

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Національний університет «Запорізька політехніка»**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**  
**ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**

**Частина 2**

**Теорія механізмів і машин**

**2023**



**MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE**

**National University “Zaporizhzhia Polytechnic”**

**TEXTBOOK**

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

**Part 2**

**Theory of Machines and Mechanisms**

**2023**

УДК 531.8 (075.8)  
Ф95

*Рекомендовано до видання Вченою радою  
НУ «Запорізька політехніка», протокол №2 від 25.09.2023 р.*

**Рецензенти:** Дзюба А.П., д.т.н., професор; Хрипко С.Л., д.т.н., професор; Галуцьких І.А., доктор філологічних наук, професор

**Автори:** Фурсіна А.Д., канд. техн. наук, доцент; Шевченко В. Г., канд. техн. наук, доцент; Кружнова С.Ю., ст. викл.

Ф95

**Фурсіна А. Д.**

Теоретична та прикладна механіка – Theoretical and Applied Mechanics : навчальний посібник : в 4 ч. Ч. 2 : Теорія механізмів і машин / А. Д. Фурсіна, В. Г. Шевченко, С. Ю. Кружнова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 122 с.

ISBN 978-617-529-427-7

Книга «Теоретична та прикладна механіка» є навчальним посібником із прикладної механіки для студентів немеханічних спеціальностей. Обсяг матеріалу обумовлений програмою з теоретичної та прикладної механіки для технічних вищих навчальних закладів. Даний навчальний посібник призначений для освоєння студентами програмного матеріалу українського та англійського мовами.

"Theoretical and Applied Mechanics" is a textbook on applied mechanics for students of non-mechanical specialties. The volume of book material corresponds to the programme on theoretical and applied mechanics for technical universities. This textbook focuses on students's skills to master the syllabus content in the Ukrainian and English languages.

**УДК 531.8 (075.8)**

ISBN 978-617-529-427-7

© НУ «Запорізька політехніка», 2023

© Фурсіна А. Д., 2023

© Шевченко В. Г., 2023

© Кружнова С. Ю., 2023

UDC 531.8 (075.8)  
F95

*Recommended for publication by the Academic Council of the National University  
“Zaporizhzhia Polytechnic”, Minutes No.2 dated 25.096.2023*

**Reviewers:** A.P. Dsyuba, S.L. Hrypko, I.A. Galutskyh

**Authors:** A.D. Fursina, PhD in Technical Sciences, Assistant Professor; V.G. Shevchenko PhD in Technical Sciences, Assistant Professor; S.Yu. Kruzhnova , Senior Lector

F95

**Fursina A. D.**

Theoretical and Applied Mechanics: Study letter: in 4 parts Part 2: Theory of Machines and Mechanismus / A. D. Fursina , V. G. Shevchenko, S. Yu. Kruzhnova. – Zaporizhzhia: National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, 2023. – 122 p.

ISBN 978-617-529-427-7

Книга «Теоретична та прикладна механіка» є навчальним посібником із прикладної механіки для студентів немеханічних спеціальностей. Обсяг матеріалу обумовлений програмою з теоретичної та прикладної механіки для технічних вищих навчальних закладів. Даний навчальний посібник призначений для освоєння студентами програмного матеріалу українською та англійською мовами.

“Theoretical and Applied Mechanics” is a textbook on applied mechanics for students of non-mechanical specialties. The volume of book material corresponds to the programme on theoretical and applied mechanics for technical universities. This textbook focuses on students’s skills to master the syllabus content in the Ukrainian and English languages.

**UDC 531.8 (075.8)**

ISBN 978-617-529-427-7

© National University  
“Zaporizhzhia Polytechnic”, 2023  
© Fursina A.D., 2023  
© Shevchenko V. G., 2023  
© Kruzhnova S. Yu., 2023

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	8
Основні поняття теорії механізмів і машин (ТММ) .....	10
Кінематичні пари та ланцюги .....	12
1 СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ .....	22
1.1 Визначення ступеня рухомості плоских механізмів ...	24
1.2 Утворення механізмів. Група Ассура .....	28
1.3 Структурна класифікація плоских механізмів .....	30
1.4 Визначення класу механізму .....	32
1.5 Структурний аналіз плоских механізмів .....	34
2 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ .....	40
2.1 Задачі та методи кінематичного дослідження .....	40
2.2 Побудова планів механізму та вибір масштабів .....	42
2.3 Побудова планів швидкостей та пришвидшень .....	46
3 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕДАЧ .....	58
3.1 Прості зубчасті механізми .....	58
3.2 Рядові зубчасті механізми .....	62
3.3 Сателітні механізми .....	66
4 ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН .....	72
4.1 Основні задачі динамічного дослідження механізмів .....	72
4.2 Сили, що діють у машинах .....	72
4.3 Визначення сил інерції ланок і сил реакцій у кінематичних парах .....	76

## TABLE OF CONTENTS

INTRODUCTION .....	9
Basic Concepts of the Mechanisms and Machines Theory (MMT) .....	11
Kinematic Pairs and Kinematic Chains.....	13
1 STRUCTURAL ANALYSIS OF MECHANISMS .....	23
1.1 Determining the Degree of Mobility of the Planar Mechanisms .....	25
1.2 Creation of Mechanisms. Assur Group .....	29
1.3 Structural Classification of the Planar Mechanisms.....	31
1.4 Defining the Mechanism Class.....	33
1.5 Structural Analysis of the Planar Mechanisms .....	35
2 KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS.....	41
2.1 Kinematic Analysis Problems and Techniques .....	41
2.2 Construction of Mechanism Diagrams and Selection of Scales .....	43
2.3 Construction of Velocity and Acceleration Diagrams....	47
3 KINEMATIC ANALYSIS OF GEARS .....	59
3.1 Simple Gear Mechanisms .....	59
3.2 Compound Gear Mechanisms.....	63
3.3 Satellite Gear Mechanisms .....	67
4 MECHANISMS AND MACHINES DYNAMICS .....	73
4.1 Basic Problems of Dynamic Mechanism Analysis .....	73
4.2 Forces Acting in Machines .....	73
4.3 Identification of Links Inertia Forces and Reaction Forces in Kinematic Pairs.....	77

4.4 Силовий розрахунок плоских механізмів без врахування сил тертя .....	84
4.5 Визначення зрівноважувальної сили за методом М. Є. Жуковського .....	96
ЛІТЕРАТУРА .....	102
ДОДАТКИ .....	104

4.4 Calculation of Planar Mechanisms Forces Without Considering Friction Forces.....	85
4.5 Calculation of the Balancing Force by the method of M. Ie. Zhukovsky .....	97
REFERENCES .....	103
APPENDICES .....	105

## ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник розрахований на студентів немеханічних спеціальностей і містить необхідний обсяг матеріалу згідно з програмою з дисципліни «Теоретична та прикладна механіка».

В умовах необхідності структурної перебудови економіки України провідну роль виконують в першу чергу галузі машинобудування. Технічний прогрес в машинобудуванні характеризується безперервним вдосконаленням технології виробництва. Це вирішення таких питань, як розробка основ технологічного забезпечення експлуатаційних властивостей деталей, розробка технологічних конверсій, реконструкції виробництва, математичне моделювання та оптимізація і багато інших. Для розв'язання таких різнопланових завдань необхідні спеціалісти, які володіють знаннями в найрізноманітніших галузях. Ці фахівці повинні комунікувати один з одним з виробничих питань. А тому вони повинні розумітись в питаннях машинознавства, які представлені в курсі «Теоретична та прикладна механіка».

Оскільки дисципліна «Теоретична та прикладна механіка» складається з чотирьох предметів «Теоретична механіка», «Теорія механізмів і машин», «Опір матеріалів» та «Деталі машин», студенти вимушені користуватися великою кількістю джерел, що ускладнює роботу і розпоршує їх увагу при вивченні цієї досить складної дисципліни.

В цьому посібнику, який складається з чотирьох частин, матеріал представлено компактно, але в достатньому об'ємі який потребує програма дисципліни «Теоретична та прикладна механіка» для студентів немеханічних спеціальностей.

Друга частина посібника з основ теорії механізмів і машин містить необхідні для формування інженерного мислення загальні методи дослідження, побудови математичних моделей машин та їх елементів, структурний, кінематичний та динамічний аналіз механізмів.

Цей посібник має сприяти підготовці фахівців, що володіють англійською та українською мовами, які зможуть користуватись науковими досягненнями країн світу, обмінюватись досвідом з англомовними колегами з інших держав, стати ближчими до передових методів навчання.

## INTRODUCTION

The textbook is written for students of non-mechanical specialties and contains the adequate amount of information according to the programme of “Theoretical and Applied Mechanics” discipline.

In the face of the requirement to restructure the Ukrainian economy, the leading role is played primarily by the mechanical engineering industry. Technological innovations in mechanical engineering are characterised by continuous improvement of production technology. This includes designing the basics of technological support for the functional performance of parts, development of technological conversions, production reconstruction, mathematical modelling and optimisation, and many others. For the purpose of solving such diverse problems, specialists with knowledge in a wide variety of fields are needed. These specialists are expected to communicate with each other on production issues. Therefore, they must have strong understanding of the mechanical engineering concepts presented in “Theoretical and Applied Mechanics” course.

Since the “Theoretical and Applied Mechanics” discipline consists of four subjects — “Theoretical Mechanics,” “Theory of Mechanisms and Machines,” “Resistance of Materials,” and “Machine Parts” — students are forced to use numerous sources, which complicates their work and scatters their attention when studying this rather complex discipline.

This four-part textbook presents the information briefly, but in sufficient volume to meet the requirements of the “Theoretical and Applied Mechanics” programme for students of non-mechanical specialties.

The second part of the textbook covers the fundamentals of mechanisms and machines theory, which are essential for development of engineering thinking: general research techniques, building mathematical models of machines and their elements, structural, kinematic and dynamic analysis of mechanisms.

This textbook is aimed at training specialists who are proficient in English and Ukrainian, who will be able to use scientific achievements from around the world, exchange experience with English-speaking colleagues from other countries, and become closer to advanced training methods.

## Основні поняття теорії механізмів і машин (ТММ)

Теорія механізмів і машин є дисципліною, яка вводить студентів в коло загальних і спеціальних дисциплін. Її завданням є підготовка студентів до прослуховування курсів деталей машин, технології машинобудування та курсів з розрахунку і конструювання окремих видів машин в залежності від спеціальності з якої студент проходить підготовку.

Як відомо, машина складається з окремих деталей.

*Деталь* – це частина механізму або машини, яка виготовлена без складальних операцій. При аналізі механізмів деталі поділяють на рухомі та нерухомі. Досліджувати механізм починають з побудови кінематичної схеми.

Під *кінематичною схемою* розуміють умовне зображення механізму в масштабі.

В «Теорії механізмів і машин» вводять деякі означення, які відрізняються від тих, що ми застосовуємо в «Теоретичній механіці». Так об'єкти чи деталі в «Теоретичній механіці» прийнято називати «тілами», а в теорії механізмів і машин – «ланками».

Отже, *ланки* (деталі) поділяють на рухомі та нерухомі. Кожна рухома деталь або група деталей, яка утворює одну жорстку рухоми систему тіл, називається *рухомою ланкою* механізму. Усі нерухомі деталі утворюють одну жорстку систему тіл, яка називається *нерухомою ланкою* або *стояком*. Таким чином, в будь-якому механізмі ми маємо одну нерухоми ланку та одну або декілька рухомих.

Система тіл, що призначена для перетворення руху одного або кількох тіл у потрібні рухи інших тіл, називається *механізмом*. Механізми, що входять до складу машин, дуже різноманітні. Одні з них представляють сполучення тільки твердих тіл. Інші мають у своєму складі гідравличні, пневматичні тіла або електричні, магнітні та інші пристрої. В основі кожного механізму лежить кінематичний ланцюг, створений для забезпечення цілком доцільних рухів, необхідних для виконання конкретних виробничих задач.

Рухомі ланки поділяють на *вхідні* та *вихідні*, решту рухомих ланок механізму називають *з'єднуючими* або *прогінними*.

## Basic Concepts of the Mechanisms and Machines Theory (MMT)

Mechanisms and Machines Theory is a study subject that introduces students to the range of general and specialised disciplines. Its objective is to prepare students for courses in machine elements, mechanical engineering technique and courses in calculation and design of certain types of machines, depending on the specialty in which the student studies.

As you know, a machine consists of individual parts.

A *part* is a piece of a mechanism or machine manufactured without assembly operations. When analysing mechanisms, parts are divided into movable and fixed parts. The analysis of a mechanism begins with creation of a kinematic diagram.

A *kinematic diagram* means a conventional representation of a mechanism to scale.

In “Mechanisms and Machines Theory”, some definitions are introduced that differ from those used in “Theoretical Mechanics”. For example, in “Theoretical Mechanics” objects or parts are called “bodies,” while in “Mechanisms and Machines Theory” they are called “links”.

Thus, *links*(parts) are classified as movable and fixed. Each moving part or group of parts that forms a single rigid moving system of bodies is called a *movable link* of a mechanism. All fixed parts constitute a single rigid system of bodies called a *fixed link* or a *fixed member*. Therefore, any mechanism has one fixed link and one or more movable links.

A system of bodies designed to convert motion of one or more bodies into the desired motion of other bodies is called a *mechanism*. There are many variations of mechanisms which constitute parts of machines. Some of them are a combination of solid bodies only. Other mechanisms incorporate hydraulic, pneumatic bodies or electrical, magnetic and other devices. Each mechanism consists of a kinematic chain designed to deliver appropriate movements required to perform specific production functions.

Movable links are divided into *input* and *output* links, and the remaining movable links of a mechanism are called *connecting links* or *couplers*.

## Кінематичні пари та ланцюги

Рухомі ланки входять у зв'язок між собою або з нерухомими ланками так, що завжди забезпечується можливість їхнього відносного руху. Рухоме з'єднання двох ланок, які стикаються, що допускає їх відносний рух, називається *кінематичною парою*.

Поверхні, лінії, точки ланки, якими вона може стикається з іншими ланками, утворюючи кінематичну пару, називають *елементами ланки*.

У будь-якому механізмі ведучою ланкою називається ланка, до якої прикладені рушійна сила або момент.

Розглянемо досить просту схему механізму (рис. 1.1), який закріплений в трьох точках. Ланки 1, 2, 3, 4 і 5 – рухомі. Ланка 1 – ведуча, на що вказує стрілка біля неї, а інші ланки 2, 3, 4, 5 – ведені. Усі нерухомі ланки утворюють одну систему, яку позначили цифрою 6, тобто це стояк. Як правило, ведучою ланкою є вхідна ланка.

