференціюючи це рівняння по x, матимемо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно x, де p – незалежна змінна:

$$p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\frac{dp}{dx}. \tag{2.93}$$

Відокремимо змінні $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp$. Інтегруємо рівняння. Матимемо $\ln|x| = \int \dfrac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} dp - \ln C$. Тоді розв'язок рівняння:

$$x = C\,e^{\int \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} dp}, \qquad y = x\varphi(p). \tag{2.94}$$

Приклад 35. Знайти розв'язки ДР-1 $2yy' = x\left((y')^2 + 4\right)$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння до вигляду $F(x, y, y') = 0$:

$$2yy' - x\left((y')^2 + 4\right) = 0.$$

Покладемо $y' = p$. Тоді $F(x, y, p) = 2yp - x\left(p^2 + 4\right)$. Перевіримо функцію на однорідність. Знайдемо

$$F(tx, ty, p) = 2typ - tx\left(p^2 + 4\right) = t\left(2yp - x\left(p^2 + 4\right)\right) = tF(x, y, p).$$

Функція $F(x, y, p)$ – однорідна виміру $k = 1$. З рівняння $2yp - x\left(p^2 + 4\right) = 0$ можемо виразити $\dfrac{y}{x}$ через p: $y = x\varphi(p)$, де $\varphi(p) = \dfrac{p^2 + 4}{2p}$. Диференціюємо рівняння по x, матимемо згідно (2.93)

$$p = \frac{p^2 + 4}{2p} + x \cdot \frac{p^2 - 4}{2p^2} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{p^2 - 4}{p} \cdot \left(1 - \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Або $\left[\begin{array}{ll} 1 - \dfrac{x}{p} \cdot \dfrac{dp}{dx} = 0, & (1) \\ p^2 - 4 = 0,\ p \neq 0. & (2) \end{array}\right.$ З рівняння (1): $x = Cp$. Для знаходження загального розв'язку розв'язуємо систему рівнянь, виключивши p:

$$\begin{cases} x = Cp, \\ 2yp - x\left(p^2 + 4\right) = 0. \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2C} + 2C.$$

З рівняння (2): $p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p = \pm 2 \Rightarrow y' = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2x$. Це особливий розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: $y=\dfrac{x^2}{2C}+2C$, $y=\pm 2x$.

2.12.4 Диференціальні рівняння Лагранжа і Клеро

Рівняння Лагранжа і Клеро є диференціальними рівняннями виду $y=f\left(x,y'\right)$ або $x=f\left(y,y'\right)$, не розв'язаних відносно y'.

***Означення* 2.20**. Рівняння виду

$$y=f\left(y'\right)x+g\left(y'\right), \tag{2.95}$$

де y є лінійною функцією від x з коефіцієнтами, залежними від y', причому $f(y')\neq y'$, називається *рівнянням Лагранжа*.

Покладемо в рівнянні (2.95) $y'=p$. Матимемо рівняння:

$$y=f(p)x+g(p).$$

Диференціюємо його по x:

$$y'=f(p)+\left(f'(p)x+g'(p)\right)p'.$$

Враховуючи, що $dy=pdx$, отримаємо рівняння у вигляді:

$$pdx=f(p)dx+\left(f'(p)x+g'(p)\right)dp$$

або $\left(f(p)-p\right)dx+\left(f'(p)x+g'(p)\right)dp=0$. Зведемо його до лінійного відносно функції x і $\dfrac{dx}{dp}$. Поділимо рівняння на dp і $f(p)-p$. Тоді

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(p)}{f(p)-p}x=\frac{g'(p)}{p-f(p)}, \quad \left(f(p)-p\neq 0\right). \tag{2.96}$$

Маємо ДР-1 лінійне. Розв'язок рівняння (2.96) згідно формули (2.41) має вигляд:

$$x=\left(\int\frac{g'(p)}{p-f(p)}\cdot \mathrm{e}^{\int\frac{f'(p)}{f(p)-p}dp}dp+C\right)\cdot \mathrm{e}^{-\int\frac{f'(p)}{f(p)-p}dp}. \qquad (2.97)$$

Виключаючи p із загального розв’язку (2.97) та диференціального рівняння (2.96), отримаємо загальний розв’язок рівняння (2.95).

***Зауваження* 2.10**. Якщо рівняння $f(p)-p=0$ має дійсні розв’язки $p=p_i$ $\left(i=\overline{1,k}\right)$, то, підставляючи їх у диференціальне рівняння (2.95) і враховуючи, що $f(p_i)=p_i$, отримаємо лінійні функції

$$y=p_i x+g(p_i), \qquad (2.98)$$

які не можуть бути отримані з загального розв’язку рівняння (2.95), тобто вони є особливими розв’язками цього диференціального рівняння.

Рівняння Клеро є частинним випадком рівняння Лагранжа.

***Означення* 2.21**. Рівняння виду

$$y=xy'+g(y'). \qquad (2.99$$

називається *рівнянням Клеро* $\left(g(y')\neq ay'+b\right)$.

Розв’язуємо його аналогічно рівнянню Лагранжа. Покладемо в рівнянні (2.99) $y'=p$. Матимемо рівняння

$$y=xp+g(p), \qquad (2.100)$$

яке диференціюючи по x і враховуючи, що $dy=pdx$, отримаємо рівняння $\left(x+g'(p)\right)dp=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+g'(p)=0, \\ dp=0. \end{array}\right.$

Маємо два випадки:

а) $dp = 0 \Rightarrow p = C$. З урахуванням (2.100), отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.99):

$$y = xC + g(C). \tag{2.101}$$

б) рівняння $x + g'(p) = 0$ разом з (2.100) утворюють систему

$$\begin{cases} x + g'(p) = 0, \\ y = xp + g(p) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -pg'(p) + g(p). \end{cases} \tag{2.102}$$

Виключаючи p із (2.102), знаходимо особливий розв'язок рівняння (2.99).

<u>Зауваження 2.11</u>. Розв'язок буде особливим, якщо $g''(p)$ зберігає знак, бо тоді розв'язок (2.102) є обвідною сім'ї інтегральних кривих (2.101).

Приклад 36. Знайти розв'язки ДР-1 $y = 2y'x + \dfrac{1}{y'}$.

Розв'язання. Це рівняння Лагранжа. $f(y') = 2y'$, $g(y') = \dfrac{1}{y'}$.

Покладемо $y' = p$. Матимемо рівняння $y = 2px + \dfrac{1}{p}$. Диференціюємо його по x і враховуючи, що $dy = pdx$, отримаємо рівняння:

$$pdx = 2pdx + \left(2x - \frac{1}{p^2}\right)dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3}.$$

Маємо ДР-1 лінійне. Розв'язок його записуємо за формулою (2.97):

$$x = \left(\int \frac{1}{p^3} \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{2}{p}dp} dp + C\right) \cdot \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{p}dp} = \left(\int \frac{1}{p^3} \cdot \mathrm{e}^{2\ln|p|} dp + C\right) \cdot \mathrm{e}^{-2\ln|p|} =$$

$$= \left(\int \frac{1}{p^3} \cdot p^2 dp + C\right) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(\ln|p| + C\right).$$

Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа записуємо в параметричній формі: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}\left(\ln|p| + C\right), \\ y = 2px + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$

Відповідь: $x = \dfrac{1}{p^2}\left(\ln|p| + C\right),\ y = 2px + \dfrac{1}{p}$.

Приклад 37. Розв'язати ДР-1 $y = xy' - (y')^2$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро: $g(y') = (y')^2$. Покладемо $y' = p$. Матимемо рівняння $y = xp - p^2$. Диференціюємо його по x і враховуючи, що $dy = pdx$, отримаємо рівняння $(x - 2p)dp = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2p = 0, \\ dp = 0. \end{array}\right.$ Маємо два випадки:

а) розв'язуємо систему $\begin{cases} x - 2p = 0, \\ y = xp - p^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{x}{2}, \\ y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}. \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$.

Оскільки $g''(p) = 2$ зберігає знак, то розв'язок системи $y = \dfrac{x^2}{4}$ є особливим для заданого ДР-1.

б) $dp = 0 \Rightarrow p = C$. Загальний розв'язок заданого рівняння згідно формули (2.101): $y = xC - C^2$.

Відповідь: $y = xC - C^2$, $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Приклад 38. Розв'язати ДР-1 $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро відносно x: $g(y')=\frac{1}{(y')^2}$.

Покладемо $y'=p$. Матимемо рівняння $x=\frac{y}{p}+\frac{1}{p^2}$. Диференціюємо

його по y і враховуючи, що $dx=\frac{1}{p}dy$, отримаємо рівняння

$-\frac{1}{p^2}\left(y+\frac{2}{p}\right)dp=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y+\frac{2}{p}=0, \\ dp=0. \end{array}\right.$ Маємо два випадки:

а) розв'язуємо систему $\begin{cases} y+\frac{2}{p}=0, \\ x=\frac{y}{p}+\frac{1}{p^2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-\frac{2}{y}, \\ x=-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{4}. \end{cases}$ Маємо

$x=-\frac{y^2}{4}$. Оскільки $g''(p)=\frac{6}{p^4}$ зберігає знак, то цей розв'язок системи є особливим для заданого ДР-1.

б) $dp=0 \Rightarrow p=C$. Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$x=\frac{y}{C}+\frac{1}{C^2}.$$

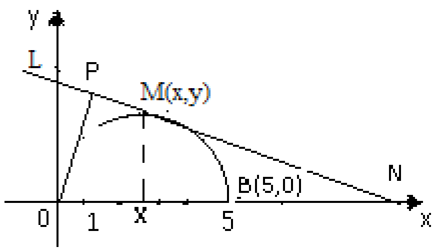
Відповідь: $y=xC-C^2$, $y=\frac{x^2}{4}$.

2.13 Задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь

Приклад 39. Крива проходить через точку $B(5{,}0)$. Довжина перпендикуляра, який опущений із початку координат на будь-яку дотичну до кривої, дорівнює абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай $y=f(x)$ – шукане рівняння кривої.

Проведемо дотичну LN в довільній точці $M(x,y)$ до кривої. OP – перпендикуляр, який опущений із початку координат на дотичну LN. За умовою задачі $|OP|=x$.



Рівняння дотичної в довільній точці $M(x,y)$:

$$Y - y = y'(X - x) \text{ або } y'X - Y - xy' + y = 0\,.$$

Знайдемо $|OP|$, як відстань від точки $O(0,0)$ до дотичної:

$$|OP| = \frac{|y' \cdot 0 - 0 - xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = \frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}}\,.$$

Маємо диференціальне рівняння

$$\left.\frac{|-xy' + y|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = x \right| \uparrow 2\,.$$

$$\frac{x^2 (y')^2 - 2xyy' + y^2}{(y')^2 + 1} = x^2 \text{ або } x^2 (y')^2 - 2xyy' + y^2 = x^2 (y')^2 + x^2\,.$$

Звідси $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$. Це ДР-1 однорідне. Зробимо заміну $y = u \cdot x,\ y' = u'x + u$. Тоді

$$u'x + u = \frac{u^2 x^2 - x^2}{2x^2 u} \Rightarrow u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}\,.$$

$$u'x = -\frac{u^2 + 1}{2u} \Rightarrow \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Візьмемо від обох частин рівняння інтеграл

$$\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C \Rightarrow \ln\left|u^2 + 1\right| = -\ln|x| + \ln C\,.$$

$$u^2+1=\frac{C}{x}\ ,\ \text{де}\ \ u=\frac{y}{x}.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{C}{x}\ \Rightarrow\ y^2+x^2=Cx.$$

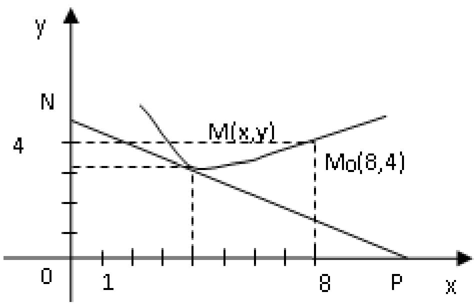
Крива проходить через точку $B(5,0)$. Маємо $y(5)=0$. Знайдемо значення C: $0+25=5C\ \Rightarrow\ C=5$.

Рівняння шуканої кривої $x^2+y^2=5x$. Виділимо повний квадрат по x. Матимемо $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$. Це коло радіуса $R=2{,}5$ з центром в точці $O_1(2{,}5;0)$.

Відповідь: $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$.

Приклад 40. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(8,4)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, що знаходиться між координатними осями, ділиться точкою дотику у відношенні 2:3, рахуючи від осі Oy.

Розв'язання. Нехай $y=f(x)$ – шукане рівняння кривої.



Проведемо дотичну NP в довільній точці $M(x,y)$ до кривої. Рівняння дотичної

$$Y-y=y'(X-x)\ \text{або}\ \ y'X-Y-xy'+y=0.$$

З цього рівняння знайдемо координати точки N – точки перетину дотичної з віссю Oy: $X=0\ \Rightarrow\ Y=y-xy'$. Для точки P – точки перетину дотичної з віссю Ox: $Y=0 \Rightarrow X=x-y/y'$. Знайдемо довжину відрізків NM і MP:

$$NM^2=(x-X)^2+(y-Y)^2=x^2+x^2(y')^2,\ MP^2=(y/y')^2+y^2.$$

Згідно з умовою задачі маємо $NM:MP=2:3$ або $NM^2:MP^2=4:9$. Тоді

$$\left(x^2+x^2(y')^2\right):\left((y/y')^2+y^2\right)=4:9 \Rightarrow$$

$$9\left(x^2+x^2(y')^2\right)=4\left((y/y')^2+y^2\right) \Rightarrow 9x^2+9x^2(y')^2=4y^2/(y')^2+4y^2 .$$

Розв'язуємо рівняння: $9x^2\left(1+(y')^2\right)=4y^2\left(1+(y')^2\right)/(y')^2 \Rightarrow$

$$9x^2(y')^2=4y^2 \text{ або } y'=\pm\frac{2y}{3x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\pm\frac{2dx}{3x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\pm\frac{2dx}{3x}.$$

Інтегруємо рівняння:

$$\int\frac{dy}{y}=\pm\int\frac{2dx}{3x}+\ln C \Rightarrow \ln|y|=\pm\frac{2}{3}\ln|x|+\ln C \Rightarrow y=Cx^{\pm 2/3}.$$

Знайдемо значення C. Враховуємо, що для $x>0$ і $y>0 \Rightarrow y'<0$, тому $y'=-\dfrac{2y}{3x} \Rightarrow y=Cx^{-2/3}$. З координат точки $M_0(8,4)$ маємо $x=8$ і $y=4 \Rightarrow 4=C\cdot 8^{-2/3} \Rightarrow C=16$.

Рівняння шуканої кривої $y=16x^{-2/3}$.

Відповідь: $y=16x^{-2/3}$.

Приклад 41. Швидкість розпаду радію пропорційна його наявній кількості x. Знайти залежність x від часу t, якщо відомо, що після закінчення 1600 років залишається половина початкової кількості радію. Прийняти початкову кількість радію $x_0=2$.

Розв'язання. Швидкість розпаду радію $x'(t)$. З умови задачі випливає, що швидкість розпаду радію $x'(t)$ пропорційна його кількості $x(t)$. Позначимо коефіцієнт пропорційності k, $k>0$. Отримаємо рівняння радіоактивного розпаду: $x'(t)=-k\cdot x(t)$. Розв'яжемо його.

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}=-k\cdot x(t)\Rightarrow\frac{d\,x(t)}{x(t)}=-k\cdot d\,t.$$

Інтегруємо отримане рівняння. Маємо

$$\ln|x(t)|=-k\cdot t+\ln C\Rightarrow x(t)=C\,\mathrm{e}^{-k\cdot t}\;.$$

Знайдемо значення сталої C, враховуючи задану початкову умову: $x(1600)=x_0/2=1$. Тоді $1=C\,\mathrm{e}^{-k\cdot 1600}\Rightarrow C=\mathrm{e}^{1600k}$.

Залежність x від часу t має вигляд: $x(t)=\mathrm{e}^{-k\cdot(t-1600)}$.

Відповідь: $x(t)=\mathrm{e}^{-k\cdot(t-1600)}$.

Приклад 42. Тіло охолоджується за 10 хвилин від 100° до 60°. Температура навколишнього повітря підтримується постійною і рівною 20°. З'ясувати, через скільки хвилин температура тіла дорівнюватиме 25°.

Розв'язання. Позначимо температуру тіла в деякій момент часу t через $T(t)$. Тоді швидкість зміни температури за часом дорівнює похідній $\frac{d\,T}{d\,t}$. Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою нагріву тіла і температурою навколишнього середовища, то матимемо рівняння: $\frac{d\,T}{d\,t}=k\left(T-T_0\right)$. Тут k – коефіцієнт пропорційності, який треба визначити, T_0 – температура навколишнього середовища. Шукана функція $T(t)$ повинна задовольняти вимогам: в початковий момент часу $t=0$ температура тіла $T=100^o$, а при $t=10$ температура тіла $T=60^o$.

Розв'яжемо рівняння $\frac{d\,T}{d\,t}=k\left(T-20\right)$ відносно $T(t)$:

$$\frac{d\,T}{T-20}=k\cdot d\,t\Rightarrow\ln\left|T-20\right|=k\cdot t+\ln C\Rightarrow T-20=C\,e^{k\cdot t}.$$

Знайдемо значення сталої C і коефіцієнта пропорційності k, враховуючи задані початкові умови:

$100-20=C\,\mathrm{e}^{k\cdot 0}\Rightarrow C=80$, $\quad 60-20=80\,\mathrm{e}^{k\cdot 10}\Rightarrow k=0{,}1\cdot\ln\frac{1}{2}$ або $k=-0{,}1\cdot\ln 2$.

Тоді $T=80\,\mathrm{e}^{-0{,}1t\cdot\ln 2}+20=80\cdot 2^{-0{,}1t}+20$. Знайдемо значення t, коли температура тіла стане рівною 25°:

$$25=80\cdot 2^{-0{,}1t}+20\Rightarrow t=40\ \text{(хв)}.$$

Відповідь: Через 40 хвилин.

Приклад 43. Таблетка масою 0,5 г кинута в стакан з водою. Швидкість розчинення таблетки пропорційна її масі. Через який час розчиниться 99% речовини, якщо відомо, що через 10 хвилин розчинилося 80%?

Розв'язання. Нехай функція $m(t)$ – зміна маси таблетки. У відповідності до умови: $\frac{dm}{dt}=k\cdot m$, де k – коефіцієнт пропорційності, який невідомий. Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dm}{m}=k\cdot dt\ \Rightarrow\ \ln|m|=k\cdot t+\ln C\ \Rightarrow\ m(t)=C\,\mathrm{e}^{k\cdot t}.$$

Відомо, що при $t=0$ маса таблетки 0,5 г. Матимемо $0{,}5=C\,\mathrm{e}^{k\cdot 0}\Rightarrow C=0{,}5$. Тоді $m(t)=0{,}5\,\mathrm{e}^{k\cdot t}$.

За умовою: через 10 хвилин розчинилося 80% таблетки, тобто залишилося $0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}1$ (г) твердої речовини. Знайдемо значення k:

$$m(10)=0{,}5\,\mathrm{e}^{10k}=0{,}1\Rightarrow \mathrm{e}^{10k}=0{,}2\Rightarrow 10k=\ln 0{,}2\Rightarrow k=0{,}1\cdot\ln 0{,}2.$$

Закон зміни маси (розчину) таблетки $m(t)=0{,}5\,\mathrm{e}^{(0{,}1\cdot\ln 0{,}2)\cdot t}$. Знайдемо через який час розчиніться 99% таблетки. В цьому випадку залишиться твердої речовини $0{,}5\cdot 0{,}01=0{,}005$ (г):

$$m(t)=0{,}5e^{(0{,}1\cdot ln\,0{,}2)\cdot t}=0{,}005\Rightarrow \mathrm{e}^{(0{,}1\cdot\ln 0{,}2)\cdot t}=0{,}01\ \text{або}$$

$$t=\frac{10\ln 0{,}01}{\ln 0{,}2}\approx 28{,}6\ \text{(хв)}.$$

Відповідь: Приблизно через 28,6 хвилин.

Приклад 44. Знайти закон руху матеріальної точки масою m під дією сили тяжіння.

Розв'язання. В даному випадку рух матеріальної точки підпорядковується 2-му закону Ньютона. Таким чином, закон руху знайдемо, розв'язуючи рівняння:

$$m\frac{d^2 x}{dt^2}=-mg,$$

де $\frac{d^2 x}{dt^2}$ – прискорення, m – маса, g – прискорення сили тяжіння. Двічі інтегруємо рівняння $d^2 x=-g\,dt^2$ по t. Отримаємо закон руху матеріальної точки: $x(t)=-g\cdot\frac{t^2}{2}+C_1 t+C_2$.

Відповідь: $x(t)=-g\cdot\frac{t^2}{2}+C_1 t+C_2$.

Приклад 45. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням пропорційним добутку швидкості руху v і часу t. Скласти залежність між швидкістю і часом, якщо при $t=0$ швидкість $v=v_0$.

Розв'язання. Прискорення це – похідна від швидкості. Тоді за умовою задачі матимемо рівняння: $\frac{dv}{dt}=k\cdot v\cdot t$. Розв'яжемо рівняння відносно $v(t)$:

$$\frac{dv}{v}=k\cdot t\cdot dt \Rightarrow \ln|v|=k\cdot\frac{t^2}{2}+\ln C \Rightarrow v(t)=C\,\mathrm{e}^{k\cdot\frac{t^2}{2}}.$$

Знайдемо значення сталої C, враховуючи задану початкову умову: $v_0=C\,\mathrm{e}^{k\cdot 0} \Rightarrow C=v_0$. Залежність між швидкістю і часом: $v(t)=v_0\,\mathrm{e}^{k\cdot\frac{t^2}{2}}$.

Відповідь: $v(t)=v_0\,\mathrm{e}^{k\cdot\frac{t^2}{2}}$.

2.14 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язки заданих диференціальних рівнянь першого порядку

Завдання	Відповідь
1. $\left(3x^2-y^2\right)dy=2xy\,dx$, $y(0)=1$	$y^2-x^2=y^3$
2. $y'-3\cdot\dfrac{y}{x}+x^3y^2=0$	$y=7x^3/\left(x^7+7C\right)$
3. $xy'+2y=\sqrt{y}$	$y=\left(\dfrac{x+C}{2x}\right)^2$
4. $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$	$y=x\mathrm{e}^{Cx}$
5. $y'+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$	$y=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$
6. $\left(xy'-y\right)\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=x$, $y(1)=0$	$\dfrac{y}{x}\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$
7. $xy'-y=y^2\,\mathrm{e}^{2x}$	$y=x/\left(C-0{,}5\mathrm{e}^{2x}\right)$
8. $y'\cos^2 x+y=\mathrm{tg}\,x$	$y=\mathrm{tg}\,x-1+C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}\,x}$
9. $\ln x\,dx+x\mathrm{tg}\,y\,dy=0$	$0{,}5\ln^2 x=\ln\left\lvert C\cdot\cos y\right\rvert$
10. $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$	$Cx=y^2\,\mathrm{e}^{y/x}$
11. $y\sin x+y'\cos x=1$	$y=\sin x+C\cdot\cos x$
12. $xy'+y=y^2$	$y=1/\left(1-Cx\right)$
13. $xy'+y=y^2\ln x$	$y=1/\left(\ln x+Cx+1\right)$
14. $y'-y\mathrm{tg}\,x=\sec x$, $y(0)=0$	$y=x/\cos x$
15. $\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$	$C\left(x^2+y^2\right)=y$

Завдання	Відповідь
16. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$	$y = -x\ln\left\|\ln\left\|Cx\right\|\right\|$
17. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$
18. $y'(x + y) = 2y,\ y(1) = 2$	$y = 2(x - y)^2$
19. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$	$Cy = \sqrt{1 + x^2}\,/\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
20. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$	$\ln\left\|tg\dfrac{y}{4}\right\| = -2\sin\dfrac{x}{2} + C$
21. $y' = \dfrac{1}{\ln(2x + y)} - 2, \quad y(0) = e$	$(2x + y)\cdot(\ln(2x + y) - 1) = x$ при умові $\begin{cases} y \neq 1 - 2x, \\ y > -2x. \end{cases}$
22. $y' = (2x + 3y + 1)^2$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}(2x + 3y + 1) - x = C$
23. $y' = \dfrac{1 - x + 2y}{3x - 6y + 2}$	$x + 3y - \ln\left\|x - 2y\right\| = C_1,\ y = \dfrac{x}{2}$
24. $y' = 4x^2 - \dfrac{y^2}{x^4}$	$x^5(y - x^3) = C(y + 4x^3)$
25. $y' = x + \dfrac{x^3}{y}$	$(y - x^2)^2(2y + x^2) = C$
26. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$	$y = (1 + x^2)\cdot(x + C)$
27. $y' - \dfrac{xy}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2}$	$y = \dfrac{\arcsin x + C}{\sqrt{1 - x^2}}$
28. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$	$x = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4} + Ce^{2y}$
29. $y' + \operatorname{tg} y = \dfrac{x}{\cos y}$	$\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$

Завдання	Відповідь
30. $x^2 y' + 2x^2 y^2 - 5xy + 4 = 0$	$y = \frac{x}{x^2 + C} + \frac{1}{x}$
31. $dy + \left(y + x^2\right)dx = 0$	$y = Ce^{-x} - x^2 + 2x - 2$
32. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$	$y = \frac{1}{(x+1)\cdot\left(C + \ln\lvert x+1\rvert\right)}$
33. $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2, \ \ y(0) = 1$	$y = \frac{5}{3} e^{x^3} - \frac{1}{3}\left(x^3 + 2\right)$
34. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x, \ \ y(0) = 1$	$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (arcsin $x +$ $+ x\sqrt{1-x^2} + 2)$
35. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$	$y = x^4\left(\ln\lvert x\rvert + C\right)^2 / 4$
36. $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$	$C\sqrt{y(y-2x)^3} = y - x$
37. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0$	$y = 1/\left(\cos x\cdot(x + C)\right)$
38. $\frac{xy' - y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$	$\sin\frac{y}{x} = xC$
39. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2, \ \ y(1) = 0$	$\ln\left(x^2 + y^2\right) + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0$
40. $y^2(y')^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$	$\left(x + C\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = C^2, \ y = \pm x$
41. $(y')^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0$	$x = \frac{C^2}{4} + \frac{2}{C}\sqrt{y}, \ y = \frac{4}{27}x^3$
42. $(y')^2 - \left(x^2 + y\right)y' - x^2 y = 0$	$y = e^{x-1}, x \le 1; \ \ y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, x > 1$
43. $y = xy' + (y')^2$	$y = xC + C^2, \ y = -\frac{x^2}{4}$

Завдання	Відповідь
44. $y = 2xy' - (y')^2$	$y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}, x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}$
45. $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$	$y = \frac{x^2}{2} + xC + C^2, y = \frac{x^2}{4}$
46. $y^2 (y')^3 + 2xy' - y = 0$	$y^2 = 2xC + C^3, 32x^3 + 27y^4 = 0$

Розв'язати задані задачі:

1) Матеріальна точка маси m уповільнює свій рух під дією сили опору середовища, пропорційної квадрату швидкості V. Знайти залежність швидкості від часу. Знайти швидкість точки через 3с після початку уповільнення, якщо $V(0) = 100 м/с$, а $V(1) = 50 м/с$.

Відповідь: $V(3) = 25$ м/с .

2) Знайти криву, що проходить через точку $M_0(2,3)$ і має властивість, що відрізок довільної її дотичної, кінці якого лежать на осях координат, ділиться точкою дотику навпіл.

Відповідь: $y = 6/x$.

3) Через 12 годин після початку досліду чисельність деякої популяції бактерій зросла в 3 рази. У скільки разів збільшиться число бактерій через три доби? Швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості.

Відповідь: Збільшиться в 729 раз.

4) Куля, рухаючись зі швидкістю $V_0 = 400 м/с$, пробиває стіну товщиною $h = 0{,}2 м$ і вилітає з неї зі швидкістю $V_1 = 100 м/с$. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час T руху кулі в стіні.