Ланки цього механізму утворюють 7 кінематичних пар:  $O$  (6-1),  $A$  (1-2),  $B$  (2-3, 2-4),  $C$  (6-3) і  $D$  (4-5, 5-6).

Розглянемо тепер, які в'язі та в якій кількості можна накласти на відносний рух ланок кінематичної пари.

Отже, вільне абсолютне тверде тіло  $ABC$  (рис. 1.2), що рухається у просторі, має шість ступенів вільності  $H$ : три поступальних рухи вздовж осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  та три обертальних навколо цих самих осей. Вхідження ланок у кінематичну пару накладає на їх відносний рух певні умови зв'язку (в'язі).

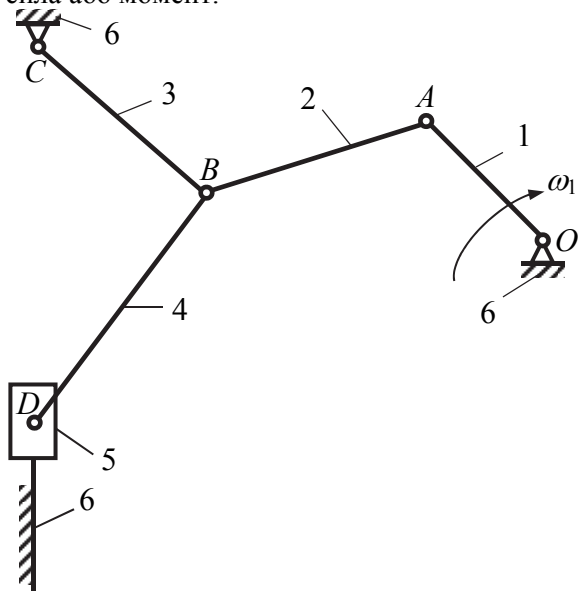


Рисунок 1.1 – Схема механізму преса

## Kinematic Pairs and Kinematic Chains

Movable links are connected to each other or to fixed links so that their relative movement is always possible. A movable joint between two contacting links that allows for their relative movement is called a *kinematic pair*.

Surfaces, lines, and points of a link that can be used to contact with other links to form a kinematic pair are called *link elements*.

In any mechanism, a driving link is a link having the motive force or moment applied to it.

Let's look at a rather simple diagram of the mechanism (Fig. 1.1), which is fixed at three points. Links 1, 2, 3, 4, and 5 are movable. Link 1 is the driving link, as indicated by the arrow next to it, and links 2, 3, 4, 5 are driven links. All fixed links represent a single system marked with digit 6, i.e. this is a fixed member. Generally, a driving link is an input link.

The links of this mechanism

form 7 kinematic pairs:  
 $O$  (6-1),  $A$  (1-2),  $B$  (2-3,  
 2-4),  $C$  (6-3), and  $D$  (4-5, 5-6).

Now, let's consider the constraints that can be imposed on the relative motion of a kinematic pair links and quantity of the constraints.

So, a free perfectly rigid body  $ABC$  (Fig. 1.2) moving in space has six degrees of freedom  $H$ : three translational movements along  $X$ -,  $Y$ -, and  $Z$ -axes and three rotational movements around the same axes. Certain constraining conditions (constraints) are imposed on the relative motion of links in a kinematic pair.

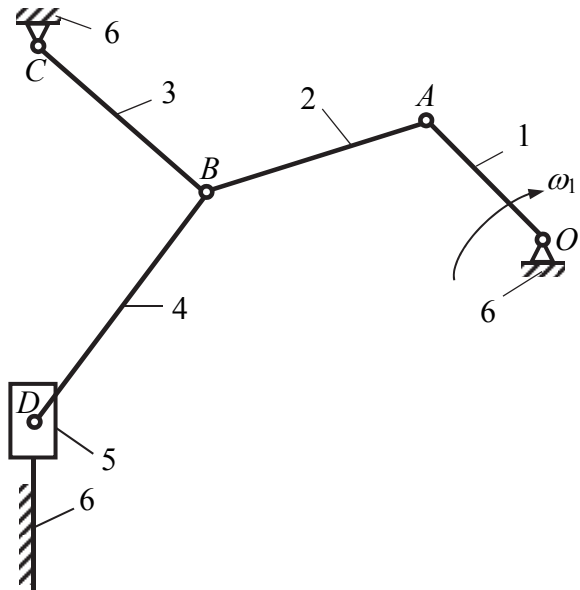


Figure 1.1 — Diagram of the press mechanism

Число таких умов зв'язку  $S$  може бути тільки цілим та змінюється у межах від  $1 < S < 5$  і визначається за формулою

$$S=6-H, \quad (1.1)$$

де  $H$  – число ступенів вільності, які має ланка, що входить у кінематичну пару.

Якщо  $S=0$  – ланки не стикаються, а отже кінематична пара припиняє своє існування, а при  $S=6$  – ланки втрачають відносну рухомість і кінематична пара переходить у тверде з'єднання двох ланок.

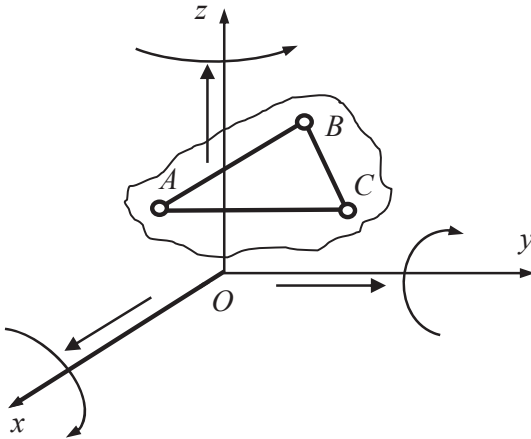


Рисунок 1.2 – Ступені вільності тіла у просторі

менше однієї та не більше п'яти. Отже, кількість класів кінематичних пар дорівнює п'яти: кінематичні пари I, II, III, IV і V класів (табл. 1.1), клас яких визначається за формулою 2.1.

В механізмах, які використовуються в промисловості, найпоширеніші кінематичні пари V, IV та III класів.

Таким чином кількість ступенів вільності ланки кінематичної пари у відносному русі може бути виражена залежністю:

$$H=6-S, \quad (2.2)$$

де  $S$  – кількість в'язей.

Кінематичні пари поділяють на класи у відповідності від кількості в'язей, які накладаються на відносний рух ланок. В механізмах кількість в'язей може бути не

The number of such constraining conditions  $S$  can only be an integer and varies in the range from  $1 < S < 5$  and is determined by the formula

$$S=6-H, \quad (1.1)$$

where  $H$  is a number of degrees of freedom of a link in a kinematic pair.

If  $S=0$ , the links do not contact, and, therefore, the kinematic pair ceases to exist, and if  $S=6$ , the links lose their relative mobility and the kinematic pair becomes a rigid joint of two links.

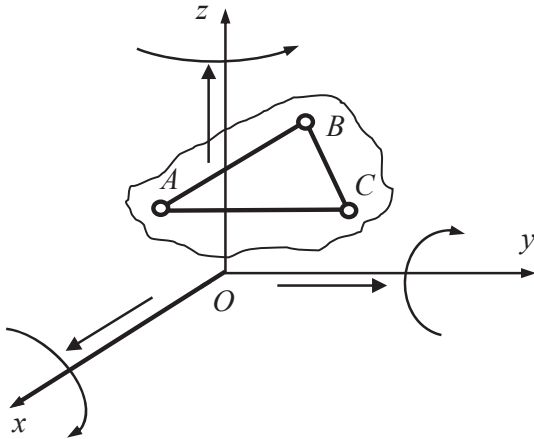


Figure 1.2 — Degrees of freedom of a body in space

constraints can be at least one and cannot exceed five. Hence, there are five classes of kinematic pairs: kinematic pairs of Classes I, II, III, IV, and V (Table 1.1), the class of which is determined by formula 2.1.

In mechanisms used in manufacturing industry, the most common kinematic pairs are of Classes V, IV, and III.

Thus, the number of degrees of freedom of a link in a kinematic pair during relative motion can be expressed by the following equation:

$$H=6-S, \quad (2.2)$$

where  $S$  is a number of constraints.

Kinematic pairs are classified based on the number of constraints imposed on the relative motion of the links. In mechanisms, the number of constraints

Таблиця 1.1 – Класифікація кінематичних пар

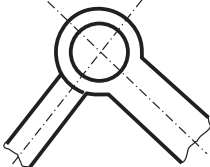

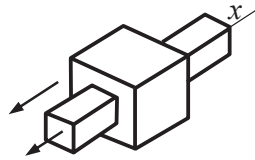

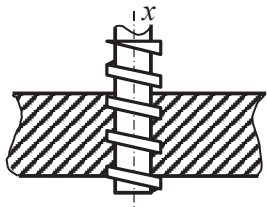

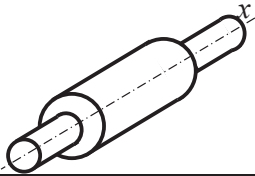

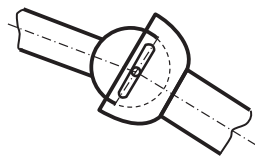

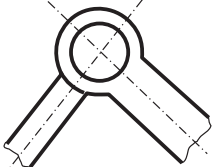
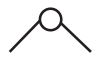

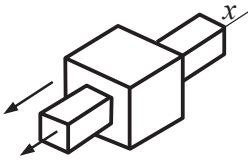

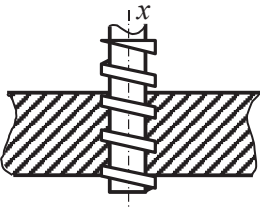

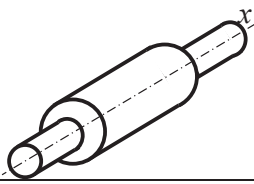

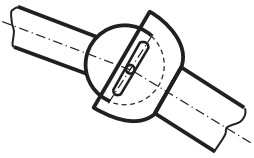

№ рисунок	Рисунок	Умовне позначення	Назва пари	$H$	$S$	Клас пари
1			обертальна	1	5	V
2			поступальна	1	5	V
3			гвинтова	1	5	V
4			циліндрична	2	4	IV
5			сферична з пальцем	2	4	IV

Table 1.1 — Classification of kinematic pairs

Fig. No.	Figure	Symbol	Pair name	$H$	$S$	Pair class
6		 	revolute pair	1	5	V
7			prismatic pair	1	5	V
8			screw (or helical) pair	1	5	V
9			cylindrical pair	2	4	IV
10			spherical pair with a pin	2	4	IV

Продовження таблиці 1.1

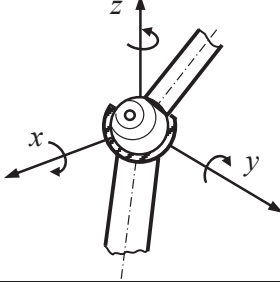

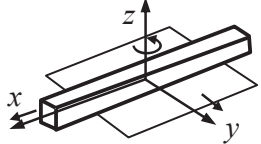

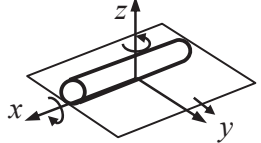

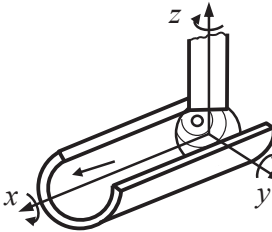

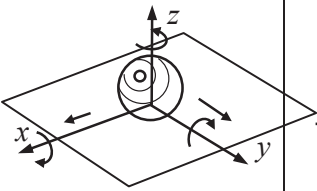

№ рисунок	Рисунок	Умовне позначення	Назва пари	<i>H</i>	<i>S</i>	Клас пари
11			сферична	3	3	III
12			площинна	3	3	III
13			циліндр- площина	4	2	II
14			куля- циліндр	4	2	II
15			куля- площина	5	1	I

Table 1.1 (continued)

Fig. No.	Figure	Symbol	Pair name	$H$	$S$	Pair class
16			spherical pair	3	3	III
17			planar pair	3	3	III
18			cylinder-surface	4	2	II
19			ball-cylinder	4	2	II
20			ball-surface	5	1	I

Кінематичні пари поділяють на нижчі та вищі. Кінематична пара, яка може бути виконана стиканням елементів її ланок тільки по поверхні, називається нижчою. До них належать: обертальна, поступальна, циліндрична, сферична тощо. Кінематична пара, яка може бути виконана стиканням елементів її ланок по лінії або в точці, називається вищою. Це такі: циліндр–площина, куля–циліндр, куля–площина.

Для передачі значних зусиль використовують нижчі кінематичні пари, оскільки вони забезпечують більшу площу контакту між ланками. Проте втрати на тертя у таких парах більші, ніж у вищих.

В залежності від характеру руху механізми і кінематичні пари поділяють на плоскі та просторові. Якщо точки ланок, що утворюють пару, рухаються у різних не паралельних площинах, то такі кінематичні пари називають *просторовими*. Якщо ж елементи ланок, що утворюють кінематичну пару, рухаються паралельно одній нерухомій площині, то такі кінематичні пари називають *плоскими*.

До складу плоских механізмів можуть входити кінематичні пари тільки IV і V класів. Оскільки вільне тверде тіло  $ABC$  у плоскому русі має тільки три ступені вільності (рис. 1.3), воно може рухатися поступально вздовж осей  $X$  і  $Y$  та обертатися у площині  $xOy$ . Якщо ж ланка входить у кінематичну пару, то його число ступенів вільності  $H$  може бути 1 або 2 і відповідно число умов зв'язку  $S$  також буде тільки 1 або 2. Формули (2.1) і (2.2) для плоских кінематичних пар будуть

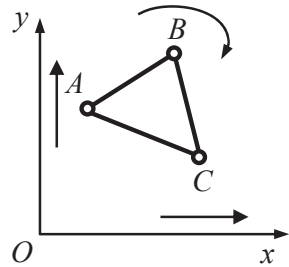


Рисунок 1.3 – Ступені вільності тіла в плоскому русі

$$H=3-S, \quad S=3-H. \quad (2.3)$$

Для того, щоб елементи кінематичних пар перебували у постійному контакті, пари повинні бути *замкнутими*. Замикання може бути *геометричним* (обертальна та поступальна) або *силовим* (циліндр–площина та куля–площина). Силове замикання найчастіше забезпечується силою пружності пружини, що створює додаткові навантаження на ланки механізмів.