Відповідь: $T = 3/(2000 \ln 4)$.

5) Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю V, пропорційній квадрату часу. Встановити залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо відомо, що при $t=0$, $S=S_0$.

Відповідь: $S=S_0+kt^3/3$.

6) Посудина об'ємом в 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту в секунду, який безперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через скільки часу в посудині буде 99% азоту?

Відповідь: $T \approx 10$ хвилин .

7) У повітрі кімнати об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% вуглекислого газу (CO_2). Вентилятор подає в хвилину 20 м^3 повітря, що містить 0,04% CO_2. Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

Відповідь: $T \approx 24$ хвилини .

8) Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Відповідь: $y=Cx^2$.

9) Крива проходить через точку $M_0(1,2)$ і має властивість, що відношення ординати будь-якої її точки до абсциси пропорційне кутовому коефіцієнту дотичної до цієї кривої, проведеної в тій же точці, з коефіцієнтом пропорційності $k=3$. Знайти рівняння кривої.

Відповідь: $y^3=8x$.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

3.1 Загальні поняття

Диференціальне рівняння 2-го порядку (ДР-2) у неявній формі можна записати у вигляді:

$$F(x, y, y', y'')=0. \tag{3.1}$$

Явною формою ДР-2 є рівняння, розв'язане відносно другої похідної:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{3.2}$$

<u>Означення 3.1</u>. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння (3.2) називається функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{3.3}$$

(C_1 , C_2 – довільні сталі), що задовольняє умовам:

1) функція $\varphi(x, C_1, C_2)$ – розв'язок (3.2) при кожному фіксованому значенні C_1 та C_2;

2) Якими б не були початкові умови

$$y(x_0) = y_0\,,\;\; y'(x_0) = y_1 \tag{3.4}$$

існують єдині значення сталих $C_1 = \overline{C_1}$ і $C_2 = \overline{C_2}$ такі, що функція $y = \varphi\left(x, \overline{C_1}, \overline{C_2}\right)$ є розв'язком рівняння (3.2) і задовольняє початковим умовам (3.3).

<u>Означення 3.2</u>. *Частинним розв'язком* диференціального рівняння (3.2) називається будь-який розв'язок

$$y = \varphi\left(x, \overline{C_1}, \overline{C_2}\right) \tag{3.5}$$

цього рівняння, отриманий із загального розв'язку (3.3) при фіксованих значеннях сталих $C_1 = \overline{C_1}$ і $C_2 = \overline{C_2}$

<u>Означення 3.3</u>. Розв'язок диференціального рівняння (3.2), записаний у вигляді

$$\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0\,, \tag{3.6}$$

називається *загальним інтегралом*, а частинний розв'язок (3.5) поданий у вигляді

$$\varphi\left(x, y, \overline{C_1}, \overline{C_2}\right) = 0\,, \tag{3.7}$$

називається *частинним інтегралом.*

Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння (3.2) – *інтегральна крива*; загальний розв'язок (3.2) – це множина інтегральних кривих, залежна від довільних сталих, яку називають *сімейством інтегральних кривих*, а частинний розв'язок диференціального рівняння (3.2) – одна інтегральна крива з даної множини, що проходить через точку (x_0, y_0) і має в ній дотичну, що утворює з додатним напрямом осі Ox такий кут ϕ, що $\operatorname{tg}\phi = y'(x_0) = y_1$.

***<u>Теорема</u>* <u>3.1</u>** про існування та єдиність розв'язку рівняння (3.2). Якщо в області D функція $f(x, y, y')$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ неперервні, то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початковим умовам (3.4).

***<u>Означення</u>* <u>3.4</u>**. *Задачею Коші* називається задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (3.2), який задовольняє заданим початковим умовам (3.4).

***<u>Зауваження</u>* <u>3.1</u>**. При розв'язуванні задачі Коші для рівнянь, що допускають зниження порядку, доцільно довільні сталі знаходити

після кожного інтегрування.

***<u>Зауваження</u>* <u>3.2</u>**. Загальних правил розв'язування ДР-2 не існує. Тому на практиці їх можна розв'язати наближеними методами (метод Ейлера та його модифікації, методи Рунге-Кутта, метод Адамса та інші).

Існують деякі класи ДР-2, які можна звести до рівнянь першого порядку. Розглянемо їх.

3.2 Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

1) ***Диференціальні рівняння виду*** $F(x, y'') = 0$.

Диференціальне рівняння не містить шукану функцію y та її похідну y'.

Якщо воно може бути розв'язане відносно y'': $y'' = f(x)$, то розв'язок $y = y(x)$ цього рівняння отримаємо після двократного інтегрування функції $f(x)$:

$$y' = \int f(x)dx + C_1.$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2. \tag{3.8}$$

Якщо воно може бути розв'язане відносно x: $x = f(y'')$, то можна ввести параметризацію у вигляді: $x = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$ так, що $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Враховуючи, що $dy' = y''dx = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$, матимемо $y' = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1$. Інтегруючи отримане рівняння знайдемо

$$y = \int \left(\int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1\right)dt + C_2. \tag{3.9}$$

Загальний розв'язок ДР-2 $x = f(y'')$ у параметричній формі матиме вигляд:

$$x = \varphi(t), \; y = \int \left(\int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1\right)dt + C_2. \tag{3.10}$$

Приклад 46. Знайти загальний розв'язок ДР-2 $y'' = x - \ln x$.

Розв'язання. Рівняння розв'язане відносно y''. Тому

$$y' = \int (x - \ln x)dx + C_1 = \begin{bmatrix} u = \ln x, \; dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, \quad v = x \end{bmatrix} = \int xdx - x\ln x +$$

$$+\int x\cdot\frac{dx}{x}+C_1=\frac{x^2}{2}-x\ln x+x+C_1 .$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-x\ln x+x+C_1\right)dx+C_2=\begin{bmatrix} u=\ln x,\ dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x},\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^2dx-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}+\int xdx+C_1\int dx+C_2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2

$$y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2 .$$

Відповідь: $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$.

Приклад 47. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$4(y'')^3+6y''-x=0 .$$

Розв'язання. Рівняння може бути розв'язане відносно x:

$$x=4(y'')^3+6y'' .$$

Позначимо $y''=t$. Тоді $x=4t^3+6t$. Враховуючи, що $dy'=y''dx=t\cdot(12t^2+6)dt=(12t^3+6t)dt$, матимемо

$$y'=\int(12t^3+6t)dt+C_1=3t^4+3t^2+C_1 .$$

Інтегруючи отримане рівняння знайдемо

$$y=\int(3t^4+3t^2+C_1)dt+C_2=0{,}6t^5+t^3+C_1t+C_2 .$$

Відповідь: $x=4t^3+6t$, $y=0{,}6t^5+t^3+C_1t+C_2$.

2) ***Диференціальні рівняння виду*** $F(y',y'')=0$ **.**

Диференціальне рівняння не містить шукану функцію y та змінну x .

Якщо воно може бути розв'язане відносно y'': $y''=f(y')$, то враховуючи, що $y''=(y')'$, можна знизити порядок ДР-2 шляхом заміни: $y'=z,\ y''=z'$. Матимемо ДР-1: $z'=f(z)$. Розв'яжемо його відносно z:

$$z=\varphi(x)+C_1 \quad \Rightarrow y'=\varphi(x)+C_1.$$

Інтегруючи рівняння, отримаємо загальний розв'язок:

$$y=\int(\varphi(x)+C_1)dx+C_2\ . \tag{3.13}$$

Якщо воно не може бути розв'язане відносно y'', то можна ввести параметризацію у вигляді: $y'=\varphi(t),\quad y''=\psi(t)$ так, що $F(\varphi(t),\psi(t))=0$. Враховуючи, що $dy'=y''dx \Rightarrow \varphi'(t)dt=\psi(t)dx$, матимемо:

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C_1,\ y=\int\varphi(t)dt+C_2\ . \tag{3.14}$$

У деяких випадках можна зробити заміну $y''=ty'$. Рівняння $F(y',ty')=0$ розв'язати відносно y': $y'=\varphi(t),\ y'\neq 0$. Тоді $y''=t\varphi(t)$. Враховуючи, що $dy'=y''dx \Rightarrow \varphi'(t)dt=t\varphi(t)dx$, матимемо:

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{t\varphi(t)}dt+C_1,\ y=\int\varphi(t)dt+C_2\ . \tag{3.14}$$

Приклад 48. Знайти загальний розв'язок ДР-2 $y'+2=y''$.

Розв'язання. Враховуючи, що $y''=(y')'=\frac{d}{dx}(y')$, зробимо заміну: $y'=z,\ y''=z'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними $z+2=z'$. Відокремимо змінні: $\frac{dz}{z+2}=dx$. Інтегруємо це рівняння:

$$\int\frac{dz}{z+2}=\int dx+\ln C_1 \ \Rightarrow\ \ln|z+2|=x+\ln C_1\ .$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно функції z:

$$z+2=C_1\,\mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; z=C_1\,\mathrm{e}^x-2 \text{ або } y'=C_1\,\mathrm{e}^x-2 .$$

Маємо ДР-1, інтегруємо це рівняння:

$$y=\int\left(C_1\,\mathrm{e}^x-2\right)dx+C_2=C_1\,\mathrm{e}^x-2x+C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y=C_1\,\mathrm{e}^x-2x+C_2$.

Відповідь: $y=C_1\,\mathrm{e}^x-2x+C_2$.

Приклад 49. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$\left(y''\right)^3=4y'y''-\left(y'\right)^2 .$$

Розв'язання. Рівняння не може бути розв'язане відносно y''. Зробимо заміну $y''=t\,y'$. Рівняння матиме вигляд: $\left(t\,y'\right)^3=4t\left(y'\right)^2-\left(y'\right)^2$. Розв'яжемо його відносно y': $y'=4t^{-2}-t^{-3}$, $y'\neq 0$. Тоді $y''=t\cdot\left(4t^{-2}-t^{-3}\right)=4t^{-1}-t^{-2}$. Враховуючи, що $dy'=y''dx \Rightarrow \left(-8t^{-3}+3t^{-4}\right)dt=\left(4t^{-1}-t^{-2}\right)dx$, матимемо:

$$x=\int\frac{-8t^{-3}+3t^{-4}}{4t^{-1}-t^{-2}}dt+C_1=\int\frac{-8t+3}{t^2\left(4t-1\right)}dt+C_1=\left[\begin{array}{l}\text{розкладаємо}\\ \text{підінтегральну}\\ \text{функцію на суму}\\ \text{простих дробів}\end{array}\right]=\int\left(-\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+\frac{16}{4t-1}\right)dt+C_1=\frac{3}{t}+4\ln\left|\frac{4t-1}{t}\right|+C_1 ,$$

$$y=\int\left(4t^{-2}-t^{-3}\right)dt+C_2=-\frac{4}{t}+\frac{1}{2t^2}+C_2 .$$

Відповідь: $x=\dfrac{3}{t}+4\ln\left|\dfrac{4t-1}{t}\right|+C_1$, $y=-\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{2t^2}+C_2$.

3) ***Диференціальні рівняння виду*** $F\left(y,y''\right)=0$**.**

Диференціальне рівняння не містить змінну x та похідну y' шуканої функції y .

Якщо воно може бути розв'язане відносно y'': $y''=f\left(y\right)$, то можна знизити порядок ДР-2 шляхом заміни:

$$y'=p\left(y\right)=p,\quad y''=p'(y)\cdot y'=p'\cdot p . \qquad (3.15)$$

Тоді $pp' = f(y) \Rightarrow pdp = f(y)dy \Rightarrow p^2 = 2\int f(y)dy + C_1$ або $y' = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$. Знаходимо загальний розв'язок ДР-2:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm x + C_2. \tag{3.16}$$

Можна отримати розв'язок ДР-2 у параметричному вигляді. Нехай $y = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$. Припускаючи, що $y = z(x)$, матимемо:

$$z(x) = \varphi(t),\ z''(x) = \psi(t).$$

Тоді

$$z'(x) = \varphi'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{x'},\ z''(x) = \frac{\varphi''(t) \cdot x' - x'' \cdot \varphi'(t)}{(x')^3}.$$

Отримаємо рівняння:

$$\varphi''(t) \cdot x' - x'' \cdot \varphi'(t) = \psi(t) \cdot (x')^3.$$

Покладемо $x' = u$. Рівняння прийме вигляд:

$$\varphi''(t)u - u'\varphi'(t) = \psi(t)u^3.$$

Це ДР-1 Бернуллі. Розв'язуємо його. Загальний розв'язок його $u = x' = g(t, C_1)$. Тоді $x = \int g(t, C_1)dt + C_2$.

Загальний розв'язок ДР-2 $y'' = f(y)$ у параметричній формі матиме вигляд:

$$x = \int g(t, C_1)dt + C_2,\ y = \varphi(t). \tag{3.17}$$

Приклад 50. Знайти розв'язок ДР-2 $y^3 y'' - y^4 + 4 = 0$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x та похідну y'. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни: $y' = p(y) = p,\ y'' = p' \cdot p$. Тоді $y^3 p' \cdot p = y^4 - 4$. Розв'язуємо його відносно p: $pdp = \frac{y^4 - 4}{y^3} dy$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$\int p\,dp = \int\left(y - \frac{4}{y^3}\right)dy + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{2}{y^2} + C_1 \,\Big|\cdot 2\,.$$

Тоді $\quad p^2 = y^2 + \dfrac{4}{y^2} + 2C_1$. $\quad$ Звідси $\quad p = \pm\sqrt{y^2 + \dfrac{4}{y^2} + 2C_1}$.

Підставимо $p = y'$. Маємо ДР-1 відносно функції y:

$$y' = \pm\sqrt{y^2 + \frac{4}{y^2} + 2C_1} = \pm\sqrt{\frac{\left(y^2\right)^2 + 2C_1 y^2 + 4}{y^2}}\,.$$

Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо його:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{\left(y^2\right)^2 + 2C_1 y^2 + 4}} = \pm\,dx \Rightarrow \int\frac{y\,dy}{\sqrt{\left(y^2 + C_1\right)^2 + 4 - C_1^2}} = \pm\int dx + C_2\,.$$

Отримаємо розв'язок заданого ДР-2:

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + C_1 + \sqrt{\left(y^2 + C_1\right)^2 + 4 - C_1^2}\right| = \pm\,x + C_2\,.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2 + C_1 + \sqrt{\left(y^2 + C_1\right)^2 + 4 - C_1^2}\right| = \pm\,x + C_2$.

Приклад 51. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$y'' = \frac{4}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Розв'язання. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни: $y' = p(y) = p,\ \ y'' = p'\cdot p$. Тоді $p'p = \dfrac{4}{\sqrt{y}}$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо отримане рівняння:

$$p\,dp = \frac{4}{\sqrt{y}}\,dy \Rightarrow \int p\,dp = \int\frac{4}{\sqrt{y}}\,dy + C_1 \Rightarrow \frac{p^2}{2} = 8\sqrt{y} + C_1\,.$$

Підставимо $p = y'$ і знайдемо значення сталої C_1, застосувавши початкові умови:

$$\left(y'\right)^2 = 16\sqrt{y} + C_1 \Rightarrow \left(0\right)^2 = 16\sqrt{0} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 .$$

Маємо рівняння $\left(y'\right)^2 = 16\sqrt{y} \Rightarrow y' = 4\sqrt[4]{y}$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінним. Відокремлюємо змінні та інтегруємо отримане рівняння:

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = 4dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{4}}dy = \int 4dx + C_2 \Rightarrow \frac{4y^{\frac{3}{4}}}{3} = 4x + C_2 .$$

Враховуючи початкові умови, знайдемо значення сталої C_2:

$$\frac{4\cdot 0^{\frac{3}{4}}}{3} = 4\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Тоді частинний розв'язок заданого ДР-2: $y^{\frac{3}{4}} = 3x \Rightarrow y = \sqrt[3]{81x^4}$.

Відповідь: $y = \sqrt[3]{81x^4}$.

4) ***Диференціальні рівняння виду*** $F\left(x, y', y''\right) = 0$ **.**

Диференціальне рівняння не містить шукану функцію y .

Знижуємо порядок диференціального рівняння шляхом заміни:

$$y' = z(x) = z, \quad y'' = z' . \tag{3.18}$$

Отримаємо ДР-1: $z' = f\left(x, z\right)$. Розв'язуємо його відносно функції z: $z = \varphi\left(x, C_1\right)$. Підставимо $z = y'$. Матимемо ДР-1 $y' = \varphi\left(x, C_1\right)$ або $dy = \varphi\left(x, C_1\right)\cdot dx$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$y = \int \varphi\left(x, C_1\right)dx + C_2 . \tag{3.19}$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Приклад 52. Знайти частинний розв'язок ДР-2.

$$y''\left(x^2 + 1\right) = 2xy', \quad y\left(0\right) = 2, \; y'\left(0\right) = 3 .$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y' = z, \quad y'' = z'$.

Маємо $z'\left(x^2 + 1\right) = 2xz$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{dx} \cdot \left(x^2 + 1\right) = 2xz \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}.$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{x^2 + 1} + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|z| = \ln\left|x^2 + 1\right| + \ln C_1 .$$

$$z = \left(x^2 + 1\right)C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \left(x^2 + 1\right)C_1 .$$

Знайдемо значення сталої C_1, застосовуючи початкові умови:

$$3 = (0 + 1)C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3 .$$

Тоді ДР-1 матиме вигляд: $y' = 3\left(x^2 + 1\right)$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його

$$y = 3\int \left(x^2 + 1\right)dx + C_2 = 3\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2 .$$

Знайдемо значення сталої C_2, застосовуючи початкові умови:

$$2 = 3 \cdot (0 + 0) + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2 .$$

Частинний розв'язок заданого ДР-2 матиме вигляд:

$$y = x^3 + 3x + 2 .$$

Відповідь: $y = x^3 + 3x + 2$.

Приклад 53. Знайти загальний розв'язок ДР-2 $y''x\ln x = 2y'$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить функцію y. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y' = z, \quad y'' = z'$.

Маємо $z'x\ln x = 2z.$ Це ДР-1 з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x\ln x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x\ln x} + \ln C_1 .$$

$$\ln|z| = 2\ln|\ln x| + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 \ln^2 x .$$

Оскільки $z = y'$, то матимемо $y' = C_1 \ln^2 x$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$y = C_1\int \ln^2 x dx + C_2 = \begin{bmatrix} u = \ln^2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x} dx, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= C_1\left(x \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln x dx}{x} \right) + C_2 = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x \cdot \frac{dx}{x} \right) + C_2 = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2 .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 має вигляд:

$$y = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2 .$$

Відповідь: $y = C_1\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right) + C_2$.

5) *Диференціальні рівняння виду* $F(y, y', y'') = 0$ **.**

Диференціальне рівняння не містить змінну x. Знизимо порядок диференціального рівняння шляхом заміни (3.15).

Отримаємо ДР-1: $p' p = f(y, p)$. Розв'яжемо його відносно функції p: $p = \varphi(y, C_1)$. Підставимо $p = y'$. Матимемо ДР-1 $y' = \varphi(y, C_1)$ або $\dfrac{d\,y}{\varphi(y, C_1)} = d\,x$. Інтегруємо обидві частини цього рівняння:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 . \qquad (3.20)$$

Це загальний розв'язок заданого ДР-2.

Приклад 54. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \; y'(0) = \sqrt{2} .$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни: $y' = p, \; y'' = p' \cdot p$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $y^3 p \cdot p' = y^4 - 16$. Розв'яжемо його:

$$pdp=\frac{y^4-16}{y^3}dy \Rightarrow \int pdp=\int\left(y-\frac{16}{y^3}\right)dy+C_1 .$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{8}{y^2}+C_1\,\bigg|\cdot 2 \quad\Rightarrow\quad p^2=y^2+\frac{16}{y^2}+2C_1 .$$

$$p=\sqrt{y^2+\frac{16}{y^2}+2C_1} \quad\Rightarrow\quad y'=\sqrt{y^2+\frac{16}{y^2}+2C_1} .$$

Знайдемо значення сталої C_1, застосовуючи початкові умови:

$$\sqrt{2}=\sqrt{8+\frac{16}{8}+2C_1} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+C_1} \quad\Rightarrow\quad C_1=-4 .$$

Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними $y'=\sqrt{y^2+\frac{16}{y^2}-8}=\frac{y^2-4}{y}$. Розв'яжемо його:

$$\frac{ydy}{y^2-4}=dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{ydy}{y^2-4}=\int dx+C_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right|=x+C_2 .$$

Знайдемо значення сталої C_2, застосовуючи початкові умови:

$$\frac{1}{2}\cdot\ln|8-4|=0+C_2 \Rightarrow C_2=\ln 2 .$$

Частинний розв'язок заданого ДР-2 має вигляд:

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|y^2-4\right|=x+\ln 2 \quad\Rightarrow\quad y^2-4=4\mathrm{e}^{2x} .$$

Відповідь: $y^2-4=4\mathrm{e}^{2x}$.

Приклад 55. Знайти загальний розв'язок ДР-2 $(y-1)y''=(y')^2$.

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить змінну x. Знизимо порядок ДР-2 шляхом заміни $y'=p,\ y''=pp'$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними: $(y-1)p\cdot p'=p^2$. Розв'яжемо його:

$$p\,((y-1)p'-p)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} p=0, & (1) \\ (y-1)p'-p=0 & (2) \end{array}\right. .$$

З рівняння (1) маємо $y'=0 \Rightarrow y=C$ – загальний розв'язок ДР-2.

Рівняння (2) є ДР-1 з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв`язок:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y-1} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y-1}+\ln C_1 .$$

$$\ln|\,p\,|=\ln|\,y-1\,|+\ln C_1 \quad \Rightarrow \quad p=C_1\,(y-1).$$

Оскільки $p=y'$, то $y'=C_1\,(y-1) \Rightarrow \int\frac{dy}{y-1}=C_1\int dx+\ln C_2$.

$$\ln|y-1|=C_1x+\ln C_2 \quad \Rightarrow \quad y-1=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x} .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y=C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}+1$.

Відповідь: $y=\left[\begin{array}{l}C,\\ C_2\,\mathrm{e}^{C_1x}+1\end{array}\right.$.

6) ***Диференціальні рівняння виду*** $F(x,y,y',y'')=0$ ***однорідне відносно*** y,y',y'' **.**

<u>Означення 3.5</u>. Диференціальне рівняння $F(x,y,y',y'')=0$ є *однорідне відносно* y,y',y'', якщо функція $F(x,y,y',y'')$ є однорідною виміру k *відносно* y,y',y'', тобто для $\forall\, t>0$ справедливо

$$F(x,ty,ty',ty'')=t^k F(x,y,y',y''). \tag{3.21}$$

Порядок рівняння можна знизити, застосувавши заміну

$$y'=zy\,,\;\; y''=z'y+zy'=\left(z'+z^2\right)y\,, \tag{3.22}$$

де $z=z(x)$ – нова невідома функція.

Після підстановки заміни в ДР-2 і скорочення на y^k, матимемо ДР-1 $F(x,z,z')=0$, розв'язком якого є $z=\varphi(x,C_1)$. Підставимо значення z із заміни і отримаємо ДР-1 з відокремлюваними змінними:

$$\frac{y'}{y}=\varphi\left(x,C_1\right).$$

Розв’язуємо його відокремивши змінні та інтегруючи:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\varphi\left(x,C_1\right)dx \Rightarrow \ln|y|=\int\varphi\left(x,C_1\right)dx+\ln C_2.$$

Загальний розв’язок заданого ДР-2

$$y=C_2\cdot e^{\int\varphi\left(x,C_1\right)dx}. \tag{3.23}$$

***<u>Зауваження</u>* <u>3.3</u>**. При скороченні на y^k, якщо $k>0$, може бути втрачений розв’язок $y=0$.

Приклад 56. Знайти загальний розв’язок ДР-2 $x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2$.

Розв’язання. Функція $F\left(x,y,y',y''\right)=x^2yy''-\left(y-xy'\right)^2$. Перевіримо, чи є вона однорідною відносно y,y',y''. Замінимо в ній y на ty, y' на ty', y'' на ty'':

$$x^2ty\cdot ty''-\left(ty-x\cdot ty'\right)^2=\left(x^2yy''-\left(y-xy'\right)^2\right)\cdot t^2.$$

Умова однорідності виконується. Функція є однорідною виміру $k=2$. Порядок рівняння знизимо, застосувавши заміну $y'=zy$ і $y''=\left(z'+z^2\right)y$. Матимемо рівняння:

$$x^2y^2\left(z'+z^2\right)-y^2(1-xz)^2=0.$$

Винесемо y^2 за дужки: $y^2\left(x^2\left(z'+z^2\right)-(1-xz)^2\right)=0$. Розв’язком цього рівняння є функція $y=0$. Інший розв’язок отримаємо прирівнявши вираз у дужках до нуля та спростивши його:

$$x^2z'+x^2z^2-1+2xz-x^2z^2=0 \Rightarrow x^2z'-1+2xz=0.$$

Маємо лінійне ДР-1 $z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}$, де $p(x)=\frac{2}{x}$, $q(x)=\frac{1}{x^2}$.

Зробимо заміну: $z=u\cdot v$. Для знаходження v і u скористаємось формулами:

$$v=e^{-\int p(x)dx},\quad u=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx+C.$$

Матимемо

$$v = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{x} dx} = \mathrm{e}^{-2\ln x} = x^{-2}, \qquad u = \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx + C_1 = \int dx + C_1 = x + C_1 .$$

Загальний розв'язок ДР-1 $z = x^{-2} \cdot (x + C_1) = x^{-1} + C_1 x^{-2}$. Із заміни маємо $z = \frac{y'}{y}$. Тоді $\frac{y'}{y} = x^{-1} + C_1 x^{-2}$. Це ДР-1 з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1 \frac{x^{-1}}{-1} + \ln C_2 \Rightarrow \ln|y| = \ln\left| C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{C_1}{x}} \right| .$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y = C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{C_1}{x}}$.

Відповідь: $y = \left[\begin{array}{l} 0, \\ C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{C_1}{x}} . \end{array} \right.$

7) *Диференціальні рівняння виду $F(x, y, y', y'') = 0$ узагальнено-однорідне відносно x, y, y', y''.*

<u>Означення 3.6</u>. Диференціальне рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$ називається *узагальнено-однорідним відносно* x, y, y', y'', якщо при заміні x на tx, y на $t^{\alpha} y$, y' на $t^{\alpha-1} y'$, y'' на $t^{\alpha-2} y''$, де α – деяке дійсне число, воно змінюється на еквівалентне йому.

Тобто функція $F(x, y, y', y'')$ задовольняє умові

$$F\left(tx, t^{\alpha} y, t^{\alpha-1} y', t^{\alpha-2} y''\right) = t^k F(x, y, y', y''), \tag{3.24}$$

де k – деяке дійсне число.

Щоб дізнатися, чи буде рівняння узагальнено-однорідним і знайти число α, треба прирівняти показники степенів, у яких число t входитиме до рівняння після зазначеної заміни. Якщо число α

визначається, треба зробити заміну змінних. У цьому випадку робиться заміна як незалежної змінної, так і шуканої функції:

$$x = \mathrm{e}^t \ (x = -\mathrm{e}^t \text{ при } x < 0), \ \ y = z(t)\mathrm{e}^{\alpha t} . \tag{3.25}$$

Похідні при такій заміні перетворюються за формулами:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + \alpha z)\mathrm{e}^{(\alpha-1)t}, \\ y'' &= \frac{(y'(x))'_t}{x'_t} = (z'' + (2\alpha - 1)z' + \alpha(\alpha - 1)z)\mathrm{e}^{(\alpha-2)t} . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Підставляючи в рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$ вирази з формул (3.25) і (3.26), після скорочення на e^t отримаємо рівняння, яке не містить незалежну змінну t. Порядок отриманого рівняння можна знизити на одиницю шляхом заміни $z' = p(z)$.

Якщо ж отримані рівняння для α виявляться несумісними, то рівняння не є узагальнено-однорідним.

Приклад 57. Знайти загальний розв’язок ДР-2

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0 .$$

Розв’язання. Функція $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2$. Перевіримо чи задовольняє вона умові (3.24). Треба в ній замінити x на tx, y на $t^\alpha y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, y'' на $t^{\alpha-2}y''$ або прирівняти показники степенів, у яких число t входитиме до рівняння після зазначеної заміни: $2 + \alpha - 2 = 1 + \alpha - 1 = \alpha = 2$. Звідси $\alpha = 2$. Робимо заміну згідно (3.25): $x = \mathrm{e}^t$, $y = z(t)\mathrm{e}^{2t}$. Знайдемо y' і y'' за формулами (3.26):

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + 2z)\mathrm{e}^t, \ \ y'' = \frac{(y'(x))'_t}{x'_t} = (z'' + 3z' + 2z).$$

У задане рівняння підставимо знайдені x, y, y', y''. Матимемо:

$$\mathrm{e}^{2t}(z'' + 3z' + 2z) - 3\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^t(z' + 2z) + 4z\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t} = 0 \,\Big|: \mathrm{e}^{2t} ,$$

$$z'' + 3z' + 2z - 3z' - 6z + 4z + 1 = 0 \Rightarrow z'' + 1 = 0.$$

Розв’язок рівняння знаходимо за формулою (3.8).

$$z' = \int (-1) dt + C_1 = -t + C_1, \quad z = \int (-t + C_1)\, dt + C_2 = -\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Тоді $y = \mathrm{e}^{2t}\left(-\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\right)$, $x = \mathrm{e}^t \Rightarrow t = \ln x$. Підставимо знайдене значення t в y:

$$y = \mathrm{e}^{2\ln x}\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2\right) = x^2\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2\right).$$

Відповідь: $y = x^2\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1 \ln x + C_2\right)$.

8) ***Диференціальні рівняння виду*** $F(x, y, y', y'') = 0$***, де ліва частина є повною похідною по*** x ***від деякої функції.***

Ліва частина рівняння має вигляд:

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y'). \qquad (3.27)$$

Задане рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y') = 0. \qquad (3.28$$

Інтегруючи його, матимемо ДР-1 $\Phi(x, y, y') = 0$. Розв’язуємо його. Отримаємо загальний розв’язок або загальний інтеграл заданого ДР-2.

Порядок рівняння може бути знижений і у випадку, якщо його можна перетворити до вигляду, щоб обидві його частини були повними похідними по x від деяких функцій.

У деяких випадках ліва частина рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$ не є повною похідною деякого диференціального вираження першого порядку, а стає такою лише внаслідок множення на деякий множник $\mu(x, y, y')$.

Зауваження 3.4. При множенні на множник $\mu(x, y, y')$ можлива поява зайвих розв'язків, що обертають цей множник у нуль. Якщо множник $\mu(x, y, y')$ є розривною функцією, то можлива й втрата розв'язків.

Приклад 58. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Розв'язання. Поділимо рівняння на x^2 та згрупуємо другий і третій доданки: $y'' + \frac{xy' - y}{x^2} = 0$. Ліву частину рівняння можна записати у вигляді: $(y')' + \left(\frac{y}{x}\right)' = 0$ або $(y')' = -\left(\frac{y}{x}\right)'$.

Інтегруємо обидві частини рівняння: $y' = -\frac{y}{x} + C_1$. Маємо ДР-1 однорідне. Зробимо заміну: $\frac{y}{x} = u,\ y = u\,x,\ y' = u'\,x + u$. Отримаємо рівняння $u'\,x + u = -u + C_1 \Rightarrow u'\,x = C_1 - 2u$. Відокремимо змінні і знайдемо інтеграли від обох частин.

$$\int \frac{du}{2u - C_1} = -\int \frac{dx}{x} + \ln C_2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\ln|2u - C_1| = -\ln|x| + \ln C_2$$

або $\sqrt{2u - C_1} = \frac{C_2}{x} \Rightarrow 2u = \left(\frac{C_2}{x}\right)^2 + C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C_2^2}{2x^2} + \frac{C_1}{2}$.

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2^2}{2x}$.

Відповідь: $y = \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2^2}{2x}$.

Приклад 59. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$yy'' = 2(y')^2.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $yy''-(y')^2=(y')^2$.

Поділимо обидві частини на y^2: $\dfrac{yy''-(y')^2}{y^2}=\left(\dfrac{y'}{y}\right)^2$. Вираз у лівій частині рівняння є $\left(\dfrac{y'}{y}\right)'$. Отримуємо рівняння $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{y}\right)=\left(\dfrac{y'}{y}\right)^2$.

Для зручності позначимо $\dfrac{y'}{y}=u(x)$. Тоді

$$\frac{du}{dx}=u^2 \Rightarrow \int\frac{du}{u^2}=\int dx+C_1 \Rightarrow -\frac{1}{u}=x+C_1 \Rightarrow u=-\frac{1}{x+C_1}.$$

Замінимо в отриманому розв'язку $u=\dfrac{y'}{y}$: $\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x+C_1}$. Маємо ДР-1 з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x+C_1}+\ln C_2 \Rightarrow \ln|y|=-\ln|x+C_1|+\ln C_2 \Rightarrow y=\frac{C_2}{x+C_1}.$$

Загальний розв'язок заданого ДР-2 $y=\dfrac{C_2}{x+C_1}$.

Відповідь: $y=\dfrac{C_2}{x+C_1}$.

Приклад 60. Знайти частинний розв'язок ДР-2

$$\left(1+y^2\right)y''+2y(y')^2=y',\ y(1)=0,\ y'(1)=1.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$y''+y^2y''+2y(y')^2=y'.$$

Групуємо другий і третій доданки, матимемо y^2y'. Отримаємо рівняння у вигляді: $y''+\left(y^2y'\right)'=y'$. Тоді $\dfrac{dy'}{dx}+\dfrac{d\left(y^2y'\right)}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$.

Інтегруємо рівняння. Матимемо $y'+y^2y'=y+C_1$. Знайдемо значення C_1, використовуючи початкові умови: $1+0^2\cdot 1=0+C_1 \Rightarrow C_1=1$.

Розв'язуємо рівняння $y' + y^2 y' = y + 1 \Rightarrow y'\left(1 + y^2\right) = y + 1$ або $\int \frac{1 + y^2}{y + 1} dy = \int dx + C_2 \Rightarrow \frac{y^2}{2} - y + 2\ln|y + 1| = x + C_2$. Знайдемо значення C_2, використовуючи початкові умови: $0 - 0 + 2\ln|1| = 1 + C_2$, $C_2 = -1$.

Частинний інтеграл матиме вигляд: $\frac{y^2}{2} - y + 2\ln|y + 1| = x - 1$.

Відповідь: $\frac{y^2}{2} - y + 2\ln|y + 1| = x - 1$.

9) ***Для диференціального рівняння виду*** $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ необхідно підібрати відповідну заміну, яка дозволить знизити порядок диференціального рівняння та розв'язати його, наприклад, $y\,y' = p$; $\left(y'\right)^2 = p$; $x\,y' = p$; $y' = y\,p$ та інші. Якщо заміну підібрати складно, то для розв'язування ДР-2 застосовують наближені методи.

Приклад 60. Знайти загальний розв'язок ДР-2

$$y y'' + \left(y'\right)^2 = x.$$

Розв'язання. Для зниження порядку заданого Д-2 застосуємо заміну: $y y' = p$. Тоді $p' = \left(y'\right)^2 + y \cdot y''$. Підставимо заміну в рівняння. Маємо ДР-1 $p' = x$. Розв'язком його є $p = \frac{x^2}{2} + C_1$.

Замість p підставимо вираз із заміни: $y y' = \frac{x^2}{2} + C_1$. Інтегруємо рівняння $\int y\,dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx$.

Загальний інтеграл заданого ДР-2: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$.

Відповідь: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$.

Зауваження 3.5. Розглянуті в п. 3.2 методи інтегрування ДР-2, що допускають зниження порядку, можуть бути застосовані для інтегрування диференціальних рівнянь порядку вище другого, якщо вони допускають зниження порядку.

3.2.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язки заданих диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку

Завдання	Відповідь
1. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$	$y = \mathrm{e}^{C_1 x+1}\left(\dfrac{x}{C_1} - C_1^{-2}\right) + C_2$
2. $yy'' + (y')^2 = 1$	$(x + C_2)^2 = y^2 + C_1^2$
3. $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$	$y = \dfrac{x^3}{3} + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2$
4. $\left(1 - x^2\right) y'' = xy'$	$y = C_1 \cdot \arcsin x + C_2$
5. $y''(1 + y) = 5(y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ -0{,}25\,(y+1)^{-4} = C_1 x + C_2 \end{array}\right.$
6. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$	$-\sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2$
7. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ y = -\operatorname{arcctg}\left(C_1 x + C_2\right) \end{array}\right.$
8. $\left(1 + x^2\right) \cdot y'' + y'^2 + 1 = 0$	$y = \left(\ln\lvert C_1 + x\rvert \left(1 + C_1^2\right) - C_1 x\right) / C_1^2 + C_2$
9. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$	$y = 2\sqrt{2\,(x + C_1)^3} \cdot \dfrac{3x - 2C_1}{15} + C_2$
10. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$	$y = \dfrac{C_1 x}{2} - \dfrac{C_1 \sin 2x}{4} - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C_2$
11. $y'' + (y')^2 = 2\mathrm{e}^{-y}$	$\mathrm{e}^{y} + \dfrac{C_1}{4} = (x + C_2)^2$

Завдання	Відповідь
11. $y y'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ \frac{1}{C_1} \cdot \ln\left\lvert \frac{y}{y+C_1} \right\rvert = x + C_2 \end{array}\right.$
12. $2y y'' - 3(y')^2 = 4y^2$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{C_1 y - 4}}{2} = x + C_2$
13. $y y'' - yy' \cdot \ln y = (y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ x + C_2 = \frac{\sqrt{2C_1}}{C_1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\ln y}{\sqrt{2C_1}} \end{array}\right.$
14. $y y''(\ln y - 1) = (1 + \ln y)(y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ 1 = (1 - \ln y)(C_1 x + C_2) \end{array}\right.$
15. $\begin{array}{l} x y'' = y' + x^2 yy', \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2 \end{array}$	$y = 2 \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{2}$
16. $y'' + 2y''y \ln y' - 1 = 0$	$x = t(2\ln t - 1) + C_1,\ y = t^2 \ln t + C_2$
17. $x y y'' - x(y')^2 = yy'$	$y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 \frac{x^2}{2}}$
18. $(y'')^2 - 4xy'' + 4y' = 0$	$\left[\begin{array}{l} y = C_1 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} C_1^2 x + C_2, \\ y = \frac{x^3}{3} + C_3 \end{array}\right.$
19. $2y'' = -\sqrt{\left(1 + (y')^2\right)^3}$	$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 4$
20. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$	$x = \mathrm{e}^t,\ y^2 = C_1(t + C_2)^2 + \frac{1}{4C_1}$
21. $y'' = \sin x + x$	$y = -\sin x + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$
22. $y y'' = 2(y')^2 - 4y^2 (y')^3$	$\frac{y^3}{3} + \frac{C_1}{y} = x + C_2$

Завдання	Відповідь
23. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$	$y = C_2 x \mathrm{e}^{-\frac{C_1}{x}}$
24. $2yy'' = (y')^2 + y^2$	$y = C_2 \cdot \dfrac{C_1 \mathrm{e}^{x} + 1}{C_1^2 \cdot \mathrm{e}^{x}}$, $y = C_1 \mathrm{e}^{\pm x}$

3.3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

***Означення* 3.7**. Диференціальне рівняння вигляду

$$p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = g(x) \tag{3.29}$$

називається *лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі змінними коефіцієнтами*.

Воно лінійне відносно функції y та її похідних y' і y''. Функції $p_i(x)$ і $g(x)$ – неперервні функції.

Поділимо рівняння (3.29) на $p_1(x) \neq 0$. Матимемо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку* (ЛНДР-2) *зі змінними коефіцієнтами*:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{3.30}$$

де $a_1(x) = \dfrac{p_2(x)}{p_1(x)}$, $a_2(x) = \dfrac{p_3(x)}{p_1(x)}$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{p_1(x)}$.

3.3.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

***Означення* 3.8**. Диференціальне рівняння вигляду

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{3.31}$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого* *порядку* (ЛОДР-2) *зі змінними коефіцієнтами*:

Позначимо вираз лівої частини рівняння (3.31)

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y\,. \tag{3.32}$$

<u>Означення 3.9</u>. Вираз $L(y)$ називається *лінійним диференціальним оператором другого порядку*.

Для нього справедлива властивість:

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2)\,, \tag{3.33}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, y_1, y_2 – довільні двічі диференційовані функції змінної x.

Диференціальне рівняння (3.31) може бути записано у вигляд: $L(y) = 0\cdot$

<u>Теорема 3.2</u> Якщо функції $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ на деякому проміжку (a,b) є розв'язком диференціального рівняння $L(y) = 0$, то розв'язком цього рівняння є також функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ де C_1, C_2 – довільні сталі.

<u>Означення 3.10</u>. Функції $f_1(x),\ f_2(x)$ на проміжку (a,b) називаються *лінійно незалежними*, якщо тотожність $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, де $\alpha_1,\ \alpha_2$ – дійсні числа, виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

<u>Означення 3.11</u>. Якщо α_1 або α_2 одночасно не дорівнюють нулю і виконується тотожність $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \equiv 0$, то функції $f_1(x),\ f_2(x)$ називаються *лінійно залежними на проміжку* (a,b).

<u>Теорема 3.3</u> Якщо функції $f_1(x),\ f_2(x)$ диференційовані і лінійно залежні на проміжку (a,b), то детермінант $W(x)$ на цьому проміжку дорівнює нулю:

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}=0\,. \tag{3.34}$$

Цей детермінант називається *детермінантом Вронського* або *вронскіан*.

***Означення* 3.12**. Два розв'язки рівняння (3.31) y_1, y_2 є лінійно незалежними на відрізку $[a,b]$, якщо їх відношення на цьому відрізку не є сталою, тобто

$$\frac{y_1}{y_2}\neq \mathrm{const}\,.$$

У противному разі розв'язки називаються *лінійно залежними*. Тобто існує стале число λ таке, що $\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$, для $x\in[a,b]$. У цьому випадку $y_1=\lambda\cdot y_2$.

***Теорема* 3.4** Для того, щоб функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ були лінійно незалежними на заданому проміжку (a,b), необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці цього проміжку.

***Теорема* 3.5** Якщо функції $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ є розв'язками диференціального рівняння (3.31) на проміжку (a,b) і лінійно незалежні на цьому проміжку, то визначник Вронського, побудований для цих функцій, в жодній точці проміжку (a,b) не дорівнює нулю.

***Теорема* 3.6** Якщо розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ диференційного рівняння (3.31) є лінійно незалежними на розглядуваному проміжку (a,b), то функція

$$y_{\text{одн}}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{3.35}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

***<u>Означення</u>* <u>3.13</u>**. Система лінійно незалежних розв'язків ЛОДР-2 $y_1(x)$ і $y_2(x)$, на базі якої будуємо загальний розв'язок цього рівняння, називається *фундаментальною системою розв'язків*.

***<u>Зауваження</u>* <u>3.6</u>**. Для ЛОДР-2 (3.31) не існує загальних методів розв'язку. Але, якщо один розв'язок $y_1(x)$ якимось чином знайдено, то можна знайти загальний розв'язок за формулою Абеля:

$$y = y_1\left(\int \frac{C_1}{y_1^2} \mathrm{e}^{-\int a_1(x)dx}\, dx + C_2\right), \tag{3.36}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Якщо треба знайти частинний розв'язок $y_2(x)$, що буде складати разом із $y_1(x)$ фундаментальну систему, то можна у формулі (3.36) покласти $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, оскільки треба знайти частинний розв'язок, отримаємо формулу Ліувілля-Остроградського:.

$$y_2(x) = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} \mathrm{e}^{-\int a_1(x)dx}\, dx\right). \tag{3.37}$$

Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2 може бути записаний за формулою (3.35).

Якщо відомий один частинний ненульовий розв'язок $y_1(x)$ ЛОДР-2 (3.31), то можна понизати порядок рівняння на одиницю заміною

$$y = y_1 \int z dx \Rightarrow z = \left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{3.38}$$

Матимемо $\begin{cases} y' = y_1' \int z dz + y_1 z, \\ y'' = y_1'' \int z dz + 2y_1' z + y_1 z' \end{cases}$. Підставивши вирази в (3.31), отримаємо диференціальне рівняння першого порядку

$$y_1(x)z' + b_1(x)z = 0\,.$$

У деяких випадках частинний розв'язок ЛОДР-2 вдається знайти шляхом підбору. Наприклад, у вигляді многочлена $y_1(x) = x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots$ або показникової функції $y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

У першому випадку знаходимо $y_1'(x) = nx^{n-1} + \ldots$, $y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ та підставляємо знайдені вирази у задане рівняння. Прирівнюємо коефіцієнти при старшому степеню x, тобто при x^n до нуля. З отриманої рівності визначаємо значення степіня n.

У другому випадку знаходимо $y_1'(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, $y_1''(x) = \alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ та підставляємо знайдені вирази у задане рівняння. Після скорочення рівняння на $\mathrm{e}^{\alpha x}$, прирівняємо суму коефіцієнтів при однакових степенях x в отриманому рівнянні до нуля. Матимемо систему. Значення α є розв'язком цієї системи.

Рівняння (3.31) шляхом заміни

$$y = u(x)\cdot z(x) = u\cdot z\,, \tag{3.39}$$

де $z(x)$ невідома функція, може бути зведено до вигляду, що не містить першу похідну. Знайдемо $y' = u'\cdot z + u\cdot z'$, $y'' = u''\cdot z + 2u'\cdot z' + u\cdot z''$ і підставимо в (3.31):

$$uz'' + z'(2u' + a_1(x)u) + z(u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u) = 0\,. \tag{3.40}$$

Якщо $2u' + a_1(x)u = 0$, то коефіцієнт при z' буде нулем. Розв'язуємо рівняння $2u' + a_1(x)u = 0$. Отримаємо $u = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}$.

Підстановка $y(x) = z\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}$ зводить рівняння (3.31) до вигляду:

$$z'' + z\left(a_2(x) - \frac{a_1^2(x)}{4} - \frac{a_1'(x)}{2} \right) = 0\,. \qquad (3.41)$$

Розв'язуючи його, знаходимо $z(x)$ і підставляємо (3.39). Отримаємо загальний розв'язок (3.31).

***<u>Теорема</u>* <u>3.7</u>** Інтегрування лінійного однорідного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами можна привести до інтегрування лінійного рівняння першого порядку – рівняння Ріккаті.

Якщо в (3.31) підставити $y = \mathrm{e}^{\int z dx}$, $z = z(x)$ і $y' = \mathrm{e}^{\int z dx} z$, $y'' = \mathrm{e}^{\int z dx} z^2 + \mathrm{e}^{\int z dx} z'$, то отримаємо рівняння виду

$$z' + z^2 + a_1(x)z + a_2(x) = 0\,. \qquad (3.42)$$

Це рівняння Ріккаті.

***<u>Зауваження</u>* <u>3.7</u>**. Інколи ЛОДР-2 зі змінними коефіцієнтами (3.31) можна привести до ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами, якщо це можливо, то тільки за допомогою підстановки $t = C \int \sqrt{a_2(x)}dx$, де t – новий аргумент.

***<u>Зауваження</u>* <u>3.8</u>**. Зазначимо, що, знаючи один частинний розв'язок ЛОДР-2, можна, застосовуючи заміну шуканої функції $y = y_1 \int u(x)dx$ або $y = y_1 z$ і $z' = u$, знизити його порядок, отже, і порядок відповідного ЛНДР-2 на одиницю. Отримане рівняння щодо $u(x)$ знову буде лінійним.

Приклад 61. Перевірити, що функція $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком заданого ДР-2 $y''\left(x^2 + 2\right) - 2xy' + 2y = 0$. Знайти загальний розв'язок заданого ЛОДР-2 зі змінними коефіцієнтами.

Розв'язання. Поділимо рівняння на $\left(x^2+2\right)$. Матимемо $y''\underbrace{-\frac{2x}{x^2+2}}_{a_1(x)}y'+\underbrace{\frac{2}{x^2+2}}_{a_2(x)}y=0$. Функції $a_1(x)=-\frac{2x}{x^2+2}$ і $a_2(x)=\frac{2}{x^2+2}$ є неперервні, тобто розв'язок ДР-2 існує в області $(-\infty,\infty)$. Підставимо $y_1(x)=x$ у задане ДР-2. Матимемо тотожність. Тому $y_1(x)=x$ є розв'язком заданого ДР-2.

Знайдемо другий частинний розв'язок за формулою (3.37). Спочатку знайдемо $\int a_1(x)x=-\int\frac{2x}{x^2+2}dx=-\ln\left(x^2+2\right)$.

<u>Зауваження 3.9</u>. Сталу C при обчисленні невизначеного інтегралу можна не додавати, оскільки знаходимо частинний розв'язок.

Знайдемо $\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int a_1(x)dx}\,dx=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\ln\left(x^2+2\right)}\,dx=\int\frac{x^2+2}{x^2}dx=x-\frac{2}{x}$.

Сталу C не додаємо (Зауваження 3.9). Тоді другий частинний розв'язок $y_2(x)=x\cdot\left(x-\frac{2}{x}\right)=x^2-2$. Перевіримо незалежність частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Обчислимо для них визначник Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2+2=x^2+2\neq 0,\ \forall x\in(-\infty;\infty).$$

В розглядуваній області $y_1(x)=x$ і $y_2(x)=x^2-2$ лінійно незалежні. За теоремою 3.6 загальний розвязок заданого ДР-2 $y_{\text{одн}}=C_1x+C_2\left(x^2-2\right)$.

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1x+C_2\left(x^2-2\right)$.

Приклад 62. Знайти загальний розв'язок заданого ЛОДР-2 зі змінними коефіцієнтами $x(x-1)y''-xy'+y=0$.

Розв’язання. Знайдемо частинний розв’язок заданого ЛОДР-2 шляхом підбору. Шукатимемо його у вигляді многочлена $y_1(x)=x^n+\dots$. Тоді $y_1'(x)=nx^{n-1}+\dots$, $y_1''(x)=n(n-1)x^{n-2}+\dots$ Підставимо знайдені вирази у задане рівняння і прирівняємо коефіцієнти при старшому степеню x, тобто при x^n до нуля. Матимемо $n(n-1)-n+1=0 \Rightarrow n=1$. Маємо перший частинний розв’язок $y_1(x)=x$.

Записуємо задане рівняння за формулою (3.31):

$$y''-\frac{1}{x-1}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0, \text{ де } a_1(x)=-\frac{1}{x-1},\ a_2(x)=\frac{1}{x(x-1)}.$$

Знайдемо другий частинний розв’язок за формулою (3.37).

$$y_2(x)=x\left(\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x-1}dx}\,dx\right)=x\left(\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\ln|(-1)|}\,dx\right)=x\left(\int\frac{x-1}{x^2}dx\right)=$$

$$=x\left(\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx\right)=x\left(\ln|x|+\frac{1}{x}\right)=x\ln|x|+1.$$

Загальний розв’язок заданого ЛОДР-2 зі змінними коефіцієнтами записуємо за формулою (3.32) $y_{\text{одн}}=C_1x+C_2(x\ln|x|+1)$.

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1x+C_2(x\ln|x|+1)$.

Приклад 63. Знайти загальний розв’язок заданого ЛОДР-2 зі змінними коефіцієнтами $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=0$.

Розв’язання. Знайдемо частинний розв’язок заданого ЛОДР-2 шляхом підбору. Шукатимемо його у вигляді $y_1(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$. Тоді $y_1'(x)=\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, $y_1''(x)=\alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}$. Підставимо знайдені вирази у задане рівняння. Скоротимо рівняння на $\mathrm{e}^{\alpha x}$ та прирівняємо суму коефіцієнтів при однакових степенях x в отриманому рівнянні до нуля:

$$(2x+1)\alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha x}+(2x-1)\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha x}-2\,\mathrm{e}^{\alpha x}=0\Big|:\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Тоді $2\alpha^2 x+\alpha^2+2\alpha x-\alpha-2\equiv 0$, якщо $\begin{cases}2\alpha^2+2\alpha=0,\\ \alpha^2-\alpha-2=0.\end{cases}\Rightarrow \alpha=-1$.

Маємо перший частинний розв'язок $y_1(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

Записуємо задане рівняння за формулою (3.31):

$$y''+\frac{2x-1}{2x+1}y'-\frac{2}{2x+1}y=0\text{, де } a_1(x)=\frac{2x-1}{2x+1},\ a_2(x)=-\frac{2}{2x+1}.$$

Загальний розв'язок знайдемо за формулою (3.36).

$$y_{\text{одн}}=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\frac{C_1}{\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-\int\frac{2x-1}{2x+1}dx}\,dx+C_2\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\int\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-x+\ln|2x+1|}\,dx+C_2\right)=$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\int\mathrm{e}^{x}(2x+1)dx+C_2\right)=\begin{bmatrix}u=2x+1, & du=2dx,\\ dv=\mathrm{e}^{x}dx, & v=\mathrm{e}^{x}.\end{bmatrix}=$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\left(\mathrm{e}^{x}(2x+1)-2\int\mathrm{e}^{x}\,dx\right)+C_2\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(C_1\left(\mathrm{e}^{x}(2x+1)-2\mathrm{e}^{x}\right)+C_2\right)=$$

$$=C_1(2x-1)+C_2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1(2x-1)+C_2\,\mathrm{e}^{-x}$.

3.3.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо ЛНДР-2 (3.30).

<u>Теорема 3.8</u> Якщо $\overline{y}(x)$ – частинний розв'язок ЛНДР-2, то загальний розв'язок y цього рівняння є сумою загального розв'язку $y_{\text{одн}}$ відповідного ЛОДР-2 і частинного розв'язку $\overline{y}(x)$ ЛНДР-2:

$$y=y_{\text{одн}}+\overline{y}(x). \tag{3.43}$$

ЛНДР-2 може бути розв'язане методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Суть метода полягає в тому, що розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді (3.35) відповідного ЛОДР-2, але C_1 і C_2 вважаємо невідомими функціями: $C_i = C_i(x),\ i = 1,2$. Матимемо

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \tag{3.44}$$

Підберемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ так, щоб функція (3.44) була розв'язком рівняння (3.30). Знайдемо похідну y':

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Поставимо вимогу, щоб $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняли рівність

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{3.45}$$

При виконанні цієї умови $y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$. Знайдемо другу похідну y'':

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо значення y, y', y'' в рівняння (3.30) і згрупуємо доданки:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)L(y_1) + C_2(x)L(y_2) = f(x).$$

Враховуючи, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки ЛОДР-2, $L(y_1) = 0$ і $L(y_2) = 0$, матимемо

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{3.46}$$

Отже, рівняння (3.45) і (3.46) складають систему, в якій невідомими є похідні $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{3.47}$$

Визначник системи $W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$. Система (3.47) має єдиний розв'язок відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, а саме

$$C_1'(x)=\varphi(x) \text{ і } C_2'(x)=\psi(x), \tag{3.48}$$

де $\varphi(x)=-\dfrac{f(x)y_2(x)}{W(x)}$ і $\psi(x)=\dfrac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$.

Інтегруючи рівняння (3.48), знайдемо шукані функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1(x)=-\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx, \qquad C_2(x)=\int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx \tag{3.49}$$

Матимемо загальний розв'язок рівняння (3.30):

$$y=\left(-\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx+C_1\right)y_1(x)+\left(\int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx+C_2\right)y_2(x). \tag{3.50}$$

Якщо в (3.50) розкрити дужки та згрупувати доданки, то матимемо $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}(x)$, де

$y_{\text{одн}}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2,

$$\overline{y}(x)=-y_1(x)\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dx \tag{3.51}$$

– частинний розв'язок ЛНДР-2.