Kinematic pairs are divided into lower and higher pairs. A kinematic pair with its link elements contacting only on the surface is called a lower pair. They include revolute, prismatic, cylindrical, spherical pairs etc. A kinematic pair with its link elements contacting on a line or at a point is called a higher pair. They are cylinder-surface, ball-cylinder, ball-surface.

Lower kinematic pairs are used for transmitting high forces because they provide a larger contact area between the links. However, in such pairs, friction losses are higher than in higher pairs.

Depending on the nature of motion, mechanisms and kinematic pairs are divided into planar and spatial. If points of the links forming the pair move in different non-parallel planes, such kinematic pairs are called *spatial*. If elements of the links forming a kinematic pair move parallel to one fixed plane, such kinematic pairs are called *planar*.

Planar mechanisms can include kinematic pairs of Classes IV and V only. Since a free rigid body  $ABC$  has only three degrees of freedom during planar motion (Fig. 1.3), it can move translationally along the  $X$ - and  $Y$ -axes and rotate in the  $xOy$  plane. If a link is a part of a kinematic pair, its number of degrees of freedom  $H$  can be 1 or 2 and, therefore, the number of constraining conditions  $S$  will also be only 1 or 2. Formulas (2.1) and (2.2) for planar kinematic pairs are as follows

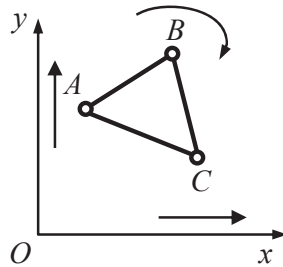


Figure 1.3 — Degrees of freedom of a body during planar motion

$$H=3-S, \quad S=3-H. \quad (2.3)$$

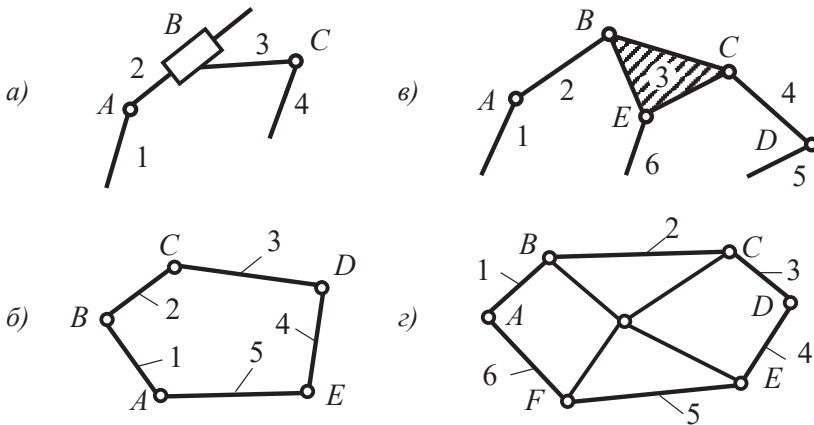
The elements of kinematic pairs must be *closed* to maintain constant contact. The closure can be *geometric* (revolute and prismatic) or *force* (cylinder-surface and ball-surface). The force closure is most often achieved by elasticity of the spring, which creates additional loads on the mechanism links.

## 1 СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

Зв'язана система ланок, що входять у кінематичні пари, утворює *кінематичний ланцюг*.

Кінематичні ланцюги поділяються на *прості* та *складні*. Простим кінематичним називають такий ланцюг, у якого кожна ланка входить не більше як до двох кінематичних пар (рис. 1.4, а); складним – у якому є хоч одна ланка, що входить більше ніж до двох кінематичних пар (рис. 2.4, в).

У свою чергу прості та складні кінематичні ланцюги поділяються на *замкнуті* і *незамкнуті*. У незамкнутому кінематичному ланцюгу є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару (рис. 2.4 а, в), у замкнутому – кожна ланка входить не менше, як у дві кінематичні пари (рис. 2.4 б, з).



а – простий незамкнутий, в – складний незамкнутий;  
б – простий замкнутий; з – складний замкнутий

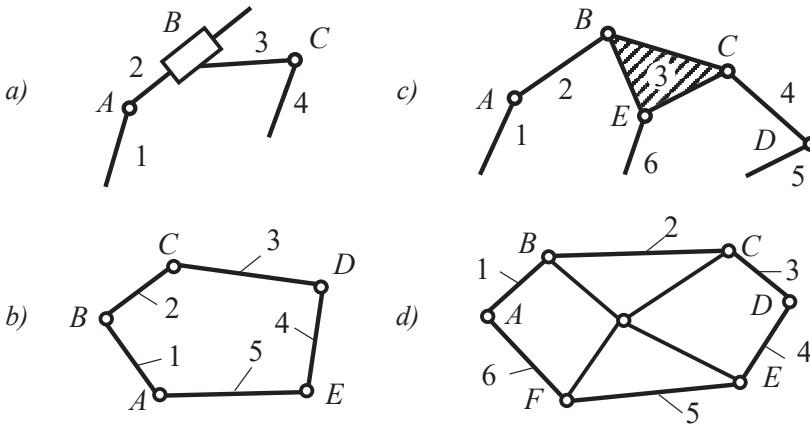
Рисунок 1.4 – Класифікація кінематичних ланцюгів

## 1 STRUCTURAL ANALYSIS OF MECHANISMS

A connected system of links in kinematic pairs forms a *kinematic chain*.

Kinematic chains are classified into *simple* and *complex*. A kinematic chain is simple if each link is a part of no more than two kinematic pairs (Fig. 1.4, *a*); a kinematic chain is complex if it has at least one link constituting a part of more than two kinematic pairs (Fig. 2.4, *c*).

In addition, simple and complex kinematic chains are classified into *closed* and *open* chains. In an open kinematic chain, there are links constituting a part of only one kinematic pair (Fig. 2.4 *a*, *c*); in a closed kinematic chain, each link constitutes a part of at least two kinematic pairs (Fig. 2.4 *b*, *d*).



*a* — simple, open; *c* — complex, open;  
*b* — simple, closed; *d* — complex, closed

Figure 1.4 – Kinematic chains classification

Крім цього, кінематичні ланцюги за аналогією з кінематичними парами поділяють ще на *плоскі* та *просторові*. Незамкнуті просторові кінематичні ланцюги використовуються при проектуванні механізмів роботів. Приклад такого механізму показано на рис. 1.5. У машинобудуванні використовуються переважно замкнуті кінематичні ланцюги.

Кожний механізм представляє собою деякий кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою. Основними властивостями механізму є число ступенів вільності його рухомих ланок відносно стояка та визначеність (узгодженість) їх руху.

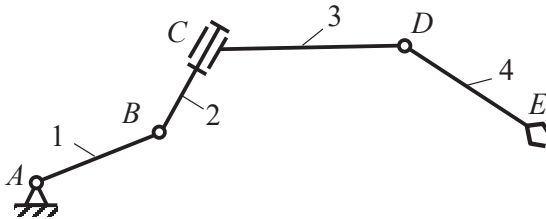


Рисунок 1.5 – Механізм маніпулятора

### 1.1 Визначення ступеню рухомості плоских механізмів

Для визначення числа ступенів вільності будь-якого кінематичного ланцюга (тобто механізму) необхідно підрахувати число ступенів вільності всіх рухомих ланок, вважаючи їх вільними, не зв'язаними кінематичними парами тіл, а потім від цього числа слід відняти число умов зв'язку, які накладаються на ланки кінематичними парами.

Нехай механізм складається з  $k$  ланок. Кожна вільна ланка, про що вже йшлося раніше, має у загальному випадку шість ступенів вільності. Одна із ланок механізму є нерухомою. Тому кількість рухомих ланок механізму складає  $n=k-1$ . Якщо б ланки механізму не були зв'язані між собою, то загальна кількість простих рухів усіх рухомих ланок механізму складала б  $H=6n$ . Але ж ланки механізму не є вільними тілами, вони зв'язані між собою кінематичними парами. Кожна кінематична пара 1-5 класів зменшує загальну кількість рухів на число  $P_1, 2P_2, 3P_3, 4P_4, 5P_5$ , де  $P_i$  – пари відповідних класів ( $i=1\dots5$ ).

Віднявши ці зв'язки від  $H=6n$ , дістанемо число ступенів вільності, які мають ланки механізму:

$$W=6n-5P_5-4P_4-3P_3-2P_2-P_1. \quad (1.4)$$

Moreover, kinematic chains are further divided into *planar* and *spatial* similarly to kinematic pairs. Open spatial kinematic chains are used in robot mechanisms design. An example of such a mechanism is shown in Fig. 1.5. In mechanical engineering, closed kinematic chains are commonly used.

Each mechanism is a certain kinematic chain with one fixed link. Main features of a mechanism are a number of freedom degrees of its movable links in relation to a fixed member and certainty (consistency) of their motion.

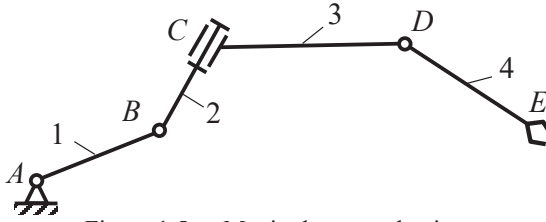


Figure 1.5 — Manipulator mechanism

### 1.1 Determining the Degree of Mobility of the Planar Mechanisms

For determining the number of degrees of freedom of any kinematic chain (i.e. mechanism), it is necessary to calculate the number of degrees of freedom of all movable links, considering them unrestrained, not connected by kinematic pairs of bodies, and then subtract the number of constraining conditions imposed on the links by kinematic pairs from this number.

Let the mechanism consist of  $k$  links. As mentioned above, each free link has six degrees of freedom, in general. One of links of the mechanism is fixed. Therefore, the number of movable links of the mechanism is  $n=k-1$ . If links of the mechanism were not connected to each other, the total number of simple movements of all the movable links of the mechanism would be  $H=6n$ . However, links of the mechanism are not free bodies, since kinematic pairs connect them. Each kinematic pair of Classes 1 to 5 reduces the total number of movements by the number  $P_1, 2P_2, 3P_3, 4P_4, 5P_5$ , where  $P_i$  are pairs of corresponding classes ( $i = 1...5$ ).

By subtracting these connections from  $H=6 \cdot n$ , we find the number of degrees of freedom of the mechanism links:

$$W=6n-5P_5-4P_4-3P_3-2P_2-P_1. \quad (1.4)$$

Рівність (1.4) носить назву *структурної формули просторового кінематичного ланцюга загального вигляду (формула Сомова–Малишева)* і дозволяє обчислити кількість ступенів вольності кінематичного ланцюга відносно ланки прийнятої за нерухому. Число  $W$  називається *ступенем рухомості кінематичного ланцюга*.

На рис. 1.6 зображений кінематичний ланцюг, ланки якого з'єднані між собою парами V класу з паралельними осями.

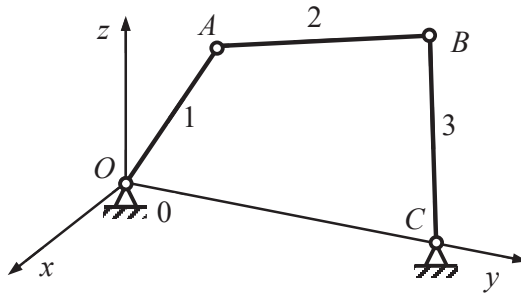


Рисунок 1.6 – Плоский шарнірний чотириланковий механізм

При складанні структурних формул плоских механізмів ми маємо на увазі, що ті ступені вільності, які мають ланки механізмів, і ті умови зв'язку, які накладаються на рух ланок входженням їх в кінематичні пари, вирішують в сукупності питання про визначенність руху механізму. Такий кінематичний ланцюг є плоским, тому що всі його ланки рухаються паралельно деякій одній площині  $yOz$ , яка перпендикулярна до осей обертальних пар. Ланки механізму не можуть рухатися вздовж осі  $x$  і обертатися навколо осей  $y$  і  $z$ , тобто з шести можливих рухів три не можуть бути здійсненими. Отже, на ланки цього механізму накладено три загальні умови зв'язку і структурну формулу (1.4) у цьому випадку не можна застосувати. Число ступенів вільності окремо взятої ланки такого ланцюга із врахуванням загальних зв'язків дорівнює трьом, а загальне число ступенів вільності  $n$  ланок дорівнює  $3n$ . До складу плоских механізмів можуть входити тільки пари IV і V класів, які накладають відповідно одну або дві умови зв'язку, тому для плоского механізму структурна формула (1.4) набирає вигляду:

$$W=3n-2P_5-P_4. \quad (1.5)$$

Equation (1.4) is called a *structural formula of a spatial kinematic chain in its general form (Somov–Malyshev formula)* and allows us to calculate the number of degrees of freedom of the kinematic chain in relation to the link assumed to be fixed. *W number is called a degree of mobility of a kinematic chain.*

Fig. 1.6 shows a kinematic chain, the links of which are interconnected by Class V pairs with parallel axes.

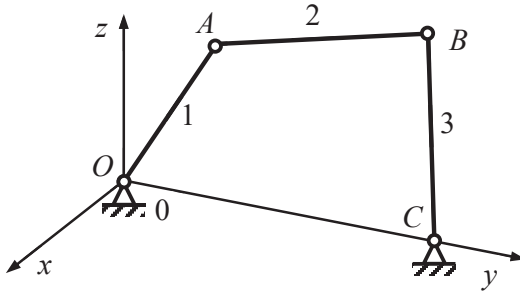


Figure 1.6 — Four-link planar hinged mechanism

When preparing structural formulas for planar mechanisms, we assume that degrees of freedom of the links of the mechanisms and the constraining conditions imposed on motion of the links by their constituting a part of kinematic pairs collectively can help us to determine certainty of motion of the mechanism. Such a kinematic chain is planar because all its links are moving parallel to some single plane  $yOz$ , which is perpendicular to axes of the revolute pairs. Links of the mechanism cannot move along axis and rotate around  $y$ - and  $z$ -axes, i.e. three of six possible movements cannot be performed. Therefore, links of this mechanism are bound by three general constraining conditions, and we cannot use structural formula (1.4) in this case. A number of degrees of freedom of a single link of this chain, considering the general connections, is equal to 3, and a total number of degrees of freedom of  $n$  links is equal to  $3n$ . Planar mechanisms can only include pairs of Classes IV and V, which impose one or two constraining conditions, respectively; So, for a planar mechanism, the structural formula (1.4) is as follows:

$$W=3n-2P_5-P_4. \quad (1.5)$$

Рівність (1.5) вперше була виведена П. Л. Чебишевим в 1869 році і називається *формулою Чебишева*.