Приклад 65. Знайти загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 зі змінними коефіцієнтами $x^2y''-2x\,y'+2y=2x^3$.

Розв'язання. Для знаходженні загального розв'язку заданого ЛНДР-2 застосуємо метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Знайдемо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 $x^2 y'' - 2x\,y' + 2y = 0$. Частинний розв'язок заданого ЛОДР-2 визначимо шляхом підбору. Шукатимемо його у вигляді многочлена $y_1(x) = x^n + \ldots$. Тоді $y_1'(x) = nx^{n-1} + \ldots$, $y_1''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$ Підставимо знайдені вирази у задане рівняння і прирівняємо коефіцієнти при старшому степеню x, тобто при x^n до нуля. Матимемо $n(n-1) - 2n + 2 = 0 \Rightarrow n_1 = 1,\ n_2 = 2$. Маємо перший частинний розв'язок $y_1(x) = x$ або $y_1(x) = x^2$. Обидва значення задовольняють ЛОДР-2, тобто вони є його частинними розв'язками. Їх лінійну незалежність можна перевірити, побудувавши для них визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0,\ \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

Слід звернути увагу, що у випадку $x = 0$, отримаємо тотожність підставляючи $y = 0$ в ЛОДР-2. Тому загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.35) $y_{\text{одн}} = C_1 x + C_2 x^2$.

Зауважимо, що другий частинний розв'язок ЛОДР-2 можна було знайти за формулою (3.37).

Записуємо задане ЛНДР-2 у вигляді $y'' - \dfrac{2}{x}\,y' + \dfrac{2}{x^2}\,y = 2x$, де $f(x) = 2x$. Згідно формули (3.44) загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$y = C_1(x) \cdot x + C_2(x) \cdot x^2,$$

де невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо, розв'язуючи систему (3.47), складену відносно похідних цих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x)x^2 = 0, \\ C_1'(x) \quad + C_2'(x)2x = 2x. \end{cases}$$

Розв'язок системи можна знайти за формулами Крамера або знайдемо з першого рівняння $C_1'(x) = -C_2'(x)x$ і підставимо в друге рівняння. Отримаємо $C_2'(x) = 2$. Тоді $C_1'(x) = -2x$. Інтегруємо отримані рівняння. Матимемо $C_2(x)=2x+C_2$, $C_1(x)=-x^2+C_1$. Тоді загальний розв'язок заданого ЛНДР-2

$$y=\left(-x^2+C_1\right)\cdot x+\left(2x+C_2\right)\cdot x^2=C_1x+C_2x^2+x^3.$$

Відповідь: $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

3.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Рівняння Ейлера

***Означення* 3.14**. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y''+a_1y'+a_2y=0, \tag{3.52}$$

де a_1, a_2 – дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами* (ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами).

Загальним розв'язком рівняння (3.52) є

$$y_{\text{одн}}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{3.53}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв`язки рівняння (3.52), які лінійно незалежні, C_1, C_2 –довільні сталі.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (3.52) методом Ейлера, а саме, у вигляді:

$$y=\mathrm{e}^{kx}, \tag{3.54}$$

де k – деяке невизначене число (дійсне чи комплексне). Знайдемо похідні: $y'=k\,\mathrm{e}^{kx}$, $y''=k^2\,\mathrm{e}^{kx}$. Підставимо y, y', y'' у рівняння (3.52), винесемо e^{kx} за дужки. У лівій частині рівняння матимемо лінійний диференціальний оператор відносно функції e^{kx}:

$$L\left(\mathrm{e}^{kx}\right)=k^2\,\mathrm{e}^{kx}+a_1k\,\mathrm{e}^{kx}+a_2\,\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{kx}\left(k^2+a_1k+a_2\right).$$

Функція (3.54) є розв'язком диференціального рівняння (3.52) тоді і тільки тоді, коли многочлен $P(k)=k^2+a_1k+a_2$ дорівнює нулю, тобто

$$k^2+a_1k+a_2=0. \qquad (3.55)$$

Означення 3.15. Многочлен $P(k)=k^2+a_1k+a_2$ називають *характеристичним многочленом* диференціального рівняння (3.52), а рівняння $P(k)=0$ – *характеристичним рівнянням* диференціального рівняння (3.52). Корені рівняння (3.55) називають *характеристичними числами*.

Розв’язком рівняння (3.55) є $k_{1,2}=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2}$, де дискримінант $D=(-a_1)^2-4a_2$. Розв’язок представимо у вигляді:

$$k_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(-a_1)^2}{4}-a_2}\text{ , де } D=\frac{(-a_1)^2}{4}-a_2.$$

Маємо три випадки відносно дискримінанта.

а) $D>0\Rightarrow k_1,k_2$ – корені дійсні різні.

Диференціальне рівняння (3.52) при цьому має два різні розв’язки: $y_1=\mathrm{e}^{k_1x}$ і $y_2=\mathrm{e}^{k_2x}$. Побудуємо детермінант Вронського (3.34) для цих розв’язків:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{k_1x} & \mathrm{e}^{k_2x}\\ k_1\mathrm{e}^{k_1x} & k_2\,\mathrm{e}^{k_2x}\end{vmatrix}=(k_2-k_1)\cdot\mathrm{e}^{(k_2+k_1)x}\neq 0.$$

Отже розв’язки y_1 і y_2 є лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty;\infty)$.

Загальний розв’язок ЛОДР-2 при $k_1\neq k_2$ має вигляд:

$$y_{\text{одн}}=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}. \qquad (3.56)$$

б) $D=0\Rightarrow k_1=k_2=k$ – корені дійсні рівні.

Дістанемо одне характеристичне число $k=-\dfrac{a_1}{2}$. Отже, диференціальне рівняння (3.52) має розв'язок $y_1=\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}$.

Доведемо, що розв'язком диференціального рівняння (3.52) є також функція $y_2=x\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}$. Знайдемо похідні:

$$y_2'=\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}\left(1-x\cdot\frac{a_1}{2}\right),\ y_2''=-a_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}+x\cdot\frac{a_1^2}{4}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}.$$

Підставимо y_2, y_2', y_2'' у ліву частину рівняння (3.52):

$$L(y_2)=y_2''+a_1y_2'+a_2y_2=-a_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}+x\frac{a_1^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}+a_1\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}\left(1-x\cdot\frac{a_1}{2}\right)+$$

$$+a_2x\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}=\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}\left(a_2x-x\cdot\frac{a_1^2}{4}\right)=x\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}\left(a_2-\frac{a_1^2}{4}\right).$$

Оскільки $\dfrac{a_1^2}{4}-a_2=0\ \Rightarrow\ a_2=\dfrac{a_1^2}{4}$, то $L(y_2)=x\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x}\left(a_2-\dfrac{a_1^2}{4}\right)=0$.

Доведемо, що розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty;\infty)$. Побудуємо детермінант Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{kx} & x\,\mathrm{e}^{kx}\\ k\,\mathrm{e}^{kx} & \mathrm{e}^{kx}+kx\,\mathrm{e}^{kx}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2kx}\neq 0.$$

Отже, загальний розв'язок ЛОДР-2 при $k_1=k_2=k$ записується у вигляді:

$$y_{\text{одн}}=e^{kx}\left(C_1+C_2x\right). \qquad (3.57)$$

в) $D<0\ \Rightarrow \dfrac{a_1^2}{4}-a_2<0$. Враховуючи, що $\sqrt{-1}=i$ – уявна одиниця, матимемо

$$\sqrt{D}=\sqrt{-\left(a_2-\frac{(-a_1)^2}{4}\right)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a_2-\frac{(-a_1)^2}{4}}=i\sqrt{a_2-\frac{(-a_1)^2}{4}}$$

і $k_{1,2}=\frac{-a_1}{2}\pm i\sqrt{a_2-\frac{(-a_1)^2}{4}}$. Позначимо $\alpha=\frac{-a_1}{2}$, $\beta=\sqrt{a_2-\frac{(a_1)^2}{4}}$.

Тоді $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, де $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$ – корені комплексно-спряжені. Цим кореням відповідають дві функції y_1 і y_2.

Застосуємо формулу Ейлера:

$$y=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot\mathrm{e}^{i\beta x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

і запишемо функції y_1 і y_2:

$$y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\qquad y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння (3.52). Це можна перевірити, підставляючи їх по черзі в рівняння (3.52). Вони є лінійно незалежними. Побудуємо для них визначник Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\\ \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) & \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)\end{vmatrix}=\beta\,\mathrm{e}^{2\alpha x}\neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2 при $k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ записується у вигляді:

$$y_{\text{одн}}=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \tag{3.58}$$

***<u>Зауваження</u>* <u>3.10</u>**. Аналогічно розв'язуються ЛОДР зі сталими коефіцієнтами порядку вище другого.

Однорідні рівнянням Ейлера другого порядку

***<u>Означення</u>* <u>3.16</u>**. Диференціальне рівняння вигляду:

$$a_0x^2y''+a_1xy'+a_2y=0, \tag{3.59}$$

де a_0, a_1, a_2 – сталі числа, називається *однорідним рівнянням Ейлера другого порядку*.

Рівняння (3.59) зводяться до ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами шляхом заміни:

$$x = \mathrm{e}^t \ \left(x > 0\right) \text{ і } x = -\mathrm{e}^t \ \left(x < 0\right). \tag{3.60}$$

Нехай $x > 0$. Тоді $y' = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{\mathrm{e}^t}$, $y'' = \dfrac{d\,y'}{d\,x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$. Підставляючи вирази для x, y', y'' в (3.59) отримаємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами.

Оскільки частинні розв'язки (3.59) мають вигляд $y = \mathrm{e}^{kt}$, то розв'язки (3.59) можна шукати у вигляді $y = x^k$, так як $\mathrm{e}^{kt} = x^k$. Знаходимо $y' = k\,x^{k-1}$, $y'' = k\left(k-1\right)x^{k-2}$. Після підстановки y, y', y'' в рівняння (3.59) і скорочення на x^k отримаємо для нього характеристичне рівняння $a_0 k\left(k-1\right) + a_1 k + a_2 = 0$. Знаходимо його корені $k_{1,2}$.

Якщо $k_1 \neq k_2$ – дійсні, то розв'язок рівняння (3.59) має вигляд

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot x^{k_1} + C_2 \cdot x^{k_2}. \tag{3.61}$$

Якщо $k_1 = k_2 = k$ – дійсні, рівні, то розв'язок рівняння (3.59) має вигляд

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot x^k + C_2 \cdot x^k \ln x = x^k \left(C_1 + C_2 \ln x\right). \tag{3.62}$$

Якщо $k_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$ – комплексно-спряжені, то розв'язок рівняння (3.59) має вигляд

$$\begin{aligned} y_{\text{одн}} &= C_1 x^\alpha \cos\left(\beta \ln x\right) + C_2 x^\alpha \sin\left(\beta \ln x\right) = \\ &= x^\alpha \left(C_1 \cos\left(\beta \ln x\right) + C_2 \sin\left(\beta \ln x\right)\right). \end{aligned} \tag{3.63}$$

<u>Означення</u> **<u>3.17</u>**. Диференціальне рівняння вигляду:

$$a_0(ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_2 y = 0\,, \tag{3.64}$$

де a_0, a_1, a_2, a, b – сталі числа, називається *узагальненим однорідним рівнянням Ейлера другого порядку*.

Рівняння (3.64) зводяться до рівняння (3.59) заміною незалежної змінної $ax+b=x_1$. Частинні розв'язки рівняння (3.64) можна шукати у вигляді $y=(ax+b)^k$ або привести до ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами шляхом заміни:

$$ax+b=\mathrm{e}^t \ \ (ax+b>0) \text{ і } ax+b=-\mathrm{e}^t \ \ (ax+b<0).$$

Нехай $ax+b>0$, тоді $y'=a\,\mathrm{e}^{-t}\,y'_t$, $y''=\dfrac{d\,y'}{d\,x}=a^2\,\mathrm{e}^{-2t}\left(y''_{tt}-y'_t\right)$.

Підставляючи вирази для x, y', y'' в (3.64) отримаємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами.

<u>Зауваження</u> **<u>3.11</u>**. Аналогічно розв'язуються однорідні рівнянням Ейлера порядку вище другого.

Приклад 66. Знайти загальний розв'язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y''+4y'-5y=0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2+4k-5=0$ і знайдемо його корені: $D=16+4\cdot 5=36; \sqrt{D}=6$.

$$k_1=\frac{-4+6}{2}=1, \quad k_2=\frac{-4-6}{2}=-5\,.$$

Маємо $k_1 \ne k_2$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56)

$$y_{\text{одн}}=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{-5x}\,.$$

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1\,\mathrm{e}^x+C_2\,\mathrm{e}^{-5x}$.

Приклад 67. Знайти частинний розв’язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами: $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 2;\ y'(0) = 6$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0$. Знайдемо його корені: $D = 64 - 4 \cdot 16 = 0$, $k_1 = k_2 = 4$. Маємо випадок рівних коренів ЛОДР-2.

Записуємо загальний розв’язок ЛОДР-2 за формулою (3.57)

$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{4x}.$$

Для знаходження частинного розв’язку визначимо сталі C_1 і C_2, застосовуючи початкові умови. Знайдемо

$$y'_{\text{одн}} = C_2 \cdot \mathrm{e}^{4x} + (C_1 + C_2 x) \cdot 4\mathrm{e}^{4x}.$$

Тоді $y(0) = 2 \Rightarrow 2 = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot 0} \Rightarrow C_1 = 2$,

$$y'(0) = 6 \Rightarrow 6 = C_2\, \mathrm{e}^{4 \cdot 0} + (2 + C_2 \cdot 0) \cdot 4 \cdot \mathrm{e}^{4 \cdot 0} \Rightarrow C_2 = -2.$$

Частинний розв’язок заданого ЛОДР-2 $y_{\text{одн,част}} = (2 - 2x)\mathrm{e}^{4x}$.

Відповідь: $y_{\text{одн,част}} = (2 - 2x)\mathrm{e}^{4x}$.

Приклад 68. Знайти загальний розв’язок ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами: $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4k + 5 = 0$. Знайдемо його корені: $D = 16 - 4 \cdot 5 = -4$, $\sqrt{D} = 2i$. Тоді

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i \text{ – корені комплексно-спряжені.}$$

Маємо $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Записуємо загальний розв`язок ЛОДР-2 за формулою (3.58)

$$y_{\text{одн}} = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Відповідь: $y_{\text{одн}} = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Приклад 69. Знайти загальний розв’язок ЛОДР-5 зі сталими коефіцієнтами: $y^V + 8y'' = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^5 + 8k^2 = 0$. Знайдемо його корені:

$$k^2 \cdot \left(k^3+8\right)=0 \Rightarrow k^2 \cdot (k+2) \cdot \left(k^2-2k+4\right)=0 .$$

Матимемо $\left[\begin{array}{c} k^2=0, \\ k+2=0, \\ k^2-2k+4=0 \end{array}\right.$. З першого рівняння отримаємо $k_{1,2}=0$, з другого – $k_3=-2$ і для третього рівняння $k^2-2k+4=0$: $D=4-4\cdot4=-12$, $\sqrt{D}=2\sqrt{3}\,i$ $\Rightarrow$ $k_{4,5}=\dfrac{2\pm2\sqrt{3}\,i}{2}=1\pm\sqrt{3}\,i$, де $\alpha=1,\ \beta=\sqrt{3}$. Загальний розв`язок заданого ЛОДР-5 знайдемо для $k_{1,2}=0$ за формулами (3.57), для $k_3=-2$ за формулами (3.56), для $k_{4,5}=1\pm\sqrt{3}\,i$ за формулами (3.58):

$$y_{\text{одн}}=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{x}\left(C_4\cos\sqrt{3}\,x+C_5\sin\sqrt{3}\,x\right).$$

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1+C_2x+C_3\,\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{x}\left(C_4\cos\sqrt{3}\,x+C_5\sin\sqrt{3}\,x\right).$

Приклад 70. Знайти загальний розв’язок ЛОДР-4 зі сталими коефіцієнтами: $y^{IV}-16y=0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^4-16=0$. Знайдемо його корені: $k^4=16 \Rightarrow k^2=4,\ k^2=-4$ або $k_{1,2}=\pm2$, $k_{3,4}=\pm2i$.

Загальний розв`язок заданого ЛОДР-4 знайдемо для $k_{1,2}=\pm2$ за формулами (3.56), для $k_{3,4}=\pm2i$ ($\alpha=0,\ \beta=2$) за формулами (3.58):

$$y_{\text{одн}}=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2\,\mathrm{e}^{2x}+C_3\cos2x+C_4\sin2x .$$

Відповідь: $y_{\text{одн}}=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2\,\mathrm{e}^{2x}+C_3\cos2x+C_4\sin2x$.

Приклад 71. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку: $x^2y''+2xy'-12y=0$.

Розв’язання. Це однорідне рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо заміну $y = x^k$. Знаходимо $y' = k x^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Підставляємо в задане рівняння та скорочуємо на x^k.

Отримаємо характеристичне рівняння: $k(k-1) + 2k - 12 = 0$. Розкриємо дужки і приведемо подібні: $k^2 + k - 12 = 0$ Знайдемо його корені: $k_1 = -4$, $k_2 = 3$. За формулою (3.61) записуємо загальний розв`язок $y_{\text{одн}} = C_1 x^{-4} + C_2 x^3$.

Відповідь: $y_{\text{одн}} = C_1 x^{-4} + C_2 x^3$.

Приклад 72. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку: $x^2 y'' + 5x y' + 8y = 0$.

Розв’язання. Це однорідне рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо заміну $y = x^k$. Знаходимо $y' = k x^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Підставляємо в задане рівняння та скорочуємо на x^k.

Отримаємо характеристичне рівняння: $k(k-1) + 5k + 8 = 0$. Розкриємо дужки і приведемо подібні: $k^2 + 4k + 8 = 0$. Знайдемо його корені: $k_{1,2} = -2 \pm 2i$. За формулою (3.63) записуємо загальний розв`язок $y_{\text{одн}} = x^{-2}\left(C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x)\right)$.

Відповідь: $y_{\text{одн}} = x^{-2}\left(C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x)\right)$.

Приклад 73. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку: $x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$.

Розв’язання. Це однорідне рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо заміну $y = x^k$. Знаходимо $y' = k x^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Підставляємо в задане рівняння та скорочуємо на x^k.

Отримаємо характеристичне рівняння: $k(k-1) - 3k + 4 = 0$. Розкриємо дужки і приведемо подібні: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Знайдемо його корені: $k_{1,2} = 2$. За формулою (3.62) записуємо загальний розв`язок $y_{\text{одн}} = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \ln x = x^2\left(C_1 + C_2 \ln x\right)$.

Відповідь: $y_{\text{одн}} = x^2\left(C_1 + C_2 \ln x\right)$.

Приклад 74. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку: $x^2 y'' + 5x y' + 8y = 0$.

Розв'язання. Це однорідне рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо заміну $y = x^k$. Знаходимо $y' = k x^{k-1}$, $y'' = k\left(k-1\right)x^{k-2}$. Підставляємо в задане рівняння та скорочуємо на x^k.

Отримаємо характеристичне рівняння: $k\left(k-1\right) + 5k + 8 = 0$. Розкриємо дужки і приведемо подібні: $k^2 + 4k + 8 = 0$. Знайдемо його корені: $k_{1,2} = -2 \pm 2i$. За формулою (3.63) записуємо загальний розв`язок $y_{\text{одн}} = x^{-2}\left(C_1 \cos\left(2\ln x\right) + C_2 \sin\left(2\ln x\right)\right)$.

Відповідь: $y_{\text{одн}} = x^{-2}\left(C_1 \cos\left(2\ln x\right) + C_2 \sin\left(2\ln x\right)\right)$.

3.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Рівняння Ейлера

***Означення* 3.18**. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f\left(x\right), \tag{3.65}$$

де a_1, a_2 – дійсні числа, $f\left(x\right)$ – функція змінної x, неперервна на деякому проміжку $\left(a,b\right)$, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами* (ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами):

Загальний розв'язок цього рівняння згідно з *теоремою 3.8* складається із суми загального розв'язку відповідного ЛОДР-2 та частинного розв'язку ЛНДР-2 (3.42):

$$y = y_{\text{одн}} + \overline{y},$$

де $y_{\text{одн}}$ – загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами, $\overline{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами розглянуто вище.

Якщо функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок можна знайти *методом невизначених коефіцієнтів*. Розглянемо окремі випадки вигляду функції $f(x)$ для застосування цього методу.

1) Функція $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен n-го степеню.

Частинний розв'язок $\overline{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot Q_n(x) \cdot x^s, \tag{3.66}$$

де α – відповідає значенню α з функції $f(x)$; $Q_n(x)$ – многочлен такого ж степеню що і многочлен $P_n(x)$, але записаний в загальному вигляді:

$$Q_n(x) = \mathrm{b}_n\, x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

де $b_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$ – невідомі коефіцієнти; s – дорівнює числу збігів α з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2.

Для визначення невідомих коефіцієнтів $b_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$, необхідно знайти $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ та підставити $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Скоротивши отримане рівняння на $\mathrm{e}^{\alpha x}$ при наявності, в лівій і правій частинах рівняння матимемо многочлени. Вважаємо, що вони степеню n. Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів b_i многочлена $Q_n(x)$.

Розглянемо частинні випадки вигляду частинного розв'язку $\overline{y}$ в залежності від α:

а) число $\alpha \neq 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot Q_n(x). \tag{3.67}$$

б) число $\alpha \neq 0$ співпадає з одним коренем характеристичного рівняння, наприклад, $\alpha = k_1$. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = x\,\mathrm{e}^{k_1 x} \cdot Q_n(x). \tag{3.68}$$

в) число $\alpha \neq 0$ співпадає з двома коренями характеристичного рівняння: $\alpha = k_{1,2} = -\frac{a_1}{2}$. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot Q_n(x). \tag{3.69}$$

г) число $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = Q_n(x). \tag{3.70}$$

д) число $\alpha = 0$ співпадає з одним коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = xQ_n(x). \tag{3.71}$$

2) Функція $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, де α, β – дійсні числа; $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени, вони можуть бути і сталими числами, а один із них може тотожно дорівнювати нулю.

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right)\cdot x^s, \qquad (3.72)$$

де α і β – відповідають значенням α і β з функції $f(x)$; $S_k(x)$ і $R_k(x)$ – многочлени степеню k, де $k = \max\{n, m\}$, записані в загальному вигляді; s – дорівнює числу збігів $\alpha \pm \beta i$ з коренями k_i характеристичного рівняння для ЛОДР-2 (збіг може бути, якщо k_i комплексні числа і при цьому їх дійсні і уявні частини відповідно дорівнюють $\alpha \pm \beta i$).

***Зауваження* 3.12**. Вигляд $\overline{y}$ (3.67) зберігається незалежно від того, дорівнює нулю чи ні один із многочленів функції $f(x)$.

Для визначення невідомих коефіцієнтів многочленів $S_k(x)$ та $R_k(x)$, необхідно знати $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ та підставити $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ в задане ЛНДР-2. Скорочуємо отримане рівняння на $e^{\alpha x}$ при наявності. У лівій частині отриманого рівняння групуємо доданки з $\sin\beta x$ і $\cos\beta x$. Прирівнявши множники при $\sin\beta x$ і $\cos\beta x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів многочленів $S_k(x)$ та $R_k(x)$.

Розглянемо частинні випадки вигляду частинного розв'язку $\overline{y}$ в залежності від α та вигляду функції $f(x)$:

а) числа $0 \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, а $P_0(x)$ і $Q_0(x)$ – многочлени 0-степеню. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x. \qquad (3.73)$$

б) числа $0 \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння, а $P_0(x)$ і $Q_0(x)$ – многочлени 0-степеню. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = x\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right). \qquad (3.74)$$

в) числа $0 \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени. Тоді $k = \max\{n, m\}$ і частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = S_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\,. \tag{3.75}$$

г) числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right), \tag{3.76}$$

д) числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок рівняння (3.65) має вигляд:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x\right)\cdot x\,, \tag{3.77}$$

3) Метод суперпозиції розв'язків.

Теорема 3.9. Якщо права частина рівняння (3.65) є сумою декількох функцій, наприклад, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і функції $\overline{y}_i$, $(\,i = 1, 2\,)$ є частинними розв'язками рівнянь. $L(y) = f_i(x)$, $(\,i = 1, 2\,)$, то функція $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$ є частинним розв'язком рівняння (3.65).

4) Якщо функція $f(x)$ в правій частині рівняння (3.65) не відповідає випадкам 1) – 3), то для знаходження загального розв'язку рівняння застосовують метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Нагадаємо його для ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

а) знаходимо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Маємо

$$y_{\text{одн}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – частинні розв'язки ЛОДР-2.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо у вигляді:

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x), \tag{3.78}$$

де $C_1(x)$, $C_2(x)$ – невідомі функції.

б) Складаємо систему рівнянь відносно похідних $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{3.79}$$

Визначник системи – це визначник Вронського для фундаментальної системи частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ЛОДР-2:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Система рівнянь (3.61) має єдиний розв'язок:

$$C_1'(x) = \phi_1(x), \qquad C_2'(x) = \phi_2(x), \tag{3.80}$$

де $\phi_1(x)$ і $\phi_2(x)$ – деякі функції від змінної x. Інтегруючи отримані розв`язки (3.62), матимемо:

$$C_1(x) = \int \phi_1(x) dx + \overline{C}_1 \text{ і } C_2(x) = \int \phi_2(x) dx + \overline{C}_2 \ . \tag{3.81}$$

Знайдені значення $C_1(x)$, $C_2(x)$ підставимо в (3.60). Загальний розв'язок ЛНДР-2 матиме вигляд:

$$y(x) = \left(\int \phi_1(x)\, d\, x + \overline{C_1}\right) \cdot y_1(x) + \left(\int \phi_2(x)\, d\, x + \overline{C_2}\right) \cdot y_2(x). \tag{3.82}$$

***Зауваження* 3.13**.. Метод Лагранжа можна використовувати і у випадках 1) – 3).

***Зауваження* 3.14**. Аналогічно розв'язуються ЛНДР зі сталими коефіцієнтами порядку вище другого..

Неоднорідні рівнянням Ейлера другого порядку

***Означення* 3.19**. Диференціальне рівняння вигляду:

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x), \tag{3.83}$$

де a_0, a_1, a_2 – сталі числа, називається *неоднорідним рівнянням Ейлера другого порядку*, а диференціальне рівняння вигляду:

$$a_0 (ax+b)^2 y'' + a_1 (ax+b) y' + a_2 y = f(x), \tag{3.84}$$

де a_0, a_1, a_2, a, b – сталі числа, називається *узагальненим неоднорідним рівнянням Ейлера другого порядку*.

Рівняння (3.83) можна привести до ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами шляхом заміни: $x = \mathrm{e}^t$ $(x > 0)$ або $x = -\mathrm{e}^t$ $(x < 0)$. Тоді $y' = y'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{\mathrm{e}^t}$, $y'' = \dfrac{d\,y'}{d\,x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2t}}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$. Підставляючи вирази для x, y', y'' в (3.83) отримаємо ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами. Розв'язуємо його. Якщо функція в правій частині отриманого рівняння не відповідає випадкам 1) – 3), розглянутим вище, то для знаходження загального розв'язку застосовуємо метод Лагранжа. Загальним розв'язком ЛНДР-2 є $y(t)$. Робимо зворотну заміну: $t = \ln|x|$. Отримуємо загальний розв'язок $y(x)$.

Рівняння (3.84) розв'язуємо аналогічно, застосовуючи заміну: $ax + b = \mathrm{e}^t$ $(ax + b > 0)$ або $ax + b = -\mathrm{e}^t$ $(ax + b < 0)$.

***Зауваження* 3.15**. Аналогічно розв'язуються неоднорідні рівнянням Ейлера порядку вище другого.

Приклад 75. Знайти загальний розв’язок ЛНДР -2 зі сталими коефіцієнтами $y'' - y' - 6y = \mathrm{e}^{-2x}(x+4)$.