Для плоского механізму, який показано на рис. 1.6, число ступенів вільності визначається:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

## 1.2 Утворення механізмів. Група Ассура

Основний принцип утворення механізмів був вперше сформульований в 1914 році вченим Л.В. Ассуром. Він також продовжив та розвинув метод утворення механізмів шляхом послідовного накладення кінематичних ланцюгів, що мають певні структурні властивості. Вчений Л.В. Ассур запропонував найпростіший механізм, який складається із двох ланок – стійки і рухомої ланки, що утворюють кінематичний ланцюг V класу, називати *початковим механізмом I класу*. На рис. 1.7 зображено механізми I класу, рухомі ланки яких утворюють зі стояком обертальну (рис. 1.7, а) або поступальну (рис. 1.7, б) пари. Ступінь вільності ланок таких механізмів  $W=1$  ( $n=1$ ,  $P_5=1$ ). У початковому механізмі немає ведених ланок і тому і немає передачі і перетворення руху.

Будь-який механізм з веденими ланками утворюється шляхом прикріплення до ведучої ланки групи ланок з нульовим ступенем рухомості відносно тих ланок, до яких група прикріпляється. Така структурна група називається *групою Ассура* – це кінематичний ланцюг, який прикріпляється до ведучої ланки і стояка, не змінюючи ступеню рухомості початкового механізму I класу.

В групах Ассура маємо певну залежність між кількістю ланок і кінематичних пар, яка впливає із основної умови існування групи

$$W=3n-2P_5-P_4=0. \quad (1.6)$$

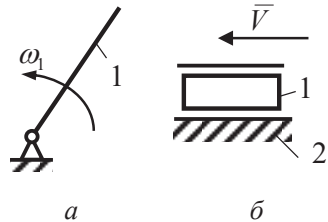


Рисунок 1.7 – Механізми I класу

Equation (1.5) was first derived by P. L. Chebyshev in 1869 and is called the *Chebyshev formula*.

For the planar mechanism shown in Fig. 1.6, a number of degrees of freedom is calculated as follows:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

## 1.2 Creation of Mechanisms. Assur Group

The basic principle of creation of mechanisms was first introduced in 1914 by the scientist L. V. Assur. He also extended and developed the method of creation of mechanisms by successively applying kinematic chains with certain structural properties. The scientist L.V. Assur proposed to call the simplest mechanism, which consists of two links (a fixed member and a movable link forming a Class V kinematic chain), the *original Class I mechanism*. Fig. 1.7 shows the Class I mechanisms, movable links of which form revolute (Fig. 1.7, a) or prismatic (Fig. 1.7, b) pairs with a fixed member. A degree of freedom of links of such mechanisms is  $W=1$  ( $n=1, P_5=1$ ). The original mechanism has no driven links and, therefore, no transmission or conversion of motion.

Any mechanism with driven links is formed by connecting a group of links with zero degree of mobility (in relation to links to which the group is attached) to the driving link. Such a structural group is called an *Assur group*. It is a kinematic chain attached to a driving link and a fixed member without changing the degree of mobility of the original Class I mechanism.

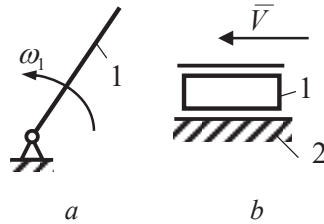


Figure 1.7 — Class I mechanisms

In Assur groups, we have a certain relationship between the number of links and kinematic pairs, which derives from the basic assumption of a group existence

$$W=3n-2P_5-P_4=0. \quad (1.6)$$

Якщо врахувати, що пари IV класу можна замінити парами V класу, то з рівняння (1.6) можна записати

$$P = \frac{3}{2}n. \quad (1.7)$$

Оскільки число ланок і пар може бути цілим, то умову (1.7) задовольняють такі сполучення чисел ланок і кінематичних пар, що входять у групу:

$$\begin{array}{cccccc} n & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \\ P_5 & 3 & 6 & 9 & 12 & \dots \end{array}$$

Таким чином, кількість ланок у групі Ассура повинна бути тільки парною, а тому мінімальна кількість кінематичних пар дорівнює трьом.

Прикладом такої групи є шатун і коромисло (2-3) у шарнірному чотириланковому механізмі (рис. 1.6). Після прикріплення цієї групи до ведучої ланки, ступінь рухомості механізму дорівнює:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

тому що ступінь рухомості групи (2-3)

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0,$$

оскільки група Ассура має дві рухомих ланки та три кінематичних пари.

### 1.3 Структурна класифікація плоских механізмів

В сучасному машинобудуванні особливо широке застосування отримали плоскі механізми, ланки яких входять в кінематичні пари IV або V класів. При структурній класифікації механізмів користуються наступними поняттями:

- клас механізму визначається найвищим класом групи Ассура, яка входить до складу механізму;
- клас групи Ассура визначається найвищим класом контуру;
- клас контуру визначається кількістю кінематичних пар до яких належать ланки, що утворюють цей контур;
- контуром називають замкнуту область частини площини, яка зайнята ланками або обмежена з усіх боків ланками.

If we consider that Class IV pairs can be replaced with Class V pairs, then from equation (1.6) we can express the following

$$P = \frac{3}{2}n. \quad (1.7)$$

Since a number of links and pairs can be integer, the following combinations of numbers of links and kinematic pairs included in the group satisfy the condition (1.7):

$$\begin{array}{cccccc} n & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \\ P_5 & 3 & 6 & 9 & 12 & \dots \end{array}$$

Thus, a number of links in the Assur group should be only even, and, therefore, the minimum number of kinematic pairs is three.

An example of such a group is a connecting rod and a rocker arm (2–3) in a four-link hinged mechanism (Fig. 1.6). After connecting this group to the driving link, the degree of mobility of the mechanism is equal to:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

since the degree of mobility of group (2–3) is

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0,$$

as the Assur group has two movable links and three kinematic pairs.

### 1.3 Structural Classification of the Planar Mechanisms

In modern mechanical engineering, planar mechanisms with links in kinematic pairs of Classes IV or V are particularly widely used. In structural classification of mechanisms, the following concepts are used:

- a mechanism class is determined by the highest class of the Assur group constituting a part of the mechanism;
- A class of the Assur group is determined by the highest class of the contour;
- A class of the contour is based on the number of kinematic pairs, which include the links forming that contour;
- A contour is a closed area within a part of the plane with links or constrained on all sides by links.

### 1.4 Визначення класу механізму

Утворення будь-якого плоского механізму можна представити як послідовне приєднання груп, що задовольняють основній умові існування групи Ассура. Розглянемо визначення класу механізму на деяких прикладах.

1. *Кривошипно-повзунний механізм.* Цей механізм (рис. 1.8) складається з початкового механізму I класу і групи Ассура, яка складається у свою чергу із шатуна (ланка 2) і повзуна (ланка 3). Контури, які утворюють цю групу (ланки 2 і 3), кожен II класу, оскільки ці ланки належать до двох кінематичних пар. Отже, група Ассура також II класу і весь механізм II класу.

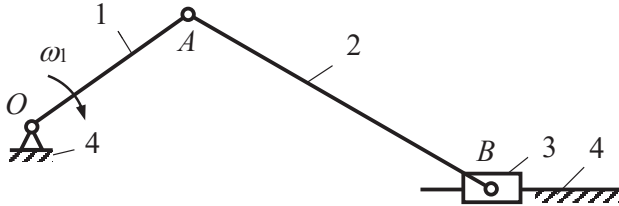


Рисунок 1.8 – Кривошипно-повзунний механізм II класу

2. На рис. 1.9 зображений шестиланковий механізм, який має у своєму складі жорсткий трикутник  $BFC$ . Якщо ведучою є ланка  $OA$ , то група Ассура тільки одна. Вона складається із трьох стержнів (ланки 2, 4 і 5) і одного трикутника (ланка 3)

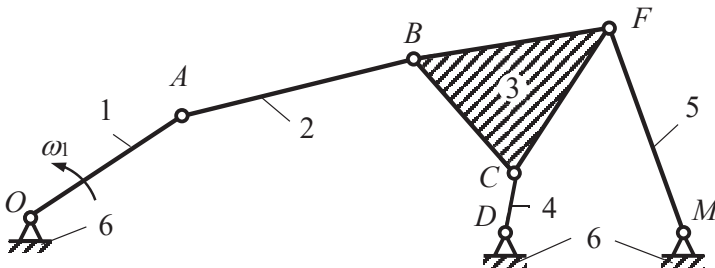


Рисунок 1.9 – Шестиланковий механізм III класу

## 1.4 Defining the Mechanism Class

Creation of any planar mechanism can be represented as a successive joining of groups that meet the basic condition of existence of the Assur group. Let's consider definition of a mechanism class using some examples.

1. *Crank and Slider Mechanism.* This mechanism (Fig. 1.8) consists of a Class I original mechanism and the Assur group, which further consists of a connecting rod (link 2) and a slider (link 3). The contours forming this group (links 2 and 3) are each of Class II, as these links belong to two kinematic pairs. Consequently, the Assur group is also a Class II group, and the entire mechanism is a Class II mechanism.

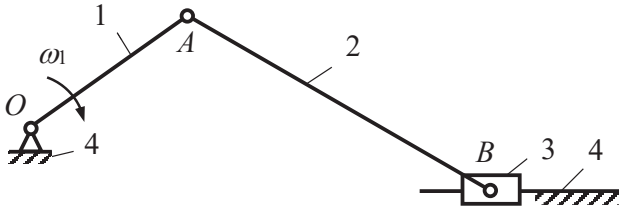


Figure 1.8 — Class II crank and slider mechanism

2. Fig. 1.9 shows a six-link mechanism with a rigid triangle  $BFC$  as its part. While the  $OA$  is the driving link, there is only one Assur group. It consists of three rods (links 2, 4, and 5) and one triangle (link 3)

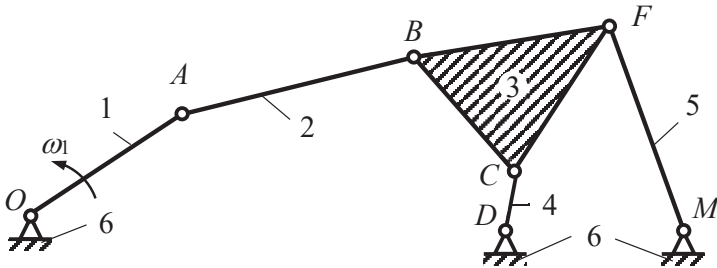


Figure 1.9 — Class III six-link mechanism

Трикутник  $BFC$  – контур III класу, тому і весь механізм III класу. Але якщо вибрати за ведучу ланку  $FM$ , то картина змінюється і тоді дістанемо механізм II класу, який складається із двох груп Ассура II класу (це ланки 1-2 і 3-4).

3. На рис. 1.10 зображений механізм іншого класу. Тут у складі групи Ассура маємо чотиристоронній замкнутий нежорсткий контур  $BCDF$ . Ця група відноситься до IV класу, тому й весь механізм IV класу.

Можуть бути контури та групи Ассура, а також і механізми вищих класів. Але частіше зустрічаються групи та механізми II і III класів.

Крім класів механізмів і груп слід розрізняти порядок групи Ассура. Порядок групи Ассура визначається кількістю елементів, якими група прикріплюється до основного механізму.

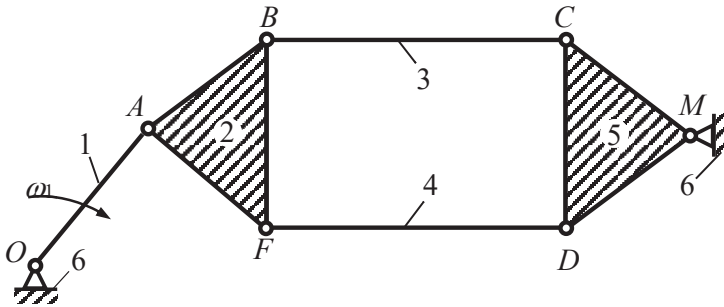


Рисунок 1.10 – Шестиланковий механізм IV класу

Так в звичайному кривошипно-шатунному механізмі група II порядку, тому що вона прикріплюється до кривошипу і стояка у двох точках (рис. 1.8). Порядок групи може бути і вищим (рис. 1.9).

### 1.5 Структурний аналіз плоских механізмів

При визначенні класу механізму необхідно вказувати, яка із ланок є ведучою, тому що в залежності від вибору ведучих ланок може змінюватись клас механізму. Структурний аналіз передує кінематичному та силовому розрахунку механізмів. Основною задачею кінематики механізмів є вивчення руху ланок без врахування сил, що діють на них. Силовий розрахунок механізмів полягає в визначенні тих сил, які діють на окремі ланки механізмів при їхньому русі.

$BFC$  triangle is a Class III contour, so the entire mechanism is of Class III. Yet, if we use  $FM$  as the driving link, the situation changes, and we get a Class II mechanism consisting of two Class II Assur groups (links 1–2 and 3–4).

3. Fig. 1.10 shows a mechanism of another Class. Here, as a part of the Assur group, we have a four-way closed, non-rigid  $BCDF$  contour. This is a Class IV group, so the entire mechanism is of Class IV.

Contours and Assur groups, as well as mechanisms of higher classes can exist. However, groups and mechanisms of Classes II and III are more common.

In addition to classes of mechanisms and groups, we should distinguish the Assur group order. The order of the Assur group is determined by a number of elements used to connect that group to the main mechanism.

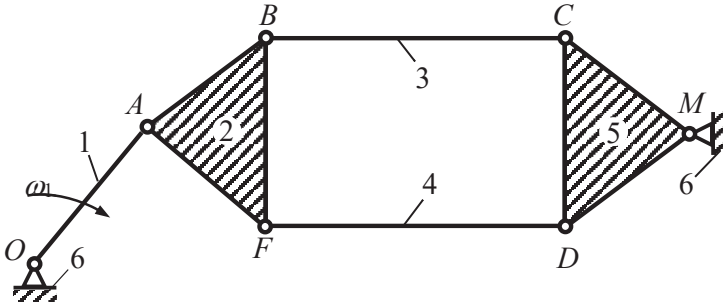


Figure 1.10 — Class IV six-link mechanism

For instance, in a conventional crank mechanism, the group is of order II since it is connected to the crank and the fixed member at two points (Fig. 1.8). The group order can be higher (Fig. 1.9).

### 1.5 Structural Analysis of the Planar Mechanisms

When defining the mechanism class, it should be indicated which of links is driving, since the mechanism class may vary depending on the selection of driving links. Structural analysis precedes kinematic analysis and force calculations of mechanisms. The basic goal of mechanism kinematics is to study movement of links without considering the forces they are exposed to. Force calculation of mechanisms consists in identification of forces affecting individual links in the mechanism during their movement.

При дослідженні структури механізмів необхідно притримуватись таких правил:

- відокремлення груп Ассура починати з ланок, які найбільш віддалені від ведучої ланки;
- намагатися відокремлювати у першу чергу більш прості структурні групи Ассура так звані діади;
- слідкувати за тим, щоб ступінь рухомості кінематичного ланцюга механізму до і після відокремлення кожної групи залишався незмінним;
- пам'ятати, що кожна кінематична пара і кожна ланка можуть належати тільки одній структурній групі або одному початковому механізму.

Розглянемо дослідження структури механізму (рис. 1.11).

Цей шестиланковий плоский механізм (рис. 1.11, *a*) має п'ять рухомих ланок ( $n=5$ ) і стоек (нерухома ланка 6). Розглядуваний механізм утворює сім кінематичних пар V класу ( $P_5=7$ ), з яких шість є обертальними і утворені ланками (6-1, 1-2, 2-3, 2-4, 6-3 і 4-5) і одна поступальна пара ланка (5-6), яка утворена повзуном 5 і стояком 6 (нерухома ланка). Ланка 1 є вхідною і ведучою, на це вказує стрілка.

Визначаємо ступінь рухомості механізму:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 5-2\cdot 7-0=1.$$

Відокремлюємо найбільш віддалену від ведучої групу ланок (це ланки 4 і 5) див. (рис. 1.11, *b*) і бачимо, що ця група складається з двох ланок і утворює три кінематичні пари V класу і тому це є група Ассура.

Розглядаємо частину механізму, що залишилася (рис. 1.11, *в*), вона має  $n=3$  і  $P_5=4$  і тому її ступінь рухомості  $W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 3-2\cdot 4-0=1$ , що вказує на правильне відокремлення ланок 4 і 5. Далі відокремлюємо ланки 2 і 3, які теж є групою Ассура, тому що вони мають три кінематичні пари (рис. 1.11, *г*) і частина механізму, що залишилася є початковим механізмом I класу (рис. 1.11, *д*). Слід вказати, що відокремлені групи Ассура (це ланки 4-5 і 2-3) мають другий клас, а тому і досліджений механізм також має II клас. Формула побудови цього механізму має вигляд

$$I(6-1) \leftarrow II(2-3) \leftarrow II(4-5).$$

When analysing the structure of mechanisms, the following guidelines should be followed:

- start splitting Assur groups from the links, which are the furthest away from the driving link;
- First, try to split the simpler structural Assur groups, the so-called dyads;
- Make sure that the degree of mobility of the kinematic chain of the mechanism before and after splitting each group remains unchanged;
- Remember that each kinematic pair and each link can belong to only one structural group or one original mechanism.

Let's consider the study of the mechanism structure (Fig. 1.11).

This six-link planar mechanism (Fig. 1.11, *a*) has five movable links ( $n=5$ ) and a fixed member (fixed link 6). The mechanism under study consists of seven kinematic pairs of Class V ( $P_5=7$ ), six of which are revolute pairs and formed by links (6-1, 1-2, 2-3, 2-4, 6-3, and 4-5), and one prismatic pair (5-6), which is formed by slider 5 and fixed member 6 (fixed link). Link 1 is input and driving as indicated by the arrow.

Let's determine the degree of mobility of the mechanism:

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 5-2\cdot 7-0=1.$$

We split the group of links (links 4 and 5) farthest from the driving link, see (Fig. 1.11, *b*), and we can see that this group consists of two links and forms three kinematic pairs of Class V, and therefore, it is an Assur group.

Let's consider the remaining part of the mechanism (Fig. 1.11, *c*). It has  $n=3$  and  $P_5=4$ ; Therefore, its degree of mobility is  $W=3n-2P_5-P_4=3\cdot 3-2\cdot 4-0=1$ , which confirms the proper split of links 4 and 5. Next, we can split links 2 and 3, which are also Assur group as they have three kinematic pairs (Fig. 1.11, *d*), and the remaining part of the mechanism is the original Class I mechanism (Fig. 1.11, *f*). It should be noted that the split Assur groups (links 4-5 and 2-3) are groups of Class II, which means that the mechanism under study is also of Class II. The structural formula of this mechanism is as follows:

$$I(6-1) \leftarrow II(2-3) \leftarrow II(4-5).$$

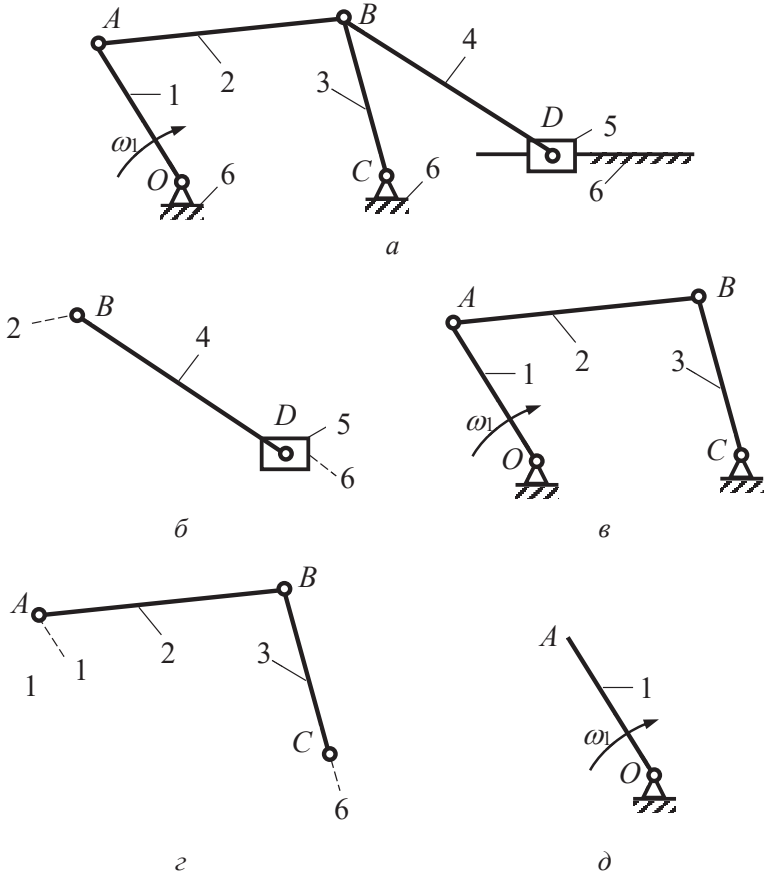


Рисунок 1.11 – Шестиланковий плоский механізм

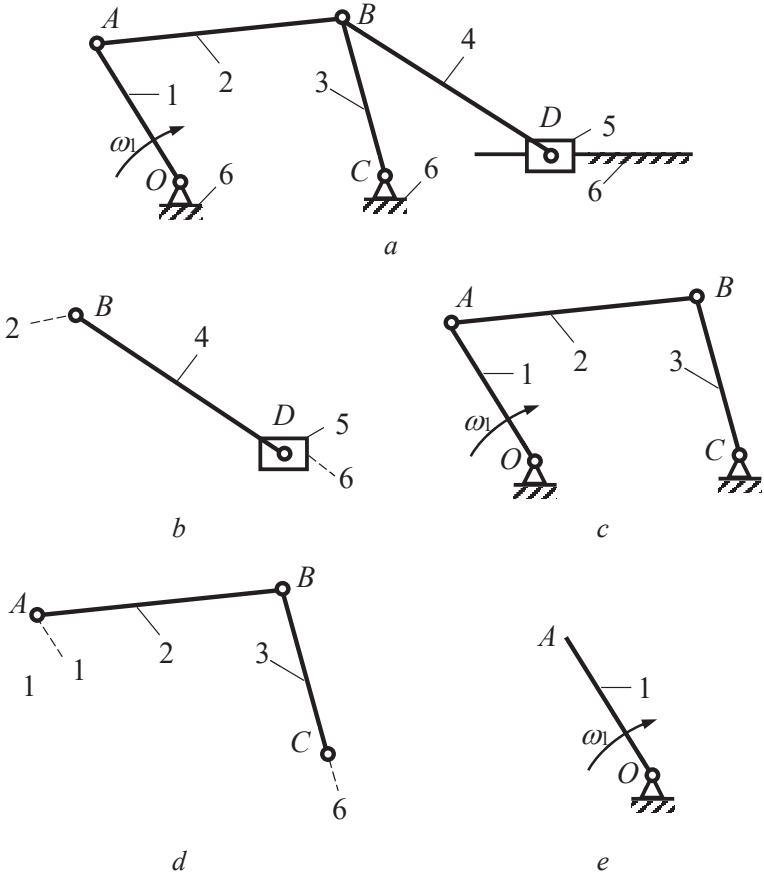


Figure 1.11 — Six-link planar mechanism

## 2 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМІВ

### 2.1 Задачі та методи кінематичного дослідження

Кінематичне дослідження механізму, тобто вивчення руху ланок механізму без врахування сил, які обумовлюють цей рух, полягає в основному в рішенні трьох наступних задач:

- визначення переміщень ланок та траєкторій, які описуються точками ланок (побудова планів положень механізму);
- визначення швидкостей окремих точок ланок механізму та кутових швидкостей ланок (побудова планів швидкостей);
- визначення пришвидчень окремих точок ланок механізму та кутових пришвидчень ланок (побудова планів пришвидчень).

У результаті такого дослідження встановлюють відповідність кінематичних параметрів (переміщень, швидкостей та пришвидчень) заданим умовам роботи механізму, а також отримують вихідні дані для виконання подальших розрахунків. Знання кінематичних параметрів потрібне для визначення динамічних сил (сил інерції, моментів сил інерції), а також кінетичної енергії та потужності механізму.

Існують чотири методи кінематичного дослідження механізмів: графічний, графоаналітичний, аналітичний та експериментальний.

При розв'язуванні задач кінематики повинні бути задані кінематична схема механізму (розміри всіх ланок) та закон руху початкової (ведучої) ланки. Закон руху ведучої ланки задається у вигляді функції  $\varphi = \varphi(t)$  або  $s = s(t)$ , яка виражає залежність кута повороту  $\varphi$  або переміщення  $s$  від часу  $t$ . У практиці інженерних розрахунків при кінематичному дослідженні механізмів, як правило, вважають рух початкової ланки лінійним, тобто рівномірним обертальним ( $\omega_1 = \text{const}$ ) або рівномірним поступальним ( $s_1 = \text{const}$ ). Такого руху зазвичай вимагають умови роботи механізму і такий він приблизно здійснюється на практиці.

Більшість механізмів і машин мають періодичний рух. Під періодом  $T$  (циклом) руху розуміють проміжок часу, після закінчення якого механізм повертається у початкове положення, а його кінематичні параметри набувають початкового значення. Після цього рух повторюється за тим самим законом. Звідси випливає, що для кінематичного дослідження достатньо одного періоду роботи механізму.

## 2 KINEMATIC ANALYSIS OF MECHANISMS

### 2.1 Kinematic Analysis Problems and Techniques

Kinematic analysis of a mechanism, i.e. the study of movement of links of the mechanism setting aside forces that cause this movement, consists mainly in solving the following three problems:

- defining the displacements of links and trajectories described by links points (construction of the mechanisms positions diagram);
- Defining the velocities of individual points of the mechanism's links and the angular velocities of links (construction of velocity diagrams);
- Defining the accelerations of individual points of the mechanism's links and angular accelerations of links (construction of acceleration diagrams).

This analysis helps to determine whether the kinematic parameters (displacements, velocities, and accelerations) correspond to the specified operating conditions of the mechanism, and also provides the input data for further calculations. Kinematic parameters are required to calculate the dynamic forces (inertial forces, moments of inertia), as well as the kinetic energy and efficiency of the mechanism.

There are four methods of the mechanisms kinematic analysis: graphical, graph analytic, analytical, and experimental.

When solving kinematics problems, we have to define the kinematic diagram of the mechanism (dimensions of all links) and the law of motion of the input (driving) link. The law of motion of the driving link is defined as the function  $\varphi=\varphi(t)$  or  $s=s(t)$ , which represents the dependence of the angle of rotation  $\varphi$  or displacement  $s$  on time  $t$ . On the practical side of engineering calculations during kinematic analysis of mechanisms, the motion of the input link is usually assumed to be linear, i.e. either uniform rotational movement ( $\omega_1=const$ ) or uniform translational movement ( $s_1=const$ ). Typically, this motion depends on operating conditions of the mechanism, and it is roughly implemented in practice.

Most mechanisms and machines perform periodic motions. A period  $T$  (cycle) of motion is defined as the period required for the mechanism to return to its original position and its kinematic parameters to acquire their initial values. Subsequently, the motion is repeated according to the same law. Hence, one period of the mechanism's operation is sufficient for a kinematic analysis.

## 2.2 Побудова планів механізму і вибір масштабів

В техніці досить часто застосовують кривошипно-повзунний механізм. Побудову положень ланок (планів) механізмів II класу розглянемо на прикладі такого механізму. Таку побудову зручно здійснювати методом засічок. Для цього повинні бути задані кінематична схема та закон руху кривошипа  $OA$  ( $\omega_1 = \text{const}$ ) (рис. 1.12). Побудову здійснюють у певному масштабі.