Розв’язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв’язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - y' - 6y = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 - k - 6 = 0$. Знаходимо корені: $k_1 = -2,\ k_2 = 3$. Записуємо загальний розв’язок ЛОДР-2 за формулою (3.56): $y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{3x}$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}(x+4)$, де $\alpha = -2$ і $n = 1$. Тому $Q_1(x) = Ax + B$, $s = 1$, оскільки $k_1 = \alpha$. Частинний розв’язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.68) у вигляді:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^{-2x} \cdot (Ax + B) \cdot x = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \left(Ax^2 + Bx\right).$$

Знайдемо $\overline{y}', \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = -2\mathrm{e}^{-2x}\left(Ax^2 + Bx\right) + \mathrm{e}^{-2x}(2Ax + B) = \mathrm{e}^{-2x}\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right),$$

$$\overline{y}'' = -2\mathrm{e}^{-2x}\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right) + \mathrm{e}^{-2x}(-4Ax - 2B + 2A) =$$
$$= \mathrm{e}^{-2x}\left(4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A\right).$$

Підставимо $\overline{y},\ \overline{y}',\ \overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$\mathrm{e}^{-2x}\left(4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A\right) - \mathrm{e}^{-2x}\left(-2Ax^2 - 2Bx + 2Ax + B\right) -$$
$$- 6\mathrm{e}^{-2x}\left(Ax^2 + Bx\right) = \mathrm{e}^{-2x}(x+4).$$

Поділивши його на e^{-2x}, матимемо рівняння:

$$4Ax^2 + 4Bx - 8Ax - 4B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx = x + 4.$$

Приведемо подібні: $-10Ax - 5B + 2A = x + 4$. Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{c|l} x & -10A=1 \\ x^0 & -5B+2A=4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-0{,}1, \\ B=-0{,}84. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 $\overline{y}=\mathrm{e}^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right)$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right).$$

Відповідь: $y=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2\,\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-2x}\left(-0{,}1x^2-0{,}84x\right)$.

Приклад 76. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами

$$y''+2y'+y=36\mathrm{e}^{-x}, \quad y(0)=8, \; y'(0)=2.$$

Розв'язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд: $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+2y'+y=0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2+2k+1=0$. Знаходимо корені: $k_{1,2}=-1$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.57): $y_{\text{одн}}=\left(C_1+C_2\,x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x)=36\,\mathrm{e}^{-x}$, де $\alpha=-1,\; n=0$. Тому $Q_0(x)=A$, $s=2$, оскільки $k_{1,2}=\alpha$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.69) у вигляді:

$$\overline{y}=Ax^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Знайдемо $\overline{y}'$, $\overline{y}''$:

$$\overline{y}'=-Ax^2\,\mathrm{e}^{-x}+2Ax\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}\left(-Ax^2+2Ax\right),$$

$$\overline{y}''=-\mathrm{e}^{-x}\left(-Ax^2+2Ax\right)+\mathrm{e}^{-x}\left(-2Ax+2A\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(Ax^2-4Ax+2A\right).$$

Підставимо $\overline{y},\;\overline{y}',\;\overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$\mathrm{e}^{-x}\left(Ax^2-4Ax+2A\right)+2\mathrm{e}^{-x}\left(-Ax^2+2Ax\right)+Ax^2\,\mathrm{e}^{-x}=36\mathrm{e}^{-x}.$$

Поділивши його на e^{-x}, матимемо рівняння:

$$Ax^2-4Ax+2A-2Ax^2+4Ax+Ax^2=36 \Rightarrow A=18.$$

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 $\overline{y}=18x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+18x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок ЛНДР-2. Матимемо

$$y'=-(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-18x^2\,\mathrm{e}^{-x}+36x\,\mathrm{e}^{-x}=$$
$$=(C_2-C_1-C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\left(-18x^2+36x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 8=(C_1+C_2\cdot 0)\mathrm{e}^0+18\cdot 0\cdot \mathrm{e}^0, \\ 2=(C_2-C_1-C_2\cdot 0)\mathrm{e}^0+(-18\cdot 0+36\cdot 0)\mathrm{e}^{0x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=8, \\ C_2-C_1=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=8, \\ C_2=10. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2

$$y_{\text{част}}=(8+10x)\mathrm{e}^{-x}+18x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Відповідь: $y_{\text{част}}=(8+10x)\mathrm{e}^{-x}+18x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Приклад 77. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y''+2y'=6x^2+2x+1$.

Розв'язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+2y'=0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2+2k=0$. Знаходимо корені: $k_1=-2,\ k_2=0$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56): $y_{\text{одн}}=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x)=6x^2+2x+1$, де $\alpha=0$ і $n=2$. Тому $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$, $s=1$, оскільки $k_2=\alpha$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.71) у вигляді:

$$\overline{y}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Знайдемо $\overline{y}'$, $\overline{y}''$: $\overline{y}'=3Ax^2+2Bx+C$, $\overline{y}''=6Ax+2B$.

Підставимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$6Ax+2B+2\cdot\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=6x^2+2x+1.$$

Приведемо подібні: $6Ax^2+x\cdot(6A+4B)+2B+2C=6x^2+2x+1$. Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B і C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 6A=6 \\ x & 6A+4B=2 \\ x^0 & 2B+2C=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=1{,}5. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 $\bar{y}=x^3-x^2+1{,}5x$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2+x^3-x^2+1{,}5x.$$

Відповідь: $y=C_1\,\mathrm{e}^{-2x}+C_2+x^3-x^2+1{,}5x$.

Приклад 78. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y''-2y'+5y=x\,\mathrm{e}^x$.

Розв'язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд $y=y_{\text{одн}}+\bar{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''-2y'+5y=0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2-2k+5=0$. $D=(-2)^2-4\cdot5=-16$, $\sqrt{D}=4i$. Тоді

$$k_{1,2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i \text{ – корені комплексно-спряжені.}$$

Маємо $\alpha=1$, $\beta=2$. Записуємо загальний розв`язок ЛОДР-2 за формулою (3.58): $y_{\text{одн}}=\mathrm{e}^x\left(C_1\cos2x+C_2\sin2x\right)$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x)=x\,\mathrm{e}^x$, де $\alpha=1$ і $n=1$. Тому $Q_1(x)=Ax+B$, $s=0$, оскільки $k_{1,2}\neq\alpha$. Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.67) у вигляді:

$$\overline{y} = \mathrm{e}^x \cdot (Ax + B).$$

Знайдемо $\overline{y}'$, $\overline{y}''$:

$\overline{y}' = \mathrm{e}^x (Ax + B) + A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x (Ax + B + A)$,

$\overline{y}'' = \mathrm{e}^x (Ax + B + A) + A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x (Ax + B + 2A)$.

Підставимо $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$\mathrm{e}^x (Ax + B + 2A) + 2\mathrm{e}^x (Ax + B + A) + 5\mathrm{e}^x \cdot (Ax + B) = x\mathrm{e}^x.$$

Поділивши його на e^x, матимемо рівняння:

$$Ax + B + 2A + 2Ax + 2B + 2A + 5Ax + 5B = x.$$

Приведемо подібні: $8Ax + 4A + 8B = x$.

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{c|l} x & 8A = 1 \\ x^0 & 4A + 8B = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0{,}125, \\ B = -0{,}0625. \end{cases}$$

Частинний розв’язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 $\overline{y} = \mathrm{e}^x (0{,}125x - 0{,}0625)$.

Загальний розв’язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \mathrm{e}^x (0{,}125x - 0{,}0625).$$

Відповідь: $y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \mathrm{e}^x (0{,}125x - 0{,}0625)$.

Приклад 79. Знайти загальний розв’язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y'' - 4y' + 53y = 200\cos 7x$.

Розв’язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв’язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 4y' + 53y = 0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2 - 4k + 53 = 0$. Знаходимо корені: $D = 16 - 4 \cdot 53 = 16 - 212 = -196$, $\sqrt{D} = \sqrt{-196} = 14i$, $k_{1,2} = \dfrac{4 \pm 14i}{2} = 2 \pm 7i$. Записуємо загальний розв’язок ЛОДР-2 за формулою (3.58):

$$y_{\text{одн}} = e^{2x}\left(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x\right).$$

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 200\cos 7x$, де $\alpha = 0$, $\beta = 7$, $P_0(x) = 200$, $Q_0(x) = 0$. Тому $k = 0$ і маємо $S_0(x) = A$ та $R_0(x) = B$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm 7i$, а $k_{1,2} = 2 \pm 7i$ (дійсні частини різні), то $s = 0$. Частинний розв'язок $\bar{y}$ заданого ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.73) у вигляді:

$$\bar{y} = A\cos 7x + B\sin 7x.$$

Знайдемо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$:

$$\bar{y}' = -7A\sin 7x + 7B\cos 7x, \qquad \bar{y}'' = -49A\cos 7x - 49B\sin 7x.$$

Підставимо $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-49A\cos 7x - 49B\sin 7x - 4(-7A\sin 7x + 7B\cos 7x) +$$
$$+53(A\cos 7x + B\sin 7x) = 200\cos 7x.$$

У лівій частині отриманого рівняння розкриваємо дужки і групуємо доданки з $\sin 7x$ і $\cos 7x$:

$$\cos 7x(4A - 28B) + \sin 7x(28A + 4B) = 200\cos 7x.$$

Прирівнявши множники при $\sin 7x$ і $\cos 7x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{r|l} \cos 7x & 4A - 28B = 200 \\ \sin 7x & 28A + 4B = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -7. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 $\bar{y} = \cos 7x - 7\sin 7x$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x\right) + \cos 7x - 7\sin 7x.$$

Відповідь: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x\right) + \cos 7x - 7\sin 7x$.

Приклад 80. Знайти частинний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $\quad y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд:

$y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 - 2k + 1 = 0$. Знаходимо корені: $k_{1,2} = 1$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.57): $y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, де $\alpha = 0,\quad \beta = 2,\quad P_0(x) = -12,\ Q_0(x) = -9$. Тому $k = 0$ і маємо $S_0(x) = A$ та $R_0(x) = B$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$, а $k_{1,2} = 1$, то $s = 0$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ заданого ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.73) у вигляді:

$$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Знайдемо $\overline{y}'$, $\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \qquad \overline{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставимо $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ A\cos 2x + B\sin 2x = -12\cos 2x - 9\sin 2x.$$

У лівій частині отриманого рівняння розкриваємо дужки і групуємо доданки з $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$\cos 2x(-3A - 4B) + \sin 2x(4A - 3B) = -12\cos 2x - 9\sin 2x.$$

Прирівнявши множники при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & -3A - 4B = -12 \\ \sin 2x & 4A - 3B = -9 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 3. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 $\overline{y} = 3\sin 2x$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + 3\sin 2x.$$

Знайдемо частинний розв'язок заданого ЛНДР-2. Матимемо

$$y' = C_2\,\mathrm{e}^x + (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + 6\cos 2x.$$

Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} -2 = (C_1 + C_2\cdot 0)\,\mathrm{e}^0 + 3\sin(2\cdot 0), \\ 0 = C_2\cdot \mathrm{e}^0 + (-2 + C_2\cdot 0)\mathrm{e}^0 + 6\cdot\cos(2\cdot 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданого ЛНДР-2

$$y_{\text{част}} = (-2-4x)\mathrm{e}^x + 3\sin 2x.$$

Відповідь: $y_{\text{част}} = (-2-4x)\mathrm{e}^x + 3\sin 2x$.

Приклад 81. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y'' + 2y' = (8x+10)\cos 2x - 2\sin 2x$.

Розв'язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд: $y = y_{\text{одн}} + \overline{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y'' + 2y' = 0$. Характеристичне рівняння для нього: $k^2 + 2k = 0$. Знаходимо корені: $k_1 = 0,\ k_2 = -2$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56): $y_{\text{одн}} = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = (8x+10)\cos 2x - 2\sin 2x$, де $\alpha = 0,\ \ \beta = 2,\ P_1(x) = 8x+10$, $Q_0(x) = -2$. Тому $k = 1$ і маємо $S_1(x) = Ax + B$ та $R_1(x) = Cx + D$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$, а $k_1 = 0,\ k_2 = -2$, то $s = 0$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ заданого ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.75) у вигляді:

$$\overline{y} = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x.$$

Знайдемо $\overline{y}',\ \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = A\cos 2x - 2(Ax+B)\sin 2x + C\sin 2x + 2(Cx+D)\cos 2x =$$
$$= (A + 2Cx + 2D)\cos 2x + (C - 2Ax - 2B)\sin 2x,$$

$$\overline{y}'' = 2C\cos 2x - 2(A + 2Cx + 2D)\sin 2x - 2A\sin 2x + 2(C - 2Ax -$$
$$-\ 2B)\cos 2x = (4C - 4Ax - 4B)\cos 2x - (4A + 4Cx + 4D)\sin 2x$$

Підставимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$(4C-4Ax-4B)\cos 2x-(4A+4Cx+4D)\sin 2x+(2A+4Cx+4D)\cos 2x+$$
$$+(2C-4Ax-4B)\sin 2x=(8x+10)\cos 2x-2\sin 2x.$$

У лівій частині отриманого рівняння розкриваємо дужки і групуємо доданки з $x\sin 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$x\sin 2x(-4A-4C)+x\cos 2x(-4A+4C)+\sin 2x(2C-4B-4A-4D)+$$
$$+\cos 2x(4C-4B+2A+4D)=8x\cos 2x+10\cos 2x-2\sin 2x$$

Прирівнявши множники при $x\sin 2x$, $x\cos 2x$, $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A, B, C і D:

$$\begin{array}{r|l} x\sin 2x & -4A-4C=0 \\ x\cos 2x & -4A+4C=8 \\ \sin 2x & 2C-4B-4A-4D=-2 \\ \cos 2x & 4C-4B+2A+4D=10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} A+C=0, \\ -A+C=2. \end{cases} \\ \begin{cases} 2-4B+4-4D=-2, \\ 4-4B-2+4D=10. \end{cases} \end{array}$$

$$\text{або } \begin{array}{l} \begin{cases} A=-1, \\ C=1. \end{cases} \\ \begin{cases} B+D=2, \\ -B+D=2. \end{cases} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-1, \\ C=1. \end{cases} \text{ і } \begin{cases} B=0, \\ D=2. \end{cases}$$

Частинний розв’язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 $\bar{y}=-x\cos 2x+(x+2)\sin 2x$.

Загальний розв’язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}-x\cos 2x+(x+2)\sin 2x.$$

Відповідь: $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}-x\cos 2x+(x+2)\sin 2x$.

Приклад 82. Знайти загальний розв’язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y''+4y=2\sin 2x$.

Розв’язання. Загальний розв`язок ЛНДР-2 має вигляд: $y=y_{\text{одн}}+\bar{y}$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв’язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+4y=0$.

Характеристичне рівняння для нього: $k^2+4=0$. Знаходимо корені: $k^2 = -4 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.58): $y_{\text{одн}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(x) = 2\sin 2x$, де $\alpha = 0,\quad \beta = 2,\ P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 2$. Тому $k = 0$ і маємо $S_0(x) = A$ та $R_0(x) = B$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ і $k_{1,2} = \pm 2i$, то $s = 1$. Частинний розв'язок $\overline{y}$ заданого ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.74) у вигляді:

$$\overline{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x) \cdot x .$$

Знайдемо $\overline{y}'$, $\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \cdot x + A\cos 2x + B\sin 2x ,$$

$$\overline{y}'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \cdot x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + \\ + 2B\cos 2x = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \cdot x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x .$$

Підставимо $\overline{y}$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ у задане ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \cdot x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + 4(A\cos 2x + \\ + B\sin 2x) \cdot x = 2\sin 2x .$$

У лівій частині отриманого рівняння приводимо подібні. Маємо

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 2\sin 2x .$$

Прирівнявши множники при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & 4B = 0 \\ \sin 7x & -4A = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -0{,}5, \\ B = 0. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 $\overline{y} = -0{,}5x\cos 2x$.

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 0{,}5x\cos 2x .$$

Відповідь: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 0{,}5x\cos 2x$.

Приклад 83. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами $y''+4y'=12x^2-2x+75\sin 3x$.

Розв'язання. В правій частині рівняння функція $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=12x^2-2x$ і $f_2(x)=75\sin 3x$, які відповідають випадкам: 1) – функція $f_1(x)$ і 2) – функція $f_2(x)$.

Загальний розв'язок ЛНДР-2 має вигляд: $y=y_{\text{одн}}+\overline{y}$, де $\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''+4y'=0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2+4k=0$. Знаходимо корені: $k_1=0$, $k_2=-4$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56): $y_{\text{одн}}=C_1+C_2\,e^{-4x}$.

Знайдемо частинні розв'язки $\overline{y}_1$ і $\overline{y}_2$, розв'язуючи рівняння $L(y)=f_1(x)$ і $L(y)=f_2(x)$ відповідно:

а) $y''+4y'=12x^2-2x$. Для функції $f_1(x)=12x^2-2x$ маємо $\alpha=0,\ n=2$. Тому $Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$, $s=1$, оскільки $k_1=\alpha$. Частинний розв'язок $\overline{y}_1$ розв'язуваного ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.71) у вигляді:

$$\overline{y}_1=\left(Ax^2+Bx+C\right)x=Ax^3+Bx^2+Cx.$$

Знайдемо $\overline{y}_1{}'$, $\overline{y}_1{}''$:

$$\overline{y}_1{}'=3Ax^2+2Bx+C,\qquad \overline{y}_1{}''=6Ax+2B.$$

Підставимо $\overline{y}_1{}'$, $\overline{y}_1{}''$ у розв'язуване рівняння. Маємо

$$6Ax+2B+4\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=12x^2-2x.$$

Розкриємо дужки і приведемо подібні:

$$12Ax^2+(6A+8B)x+2B+4C=12x^2-2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B і C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 12A=12 \\ x & 6A+8B=-2 \\ x^0 & 2B+4C=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-1, \\ C=0{,}5. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\bar{y}_1$ рівняння: $\bar{y}_1 = x^3 - x^2 + 0{,}5x$.

б) $y'' + 4y' = 75\sin 3x$. Для функції $f_2(x) = 75\sin 3x$ маємо $\alpha = 0,\ \beta = 3$, $P_0(x) = 0,\ Q_0(x) = 75$. Тому $k = 0$ і маємо $S_0(x) = A$ та $R_0(x) = B$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm 3i$, а $k_1 = 0,\ k_2 = -4$, то $s = 0$. Частинний розв'язок $\bar{y}_2$ розв'язуваного ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.73) у вигляді:

$$\bar{y}_2 = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Знайдемо $\bar{y}_2{}'$, $\bar{y}_2{}''$:

$$\bar{y}_2{}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad \bar{y}_2{}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Підставимо $\bar{y}_2{}'$, $\bar{y}_2{}''$ у розв'язуване рівняння. Маємо

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) = 75\sin 3x.$$

У лівій частині отриманого рівняння розкриваємо дужки і групуємо доданки з $\sin 3x$ і $\cos 3x$:

$$\cos 3x(-9A + 12B) + \sin 3x(-12A - 9B) = 75\sin 3x$$

Прирівнявши множники при $\sin 3x$ і $\cos 3x$ у лівій і правій частинах отриманого рівняння, матимемо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{r|l} \cos 3x & -9A+12B=0 \\ \sin 3x & -12A-9B=75 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=-4, \\ B=-3. \end{cases}$$

Частинний розв'язок $\bar{y}_2$ рівняння $\bar{y}_2 = -4\cos 3x - 3\sin 3x$.

Частинний розв'язок $\bar{y}$ заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = x^3 - x^2 + 0{,}5x - 4\cos 3x - 3\sin 3x.$$

Загальний розв'язок y заданого ЛНДР-2 має вигляд:

$$y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} + x^3 - x^2 + 0{,}5x - 4\cos 3x - 3\sin 3x.$$

Відповідь: $y = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-4x} + x^3 - x^2 + 0{,}5x - 4\cos 3x - 3\sin 3x$.

Приклад 84. Знайти загальний розв'язок ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами: $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ в правій частині рівняння не належить до розглянутих вище випадків 1) – 3). Розв'яжемо задане рівняння методом Лагранжа. Знайдемо загальний розв'язок відповідного ЛОДР-2: $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристичне рівняння для нього $k^2 - 10k + 25 = 0$. Знаходимо корені: $(k-5)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 5$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.57):

$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{5x} = C_1\,\mathrm{e}^{5x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{5x}.$$

Загальний розв'язок ЛНДР-2 шукаємо за формулою (3.78) у вигляді:

$$y = C_1(x)\cdot\mathrm{e}^{5x} + C_2(x)\cdot x\cdot\mathrm{e}^{5x}.$$

Для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему двох рівнянь відносно похідних цих функцій за формулою (3.79):

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\mathrm{e}^{5x} + C_2'(x)\cdot x\cdot\mathrm{e}^{5x} = 0, \\ C_1'(x)\cdot 5\cdot\mathrm{e}^{5x} + C_2'(x)\cdot\left(\mathrm{e}^{5x} + x\cdot 5\cdot\mathrm{e}^{5x}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\sqrt{x^2-4}}. \end{cases}$$

Скоротимо обидва рівняння на e^{5x}. Матимемо:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cdot x = 0, \\ 5C_1'(x) + C_2'(x)\cdot(1+5x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Інтегруємо отримані розв'язки $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}} = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-4}} = -\sqrt{x^2-4} + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + \overline{C}_2.$$

Загальний розв'язок заданого ЛНДР-2 за формулою (3.82) має вигляд:

$$y = \left(-\sqrt{x^2-4} + \overline{C}_1\right)\cdot e^{5x} + \left(\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + \overline{C}_2\right)\cdot x\cdot e^{5x}.$$

Відповідь: $y = \left(-\sqrt{x^2-4} + \overline{C}_1\right)e^{5x} + \left(\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + \overline{C}_2\right)xe^{5x}$.

Приклад 85. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку: $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$.

Розв'язання. Це неоднорідне рівняння Ейлера другого порядку. Зробимо заміну $x = e^t$ $(x > 0)$.

Тоді $y'_x = e^{-t}\,y'_t$, $y''_{xx} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$. Підставимо вирази для x, y', y'' в задане рівняння: $e^{2t}e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) - e^{t}e^{-t}\,y'_t + y = 8e^{3t}$. Після спрощення отримаємо ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами:

$$y''_{tt} - 2y'_t + y(t) = 8e^{3t}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння: $y(t) = y_{\text{одн}}(t) + \overline{y}(t)$.

Знайдемо $y_{\text{одн}}(t)$, розв'язуючи відповідне ЛОДР-2: $y''_{tt} - 2y'_t + y(t) = 0$. Характеристичне рівняння для нього

$k^2-2k+1=0$. Знаходимо корені: $k_{1,2}=1$. Записуємо загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.57): $y_{\text{одн}}(t)=(C_1+C_2t)e^t$.

У правій частині заданого ЛНДР-2 функція $f(t)=8e^{3t}$, де $\alpha=3,\ n=0$. Тому $Q_0(x)=A$, $s=0$, оскільки $k_{1,2}\neq\alpha$. Частинний розв'язок $\overline{y}(t)$ ЛНДР-2 шукатимемо за формулою (3.67) у вигляді:

$$\overline{y}(t)=Ae^{3t}.$$

Знайдемо $\overline{y}',\ \overline{y}''$: $\overline{y}'(t)=3Ae^{3t}$, $\overline{y}''(t)=9Ae^{3t}$.

Підставимо $\overline{y}(t),\ \overline{y}'(t),\ \overline{y}''(t)$ в ЛНДР-2. Отримаємо рівняння:

$$9Ae^{3t}-6Ae^{3t}+Ae^{3t}=8e^{3t}.$$

Поділивши його на e^{3t}, матимемо рівняння: $4A=8\ \Rightarrow\ A=2$.

Частинний розв'язок $\overline{y}(t)$ ЛНДР-2 $\overline{y}(t)=2e^{3t}$.

Загальний розв'язок $y(t)$ ЛНДР-2 має вигляд:

$$y(t)=(C_1+C_2t)e^t+2e^{3t}.$$

Робимо зворотну заміну: $t=\ln|x|$, $x=e^t$. Отримуємо загальний розв'язок $y(x)$ заданого ЛНДР-2:

$$y(x)=(C_1+C_2\ln|x|)\,x+2x^3.$$

Відповідь: $y(x)=(C_1+C_2\ln|x|)\,x+2x^3$.

***Зауваження* 3.16**. Методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, розглянуті у п. **3.3** підпункти **3.3.1, 3.3.2** та методи розв'язування лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами розглянуті у п. **3.4** і **3.5,** можна застосовувати для відповідних диференціальних рівнянь порядку вище другого.

3.6 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язки заданих диференціальних рівнянь другого порядку:

Завдання	Відповідь
1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$	$y = e^{C_1 x+1}\left(\frac{x}{C_1} - C_1^{-2}\right) + C_2$
2. $yy'' + (y')^2 = 1$	$(x + C_2)^2 = y^2 + C_1^2$
3. $y'' - \frac{y'}{x} = x$	$y = \frac{x^3}{3} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$
4. $(1 - x^2)y'' = xy'$	$y = C_1 \cdot \arcsin x + C_2$
5. $y''(1 + y) = 5(y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ -0{,}25\,(y+1)^{-4} = C_1 x + C_2 \end{array}\right.$
6. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$	$-\sqrt{C_1^2 - y^2} = x + C_2$
7. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ y = -\operatorname{arcctg}(C_1 x + C_2) \end{array}\right.$
8. $(1 + x^2) \cdot y'' + y'^2 + 1 = 0$	$y = \left(\ln\lvert C_1 + x\rvert (1 + C_1^2) - C_1 x\right) / C_1^2 + C_2$
9. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$	$y = 2\sqrt{2(x + C_1)^3}\,\frac{3x - 2C_1}{15} + C_2$
10. $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$	$y = \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_1 \sin 2x}{4} - \frac{\sin^3 x}{3} + C_2$
11. $yy'' - (y')^2 = y^2 \cdot y'$	$\left[\begin{array}{l} y = C \\ \frac{1}{C_1} \ln\left\lvert \frac{y}{y + C_1} \right\rvert = x + C_2 \end{array}\right.$

Завдання	Відповідь
12. $2yy''-3(y')^2=4y^2$	$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{C_1y-4}}{2}=x+C_2$
13. $yy''-yy'\cdot\ln y=(y')^2$	$\left[\begin{array}{l} y=C \\ x+C_2=\dfrac{\sqrt{2C_1}}{C_1}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{\ln y}{\sqrt{2C_1}}\end{array}\right.$
14. $yy''(1-\ln y)+(1+\ln y)(y')^2=0$	$\left[\begin{array}{l} y=C \\ 1=(1-\ln y)(C_1x+C_2)\end{array}\right.$
15. $y''-4y'+4y=3\cdot e^{2x}$	$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+1{,}5x^2e^{2x}$
16. $y''+y=2\cos x$	$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x$
17. $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=(2x^2+x)e^x+3e^x-2e^{2x}$
18. $y''-4y'+4y=e^{-x}$	$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{9}e^{-x}$
19. $y''+2y'+2y=16e^x\sin x$	$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+$ $+e^x(-2\cos x+2\sin x)$
20. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\cdot\cos x$	$y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\dfrac{4}{5}x+C_2\sin\dfrac{4}{5}x\right)-$ $-\dfrac{5}{9}e^{\frac{3}{5}x}\cos x$
21. $y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$	$y_{\text{част}}=\dfrac{1}{8}\left(\sin 2x-\cos 2x+e^{-2x}\right)$
22. $y''-4y'+5y=2x^2e^x$, $y(0)=2,\ y'(0)=3$	$y_{\text{част}}=e^{2x}(\cos x-2\sin x)+e^x(x+1)^2$

Завдання	Відповідь
23. $y'' + 4y' = 3e^{-4x}$, $y(0) = 2;\ y'(0) = 0$	$y_{\text{част}} = \frac{35}{16} - \frac{3}{16}e^{-4x} - \frac{3}{4}xe^{-4x}$
24. $y'' - 4y' + 5y = 13\sin 2x$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y_{\text{част}} = e^{2x}(-0{,}6\cos x + 0{,}8\sin x) +$ $+1{,}6\cos 2x + 0{,}2\sin 2x$
25. $y'' - 10y' + 25y = 5x - 27$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$	$y_{\text{част}} = (1 - 6{,}2x)e^{5x} + 0{,}2x - 1$
26. $y'' - y = 2x\sin x$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \cos x - x\sin x$
27. $y'' - 2y' = x^2 - 1$	$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$
28. $y'' + 4y = \cos^2 x$	$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{x\sin 2x}{8}$
29. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$	$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + xe^{-x}$
30. $y'' + y = \operatorname{tg} x$	$y = C_1\cos x + C_2\sin x -$ $-\cos x \cdot \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
31. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$	$y_{\text{част}} = \frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2\cos x}$
32. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$	$y = \left(-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2 + 1\rvert + C_1 + x \cdot \operatorname{arctg} x +\right.$ $\left.+ C_2 x\right)e^x$
33. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{4 - x^2}}$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$	$y_{\text{част}} = \left(\sqrt{4 - x^2} - 2\right)e^{-x} +$ $+ \arcsin\frac{x}{2} \cdot xe^{-x}$

Завдання	Відповідь
34. $x^2 y'' - xy' - 3y = 4x^3$	$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^3 + x^3 \ln\lvert x\rvert$
35. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$	$y = \left(C_1 + C_2 \ln\lvert x-2\rvert\right)(x-2)^2 + x - 1{,}5$

4 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

4.1 Загальні поняття

***Означення* 4.1**. Сукупність співвідношень

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

де x – незалежна змінна; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – невідомі функції від змінної x, а $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – відомі функції, називається *системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку*.