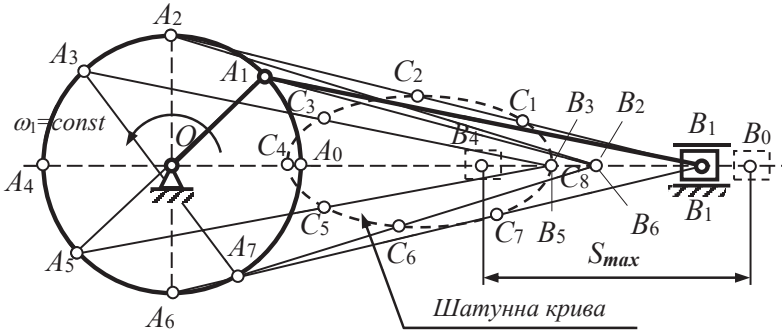


Рисунок 1.12 – Побудова положень ланок кривошипно-повзунного механізму

Для цього використовують масштабний коефіцієнт, який у загальному вигляді є відношенням фізичної величини (шляху, швидкості, пришвидчення) до довжини відрізка, який цю величину зображує на рисунку. Масштабний коефіцієнт, який у подальшому будемо називати “масштабом”, позначимо літерою  $\mu$  з індексом тієї величини, яку зображено графічно. Масштаб  $\mu$  має розмірність, у чисельнику якої – розмірність величини, яка зображується, у знаменнику – розмірність довжини (мм). Наприклад, коли зображати лінійні розміри механізму, масштаб (м/мм) визначається за формулою

$$\mu = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{l_{OA}}{OA}, \quad (1.8)$$

де  $l_{OA}$  – дійсна довжина кривошипа, м;

$OA$  – довжина відрізка  $OA$ , мм, який зображує його на рис. 1.12.

## 2.2 Construction of Mechanism Diagrams and Selection of Scales

The crank and slider mechanism is often used in mechanical engineering. Let's consider positions of the links (diagrams) of Class II mechanisms using the example of such a mechanism. It is convenient to build such a structure using the intersection method. For this purpose, we have to construct the kinematic diagram and define the law of motion of the crank  $OA$  ( $\omega_1 = \text{const}$ ) (Fig. 1.12). We should construct the structure in a certain scale.

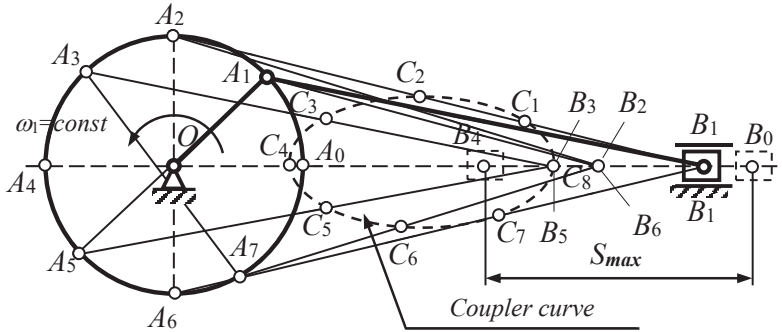


Figure 1.12 — Construction of link positions of the crank and slider mechanism

For this purpose, a scaling factor is used, which, in general, is a ratio of physical quantity (distance, velocity, acceleration) to length of the segment representing this quantity in the figure. The scaling factor, which will be referred to hereafter as the “scale,” is denoted by the letter  $\mu$  with the index of the graphically depicted quantity. The scaling factor  $\mu$  has a unit of measurement, the numerator of which is the unit of measurement of the quantity shown, and the denominator is the unit of measurement of the length (mm). For example, when depicting the linear dimensions of a mechanism, the scale (m/mm) is determined by the formula

$$\mu = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{l_{OA}}{OA}, \quad (1.8)$$

where  $l_{OA}$  is actual length of the crank, m;

$OA$  is the length of the segment of  $OA$ , mm, showing it in Fig. 1.12.

Треба відмітити, що масштаби утворюються із таких цифр: 1, 2, 4, 5, 8 або їх сполучень 25 і 125 помножених на  $10^{\pm k}$ , де  $k=1, 2, 3 \dots$  і т.д.

Щоб знайти методом дугових засічок положення всіх точок і ланок механізму, необхідно послідовно розглянути рух кожної ланки, від початкової до вихідної, у такому порядку, у якому вони приєднуються до механізму. Кривошип  $OA$  здійснює рівномірний обертальний рух ( $\omega_1 = \text{const}$ ) навколо нерухомого центра  $O$ . Шатун  $AB$  здійснює складний рух: центр шарніра  $A$  рухається по колу радіуса  $OA$ , центр шарніра  $B$  – по прямій разом із повзуном  $B$ , який шарнірно зв'язаний із шатуном  $AB$  і рухається вздовж нерухомої напрямної.

За початкове положення механізму, як правило, вибирають одне з його крайніх положень. Нехай таким положенням буде випадок, коли кривошип і шатун витягаються в одну лінію  $OA_0B_0$ . У центральному кривошипно-повзунному механізмі ця лінія збігається з напрямом руху центра шарніра  $B$ . Далі поділимо траєкторію точки на довільне число рівних частин, наприклад 8, як це показано на рис. 1.12. Точки поділу позначимо  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , у напрямі обертання кривошипа. Тобто перехід з одного положення в інше здійснюється за час  $T/8$ , де  $T$  – період обертання кривошипа ( $T=60/n$ , с;  $n$  – частота обертання кривошипа,  $\text{хв}^{-1}$ ).

Положення точки  $B$  знайдемо методом дугових засічок, враховуючи, що довжина шатуна  $AB$  протягом руху залишається незмінною. Для цього з отриманих точок  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$  радіусом  $AB$  зробимо дугові засічки на траєкторії точки  $B$ , у результаті чого знайдемо положення центрів шарніра  $B$ :  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_7$ . З'єднавши точки  $A_i$  і  $B_i$ , відрізком  $A_iB_i$  дістанемо положення шатуна  $AB$  і повзуна  $B$  ( $i=0, 1, \dots, 7$ ).

Таким самим способом побудуємо траєкторію точки  $C$ , яка лежить на шатуні  $AB$  (рис. 1.12). Для цього з точок  $A_i$  зробимо на відповідних положеннях  $A_iB_i$ , дугові засічки радіусом  $AC$ , які визначать точки  $C_i$ , з'єднавши їх плавною кривою, дістанемо траєкторію точки  $C$ . Через те, що точка  $C$  лежить на шатуні, її траєкторію називають *шатунною кривою*. На рис. 1.13 показано приклади шатунних кривих шарнірного чотириланкового механізму. Шатунні криві широко використовуються у сучасній техніці для визначення відповідних рухів виконавчими органами різних механізмів і машин, а також при проектуванні механізмів з вистоями та іншими функціями, яких вимагають технологічні процеси на виробництві.

It should be noted that the scales are formed by the following numbers: 1, 2, 4, 5, 8 or their combinations 25 and 125 multiplied by  $10^{\pm k}$ , where  $k=1, 2, 3 \dots$  etc.

For determining the position of all points and links of the mechanism using the arc intersection method, the motion of each link should be analysed, from the input link to the output link, in the sequence in which they are connected to the mechanism. The  $OA$  crank performs a uniform rotational motion ( $\omega_1=const$ ) around the fixed centre  $O$ . The connecting rod  $AB$  performs a complex motion: the centre of the hinge  $A$  moves around a circle of radius  $OA$ , the centre of the hinge  $B$  moves along a straight line together with the slider  $B$ , which is pivotally connected to the connecting rod  $AB$  and moves along a fixed guide.

As a rule, one of extreme positions of the mechanism is taken as the initial position. Assume that this position is the case when the crank and connecting rod are extended along the same line  $OA_0B_0$ . In the central crank and slider mechanism, this line coincides with the direction of motion of the centre of the hinge  $B$ . Next, we can split the trajectory of a point into the arbitrary number of equal segments, for example, 8, as shown in Fig. 1.12. We denote the splitting points as  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , in the direction of crank rotation. Therefore, transition from one position to another takes time  $T/8$ , where  $T$  is the period of rotation of the crank ( $T=60/n$ , s;  $n$  is the rotation rate of the crank,  $\text{min}^{-1}$ ).

The position of point  $B$  can be found using the arc intersection method, provided that the length of the connecting rod  $AB$  remains unchanged during the motion. For this purpose, we can draw the arc intersections on the motion trajectory of point  $B$  based on points  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$  with radius  $AB$ , and as a result, we can find positions of the centres of the hinge  $B$ :  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_7$ . After connecting the points  $A_i$  and  $B_i$ , the segment  $A_iB_i$  gives us the position of the connecting rod  $AB$  and the slider  $B$  ( $i=0, 1, \dots, 7$ ).

Similarly, we can draw the trajectory of point  $C$ , which lies on the connecting rod  $AB$  (Fig. 1.12). For this purpose, from points  $A_i$ , let's draw arc intersections with radius  $AC$  at the corresponding positions  $A_iB_i$  which will define points  $C_i$ , by connecting them with a smooth curve, to obtain the trajectory of point  $C$ . Since point  $C$  lies on the connecting rod, its trajectory is called a *coupler curve*. Fig. 1.13 shows examples of connecting rod motion curves for a four-link hinged mechanism. Coupler curves are widely used in modern engineering for determining the appropriate motions of actuators of various mechanisms and machines, as well as for designing mechanisms with dwells and other functions required by manufacturing processes.

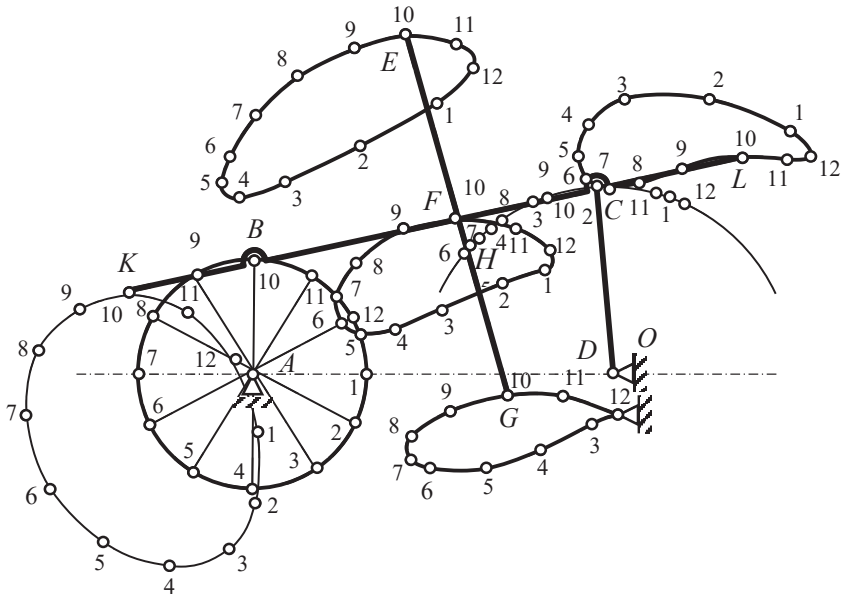


Рисунок 1.13 – Приклади шатунних кривих шарнірного чотириланкового механізму

### 2.3 Побудова планів швидкостей і пришвидчень

Як відомо, найбільш точними є аналітичні методи. Така точність буває необхідною в деяких конкретних задачах аналізу механізмів. В цих випадках слід віддати перевагу аналітичним методам, за допомогою яких дослідження кінематики механізмів може бути зроблено з будь-яким ступенем точності. Крім того аналітичні залежності дозволяють виявляти зв'язок кінематичних параметрів механізму з розмірами його ланок. Однак, на практиці для визначення швидкостей та пришвидчень широкого застосування набув графоаналітичний метод. Перевагою цього методу є те, що він досить точний наочний, порівняно простий у виконанні, дозволяє отримати не тільки величини (модулі), але і напрями швидкостей та пришвидчень заданих точок ланок, які утворюють механізми.

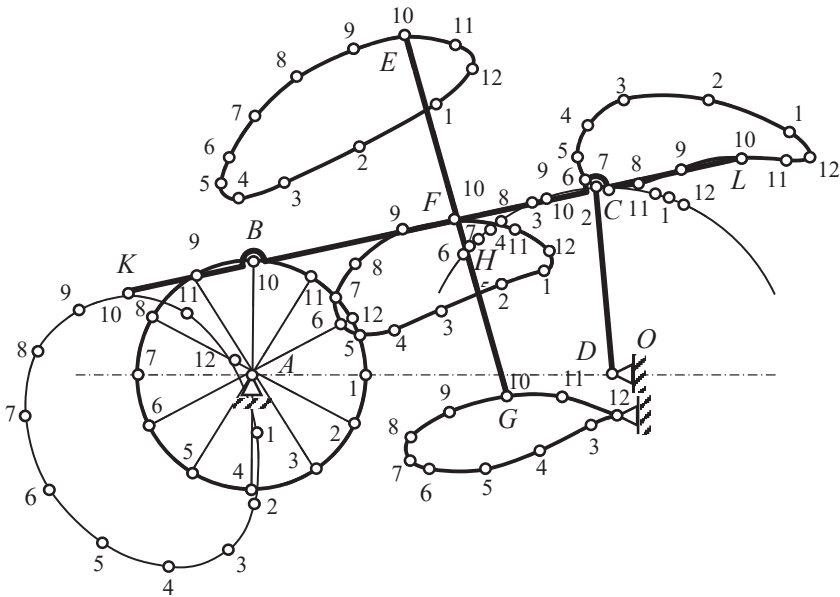


Figure 1.13 — Examples of coupler curves for a four-link hinged mechanism

### 2.3 Construction of Velocity and Acceleration Diagrams

It is well known that analytical methods are the most accurate. Such accuracy may be necessary in some specific tasks of mechanism analysis. In these cases, analytical methods should be preferred, as they allow performing the analysis of mechanism kinematics with any degree of accuracy. In addition, analytical dependencies make it possible to identify relationship between kinematic parameters of a mechanism and the dimensions of its links. In practice, however, the graphic-analytical method has become widespread for determining velocities and accelerations. The advantage of this method is that it is a fairly accurate visual method, which is relatively simple to use, and allows obtaining not only the values (modules) but also directions of velocities and accelerations of given points of the links forming the mechanisms.

Розглянемо побудову плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму (рис. 1.14, а), для якого, задані розміри ланок і закон руху кривошипа  $OA$ , ( $\omega_1 = \text{const}$ ) та кут  $\varphi_1$ . Цей механізм складається з трьох рухомих ланок, які здійснюють: 1 – кривошип  $OA$  – обертальний рух навколо центра нерухомого шарніра  $O$ ; 2 – шатун  $AB$  – складний рух; 3 – повзун  $B$  – зворотно-поступальний рух відносно нерухомих напрямних. Четверта ланка цього механізму нерухома і називається стояком.

Щоб побудувати план швидкостей механізму, спочатку будуюмо в деякому вибраному масштабі довжини (він визначається за формулою 1.8) і заданому куту  $\varphi_1$  положенні кривошипа, схему механізму.

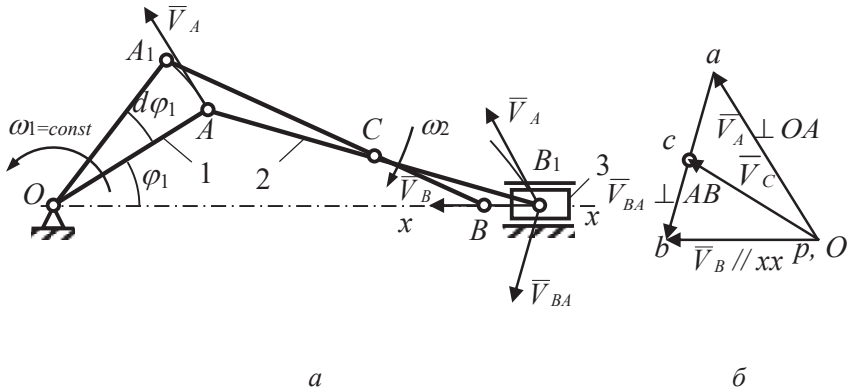


Рисунок 1.14 – Побудова плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму

Знаючи кутову швидкість  $\omega_1$  кривошипа  $OA$  і його дійсну довжину  $l_{OA}$ , знаходимо модуль швидкості точки  $A$  за формулою  $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ . Вектор  $\vec{V}_A$  направлений перпендикулярно до кривошипа  $OA$  в бік його руху. Вибираємо відрізок  $pa$ , бажано у межах 80... 120 мм, і визначаємо масштаб швидкостей за формулою

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} \quad (1.9)$$

Let's consider creation of a velocity diagram of a crank and slider mechanism (Fig. 1.14, *a*), for which the dimensions of links and the law of motion of crank  $OA$ , ( $\omega_1 = \text{const}$ ) and angle  $\varphi_1$  are given. This mechanism consists of three movable links that perform: 1 — crank  $OA$  — rotational motion around the centre of the fixed hinge  $O$ ; 2 — connecting rod  $AB$  — complex motion; 3 — slider  $B$  — reciprocating motion relative to the fixed guides. The fourth link of this mechanism is fixed and is called a fixed member.

In order to construct a diagram of the mechanism's velocities, we first have to construct a diagram of the mechanism in some chosen length scale (it is determined by formula 1.8) and at a given angle  $\varphi_1$  of the crank position.

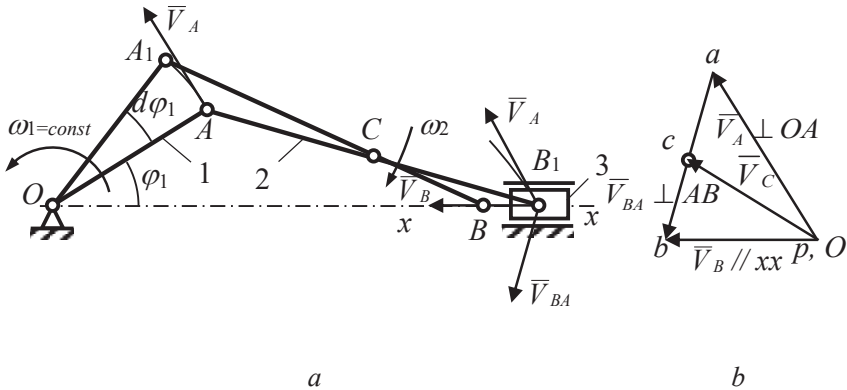


Figure 1.14 — Construction of a velocity diagram of a crank and slider mechanism

If we know the angular velocity  $\omega_1$  of crank  $OA$  and its actual length  $l_{OA}$ , we can find the velocity modulus of point  $A$  using the formula  $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ . The vector  $\vec{V}_A$  is directed perpendicularly to crank  $OA$  in the direction of its motion. Let's select a segment  $pa$ , preferably within 80... 120 mm, and determine the scale of velocities using the formula

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} \quad (1.9)$$

Після чого цей масштаб закругляємо до величини  $(1, 2, 4, 5, 25, 125) \cdot 10^{\pm k}$ . Відрізок  $pa$  зображує на плані швидкість точки  $A$  (рис. 1.14, б.). Враховуючи, що шатун рухається плоско-паралельно, то можемо записати аналітичне рівняння з визначення швидкості точки  $B$ .

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \quad (1.10)$$

Це рівняння розв'язується графічно за формулою побудови плану швидкостей кривошипно-повзунного механізму. Для визначення швидкостей  $\bar{V}_B$  і  $\bar{V}_{BA}$  проводимо через точку  $a$  (рис. 1.14, б) лінію, яка показує напрям відносної швидкості  $\bar{V}_{BA}$  (перпендикулярно  $AB$ ), а з полюса  $p$  – лінію, яка паралельна напрямку руху повзуна  $B$  ( $\parallel x-x$ ). Точка перетину цих ліній визначає точку  $b$  – кінець векторів  $\bar{V}_B$  і  $\bar{V}_{BA}$ . Відрізок  $ab$  не тільки визначає у масштабі модуль відносної швидкості  $V_{AB} = ab \cdot \mu_V$ , але одночасно він є планом швидкостей шатуна  $AB$ . А тому точка  $C$ , яка лежить на ньому, на плані буде, згідно з теоремою подібності лежати на відріжку  $ab$ . Склавши пропорцію

$$\frac{ab}{ac} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}}. \quad (1.11)$$

знаходимо довжину відрізка  $ac$ , який відкладаємо на плані швидкостей, з'єднавши точку  $c$  з полюсом  $p$ , тобто  $V_C = pc \cdot \mu_V$ .

Планом швидкостей кривошипа  $OA$  буде відрізок  $pa$  (точка  $O$  нерухома і тому вона потрапила в полюс  $p$ ), повзуна  $B$  – точка  $v$  (усі точки повзуна мають однакову швидкість  $\bar{V}_B$ ).

Знайшовши лінійні швидкості всіх точок ланок механізму, можна знайти кутові швидкості. У нашому випадку кутова швидкість шатуна  $AB$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}}. \quad (1.12)$$

Для визначення напрямку кутової швидкості  $\omega_2$  переносимо вектор швидкості  $\bar{V}_{BA}$  у точку  $B$  і розглядаємо рух точки  $B$  відносно точки  $A$  у напрямі швидкості  $\bar{V}_{BA}$ . У нашому випадку (рис. 2.14, а) кутова швидкість  $\omega_2$  напрямлена за годинниковою стрілкою.

Then we round this scale to value  $(1, 2, 4, 5, 25, 125) \cdot 10^{\pm k}$ . Segment  $pa$  represents velocity of point  $A$  on the diagram (Fig. 1.14,  $b$ ). Given that the connecting rod performs a plane-parallel motion, we can derive the analytical formula for velocity of point  $B$ .

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}. \quad (1.10)$$

This equation shall be solved graphically using the formula for construction of a velocity diagram of a crank and slider mechanism. For determining the velocities  $\bar{V}_B$  and  $\bar{V}_{BA}$ , we can draw a line through point  $a$  (Fig. 1.14,  $b$ ) that shows direction of relative velocity  $\bar{V}_{BA}$  (perpendicular to  $AB$ ), and from pole  $p$ , we can draw a line parallel to the direction of slider  $B$  motion ( $\parallel x-x$ ). Intersection of these lines defines point  $b$ , i.e. the end of vectors  $\bar{V}_B$  and  $\bar{V}_{BA}$ . Segment  $ab$  not only determines the relative velocity modulus  $V_{AB} = ab \cdot \mu_V$ , but it is also the velocity diagram of connecting rod  $AB$ . Therefore, in accordance with the similarity theorem, point  $C$ , which lies on it, will lie on segment  $ab$ . Using the proportion

$$\frac{ab}{ac} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}}. \quad (1.11),$$

we can find the length of segment  $ac$ , which we plot on the velocity diagram by connecting point  $c$  with pole  $p$ , i.e.  $V_C = pc \cdot \mu_V$

The velocity diagram of crank  $OA$  is segment  $pa$  (point  $O$  is fixed, and therefore, it is at pole  $p$ ), and the velocity diagram of slider  $B$  is point  $b$  (all points of the slider have the same velocity  $\bar{V}_B$ ).

After finding the linear velocities of all points of the mechanism's links, we can find the angular velocities. In our example, angular velocity of connecting rod  $AB$

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}}. \quad (1.12)$$

For determining the direction of angular velocity  $\omega_2$ , we can transfer the velocity vector  $\bar{V}_{BA}$  to point  $B$  and consider that point  $B$  moves relative to point  $A$  in the direction of velocity  $\bar{V}_{BA}$ . In our example (Fig. 2.14,  $a$ ), the angular velocity direction  $\omega_2$  is clockwise.

Розглянемо методику побудови планів прискорень на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 1.14). Вихідними даними для побудови плану прискорень є положення ланок механізму і план швидкостей. Рівняння, які використовуються при побудові плану прискорень, відрізняються тільки тим, що повні прискорення точки розкладають на окремі складові. У нашому випадку (рис. 1.15, а) повним прискоренням точки  $A$  є геометрична сума нормального (доцентрового) і дотичного (тангенціального) прискорення:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{AO} = \overline{a}_{AO}^n + \overline{a}_{AO}^\tau. \quad (1.13)$$

де  $\overline{a}_{AO}$  – прискорення точки  $A$  при обертанні кривошипа  $OA$  навколо точки  $O$ .

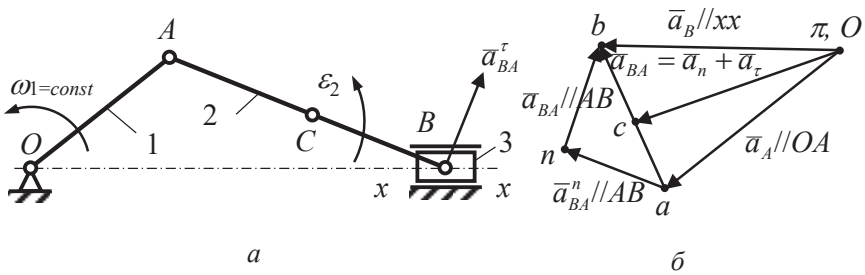


Рисунок 1.15 – Побудова плану пришвидчень кривошипно-повзунного механізму

Нормальне прискорення  $\overline{a}_{AO}^n$  напрямлене по лінії  $AO$  до центра обертання кривошипа  $O$ , дотичне  $\overline{a}_{AO}^\tau$  – перпендикулярно до  $AO$  у бік, який відповідає напрямку кутового прискорення  $\varepsilon_1$  кривошипа  $OA$ . Модулі цих прискорень знаходять із співвідношень:

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}; \quad a_{AO}^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}. \quad (1.14)$$

Let's consider the technique of creating the acceleration diagrams using the example of a crank and slider mechanism (Fig. 1.14). The input data for acceleration diagram construction are positions of the mechanism links and the velocity diagram. Equations, which are used to construct the acceleration diagram, differ only in that the total accelerations of a point are split into separate components. In our example (Fig. 1.15, *a*), the total acceleration of point *A* is the geometric sum of normal (centripetal) and tangential accelerations:

$$\overline{a_A} = \overline{a_{AO}} = \overline{a_{AO}^n} + \overline{a_{AO}^\tau}. \quad (1.13)$$

where  $\overline{a_{AO}}$  is the acceleration of point *A* when crank *OA* rotates around point *O*.

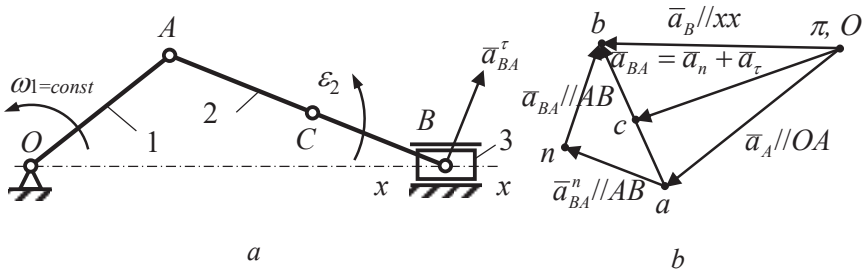


Figure 1.15 — Construction of an acceleration diagram of a crank and slider mechanism

Normal acceleration  $\overline{a_{AO}^n}$  is directed along line *AO* to the centre of rotation of crank *O*, and tangential acceleration  $\overline{a_{AO}^\tau}$  is perpendicular to line *AO* in the direction corresponding to direction of angular acceleration  $\varepsilon_1$  of crank *OA*. Modules of these accelerations can be found from the following equations:

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}; \quad a_{AO}^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA} \quad (1.14)$$

Якщо кривошип  $OA$  обертається рівномірно ( $\omega_1 = \text{const}$ ), то  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$ , а отже, у нашому випадку  $a_{AO}^r = 0$ , тобто прискорення  $\overline{a_A} = \overline{a_{AO}^n}$ .

Узявши деяку точку  $\pi$  за полюс плану прискорень (рис. 1.15, б), відкладемо вектор, який зображує нормальне прискорення точки  $A$  у вигляді відрізка  $\pi a$ , який бажано приймати у межах 80... 120 мм. Тоді масштаб (масштабний коефіцієнт),  $\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ .

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}. \quad (1.15)$$

Прискорення точки  $B$  знаходимо з рівняння

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}. \quad (1.16)$$

У цьому рівнянні вектор прискорення  $\overline{a_B}$  напрямлений вздовж прямої  $x-x$ ; прискорення  $\overline{a_{BA}}$  розкладаємо на дві складові:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}.$$

Тоді (2.16) можна записати так:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}. \quad (1.17)$$

Вектор нормального прискорення  $\overline{a_{BA}^n}$  напрямлений вздовж лінії  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ , а його модуль  $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$ .

If crank  $OA$  rotates uniformly ( $\omega_1 = \text{const}$ ), then  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$ ; and therefore,  $\overline{a_{AO}^r} = 0$ , in our example; i.e. acceleration is  $\overline{a_A} = \overline{a_{AO}^n}$ .

Taking some point  $\pi$  as the pole of the acceleration diagram (Fig. 1.15, *b*), we can plot the vector representing the normal acceleration of point  $A$  as a segment  $\pi a$ , which should preferably be within 80... 120 mm. Then, the scale (scaling factor),  $\frac{\text{m/s}^2}{\text{mm}}$ .