***Означення* 4.2**. Систему (4.1) називають *нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку* (НСДР), якщо її можна розв'язати відносно похідних усіх функцій:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{4.2}$$

***Означення* 4.3**. Сукупність функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ неперервно диференційованих на деякому інтервалі, які задовольняють кожному з рівнянь системи (4.2) для будь-якого x з цього інтервалу, тобто перетворюють їх у тотожність, називають *розв'язком системи на цьому інтервалі*.

***<u>Означення</u>* <u>4.4</u>**. *Загальним розв'язком системи* називають сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{cases} \tag{4.3}$$

які залежать від n довільних сталих $C_i, \left(i = \overline{1, n}\right)$, якщо систему (4.3) можна розв'язати відносно сталих C_i:

$$C_i = \psi_i(x, y_1, ..., y_n), \left(i = \overline{1, n}\right) \tag{4.4}$$

і крім цього сукупність функцій (4.3) є розв'язком системи (4.2) при будь-яких значеннях $C_i, \left(i = \overline{1, n}\right)$, визначених системою (4.4).

***<u>Означення</u>* <u>4.5</u>**. Кожна з рівностей (4.4) називається *першим інтегралом системи* (4.2), а кожна з функцій $\psi_i(x, y_1, ..., y_n) \left(i = \overline{1, n}\right)$ – *інтегралом системи*.

***<u>Означення</u>* <u>4.6</u>**. Сукупність n перших інтегралів вигляду (4.4), яку можна розв'язати відносно $y_1, y_2, ..., y_n$, у результаті чого в області D отримаємо загальний розв'язок (4.3), будемо називати *загальним інтегралом* системи диференціальних рівнянь (4.2) в області D.

Перші інтеграли (4.4), що утворюють загальний інтеграл системи диференціальних рівнянь (4.2), незалежні, якщо між функціями $\psi_i(x, y_1, ..., y_n) \left(i = \overline{1, n}\right)$ не існує співвідношення вигляду $G(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = 0$ при жодному виборі функції $G(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$.

Щоб перевірити незалежність n перших інтегралів в області D, достатньо скласти матрицю Якобі

$$\left\{\frac{\partial \psi_i(x, y_1, ..., y_n)}{\partial y_j}\right\}, \ \left(i, j = \overline{1, n}\right)$$

і встановити, що її визначник області D буде відмінний від нуля.

Будь-яку нормальну систему (4.2) можна записати у вигляді:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}, \tag{4.5}$$

де $f_i = f_i(x, y_1, ..., y_n) \ \left(i = \overline{1, n}\right)$.

Систему ДР-1 (4.5) називають системою ДР-1 в симетричній формі, яка відповідає нормальній системі ДР-1 (4.2). Це частинний випадок системи диференціальних рівнянь у симетричній формі.

***Означення* 4.7**. Система вигляду

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \tag{4.6}$$

називається *системою диференціальних рівнянь у симетричній формі загального вигляду*.

Якщо в точці $(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ хоча б один із знаменників (4.6) відмінний від нуля, то в околі цієї точки систему (4.6) можна замінити нормальною системою $(n-1)$-го рівняння.

Наприклад, $X_n(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \neq 0$. Тоді система (4.6) рівносильна такій нормальній системі:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \ \ldots, \ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{4.7}$$

Кожний інтеграл (перший інтеграл) системи (4.7) називається *інтегралом* (*першим інтегралом*) системи (4.6). Система (4.6) має не більш ніж $(n-1)$ незалежних інтегралів (перших інтегралів).

Сукупність $(n-1)$ перших незалежних інтегралів системи (4.6) утворює *загальний інтеграл* цієї системи.

<u>Означення 4.8</u>. Кожна функція, яку виокремимо з загального розв’язку при окремих значеннях довільних сталих, називається *частинним розв’язком* або *частинним інтегралом системи*.

Задача Коші. Знайти розв’язок системи (4.2), який задовольняє умови (4.8):

$$y_1(x_0)=y_{10},\ y_2(x_0)=y_{20},\ y_3(x_0)=y_{30},...,\ y_n(x_0)=y_{n0}. \qquad (4.8)$$

Числа $x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0}$ називають *початковими значеннями*, а рівності (4.8) – *початковими умовами*.

Тобто серед усіх інтегральних кривих системи (4.2) треба знайти криву, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0})$.

<u>Теорема 4.1</u> <u>(Коші)</u>. Якщо в системі (4.2) усі функції $f_i(x, y_1,..., y_n)$ $(i=\overline{1,n})$ неперервні і мають неперервні частинні похідні по y_i $(i=\overline{1,n})$ у деякій області D, то в кожній точці $M_0(x_0, y_{10}, y_{20},..., y_{n0})$ цієї області існує і до того ж єдиний розв’язок: $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x),\ldots,$ $y_n=\varphi_n(x)$ системи, який задовольняє початковим умовам (4.8).

Існує два основних типи систем диференціальних рівнянь:
- *лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь*,
- *лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь*.

Існують такі способи розв’язування системи диференціальних рівнянь:
- *метод інтегруючих комбінацій*,
- *метод виключення*,
- *метод Ейлера.*

Розв'язування системи диференціальних рівнянь методом інтегруючих комбінацій

Суть методу полягає в такій комбінації рівнянь системи (додавання, віднімання, ділення, множення), яка дає можливість утворити нову систему рівнянь, кожне з яких легко інтегрується. Система розв'язана, якщо знайдені n незалежних перших інтегралів.

***Зауваження* 4.1**. При розв'язуванні систем рівнянь (4.6) можна брати пари відношень, що допускають відокремлення змінних або використовувати властивість рівних дробів: якщо маємо рівні дроби $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ і довільні числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, то

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_n b_n}\,. \tag{4.9}$$

Значення $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ вибирають так, щоб: чисельник був диференціалом знаменника; чисельник був повним диференціалом, а знаменник дорівнював нулю; чисельник і знаменник були рівні нулю.

***Теорема* 4.2**. Одне диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right), \tag{4.10}$$

завжди можна звести до нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Позначивши

$$y=y_1,\;\; y'=y_2,\;\; y''=y_3,\;\; ...,\;\; y^{(n-1)}=y_n\,, \tag{4.11}$$

матимемо

$$
\begin{aligned}
&y_1' = y' = y_2,\\
&y_2' = y'' = y_3,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&y_{(n-1)}' = y^{(n-1)} = y_n,\\
&y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n).
\end{aligned}
$$

Функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ задовольняють нормальну систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$
\begin{cases}
y_1' = y_2,\\
y_2' = y_3,\\
\dots\dots\dots\\
y_{(n-1)}' = y_n,\\
y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n).
\end{cases} \tag{4.12}
$$

Зведення диференціального рівняння n-го порядку (4.10) до рівносильної нормальної системи (4.12) у багатьох випадках значно спрощує знаходження його загального розв'язку або розв'язку задачі Коші для нього.

Можливо і зворотне. Нормальна система n диференціальних рівнянь першого порядку еквівалентна одному диференціальному рівнянню n-го порядку.

Розв'язування системи диференціальних рівнянь методом виключення

<u>Теорема 4.3</u>. Нормальну систему диференціальних рівнянь (4.2) *методом виключення* можна привести до одного диференціального рівняння, порядок якого менше або дорівнює числу рівнянь цієї системи.

Розглянемо суть методу.

Диференціюємо перше рівняння НСДР (4.2) по змінній x:

$$
y_1'' = (f_1)'_x + (f_1)'_{y_1} \cdot y_1' + (f_1)'_{y_2} \cdot y_2' + \ldots + (f_1)'_{y_n} \cdot y_n'. \tag{4.13}
$$

Похідні $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правій частині (4.13) замінюємо їх виразами з НСДР (4.2). Матимемо

$$y_1''=F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (4.14)$$

Диференціюємо рівняння (4.14) по змінній x і похідні $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правій частині замінюємо їх виразами з НСДР (4.2). Матимемо:

$$y_1'''=F_3\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (4.15)$$

І так далі до тих пір, поки не отримаємо

$$y_1^{(n)}=F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \qquad (4.16)$$

Об'єднаємо отримані рівняння (4.14), (4.15), (4.16) в систему:

$$\begin{cases} y_1'=f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ y_1''=F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ y_1'''=F_3\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)}=F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right). \end{cases} \qquad (4.17)$$

Перші $(n-1)$ рівняння розв'язуємо відносно змінних $y_1, y_2, ..., y_n$, виразивши їх через змінні $x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$. Підставляючи отримані вирази в останнє рівняння системи (4.17), матимемо рівняння n-го порядку відносно невідомої функції y_1.

Приклад 86. Розв'язати систему двох диференціальних рівнянь першого порядку $\begin{cases} x'=x^2+y^2, \\ y'=2xy. \end{cases}$

Розв'язання. Додаємо і віднімаємо рівняння системи. Маємо два рівняння:

$$x'+y'=x^2+y^2+2xy \quad (*), \quad x'-y'=x^2+y^2-2xy \quad (**).$$

Розв’яжемо по черзі кожне.

Перетворимо рівняння (*): $x' + y' = (x+y)^2 \Rightarrow (x+y)' = (x+y)^2$. Розв’язуємо його

$$\frac{d(x+y)}{dt} = (x+y)^2 \Rightarrow \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = dt \Rightarrow \int \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \int dt - C_1,$$

$$-\frac{1}{x+y} = t - C_1 \Rightarrow \frac{1}{x+y} + t = C_1.$$

Перетворимо рівняння (**): $x' - y' = (x-y)^2 \Rightarrow (x-y)' = (x-y)^2$. Розв’язуємо його

$$\frac{d(x-y)}{dt} = (x-y)^2 \Rightarrow \frac{d(x-y)}{(x-y)^2} = dt \Rightarrow \int \frac{d(x-y)}{(x-y)^2} = \int dt - C_2,$$

$$-\frac{1}{x-y} = t - C_2 \Rightarrow \frac{1}{x-y} + t = C_2.$$

Відповідь: Розв’язок системи: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + t = C_1, \\ \dfrac{1}{x-y} + t = C_2. \end{cases}$

Приклад 87. Розв’язати систему двох диференціальних рівнянь

першого порядку $\dfrac{dt}{2y-x} = \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$.

Розв’язання. Маємо систему рівнянь, записану у симетричній формі. Складемо інтегровані комбінації: перша $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, друга $\dfrac{dt}{2y-x} = \dfrac{dy}{y}$. Розв’язуємо отримані рівняння.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} + \ln C_1 \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow x = C_1 y,$$

$$\frac{dt}{2y-x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dt}{2y - C_1 y} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dt}{2-C_1} = dy \Rightarrow \int \frac{dt}{2-C_1} = \int dy + C_2,$$

$$\frac{t}{2-C_1} = y + C_2 \;\Rightarrow\; t = (2-C_1)\cdot(y + C_2).$$

$t - 2y + C_1 y = C_2(2-C_1) \Rightarrow t - 2y + x = \overline{C}_2$, де $\overline{C}_2 = C_2(2-C_1)$.

Відповідь: Розв'язок системи: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = C_1, \\ t - 2y + x = \overline{C}_2. \end{cases}$

4.2 Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо нормальну систему n лінійних диференціальних рівнянь з n невідомими функціями $y_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ від змінної x:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{4.18}$$

де a_{ij}, $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n})$ – відомі функції від змінної x або дійсні числа, функції $f_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – неперервні на деякому проміжку (a,b).

<u>Означення 4.9</u>. Систему (4.18) називають *неоднорідною*, якщо хоча б одна з функцій $f_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ відмінна від нуля для $x \in (a,b)$.

Неоднорідну систему (4.18) можна записати матричним рівнянням:

$$Y' = A \cdot Y + F, \tag{4.19}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \; Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

a_{ij}, $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ – відомі функції від змінної x або дійсні числа, $y_i(x)$ – шукані функції від x.

***Означення* 4.10**. Систему (4.18) називають *однорідною*, якщо всі функції $f_i(x)\equiv 0, i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n, \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{4.20}$$

Систему (4.20) можна записати матричним рівнянням:

$$Y' = A\cdot Y, \tag{4.21}$$

де $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, $Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}$.

***Означення* 4.11**. *Фундаментальною системою розв'язків системи* (4.20) називають сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків $Y_i(x)=\left(y_{i1}(x), y_{i2}(x),\ldots, y_{in}(x)\right)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, тобто таких розв'язків, для яких тотожності $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i y_{ij}\equiv 0\ \left(j=\overline{1,n}\right)$, де α_i – сталі числа, виконуються тільки при $\alpha_i=0$, $i=\overline{1,n}$.

Якщо $Y_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ – фундаментальна система розв'язків системи (4.20), то загальний розв'язок системи має вигляд:

$$Y=C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\ldots+C_nY_n(x), \tag{4.22}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

<u>Означення</u> **<u>4.12</u>**. Матриця

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

що складається з координат y_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ лінійно незалежних частинних розв'язків матричного рівняння (4.21) називається *фундаментальною матрицею цього рівняння* (матрицею Вронського).

<u>Означення</u> **<u>4.13</u>**. Визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \tag{4.24}$$

складений з частинних розв'язків $y_{ij}(x)$ системи (4.20), називається *визначником Вронського*.

<u>Теорема</u> **<u>4.4</u>**. Для того, щоб матриця (4.23) була фундаментальною, необхідно і достатньо, щоб $W(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$.

Зазвичай розв'язують систему (4.20) методом виключення.

4.2.1 Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

<u>Означення</u> **<u>4.14</u>**. Систему (4.20) називають *системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами*, якщо a_{ij}, $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$ – дійсні числа.

Розглянемо розв'язування лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ***методом виключення*** на прикладі системи з двома ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, & (*) \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. & (**) \end{cases} \tag{4.25}$$

Треба знайти функції $x(t)$ і $y(t)$, які задовольняють перше і друге рівняння системи (4.25).

Зведемо систему двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами до лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно шуканої функції, наприклад, $x(t)$. Метод виключення розглянутий вище:

а) диференціюємо рівняння (*) системи (4.25) по змінній t:

$$x'' = a_{11}x' + a_{12}y' \tag{4.26}$$

б) значення y' з рівняння (**) системи (4.25) підставляємо в отримане рівняння (4.26) і приводимо подібні:

$$x'' = a_{11}x' + a_{12} \cdot (a_{21}x + a_{22}y),$$

$$x'' = a_{11}x' + a_{12} \cdot a_{21}x + a_{12}.a_{22}\,y\,. \tag{4.27}$$

в) з рівняння (*) системи (4.25) знаходимо y:

$$y = \frac{1}{a_{12}}(x' - a_{11}x). \tag{4.28}$$

і підставляємо в рівняння (4.27):

$$x'' = a_{11}x' + a_{12} \cdot a_{21}x + a_{12.} \cdot a_{22} \cdot \frac{1}{a_{12}} \cdot \left(x' - a_{11}x\right).$$

Розкриємо дужки і приведемо подібні:

$$x'' - \left(a_{11} + a_{22}\right)x' - \left(a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}\right)x = 0\,. \tag{4.29}$$

Рівняння (4.29) – ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами. Знаходимо його загальний розв'язок $x(t)$ (дивись підрозділ 3.4). Загальний розв'язок $y(t)$ знаходимо за формулою (4.28), підставивши до неї знайдений розв'язок $x(t)$ і $x'(t)$.

Якщо задані початкові умови $\begin{cases} x(t_0) = x_{0,} \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$ то маємо задачу Коші. Знаходимо частинний розв'язок системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами, який задовольняє заданим початковим умовам.

Аналогічно розв'язується система двох ЛНДР-1 зі сталими коефіцієнтами. За методом виключення вона зводиться до ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами відносно однієї з шуканих функцій.

***Зауваження* 4.2**. Методом виключення розв'язуються і системи ЛОДР-1 та ЛНДР-1 з більшою кількістю рівнянь.

Розв'язування системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

Розглянемо розв'язування методом Ейлера системи (4.20) ЛОДР зі сталими коефіцієнтами (a_{ij} , $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$) – дійсні числа).

За методом Ейлера розв'язок системи шукатимемо у вигляді:

$$y_1 = \gamma_1 \,\mathrm{e}^{\lambda x},\ y_2 = \gamma_2 \,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,\ ...,\ y_n = \gamma_n \,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \tag{4.30}$$

де числа γ_1, γ_2 , ..., γ_n необхідно визначити.

Знайдемо значення $y_1' = \gamma_1 \lambda \,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $y_2' = \gamma_2 \lambda \,\mathrm{e}^{\lambda x}$, ..., $y_n' = \gamma_n \lambda \,\mathrm{e}^{\lambda x}$ і разом з y_1, y_2 , ..., y_n підставимо в систему, перенісши всі доданки з лівої частини в праву та скоротивши на $\mathrm{e}^{\lambda x}$. Матимемо систему

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Матричне рівняння системи (4.31) має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

або $(A-\lambda E)\cdot U_\lambda = 0$, де E – одинична матриця, λ – власне число матриці A, $\overline{U}_\lambda = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ – власний вектор, який відповідає λ.

Щоб отримана однорідна система лінійних рівнянь (4.31) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$|A-\lambda E| = 0, \tag{4.33}$$

тобто $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

<u>Означення</u> **<u>4.15</u>**. Рівняння (4.33) називають *характеристичним рівнянням* системи (4.31).

Розв'язком рівняння (4.33) є λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – власні числа матриці A.

Послідовно підставляємо λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ в систему (4.31). Розв'язуючи цю систему для кожного числа λ_i, знаходимо відповідний власний вектор U_{λ_i} матриці А, що відповідає даному власному значенню.

Сукупності розв'язків λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ характеристичного рівняння відповідають n лінійно незалежним частинним розв'язкам системи ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами. Вигляд частинного розв'язку залежить від значення λ_i (воно є дійсним чи комплексним). Також треба враховувати кратність λ_i.

Розглянемо різні випадки для значень λ_i:

а) нехай корені λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ характеристичного рівняння дійсні і різні.

Тоді матриця A має n лінійно незалежних власних векторів $\overline{U}_i$. Для кожного λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ визначимо координати власних векторів $\overline{U}_i$. Можна показати, що один з них довільний, його можна вважати рівним одиниці. За формулою (4.30) матимемо:

для кореня λ_1 частинний розв'язок системи (4.20) матиме вигляд:

$$y_{11}=\gamma_{11}\,e^{\lambda_1 x},\; y_{21}=\gamma_{21}\,e^{\lambda_1 x},\ldots,\; y_{n1}=\gamma_{n1}\,e^{\lambda_1 x}, \tag{4.34}$$

тобто власному числу λ_1 відповідає власний вектор $\overline{U}_1=\left\{\gamma_{11},\gamma_{21},\ldots,\gamma_{n1}\right\}$;

для кореня λ_2 частинний розв'язок системи (4.20) матиме вигляд:

$$y_{12}=\gamma_{12}\,e^{\lambda_2 x},\; y_{22}=\gamma_{22}\,e^{\lambda_2 x},\ldots,\; y_{n2}=\gamma_{n2}\,e^{\lambda_2 x}, \tag{4.35}$$

тобто власному числу λ_2 відповідає власний вектор $\overline{U}_2=\left\{\gamma_{12},\gamma_{22},\ldots,\gamma_{n2}\right\}$ і так далі;

для кореня λ_n частинний розв'язок системи (4.20) матиме вигляд:

$$y_{1n}=\gamma_{1n}\,e^{\lambda_n x},\; y_{2n}=\gamma_{2n}\,e^{\lambda_n x},\ldots,\; y_{nn}=\gamma_{nn}\,e^{\lambda_n x}, \tag{4.36}$$

тобто власному числу λ_n відповідає власний вектор $\overline{U}_n = \{\gamma_{1n}, \gamma_{2n}, \ldots, \gamma_{nn}\}$.

Загальний розв’язок Y системи (4.20) можна записати у векторній формі:

$$\overline{Y} = C_1 \overline{U}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \overline{U}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \overline{U}_n \mathrm{e}^{\lambda_n x} \tag{4.37}$$

або у вигляді:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \cdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \cdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \cdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_n x} \tag{4.38}$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь у явній координатній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 \gamma_{11} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{12} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{1n} \mathrm{e}^{\lambda_n x}, \\ y_2(x) = C_1 \gamma_{21} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{22} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{2n} \mathrm{e}^{\lambda_n x}, \\ \quad \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ y_n(x) = C_1 \gamma_{n1} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \gamma_{n2} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n \gamma_{nn} \mathrm{e}^{\lambda_n x}, \end{cases} \tag{4.39}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

б) нехай корені λ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні числа. Коефіцієнти характеристичного рівняння – дійсні числа.

Припустимо, що комплексні корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ і $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Комплексно-спряженим числам (власним значенням матриці A) відповідатимуть власні вектори з комплексно-спряженими координатами.

Для кожного з чисел $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ необхідно розв’язати дві системи: $(A - \lambda_1 E) \cdot U_{\lambda_1} = 0$ і $(A - \lambda_2 E) \cdot U_{\lambda_2} = 0$.

Розв’язком системи $\left(A-\lambda_1 E\right)\cdot U_{\lambda_1}=0$ є власний вектор $U_{\lambda_1}=\left\{\gamma_{11},\gamma_{21},\dots,\gamma_{n1}\right\}$, координати якого комплексні числа:

$$\begin{pmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{21}\\ \dots\\ \gamma_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}+iv_{11}\\ u_{21}+iv_{21}\\ \dots\\ u_{n1}+iv_{n1}\end{pmatrix}. \qquad (4.40)$$

Розв’язком системи $\left(A-\lambda_2 E\right)\cdot U_{\lambda_2}=0$ є власний вектор $U_{\lambda_2}=\left\{\overline{\gamma}_{11},\overline{\gamma}_{21},\dots,\overline{\gamma}_{n1}\right\}$, координати якого комплексні числа:

$$\begin{pmatrix}\overline{\gamma}_{11}\\ \overline{\gamma}_{21}\\ \dots\\ \overline{\gamma}_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}-iv_{11}\\ u_{21}-iv_{21}\\ \dots\\ u_{n1}-iv_{n1}\end{pmatrix}.$$

***Зауваження* 4.3**. Комплексно-спряженим кореням $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ характеристичного рівняння відповідають одні й ті самі розв’язки, тобто корінь $\lambda_2=\alpha-i\beta$ не дає нових лінійно незалежних дійсних розв’язків.

Тому розглянемо побудову частинних розв’язків для власного вектора U_{λ_1}. Частинні розв’язки матимуть вигляд

$$y_{11}=\gamma_{11}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x},\ y_{21}=\gamma_{21}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x},\dots,\ y_{n1}=\gamma_{n1}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}. \qquad (4.41)$$

Враховуючи, що $\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)$, матимемо

$$\begin{pmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ \dots\\ y_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}+iv_{11}\\ u_{21}+iv_{21}\\ \dots\\ u_{n1}+iv_{n1}\end{pmatrix}\cdot\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right). \qquad (4.42)$$

Відокремлюючи дійсні та уявні частини

$$\begin{pmatrix} \left(u_{11}\cos\beta x - v_{11}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} + i\left(u_{11}\sin\beta x + v_{11}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \left(u_{21}\cos\beta x - v_{21}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} + i\left(u_{21}\sin\beta x + v_{21}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \left(u_{n1}\cos\beta x - v_{n1}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} + i\left(u_{n1}\sin\beta x + v_{n1}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix},$$

отримаємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки.

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(u_{11}\cos\beta x - v_{11}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \left(u_{21}\cos\beta x - v_{21}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \left(u_{n1}\cos\beta x - v_{n1}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(u_{11}\sin\beta x + v_{11}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \left(u_{21}\sin\beta x + v_{21}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \left(u_{n1}\sin\beta x + v_{n1}\cos\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Таким чином, парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння відповідає пара дійсних розв'язків:

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(u_{11}\cos\beta x - v_{11}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \left(u_{21}\cos\beta x - v_{21}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \left(u_{n1}\cos\beta x - v_{n1}\sin\beta x\right)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix}, \tag{4.45}$$

$$\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \cdots \\ y_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_{11}\sin\beta x + v_{11}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ (u_{21}\sin\beta x + v_{21}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (u_{n1}\sin\beta x + v_{n1}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Загальний розв’язок системи (4.20) отримаємо, взявши лінійну комбінацію всіх побудованих лінійно незалежних частинних розв’язків, що відповідають усім кореням характеристичного рівняння, з довільними сталими.

в) серед коренів λ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ характеристичного рівняння є кратні.

Нехай λ_1 – дійсний корінь кратності $k>1$ характеристичного рівняння (4.33). Знайдемо порядок n і ранг $r=\operatorname{rang}(A-\lambda_1 E)$ матриці $A-\lambda_1 E$. Позначимо $m=n-r$ – число лінійно незалежних власних векторів. Можливі випадки:

1) якщо $m=k$, то система (4.31) має k лінійно незалежних власних векторів для λ_1. Тоді система (4.20) матиме лінійно незалежні розв’язки вигляду:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \cdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x},\ Y_2 = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \cdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \ldots,\ Y_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \cdots \\ \gamma_{nk} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}, \tag{4.47}$$

які входять до фундаментальної системи розв’язків системи диференціальних рівнянь (4.20).

2) якщо $m<k$ (менше кратності кореня), тобто для λ_1 існує тільки m лінійно незалежних власних векторів матриці A, то розв’язок треба знаходити як добуток многочлена степеня $k-m$ на $e^{\lambda_1 x}$, а саме

$$\begin{cases} y_1(x) = \left(a_{11} + a_{12}x + \ldots + a_{1,\,k-m+1}x^{k-m}\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \\ \quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ y_n(x) = \left(a_{n1} + a_{n2}x + \ldots + a_{n,\,k-m+1}x^{k-m}\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}. \end{cases} \tag{4.48}$$

Для знаходження коефіцієнтів a_{ij} $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,\,k-m}\right)$ необхідно (4.48) підставити в вихідну систему та прирівняти коефіцієнти при подібних членах лівої і правої частин рівнянь і, скоротивши на $e^{\lambda_1 x}$, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Записуємо загальний розв'язок системи, коефіцієнти a_{ij} $\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,\,k-m}\right)$ повинні залежати від k довільних сталих.

Розглянемо розв'язування системи з трьома лінійними однорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами *методом Ейлера* :

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ z' = a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{cases} \tag{4.49}$$

Розв'язання. Ненульові частинні розв'язки системи за методом Ейлера шукаємо у вигляді:

$$x = \alpha\,\mathrm{e}^{\lambda t},\ y = \beta\,\mathrm{e}^{\lambda t},\ z = \gamma\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{4.50}$$

де числа α, β, γ необхідно визначити. Підставимо (4.50) та відповідні похідні в (4.49), скоротимо на $\mathrm{e}^{\lambda t}$ та приведемо подібні:

$$\begin{cases} (a-\lambda)\,\alpha + b\,\beta + c\gamma = 0, \\ a_1\alpha + (b_1 - \lambda)\beta + c_1\gamma = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + (c_2 - \lambda)\,\gamma = 0. \end{cases} \tag{4.51}$$

Щоб система (4.51) мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ a_1 & b_1-\lambda & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.52)$$

Отримали характеристичне рівняння (4.52) для системи (4.49). Знаходимо всі можливі значення λ. Рівняння (4.52) має три корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Розглянемо різні випадки для них.

1) Припустимо, що корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ дійсні, різні. По черзі підставимо їх в систему (4.51) і отримаємо для λ_1 значення координат власного вектора $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, для λ_2 – $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ і для λ_3 – $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$. Відповідно матимемо три частинних розв'язка:

$$\begin{aligned} &x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t}, z_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \\ &x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t}, z_2 = \gamma_2 e^{\lambda_2 t}, \\ &x_3 = \alpha_3 e^{\lambda_3 t}, y_3 = \beta_3 e^{\lambda_3 t}, z_3 = \gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned} \qquad (4.53)$$

Загальний розв'язок заданої системи має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t}, \\ z = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases} \qquad (4.54)$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

2) Припустимо, що рівняння (4.52) має комплексні корені $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ і λ_3 – дійсний корінь. Враховуючи Зауваження 4.3, знайдемо частинні розв'язки для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ у вигляді:

$$y_{11} = \gamma_{11} e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_{21} = \gamma_{21} e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_{31} = \gamma_{31} e^{(\alpha + i\beta)x}, \qquad (4.55)$$

де γ_{i1} $\left(i = \overline{1,3}\right)$ – комплексні числа.

Враховуючи, що $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$, матимемо

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11}+iv_{11} \\ u_{21}+iv_{21} \\ u_{31}+iv_{31} \end{pmatrix}\cdot e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x). \tag{4.56}$$

Відокремлюючи дійсні та уявні частини, отримаємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки.

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (u_{11}\cos\beta x-v_{11}\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ (u_{21}\cos\beta x-v_{21}\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ (u_{31}\cos\beta x-v_{31}\sin\beta x)\cdot e^{\alpha x} \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

$$\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}=\begin{matrix} (u_{11}\sin\beta x+v_{11}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ (u_{21}\sin\beta x+v_{21}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \\ (u_{31}\sin\beta x+v_{31}\cos\beta x)\cdot e^{\alpha x} \end{matrix}. \tag{4.58}$$

Для кореня λ_3 виконаємо аналогічні дії пункту 1). Складемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1y_{11}+C_2y_{12}+C_3y_{13}, \\ y_2(x)=C_1y_{21}+C_2y_{22}+C_3y_{23}, \\ y_3(x)=C_1y_{31}+C_2y_{32}+C_3y_{33}, \end{cases} \tag{4.59}$$

3) Припустимо, що рівняння (4.52) має кратний корінь λ_1. Він може бути кратності два або три. Тоді, в залежності від кратності λ_1, можемо мати випадки:

а) для кореня λ_1 кратності $k=2$ частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$x=(A_1t+B_1)e^{\lambda_1 t},\ y=(A_2t+B_2)e^{\lambda_1 t},\ z=(A_3t+B_3)e^{\lambda_1 t}, \tag{4.60}$$

де коефіцієнти $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ A_3,\ B_3$ знаходимо підставляючи (4.60) у вихідну систему (4.49) та прирівнюючи коефіцієнти при подібних членах лівої і правої частин рівнянь та скорочуючи на $e^{\lambda_1 t}$. Матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів.

б) для кореня λ_1 кратності $k=3$ частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&x=\left(A_1 t^2+B_1 t+D_1\right)e^{\lambda_1 t},\quad y=\left(A_2 t^2+B_2 t+D_2\right)e^{\lambda_1 t},\\
&z=\left(A_3 t^2+B_3 t+D_3\right)e^{\lambda_1 t},
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

де коефіцієнти $A_1,\ B_1, D_1,\ A_2,\ B_2,\ D_2, A_3,\ B_3, D_3$ знаходимо як у попередньому випадку.

Приклад 88. Розв'язати методом виключення систему двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = x-5y, \\ y' = -x-3y. \end{cases}$

Розв'язання. Позначимо для зручності рівняння системи $\begin{cases} x' = x-5y, & (1) \\ y' = -x-3y. & (2) \end{cases}$ Застосовуючи метод виключення, отримаємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t: $x''=x'-5y'$;

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x''=x'-5\cdot(-x-3y),$$

$$x''=x'+5x+15y; \qquad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y=\frac{1}{5}\left(x-x'\right) \qquad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = x' + 5x + 15\cdot\frac{1}{5}(x - x'),$$

$$x'' = x' + 5x + 3x - 3x',$$

$$x'' + 2x' - 8x = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) є ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок: $k^2 + 2k - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -4,\ k_2 = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР-2 має вигляд:

$$x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x'_{\text{одн}} = -4C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + 2C_2\,\mathrm{e}^{2t},$$

$$y_{\text{одн}} = \frac{1}{5}\left(C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 4C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t}\right) = \frac{1}{5}\left(5C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - C_2\,\mathrm{e}^{2t}\right) =$$

$$= C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{5}C_2\,\mathrm{e}^{2t} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}2\,C_2\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Загальний розв'язок заданої системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}2\,C_2\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Відповідь: Розв'язок системи: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-4t} - 0{,}2\,C_2\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

Приклад 89. Розв'язати методом виключення задачу Коші для

системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = -2x + 4y, \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ з

початковими умовами $\begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Позначимо для зручності рівняння системи $\begin{cases} x' = -2x + 4y, & (1) \\ y' = -x + 3y & (2) \end{cases}$ Застосовуючи метод виключення, отримаємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t: $x'' = -2x' + 4y'$;

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x'' = -2x' + 4(-x + 3y),$$

$$x'' = -2x' - 4x + 12y; \qquad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{4}(x' + 2x) \qquad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = -2x' - 4x + 12 \cdot \frac{1}{4}(x' + 2x),$$

$$x'' = -2x' - 4x + 3x' + 6x,$$

$$x'' - x' - 2x = 0. \qquad (5)$$

Рівняння (5) є ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$k^2 - k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = 2.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56) має вигляд:

$$x_{\text{одн}} = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}.$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x'_{\text{одн}} = -C_1 \mathrm{e}^{-t} + 2C_2 \mathrm{e}^{2t},$$

$$y_{\text{одн}} = \frac{1}{4}\left(-C_1 \mathrm{e}^{-t} + 2C_2 \mathrm{e}^{2t} + 2C_1 \mathrm{e}^{-t} + 2C_2 \mathrm{e}^{2t}\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 \mathrm{e}^{-t} + 4C_2 \mathrm{e}^{2t}\right).$$

Загальний розв'язок заданої системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = \dfrac{1}{4}\left(C_1\,\mathrm{e}^{-t} + 4C_2\,\mathrm{e}^{2t}\right). \end{cases}$$

Знайдемо частинний розв'язок заданої системи двох ЛОДР-1. Застосовуючи початкові умови визначимо значення C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1\,\mathrm{e}^{-0} + C_2\,\mathrm{e}^{2\cdot 0} \\ 0 = \dfrac{1}{4}\left(C_1\,\mathrm{e}^{-0} + 4\,C_2\,\mathrm{e}^{2\cdot 0}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ 0 = \dfrac{1}{4}\left(C_1 + 4\,C_2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданої системи двох ЛОДР-1

$$\begin{cases} x_{\text{одн.част}} = 4\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн.част}} = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн.част}} = 4\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн.част}} = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

Приклад 90. Розв'язати систему двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = -7x - 3y \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ -7 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \; (i = 1, 2)$ матриці A:

$$(1+\lambda)(3+\lambda) - 35 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8,\; \lambda_2 = 4.$$

Оскільки λ_i дійсні, різні, то для кореня $\lambda_1 = -8$ частинний розв'язок системи матиме вигляд: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-8t}$, а для кореня

$\lambda_2 = 4$ – $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{4t}$. Тоді загальний розв’язок системи матиме вигляд: $\begin{pmatrix} x_{\text{одн}} \\ y_{\text{одн}} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Розв’язуючи систему $(A - \lambda E) \cdot U_\lambda = 0$ для власних чисел $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 4$ відповідно, знайдемо координати власних векторів $\overline{U}_1 = \{\gamma_{11}, \gamma_{21}\}$ і $\overline{U}_2 = \{\gamma_{12}, \gamma_{22}\}$.

Підставимо $\lambda_1 = -8$ в систему і знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (-1+8)\gamma_{11} - 5\gamma_{21} = 0, \\ -7\gamma_{11} - (3-8)\gamma_{21} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7\gamma_{11} - 5\gamma_{21} = 0, \\ -7\gamma_{11} + 5\gamma_{21} = 0. \end{cases}$$

Рівняння в системі однакові, тому $\gamma_{11} = \dfrac{5}{7}\gamma_{21}$. Підберемо найменше значення γ_{21}, щоб значення γ_{11} було ціле. Матимемо $\gamma_{21} = 7$, $\gamma_{11} = 5$. Тоді $x_1 = 5\mathrm{e}^{-8t}$ і $y_1 = 7\mathrm{e}^{-8t}$.

Аналогічно, підставляємо $\lambda_2 = 4$ і знаходимо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (-1-4)\gamma_{12} - 5\gamma_{22} = 0, \\ -7\gamma_{12} - (3+4)\gamma_{22} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5\gamma_{12} - 5\gamma_{22} = 0, \\ -7\gamma_{12} - 7\gamma_{22} = 0. \end{cases}$$

Рівняння в системі однакові, тому $\gamma_{12} = -\gamma_{22}$. Підберемо найменше значення γ_{22}, щоб значення γ_{12} було ціле. Матимемо $\gamma_{22} = -1$, $\gamma_{12} = 1$. Тоді $x_2 = \mathrm{e}^{4t}$ і $y_2 = -\mathrm{e}^{4t}$.

Загальний розв’язок заданої системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = 5C_1 \mathrm{e}^{-8t} + C_2 \mathrm{e}^{4t}, \\ y_{\text{одн}} = 7C_1 \mathrm{e}^{-8t} - C_2 \mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = 5C_1\, e^{-8t} + C_2\, e^{4t}, \\ y_{\text{одн}} = 7\,C_1\, e^{-8t} - C_2\, e^{4t}. \end{cases}$

Приклад 91. Розв'язати систему двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \ (i = 1, 2)$ матриці A:

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i.$$

Власні числа λ_i комплексні. Загальний розв'язок системи матиме вигляд: $\begin{pmatrix} x_{\text{одн}} \\ y_{\text{одн}} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, де $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \cdot e^{3it}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} \cdot e^{-3it}$.

Розв'язуючи систему $(A - \lambda E) \cdot U_\lambda = 0$ для власних чисел $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$ відповідно, знайдемо координати власних векторів $\overline{U}_1 = \{\gamma_{11}, \gamma_{21}\}$ і $\overline{U}_2 = \{\gamma_{12}, \gamma_{22}\}$.

Підставимо $\lambda_1 = 3i$ в систему і знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (1-3i)\gamma_{11} - 5\gamma_{21} = 0, \\ 2\gamma_{11} - (1+3i)\gamma_{21} = 0. \end{cases}$$

Одне з рівнянь системи є наслідком іншого, оскільки визначник системи дорівнює нулю. Можемо покласти $\gamma_{11}=5,\ \gamma_{21}=1-3i$. Тоді перший частинний розв'язок записуємо у вигляді: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{3it}$.

Враховуючи, що $\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$, матимемо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1-3i \end{pmatrix}\cdot(\cos 3t+i\sin 3t)=\begin{pmatrix} 5\cos 3t+i\,5\sin 3t \\ (\cos 3t+3\sin 3t)+i(\sin 3t-3\cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, підставивши $\lambda_2=-3i$ в систему, знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} (1+3i)\gamma_{12}-5\gamma_{22}=0, \\ 2\gamma_{12}-(1-3i)\gamma_{22}=0. \end{cases}$$

Одне з рівнянь системи є наслідком іншого, оскільки визначник системи дорівнює нулю. Можемо покласти $\gamma_{12}=5,\ \gamma_{22}=1+3i$. Тоді другий частинний розв'язок записуємо у вигляді: $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{-3it}$.

Враховуючи, що $\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$, матимемо

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix}\cdot(\cos 3t-i\sin 3t)=\begin{pmatrix} 5\cos 3t-i\,5\sin 3t \\ (\cos 3t+3\sin 3t)-i(\sin 3t-3\cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Отримані розв'язки $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – комплексно-спряжені. Відокремлюючи дійсні та уявні частини, отримаємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{одн}} \\ y_{\text{одн}} \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t+3\sin 3t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ \sin 3t-3\cos 3t \end{pmatrix}$$

або $\begin{cases} x_{\text{одн}} = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t, \\ y_{\text{одн}} = \ C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \end{cases}$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = 5C_1\cos 3t + 5C_2\sin 3t, \\ y_{\text{одн}} = \ C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t). \end{cases}$

***<u>Зауваження</u>* <u>4.4</u>**. Знайшовши перший частинний розв'язок $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ системи, можемо записати загальний розв'язок заданої системи, застосувавши формули:

$$x = C_1 \operatorname{Re} x_1 + C_2 \operatorname{Im} x_1, \quad y = C_1 \operatorname{Re} y_1 + C_2 \operatorname{Im} y_1, \tag{4.76}$$

де $\operatorname{Re} z = a$ – дійсна частина, $\operatorname{Im} z = b$ – уявна частина комплексного числа $z = a + bi$.

Приклад 92. Розв'язати систему двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \ (i = 1, 2)$ матриці A:

$$(2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3.$$

Оскільки корні λ_i рівні, то розв'язок для λ_1 шукаємо у вигляді:

$$x = (A_1 t + B_1)e^{3t}, \ y = (A_2 t + B_2)e^{3t}.$$

Підставимо його в перше рівняння заданої системи і скоротимо на e^{3t}. Матимемо

$$3(A_1 t + B_1) + A_1 = 2(A_1 t + B_1) + A_2 t + B_2 .$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t у лівій і правій частинах:

$$\begin{array}{r|l} t & 3A_1 = 2A_1 + A_2 \\ t^0 & 3B_1 + A_1 = 2B_1 + B_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = A_2 \\ B_1 = B_2 - A_1, \end{cases}$$

де A_1, B_1 – довільні значення. Позначимо їх відповідно через C_1 і C_2. Тоді $A_2 = C_1$, $B_2 = C_1 + C_2$. Підставимо знайдені значення параметрів A_i, B_i $(i = 1, 2)$ у розв'язок.

Загальний розв'язок заданої системи двох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t} \end{cases}$$

<u>Зауваження</u> **<u>4.5</u>**. Легко перевірити, що підставивши розв'язок для λ_1 у друге рівняння заданої системи, матимемо той же результат.

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t} \end{cases}$.

Приклад 93. Розв'язати систему трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = x + y + z, \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$ методом виключення.

Розв'язання. Наведемо розв'язування заданої системи до розв'язування одного диференціального рівняння, порядок якого відповідає кількості рівнянь заданої системи.

Для цього будь-яке з рівнянь системи, наприклад, перше диференціюємо по змінній t:

$$x'' = 3x' - y' + z' .$$

Замінимо в отриманому рівнянні похідні x', y' та z' їх виразами з системи та приведемо подібні:

$$x'' = 3(3x - y + z) - (x + y + z) + (4x - y + 4z) = 12x - 5y + 6z\,.$$

$$x'' = 12x - 5y + 6z. \qquad (*)$$

Це рівняння знову диференціюємо по змінній t:

$$x''' = 12x' - 5y' + 6z'\,.$$

Знову замінимо в правій частині похідні x', y' та z' їх виразами із заданої системи та отримаємо рівняння:

$x''' = 12(3x - y + z) - 5(x + y + z) + 6(4x - y + 4z)$, яке після приведення подібних членів у правій частині запишеться так:

$$x''' = 55x - 23y + 31z. \qquad (**)$$

Розглянемо систему рівнянь, що складається з першого рівняння заданої системи та рівнянь (*), (**):

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ x'' = 12x - 5y + 6z, \\ x''' = 55x - 23y + 31z. \end{cases}$$

Щоб мати рівняння лише з однією невідомою функцією, з перших двох рівнянь отриманої системи визначимо функції y і z:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ x'' = 12x - 5y + 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x'' - 6x' + 6x, \\ z = x'' - 5x' + 3x. \end{cases} \qquad (***)$$

Підставимо знайдені значення у третє рівняння отриманої системи:

$$x''' = 55x - 23(x'' - 6x' + 6x) + 31(x'' - 5x' + 3x),$$

$$x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0$$

Отримане рівняння є ЛОДР-3 зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$k^3 - 8k^2 + 17k - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 5\,.$$

Загальний розв'язок ЛОДР-3 має вигляд:

$$x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t}\,.$$

Невідомих функції y і z знайдемо з системи (***), підставивши значення $x_{\text{одн}}$, $x'_{\text{одн}}$, $x''_{\text{одн}}$:

$$y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t},\; z_{\text{одн}} = -C_1\,\mathrm{e}^{t} - 3C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 3C_3\,\mathrm{e}^{5t}.$$

Загальний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t}, \\ z_{\text{одн}} = -C_1\,\mathrm{e}^{t} - 3C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 3C_3\,\mathrm{e}^{5t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} - 2C_2\,\mathrm{e}^{2t} + C_3\,\mathrm{e}^{5t}, \\ z_{\text{одн}} = -C_1\,\mathrm{e}^{t} - 3C_2\,\mathrm{e}^{2t} + 3C_3\,\mathrm{e}^{5t}. \end{cases}$

Приклад 94. Розв'язати систему трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \; (i = 1, 2, 3)$ матриці A:

$$(1-\lambda)\left(-\lambda + \lambda^2 - 1\right) + (-\lambda + 2) + (-1 - 2 + 2\lambda) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = -1,\; \lambda_3 = 2.$$

Оскільки λ_i дійсні, різні, то для кореня $\lambda_1 = 1$ частинний розв'язок системи матиме вигляд: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} \cdot e^t$, для кореня $\lambda_2 = -1$ – $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$, а для кореня $\lambda_3 = 2$ – $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$. Тоді загальний розв'язок системи матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{одн}} \\ y_{\text{одн}} \\ z_{\text{одн}} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи систему $(A - \lambda E) \cdot U_\lambda = 0$ для власних чисел $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ відповідно, знайдемо координати власних векторів $\overline{U}_1 = \{\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}\}$, $\overline{U}_2 = \{\gamma_{12}, \gamma_{22}, \gamma_{32}\}$ і $\overline{U}_3 = \{\gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33}\}$.

Підставимо власне число $\lambda_1 = 1$ в систему і знайдемо для нього координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} -\gamma_{21} + \gamma_{31} = 0, \\ \gamma_{11} \quad - \quad \gamma_{31} = 0, \\ 2\gamma_{11} - \gamma_{21} - \gamma_{31} = 0. \end{cases} \Rightarrow \gamma_{11} = \gamma_{31},\ \gamma_{21} = \gamma_{31} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для власного числа $\lambda_2 = -1$ знаходимо координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} 2\gamma_{12} - \gamma_{22} + \gamma_{32} = 0, \\ \gamma_{12} + 2\gamma_{22} - \gamma_{32} = 0, \\ 2\gamma_{12} - \gamma_{22} + \gamma_{32} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\gamma_{12} - \gamma_{22} + \gamma_{32} = 0, \\ \gamma_{12} + 2\gamma_{22} - \gamma_{32} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для власного числа $\lambda_3 = 2$ знаходимо координати власного вектору з системи:

$$\begin{cases} -\gamma_{13}-\gamma_{23}+\gamma_{33}=0, \\ \gamma_{13}-\gamma_{23}-\gamma_{33}=0, \\ 2\gamma_{13}-\gamma_{23}-2\gamma_{33}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{23}=0, \\ \gamma_{13}-\gamma_{33}=0, \\ 2\gamma_{13}-2\gamma_{33}=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{-t}, \\ z_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + 5C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + 3C_2\,\mathrm{e}^{-t}, \\ z_{\text{одн}} = C_1\,\mathrm{e}^{t} + 5C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

Приклад 95. Розв'язати задачу Коші для системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x+8y-2z \end{cases}$ з початковими умовами $\begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1 \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A-\lambda E|=0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 8 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & 8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \left(i=1,2,3\right)$ матриці A:

$$\lambda^2\left(-2-\lambda\right)-32-16\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\lambda^2+16\right)\left(2+\lambda\right)=0 .$$

Корені рівняння: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=4i$, $\lambda_3=-4i$.

Для дійсного кореня $\lambda_1=-2$ розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_1=\gamma_{11}\mathrm{e}^{-2t},\ y_1=\gamma_{21}\mathrm{e}^{-2t},\ z_1=\gamma_{31}\mathrm{e}^{-2t} .$$

Підставивши його в задану систему і скоротивши на e^{-2t}, знайдемо $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}$:

$$\begin{cases}-2\gamma_{11}=8\gamma_{21},\\ -2\gamma_{21}=-2\gamma_{31},\\ -2\gamma_{31}=2\gamma_{11}+8\gamma_{21}-2\gamma_{31}.\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{11}=-4\gamma_{21},\ \gamma_{31}=\gamma_{21}.$$

Покладемо, наприклад, $\gamma_{21}=1$, тоді $\gamma_{11}=-4$, $\gamma_{31}=1$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_1=-4\mathrm{e}^{-2t},\ y_1=\mathrm{e}^{-2t},\ z_1=\mathrm{e}^{-2t} .$$

Корені $\lambda_{2,3}=\pm 4i$ – комплексно-спряжені. Враховуючи Зауваження 4.3, знайдемо частинний розв'язок для $\lambda_1=4i$ у вигляді:

$$x_2=\gamma_{12}\mathrm{e}^{4ti},\ y_2=\gamma_{22}\mathrm{e}^{4ti},\ z_2=\gamma_{32}\mathrm{e}^{4ti},$$

де $\gamma_{i2}\left(i=\overline{1,3}\right)$ – комплексні числа. Підставимо його в задану систему і скоротимо її рівняння на e^{4it}:

$$\begin{cases}4i\gamma_{12}=8\gamma_{22},\\ 4i\gamma_{22}=-2\gamma_{32},\\ 4i\gamma_{32}=2\gamma_{12}+8\gamma_{22}-2\gamma_{32}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_{12}=-2i\gamma_{22},\\ \gamma_{22}=0{,}5i\gamma_{32},\\ \gamma_{32}=-0{,}5i\gamma_{12}-2i\gamma_{22}+0{,}5i\gamma_{32}.\end{cases}$$

Матимемо $\begin{cases}\gamma_{12}=-2i\gamma_{22},\\ \gamma_{32}=-2i\gamma_{22}.\end{cases}$ Покладемо, наприклад, $\gamma_{22}=i$, тоді $\gamma_{12}=2$, $\gamma_{32}=2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_2=2\mathrm{e}^{4ti},\quad y_2=i\,\mathrm{e}^{4ti},\quad z_2=2\mathrm{e}^{4ti}.$$

Врахуємо, що $e^{4ti} = \cos 4t + i\sin 4t$, і відокремимо дійсні та уявні частини:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (\cos 4t + i\sin 4t) = \begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ -\sin 4t \\ 2\cos 4t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix}.$$

Отримаємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки. Згідно формул (4.57) і (4.58)

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ -\sin 4t \\ 2\cos 4t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \cos 4t \\ 2\sin 4t \end{pmatrix},$$

де $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ – частинний розв'язок для $\lambda_3 = -4i$.

Загальний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = -4C_1 e^{-2t} + 2C_2\cos 4t + 2C_3\sin 4t, \\ y_{\text{одн}} = C_1 e^{-2t} - C_2\sin 4t + C_3\cos 4t, \\ z_{\text{одн}} = C_1 e^{-2t} + 2C_2\cos 4t + 2C_3\sin 4t. \end{cases}$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам: $x(0) = -4,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1$. При $t = 0$ матимемо

$$\begin{cases} -4 = -4C_1 + 2C_2, \\ 0 = C_1 + C_3, \\ 1 = C_1 + 2C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = -1. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x_{\text{одн.част}} = -4e^{-2t} - 2\sin 4t, \\ y_{\text{одн.част}} = e^{-2t} - \cos 4t, \\ z_{\text{одн.част}} = e^{-2t} - 2\sin 4t. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_{\text{одн.част}} = -4\mathrm{e}^{-2t} - 2\sin 4t, \\ y_{\text{одн.част}} = \mathrm{e}^{-2t} - \cos 4t, \\ z_{\text{одн.част}} = \mathrm{e}^{-2t} - 2\sin 4t. \end{cases}$

Приклад 96. Розв'язати систему трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i \ (i = 1, 2, 3)$ матриці A:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Корені рівняння: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$.

Для дійсного кореня $\lambda_1 = 2$ частинний розв'язок системи шукаємо у вигляді:

$$x_1 = \gamma_{11}\mathrm{e}^{2t}, \ y_1 = \gamma_{21}\mathrm{e}^{2t}, \ z_1 = \gamma_{31}\mathrm{e}^{2t}.$$

Підставивши його в задану систему і скоротивши на e^{2t}, знайдемо γ_{11}, γ_{21}, γ_{31}:

$$\begin{cases} 2\gamma_{11} = 2\gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31}, \\ 2\gamma_{21} = -2\gamma_{11} - \gamma_{31}, \\ 2\gamma_{31} = 2\gamma_{11} + \gamma_{21} + 2\gamma_{31}. \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_{11} = -\gamma_{21}/2, \ \gamma_{31} = -\gamma_{21}.$$

Покладемо, наприклад, $\gamma_{21} = -2$, тоді $\gamma_{11} = 1$, $\gamma_{31} = 2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_1 = \mathrm{e}^{2t}, \ y_1 = -2\mathrm{e}^{2t}, \ z_1 = 2\mathrm{e}^{2t}.$$

Дійсні корені $\lambda_{2,3} = 1$ кратності два. Порядок матриці $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $n = 3$, $r = \operatorname{rang}(A - \lambda_2 E) = 2$. Оскільки $n - r = 1 < k = 2$, то розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x_2 = (A_1 t + B_1)\mathrm{e}^{t}, \ y_2 = (A_2 t + B_2)\mathrm{e}^{t}, \ z_2 = (A_3 t + B_3)\mathrm{e}^{t}.$$

Підставимо його в задану систему і, скоротивши на e^{t}, прирівняємо коефіцієнти при степенях t. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$:

$$\begin{array}{c|l} t & \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 0, \\ -2A_1 - A_2 - A_3 = 0, \\ 2A_1 + A_2 + A_3 = 0. \end{cases} \\ t^0 & \begin{cases} A_1 = B_1 + B_2 + B_3, \\ A_2 = -2B_1 - B_2 - B_3, \\ A_3 = 2B_1 + B_2 + B_3. \end{cases} \end{array}$$

Розв'язок цієї системи: $A_1 = 0$, $B_1 = -A_2$, $A_3 = -A_2$, $B_3 = A_2 - B_2$.

Покладемо $A_2 = C_1$, $B_2 = C_2$. Матимемо $A_1 = 0$, $B_1 = -C_1$, $A_3 = -C_1$, $B_3 = C_1 - C_2$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$x_2 = -C_1 \mathrm{e}^{t}, \ y_2 = (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{t}, \ z_2 = (-C_1 t + C_1 - C_2)\mathrm{e}^{t}.$$

Загальний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x = -C_1 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = (C_1 t + C_2) e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (-C_1 t + C_1 - C_2) e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

<u>Зауваження 4.6</u>. Сталі C_1 і C_2 використані для запису частинного розв'язку, який відповідає $\lambda_{2,3} = 1$, тому для запису частинного розв'язку, який відповідає $\lambda_1 = 2$, використовуємо сталу C_3.

Відповідь: $\begin{cases} x = -C_1 e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = (C_1 t + C_2) e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (-C_1 t + C_1 - C_2) e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases}$

Приклад 97. Розв'язати систему трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x + y - z, \\ z' = x + z \end{cases}$ методом Ейлера.

Розв'язання. Матричне рівняння системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння за формулою (4.33): $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо власні числа $\lambda_i\ (i = 1, 2, 3)$ матриці A:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^3 = 0.$$

Корені рівняння $\lambda_{1,2,3}=2$ кратності $k=3$. Порядок матриці $A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $n=3$, $r=\text{rang}\left(A-\lambda_2 E\right)=2$. Оскільки $n-r=1<k=3$, то розв'язок шукаємо у вигляді:

$x=\left(A_1 t^2+B_1 t+D_1\right)\mathrm{e}^{2t}$, $y=\left(A_2 t^2+B_2 t+D_2\right)\mathrm{e}^{2t}$, $z=\left(A_3 t^2+B_3 t+D_3\right)\mathrm{e}^{2t}$.

Підставимо його в задану систему і, скоротивши на e^{2t}, прирівняємо коефіцієнти при степенях t. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $A_1,\ B_1, D_1,\ A_2,\ B_2,\ D_2, A_3,\ B_3, D_3$:

$$
\begin{array}{c|l}
t^2 & \begin{cases} 2A_1=4A_1-A_2\,, \\ 2A_2=3A_1+A_2-A_3, \\ 2A_3=A_1+A_3\,. \end{cases} \\
t & \begin{cases} 2B_1+2A_1=4B_1-B_2, \\ 2B_2+2A_2=3B_1+B_2-B_3, \\ 2B_3+A_3=B_1+B_3. \end{cases} \\
t^0 & \begin{cases} 2D_1+B_1=4D_1-D_2, \\ 2D_2+B_2=3D_1+D_2-D_3, \\ 2D_3+B_3=D_1+D_3. \end{cases}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{l}
\begin{cases} A_2=2A_1, \\ A_2=3A_1-A_3, \\ A_3=A_1\,. \end{cases} \\
\begin{cases} B_2=2B_1-2A_1, \\ B_3=3B_1-B_2-2A_2, \\ B_3=B_1-A_3. \end{cases} \\
\begin{cases} D_2=2D_1-B_1, \\ D_3=3D_1-D_2-B_2, \\ D_3=D_1-B_3. \end{cases}
\end{array}
$$

Покладемо $A_1=C_1$, $B_1=C_2$, і $D_1=C_3$. Матимемо $A_2=2C_1$, $B_2=2C_2-2C_1$, $D_2=2C_3-C_2$, $A_3=C_1$, $B_3=C_2-2C_1$, $D_3=C_3-C_2+2C_1$.

Загальний розв'язок заданої системи трьох ЛОДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$
\begin{cases}
x=\left(C_1 t^2+C_2 t+C_3\right)\mathrm{e}^{2t}, \\
y=\left(2C_1 t^2+\left(2C_2-2C_1\right)t+\left(2C_3-C_2\right)\right)\mathrm{e}^{2t}, \\
z=\left(C_1 t^2+\left(C_2-2C_1\right)t+\left(C_3-C_2+2C_1\right)\right)\mathrm{e}^{2t}.
\end{cases}
$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \left(C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right)\mathrm{e}^{2t}, \\ y = \left(2C_1 t^2 + \left(2C_2 - 2C_1\right)t + \left(2C_3 - C_2\right)\right)\mathrm{e}^{2t}, \\ z = \left(C_1 t^2 + \left(C_2 - 2C_1\right)t + \left(C_3 - C_2 + 2C_1\right)\right)\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

4.2.2 Системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо нормальну систему n лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами з n невідомими функціями $y_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ від змінної x:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{4.62}$$

де $a_{ij}, (i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n})$ – дійсні сталі числа, функції $f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ – неперервні на деякому проміжку (a,b), хоча б одна з них відмінна від нуля.

Загальним розв'язком системи (4.62) є сума частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку відповідної однорідної системи:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \ldots \\ y_{n1} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \ldots \\ y_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \ldots \\ y_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(x) \\ \tilde{y}_2(x) \\ \ldots \\ \tilde{y}_n(x) \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

або

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i(x) + \tilde{Y}, \tag{4.64}$$

де $Y_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі, $\tilde{Y}$ – частинний розв'язок системи (4.62).

Якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи, то для знаходження частинного розв'язку $\tilde{Y}$ системи (4.62) можна застосувати ***метод невизначених коефіцієнтів***, якщо всі функції $f_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ – складаються із сум і добутків функцій:

- $P_n(x)$ – многочлен степеня n;
- $e^{\alpha x}$, де α – дійсне число;
- $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, де β – дійсне число.

Якщо $f_i(x)=P_{n_i}(x)e^{\alpha x}$, де $P_{n_i}(x)$ – многочлен степеня n_i, то частинний розв'язок системи (4.62) шукатимемо у вигляді

$$\overline{y}_i = Q_{(n+s)_i}(x)e^{\alpha x}\ \left(i=\overline{1,n}\right), \tag{4.65}$$

де $Q_{(n+s)_i}(x)$ – многочлен степеня $(n+s)$ з невідомими коефіцієнтами; $n=\max n_i$, $s=0$, якщо α – не корінь характеристичного рівняння, а якщо α – корінь, то s можна взяти рівним кратності цього кореня (або, точніше, s на одиницю більше найбільшої з степенів многочленів, на яке множиться $e^{\alpha x}$ у загальному розв'язку однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти многочленів визначаються шляхом підстановки виразів (4.64) у вихідну систему (4.62) та порівняння коефіцієнтів подібних членів.

Аналогічно визначаються степені многочленів і у випадку, коли $f_i(x)$ містять $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, а число $\lambda=\alpha+i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Якщо функції $f_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ довільні функції, то застосовують ***метод варіації довільних сталих***.

Розглянемо застосування метода на прикладі системи з трьома лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + f_1(t), \\ y' = a_1x + b_1y + c_1z + f_2(t), \\ z' = a_2x + b_2y + c_2z + f_3(t). \end{cases} \tag{4.66}$$

Припустимо, що відповідна їй однорідна система

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1z, \\ z' = a_2x + b_2y + c_2z. \end{cases} \tag{4.67}$$

має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Будимо вважати сталі C_1, C_2, C_3 функціями змінної t, тобто $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$. Тоді загальний розв'язок системи (4.66) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x &= C_1(t)x_1 + C_2(t)x_2 + C_3(t)x_3, \\ y &= C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + C_3(t)y_3, \\ z &= C_1(t)z_1 + C_2(t)z_2 + C_3(t)z_3. \end{aligned} \tag{4.69}$$

де функції $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ необхідно визначити.

Диференціюємо кожне рівняння (4.69) по t і підставляємо в систему (4.66). Матимемо

$$\begin{aligned} &C_1'x_1 + C_1x_1' + C_2'x_2 + C_2x_2' + C_3'x_3 + C_3x_3' = \\ &= a(C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3) + b(C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3) + \\ &+ c(C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3) + f_1(t). \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$C_1'y_1+C_1y_1'+C_2'y_2+C_2y_2'+C_3'y_3+C_3y_3'=$$
$$=a_1(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3)+b_1(C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3)+ \qquad (4.71)$$
$$+c_1(C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3)+f_2(t),$$

$$C_1'z_1+C_1z'+C_2'z_2+C_2z_2'+C_3'z_3+C_3z_3'=$$
$$=a_2(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3)+b_2(C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3)+ \qquad (4.72)$$
$$+c_2(C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3)+f_3(t).$$

Запишемо праві частини рівнянь (4.70) – (4.72) у вигляді:

$$C_1'x_1+C_2'x_2+C_3'x_3+C_1(x_1'-ax_1-by_1-cz_1)+$$
$$+C_2(x_2'-ax_2-by_2-cz_2)+C_3(x_3'-ax_3-by_3-cz_3)=f_1(t).$$

$$C_1'y_1+C_2'y_2+C_3'y_3+C_1(y_1'-a_1x_1-b_1y_1-c_1z_1)+$$
$$+C_2(y_2'-a_1x_2-b_1y_2-c_1z_2)+C_3(y_3'-a_1x_3-b_1y_3-c_1z_3)=f_2(t),$$

$$C_1'z_1+C_2'z_2+C_3'z_3+C_1(z_1'-a_2x_1-b_2y_1-c_2z_1)+$$
$$+C_2(z_2'-a_2x_2-b_2y_2-c_2z_2)+C_3(z_3'-a_2x_3-b_2y_3-c_2z_3)=f_3(t).$$

Оскільки x, y, z – розв’язки однорідної системи, то вирази у дужках при C_1, C_2, C_3 дорівнюють нулю. Матимемо лінійну

систему трьох рівнянь відносно C_1', C_2', C_3':

$$\begin{cases} C_1'x_1+C_2'x_2+C_3'x_3=f_1(t), \\ C_1'y_1+C_2'y_2+C_3'y_3=f_2(t), \\ C_1'z_1+C_2'z_2+C_3'z_3=f_3(t). \end{cases} \qquad (4.73)$$

Визначник системи відмінний від нуля, оскільки сукупність розв’язків (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) лінійно незалежна. Розв’язок системи

$$\begin{cases} C_1' = \varphi_1(t), \\ C_2' = \varphi_2(t), \\ C_3' = \varphi_3(t). \end{cases} \tag{4.74}$$

Інтегруючи (4.74), матимемо

$$\begin{cases} C_1 = \int \varphi_1(t)dt + \tilde{C}_1, \\ C_2 = \int \varphi_2(t)dt + \tilde{C}_2, \\ C_3 = \int \varphi_3(t)dt + \tilde{C}_3, \end{cases} \tag{4.75}$$

де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ – довільні сталі. Загальний розв'язок системи (4.65) отримаємо підставивши (4.75) в (4.69).

Приклад 98. Розв'язати систему двох ЛНДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t, \\ y' = x + y + t. \end{cases}$ методом виключення.

Розв'язання. Позначимо для зручності рівняння системи $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t, & (1) \\ y' = x + y + t. & (2) \end{cases}$ Застосовуючи метод виключення, отримаємо ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t:

$$x'' = -3x' - 4y' + 2;$$

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні:

$$x'' = -3x' - 4(x + y + t) + 2,$$

$$x'' = -3x' - 4x - 4y - 4t + 2; \quad (3)$$

в) з рівняння (1) системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{4}(2t - 3x - x') \quad (4)$$

і підставляємо в рівняння (3):

$$x'' = -3x' - 4x - 4 \cdot \frac{1}{4}(2t - 3x - x') - 4t + 2,$$

$$x'' = -3x' - 4x - 2t + 3x + x' - 4t + 2\,,$$
$$x'' + 2x' + x = -6t + 2. \qquad (5)$$

Рівняння (5) є ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтними відносно функції $x(t)$. Загальний розв'язок його $x = x_{\text{одн}} + \overline{x}$.

Знаходимо розв'язок відповідного ЛОДР-2: $x'' + 2x' + x = 0$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 + 2k + 1 = 0, \quad k_{1,2} = -1$. Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.57):

$$x_{\text{одн}} = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Функція в правій частині рівняння (5)

$$f(t) = -6t + 2 \quad \Rightarrow \alpha = 0, n = 1, s = 0\,.$$

Тому частинний розв'язок $\overline{x}$ шукаємо у вигляді: $\overline{x} = At + B$. Знайдемо $\overline{x}'$, $\overline{x}''$, а саме: $\overline{x}' = A,\ \overline{x}'' = 0$. Підставляємо в рівняння (5) $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$:

$$2A + At + B = -6t + 2\,.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів t в обох частинах отриманої рівності, матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів A і B:

$$\begin{array}{c|l} t & A = -6 \\ t^0 & 2A + B = 2, \quad B = 14 \end{array}$$

Частинний розв'язок $\overline{x}$ ЛНДР-2 $\overline{x} = -6t + 14$.

Загальний розв'язок x отриманого ЛНДР-2 має вигляд:

$$x = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} - 6t + 14\,.$$

Для знаходження функції y застосуємо рівняння (4):

$$x' = C_2\,\mathrm{e}^{-t} - (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} - 6\,,$$

$$y = \frac{1}{4}(2t - 3\cdot(C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} + 18t - 42 - C_2\,\mathrm{e}^{-t} + (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} + 6) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(20t - 36 - 2(C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} - C_2\,\mathrm{e}^{-t}\right) = 0{,}5\,(C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} -$$
$$-0{,}25C_2\,\mathrm{e}^{-t} + 5t - 9 = 0{,}5\,(C_1 - 0{,}5C_2 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t} + 5t - 9\,.$$

Загальний розв'язок заданої системи двох ЛНДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} - 6t + 14, \\ y = 0{,}5\left(C_1 - 0{,}5C_2 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} + 5t - 9. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} - 6t + 14, \\ y = 0{,}5\left(C_1 - 0{,}5C_2 + C_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} + 5t - 9. \end{cases}$

Приклад 99. Розв'язати систему двох ЛНДР-1 зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{cases}$$

Розв'язання. Загальним розв'язком заданої системи є сума загального розв'язку відповідної однорідної системи і частинного розв'язку цієї системи:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{одн}} \\ y_{\text{одн}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $f_1(t) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1}$ і $f_2(t) = -\dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}$, загальний розв'язок заданої системи знайдемо, застосовуючи *метод варіації довільних сталих*. Знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи $\begin{cases} x' = -4x - 2y, & (1) \\ y' = 6x + 3y & (2) \end{cases}$ методом виключення (див. Приклад 88 та Приклад 89).

Виконаєм наступні дії:

а) диференціюємо рівняння (1) по змінній t: $x'' = -4x' - 2y'$;

б) значення y' з рівняння (2) системи підставляємо в отримане рівняння і приводимо подібні: $x'' = -4x' - 12x - 6y$ (3);

в) з рівняння (1) системи знаходимо y: $y = 0{,}5 \cdot \left(-4x - x'\right)$ (4) і підставляємо в рівняння (3): $x'' + x' = 0$ (5).

Рівняння (5) є ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтними відносно функції $x(t)$. Характеристичне рівняння для нього $k^2 + k = 0$, $k_1 = -1$ і $k_2 = 0$. Тоді загальний розв'язок ЛОДР-2 за формулою (3.56):

$$x_{\text{одн}} = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 .$$

Для знаходження функції $y(t)$ застосуємо рівняння (4):

$$y_{\text{одн}} = -\frac{3}{2} C_1 \mathrm{e}^{-t} - 2C_2 ,$$

Загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 , \\ y_{\text{одн}} = -\dfrac{3}{2} C_1 \mathrm{e}^{-t} - 2C_2 . \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукатимемо у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = C_1(t)\mathrm{e}^{-t} + C_2(t), \\ y(t) = -\dfrac{3}{2} C_1(t)\mathrm{e}^{-t} - 2C_2(t). \end{cases}$$

Функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$ знайдемо, розв'язуючи систему рівнянь, складену відносно їх похідних:

$$\begin{cases} C_1'(t)\mathrm{e}^{-t} + C_2'(t) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t - 1}, \\ -\dfrac{3}{2} C_1'(t)\mathrm{e}^{-t} - 2C_2'(t) = -\dfrac{3}{\mathrm{e}^t - 1}. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $C_1'(t) = 2 \cdot \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}$ і $C_2'(t) = 0$. Інтегруємо отримані рівняння. Матимемо

$$C_1(t) = 2 \cdot \ln\left|\mathrm{e}^t - 1\right| + \tilde{C}_1 , \qquad C_2(t) = \tilde{C}_2 .$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{cases} x(t) = \left(2 \cdot \ln\left|\mathrm{e}^t - 1\right| + \tilde{C}_1\right)\mathrm{e}^{-t} + \tilde{C}_2 , \\ y(t) = -\dfrac{3}{2}\left(2 \cdot \ln\left|\mathrm{e}^t - 1\right| + \tilde{C}_1\right)\mathrm{e}^{-t} - 2 \cdot \tilde{C}_2 . \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = \left(2 \cdot \ln\left|e^t - 1\right| + \tilde{C}_1\right)e^{-t} + \tilde{C}_2, \\ y(t) = -\dfrac{3}{2}\left(2 \cdot \ln\left|e^t - 1\right| + \tilde{C}_1\right)e^{-t} - 2 \cdot \tilde{C}_2. \end{cases}$

Приклад 100. Розв'язати систему трьох ЛНДР-1 зі сталими коефіцієнтами $\begin{cases} x' = x - y + z + e^{3t}, \\ y' = x + y - z + t, \\ z' = 2x - y + \sin t. \end{cases}$

Розв'язання. Загальний розв'язок заданої системи знайдемо, застосовуючи *метод варіації довільних сталих*.

Загальний розв'язок відповідної однорідної системи $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y \end{cases}$ знайдений в Прикладі 93:

$$\begin{cases} x_{\text{одн}} = C_1\, e^{t} - C_2\, e^{-t} + C_3\, e^{2t}, \\ y_{\text{одн}} = C_1\, e^{t} + 3C_2\, e^{-t}, \\ z_{\text{одн}} = C_1\, e^{t} + 5C_2\, e^{-t} + C_3\, e^{2t}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукатимемо у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = C_1(t)e^{t} - C_2(t)e^{-t} + C_3(t)e^{2t}, \\ y(t) = C_1(t)e^{t} + 3C_2(t)e^{-t}, \\ z(t) = C_1(t)e^{t} + 5C_2(t)e^{-t} + C_3(t)e^{2t}. \end{cases}$$

Функції $C_1(t)$, $C_2(t)$ і $C_3(t)$ знайдемо, розв'язуючи систему рівнянь, складену відносно їх похідних:

$$\begin{cases} C_1'(t)e^{t} - C_2'(t)e^{-t} + C_3'(t)e^{2t} = e^{3t}, \\ C_1'(t)e^{t} + 3C_2'(t)e^{-t} = t, \\ C_1'(t)e^{t} + 5C_2'(t)e^{-t} + C_3'(t)e^{2t} = \sin t. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера. Знайдемо визначник системи і визначники невідомих для $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ і $C_3'(t)$ відповідно Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{t} & 3e^{-t} & 0 \\ e^{t} & 5e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = 6e^{2t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{3t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ t & 3e^{-t} & 0 \\ \sin t & 5e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix} = 3e^{4t} + 6t\,e^{t} + e^{t}\sin t,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{t} & e^{3t} & e^{2t} \\ e^{t} & t & 0 \\ e^{t} & \sin t & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{3t}\sin t - e^{6t},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{t} & 3e^{-t} & t \\ e^{t} & 5e^{-t} & \sin t \end{vmatrix} = 2\sin t - 6t - 8e^{3t}.$$

Тоді $C_1'(t) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{3e^{4t} + 6t\,e^{t} + e^{t}\sin t}{6e^{2t}} = \dfrac{1}{2}e^{2t} + t\,e^{-t} + \dfrac{1}{6}e^{-t}\sin t$,

$$C_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{3t}\sin t - e^{6t}}{6e^{2t}} = \frac{1}{6}e^{t}\sin t - \frac{1}{6}e^{4t},$$

$$C_3'(t) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2\sin t - 6t - 8e^{3t}}{6e^{2t}} = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin t - t\,e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{t}.$$

Інтегруємо отримані рівняння. Матимемо

$$C_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - (t+1)e^{-t} - \frac{1}{12}e^{-t}(\cos t + \sin t) + \tilde{C}_1,$$

$$C_2(t) = \frac{1}{12}e^{t}(-\cos t + \sin t) - \frac{1}{24}e^{4t} + \tilde{C}_2.$$

$$C_3(t) = \frac{1}{15}e^{-2t}(-\cos t + \sin t) + \frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1) - \frac{4}{3}e^{t} + \tilde{C}_3.$$

Загальний розв’язок неоднорідної системи:

$$x(t)=\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}-(t+1)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-t}(\cos t+\sin t)+\tilde{C}_1\right)\mathrm{e}^{t}-$$
$$-\left(\frac{1}{12}\mathrm{e}^{t}(-\cos t+\sin t)-\frac{1}{24}\mathrm{e}^{4t}+\tilde{C}_2\right)\mathrm{e}^{-t}+$$
$$+\left(\frac{1}{15}\mathrm{e}^{-2t}(-\cos t+\sin t)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}(2t+1)-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{t}+\tilde{C}_3\right)\mathrm{e}^{2t},$$
$$y(t)=\left(\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}-(t+1)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-t}(\cos t+\sin t)+\tilde{C}_1\right)\right)\mathrm{e}^{t}+$$
$$+3\left(\left(\frac{1}{12}\mathrm{e}^{t}(-\cos t+\sin t)-\frac{1}{24}\mathrm{e}^{4t}+\tilde{C}_2\right)\right)\mathrm{e}^{-t},$$
$$z(t)=\left(\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}-(t+1)\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-t}(\cos t+\sin t)+\tilde{C}_1\right)\right)\mathrm{e}^{t}+$$
$$+5\left(\left(\frac{1}{12}\mathrm{e}^{t}(-\cos t+\sin t)-\frac{1}{24}\mathrm{e}^{4t}+\tilde{C}_2\right)\right)\mathrm{e}^{-t}+$$
$$+\left(\frac{1}{15}\mathrm{e}^{-2t}(-\cos t+\sin t)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}(2t+1)-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{t}+\tilde{C}_3\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

4.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти розв’язки заданих систем лінійних диференціальних рівнянь:

Завдання	Відповідь
1. $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{y}, \\ y'=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$	$\begin{cases} x^2=C_1t+C_2, \\ y^2=\dfrac{4}{C_1}(C_1t+C_2). \end{cases}$
2. $\begin{cases} x'=5x+4y, \\ y'=2x+3y. \end{cases}$	$\begin{cases} x=C_1\mathrm{e}^{t}+C_2\,\mathrm{e}^{7t}, \\ y=C_1\mathrm{e}^{t}+0{,}5C_2\,\mathrm{e}^{7t}. \end{cases}$

Завдання	Відповідь
3. $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -2x + 3y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y = e^{2t}\left(\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right). \end{cases}$
4. $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = e^{t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y = e^{t}\left(\left(2C_1 - C_2\right)\cos t + \left(C_1 + 2C_2\right)\sin t\right). \end{cases}$
5. $\begin{cases} x' = 6x + y, \\ y' = -16x - 2y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \left(C_1 t + C_2\right)e^{2t}, \\ y = \left(C_1 - 4C_1 t - 4C_2\right)e^{2t}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2. \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = e^{-6x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right), \\ y_2 = e^{-6x} C_1\left(\cos x - \sin x\right) + \\ \quad + e^{-6x} C_2\left(\cos x + \sin x\right). \end{cases}$
7. $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1$	$\begin{cases} x_{\text{част}} = 2t e^{-3t}, \\ y_{\text{част}} = \left(1 - 2t\right)e^{-3t}. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$	$\begin{cases} x_{\text{част}} = 3e^{2t}, \\ y_{\text{част}} = e^{2t}. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2e^{t}\left(C_3 \cos 2t - C_2 \sin 2t\right), \\ y = e^{t}\left(C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t\right), \\ z = e^{t}\left(-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t\right). \end{cases}$
10. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = -x + 2y + 3z \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}\left(C_2 \cos t + C_3 \sin t\right) \\ y = e^{3t}\left(\left(C_2 + C_3\right)\cos t + \left(C_3 - C_2\right)\sin t\right) \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}(\left(2C_2 - C_3\right)\cos t + \\ \quad + \left(2C_3 + C_2\right)\sin t) \end{cases}$
11. $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \left(C_2 + C_3 t\right)e^{-t}, \\ y = 2C_1 e^{t} - \left(2C_2 + C_3 + 2C_3 t\right)e^{-t}, \\ z = C_1 e^{t} - \left(C_2 + C_3 + C_3 t\right)e^{-t}. \end{cases}$

Завдання	Відповідь
12. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}. \end{cases}$
13. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$	$\begin{cases} y_1 = (C_1 + C_2 x) e^{x} + 2C_3, \\ y_2 = C_1 e^{x} - C_3, \\ y_3 = (C_1 + C_2 x) e^{x} + C_3. \end{cases}$
14. $\begin{cases} x' = 6x + y + t, \\ y' = 5x + 2y + 1. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{7t} - \frac{2}{7} t - \frac{2}{49}, \\ y = -5C_1 e^{t} + C_2 e^{7t} + \frac{5}{7} t - \frac{2}{49}. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3, \\ y' = 5x - 6y + 1. \end{cases}$ $x(0) = 6,\ y(0) = 5$	$\begin{cases} x_{\text{част}} = 5e^{-2t} \cos 3t + 1, \\ y_{\text{част}} = e^{-2t} (4\cos 3t + 3\sin 3t) + 1. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1, \\ y' = -x + tgt. \end{cases}$	$\begin{cases} x = \tilde{C}_1 \cos t + \tilde{C}_2 \sin t + tgt, \\ y = -\tilde{C}_1 \sin t + \tilde{C}_2 \cos t + 2. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посібник : у 2 т. Т. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння та ряди / Л. В. Курпа [та ін.] ; Нац. техн. ун-т “Харків. політехн. ін-т”. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2009. – 432 с. – Режим доступу : http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/4623.

2. Габрусєв Г. В. Звичайні диференціальні рівняння. Навчальний посібник для студентів які навчаються за напрямом автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології. / Г. В. Габрусєв, О. М. Самборська – Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 172 с.

3. Гаращенко Ф. Г. Диференціальні рівняння для інформатиків : підручник / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвієнко, І. І. Харченко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.

4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2010. – 470 с.

5. Гой Т. П. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Вид. 2-ге, випр. та доп. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.

6. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 356 с.

7. Гой Т. П. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 1. Диференціальні рівняння першого порядку : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Івано-Франківськ : Голіней, 2017. – 116 с.

8. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.

9. Домбровський В. А. Вища математика : підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, та ін. ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп’юка, 2003. – 480 с.

10. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібн. – У трьох частинах. Ч. 3 / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – 2-ге вид. – Харків : Веста, 2008. – 232 с.

11. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс. – Україна, 2011. – 648 с.

12. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П Дубовик., І. І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

13. Збірник задач з вищої математики / В. В. Бабенко, А. Г. Зіневич, С. М. Кічура, та ін. – Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 256 с.

14. Зюбанов О. Є. Навчальний посібник «Диференціальні рівняння» – Вінниця : ДонНУ імені Василя Стуса, 2018. – 72 с.

15. Івасишен С. Д. Диференціальні рівняння : методи та застосування : навч. посіб. / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 288 с.

16. Килимник І. М. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / І. М. Килимник, Д. С. Яримбаш. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 102 с.

17. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах : навчальний посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.

18. Копась І. М. Диференціальні рівняння : навчальний посібник для інженерних спеціальностей / І. М. Копась. – К. : КПІ імені Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

19. Математичний аналіз 2 : Інтегральне числення, функціональні ряди, диференціальні рівняння. Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний. посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. : В. Г. Бондаренко, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін. – 2020. – 56 с.

20. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. – К. : Техніка, 2004. – 792 с.

21. Практикум з розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені

Павла Тичини ; уклад. М. В. Дудик. – Бровари : АНФ груп, 2021. – 107 с.

22. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – Київ ВПЦ Київський університет, 2010. – 600 с.

23. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – Київ : Либідь, 2003. – 504 с.

24. Шкіль М. І. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, В. М. Лейфура, П. Ф. Самусенко. – К. : Техніка, 2003. – 368 с.

Навчальне видання

КИЛИМНИК Ірина Михайлівна
ЯРИМБАШ Дмитро Сергійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
(видання 2-е, виправлене і доповнене)

Комп'ютерний набір: *Килимник І.М.*
Комп'ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 02.10.2024. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 14,9.
Тираж 100 прим. Зам. № 1143.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.