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}. \quad (1.15)$$

Acceleration of point  $B$  is found from equation

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}. \quad (1.16)$$

In this equation, acceleration vector  $\overline{a_B}$  is directed along the line  $x-x$ ; we can decompose the acceleration  $\overline{a_{BA}}$  into two components:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}.$$

Then, (2.16) can be revised as follows:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^r}. \quad (1.17)$$

The vector of normal acceleration  $\overline{a_{AO}^n}$  is directed along line  $AB$  from point  $B$  to point  $A$ , and its modulus is  $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}$ .

$$an = \frac{a_{BA}}{\mu_a}$$

На плані прискорень  $\overline{a_{BA}^n}$  зображено відрізком  $\overline{an}$ , який прикладено своїм початком у точці  $a$  (згідно з правилом додавання векторів). Через його кінець (точку  $n$ ) проводимо напрям дотичного прискорення  $\overline{a_{BA}^\tau}$ . Він перпендикулярний до лінії  $AB$  ( $\overline{a_{BA}^\tau}$  перпендикулярний  $\overline{a_{BA}^n}$ ). І нарешті, через полюс  $\pi$  проводимо напрям прискорення точки  $B$  (паралельно  $x-x$ ), тоді точка перетину напрямів прискорень  $\overline{a_{BA}^n}$  і  $\overline{a_{BA}^\tau}$  дасть точку  $b$ . З'єднавши точки  $a$  і  $b$ , знайдемо вектор повного відносного прискорення  $\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$  і цим самим побудуємо план прискорень шатуна  $AB$ .

Положення точки  $C$  на плані прискорень можна визначити методом подібності, склавши пропорцію (1.11), з якої визначаємо відрізок  $ac$ . Тоді прискорення точки  $C$

$$a_c = \pi c \cdot \mu_a.$$

Модуль кутового прискорення ланки 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{AB}} = \frac{nb \cdot \mu_a}{l_{AB}}.$$

Для визначення напрямку  $\varepsilon_2$  переносимо вектор дотичного прискорення  $\overline{a_{BA}^\tau}$  у точку  $B$  (рис. 1.15,  $a$ ) і спостерігаємо, в який бік цей вектор обертає шатун  $AB$  відносно вибраного полюса (точка  $A$ ).

$$an = \frac{a_{BA}}{\mu_a}$$

On the acceleration diagram,  $\overline{a_{BA}^n}$  is represented as a segment with its origin at point  $a$  (according to the law of vectors addition). Let's draw direction of tangential acceleration  $\overline{a_{BA}^\tau}$  through its end (point  $n$ ). It is perpendicular to line  $AB$  ( $\overline{a_{BA}^\tau}$  is perpendicular to  $\overline{a_{BA}^n}$ ). And finally, let's draw direction of acceleration of point  $B$  (parallel to  $x-x$ ), through pole  $\pi$ , then the point of intersection of directions of accelerations  $\overline{a_{BA}^n}$  and  $\overline{a_{BA}^\tau}$  will give us point  $b$ . After connecting the points  $a$  and  $b$ , we can find the vector of total relative acceleration  $\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}$  and thus construct the acceleration diagram of connecting rod  $AB$ .

The position of point  $C$  on the acceleration diagram can be determined by similarity method, using the proportion (1.11), from which we determine the segment  $ac$ . Then the acceleration of point  $C$  will be

$$a_c = \pi c \cdot \mu_a.$$

Modulus of angular acceleration of link 2

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{a_{BA}^\tau}}{l_{AB}} = \frac{nb \cdot \mu_a}{l_{AB}}$$

For determining the guide  $\varepsilon_2$ , we can transfer the tangential acceleration vector  $\overline{a_{BA}^\tau}$  to point  $B$  (Fig. 1.15,  $a$ ) and observe, in which direction this vector rotates the connecting rod  $AB$  in relation to the selected pole (point  $A$ ).

## 3 КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕДАЧ

### 3.1 Прості зубчасті механізми

Для передачі обертального руху з постійним передаточним відношенням між двома по-різному заданими в просторі осями застосовують механічні передачі.

Найпростішим механізмом передачі з твердими ланками є триланковий механізм, який складається із двох рухомих ланок, які входять у дві обертальні і одну вищу пару, та однієї нерухомої ланки (стояка).

Відношення кутової швидкості однієї ланки до кутової швидкості другої ланки у механізмі з одним ступенем вільності називається *передаточним відношенням*.

Внаслідок своїх переваг найбільш широкого застосування у машинах і приладах отримали зубчасті механізми (рис. 1.16).

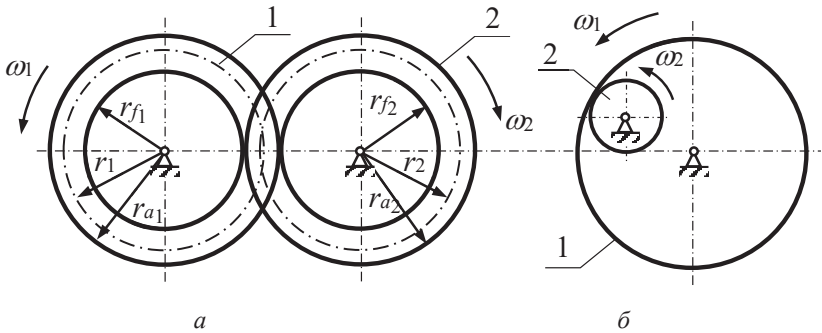


Рисунок 1.16 – Зубчасті механізми

В механічних зубчастих передачах кола радіусами  $r_1$  і  $r_2$  носять назву *початкових кіл*, кола радіусами  $r_{f1}$  і  $r_{f2}$  називаються *колами западин*, кола радіусами  $r_{a1}$  і  $r_{a2}$  – *колами виступів*, або *вершин зубців*. Для двох ланок 1 і 2, які обертаються з кутовими швидкостями  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , передаточне відношення визначається:

### 3 KINEMATIC ANALYSIS OF GEARS

#### 3.1 Simple Gear Mechanisms

Mechanical trains are used to transmit rotational motion with a constant transmission gear ratio between two axes that are differently positioned in space.

The simplest motion transmission mechanism with fixed links is a three-link mechanism, which consists of two movable links, which are part of two revolute pairs and one higher pair, and one fixed link (fixed member).

The ratio of angular velocity of one link to angular velocity of the second link in a mechanism with one degree of freedom is called a *transmission ratio*.

Due to their advantages, gear mechanisms are the most widely used in machines and other devices (Fig. 1.16).

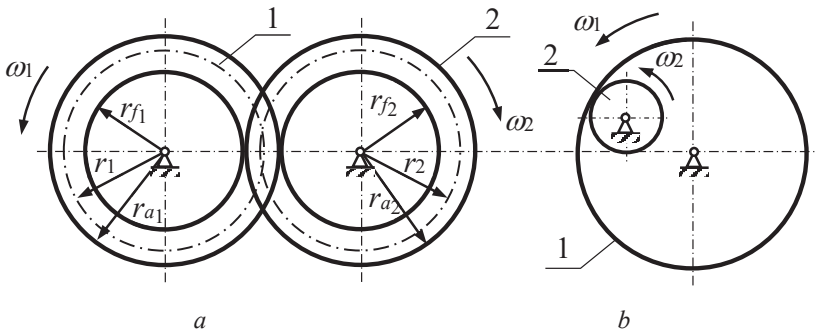


Figure 1.16 — Gear mechanisms

In mechanical gears, circles of radii  $r_1$  and  $r_2$  are called *base circles*, circles of radii  $r_{f1}$  and  $r_{f2}$  are called *dedendum circles*, and circles of radii  $r_{a1}$  and  $r_{a2}$  are called *addendum circles* or *tip circles*. For two links 1 and 2, which rotate with angular velocities  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , the transmission ratio is calculated as follows:

при зовнішньому зачепленні (рис. 1.16, а)

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad (1.18)$$

при внутрішньому зачепленні (рис. 1.16, б)

$$i_{12} = +\frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{n_1}{n_2} = +\frac{r_2}{r_1} = +\frac{z_2}{z_1}. \quad (1.19)$$

Якщо рух здійснюється між паралельними осями, то *передаточне відношення* має знак “плюс”, якщо кутові швидкості ланок мають однакову направленість (внутрішнє зачеплення) і знак “мінус”, якщо направленість руху протилежна (зовнішнє зачеплення).

Відношення кроку  $P$  зубців до числа  $\pi$  називається *модулем зачеплення* і позначається літерою  $m$ , мм:

$$m = \frac{P}{\pi}.$$

Об'єднуючи обидва види зачеплення, формули (1.18) і (1.19) можна записати:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{D_2}{D_1}, \quad (1.20)$$

де  $n_1, n_2$  – кількість обертів за хвилину відповідно ланок 1 і 2;

$z_1, z_2$  – кількість зубців ланок 1 і 2;

$r_1, r_2, D_1, D_2$  – радіуси та діаметри початкових кіл зубчастих коліс.

Крок зубців – це відстань між двома однойменними профілями сусідніх зубців колеса.

$$P = m \cdot z.$$

Враховуючи, що  $\pi d = P \cdot z$ , то  $d = m \cdot z$ .

for external tothing (Fig. 1.16, *a*)

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad (1.18)$$

for internal tothing (Fig. 1.16, *b*)

$$i_{12} = +\frac{\omega_1}{\omega_2} = +\frac{n_1}{n_2} = +\frac{r_2}{r_1} = +\frac{z_2}{z_1}. \quad (1.19)$$

When motion is between parallel axes, the *transmission ratio* has a plus sign if angular velocities of the links have the same direction (internal tothing), and it has a minus sign if direction of motion is opposite (external tothing).

The ratio of tooth pitch  $P$  to the number of teeth  $\pi$  is called a *module* and is denoted by letter  $m$ , mm:

$$m = \frac{P}{\pi}.$$

Combining both types of gearing, formulae (1.18) and (1.19) can be expressed as:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{D_2}{D_1}, \quad (1.20)$$

where  $n_1, n_2$  are the number of revolutions per minute of links 1 and 2, respectively;

$z_1, z_2$  are the number of teeth of links 1 and 2;

$r_1, r_2, D_1, D_2$  are radii and diameters of gear base circles.

A tooth pitch is a distance between two identical profiles of adjacent teeth.

$$P = m \cdot z.$$

Provided that  $\pi d = P \cdot z$ , then  $d = m \cdot z$ .

### 3.2 Рядові зубчасті механізми

Одна ступінь зубчастої передачі може забезпечити передаточне відношення від 1 до 12.5. При необхідності отримання більшого передаточного відношення застосовують механізми, які складаються із декількох пар коліс, так званих серій коліс. *Серії зубчастих коліс, у яких всі вали коліс обертаються у нерухомих підшипниках, називаються рядовими.*

Визначимо передаточне відношення рядового механізму, який складається із трьох пар циліндричних зубчастих коліс (рис. 1.17).

Колеса 2-3 і 4-5 жорстко пов'язані між собою, тобто обертаються з однаковою кутовою швидкістю ( $\omega_2 = \omega_3$ ,  $\omega_4 = \omega_5$ ). Загальне передаточне відношення механізму  $i_{16} = -\frac{\omega_1}{\omega_6}$ . Запишемо передаточне відношення для кожної зубчастої пари:

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{34} = -\frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad i_{56} = -\frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

Перемноживши праві і ліві частини цих рівнянь, дістанемо

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) = -i_{16}. \quad (1.21)$$

Отже, передаточне відношення рядового зубчастого механізму дорівнює добутку передаточних відношень окремих зубчастих пар. Знак передаточного відношення рядового механізму при парній кількості зовнішніх зачеплень додатний, при непарній кількості – від'ємний.

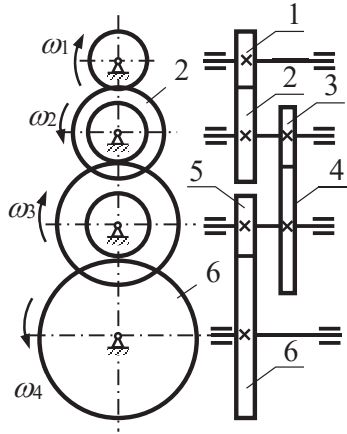


Рисунок 1.17 – Рядовий зубчастий механізм

### 3.2 Compound Gear Mechanisms

A single gear stage can provide a transmission ratio between 1 and 12.5. If a higher transmission ratio is required, we can use mechanisms consisting of several pairs of gears, the so-called gear trains. *The gear trains in which all the gear shafts rotate inside the fixed bearings are called compound gears.*

Let's determine the transmission gear ratio of a compound gear mechanism consisting of three pairs of cylindrical gears (Fig. 1.17).

Gears 2–3 and 4–5 are rigidly interconnected, i.e. they rotate with the same angular velocity ( $\omega_2 = \omega_3$ ,  $\omega_4 = \omega_5$ ). Total

transmission ratio of the mechanism is  $i_{16} = -\frac{\omega_1}{\omega_6}$ . Let's write down the transmission gear ratio for each pair of gears:

$$i_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad i_{34} = -\frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{z_4}{z_3}; \quad i_{56} = -\frac{\omega_5}{\omega_6} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

By multiplying the right and left sides of these equations, we get

$$i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_5}{\omega_6}\right) = -i_{16}. \quad (1.21)$$

Therefore, the transmission ratio of a compound gear mechanism is equal to the product of transmission ratios of individual gear pairs. The sign of transmission gear ratio of a compound gear mechanism is positive for an even number of external toothings, and negative for an odd number.

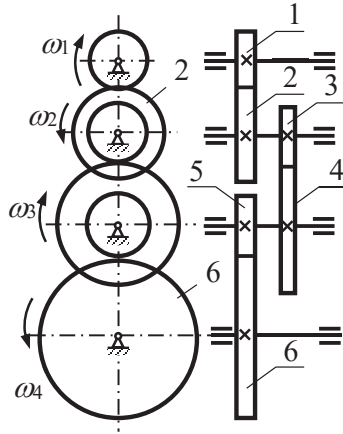


Figure 1.17 — Compound gear mechanism

При передачі руху на значні відстані або при необхідності відтворення передаточного відношення певного знаку застосовують такі рядові з'єднання коліс, як показано на рис. 1.18. Загальне передаточне відношення такого з'єднання дорівнює:

$$i_{14} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

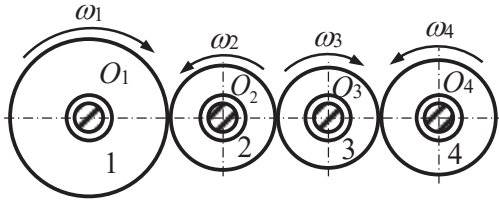


Рисунок 1.18 – Схема рядового з'єднання зубчастих коліс з паразитними колесами

Для рядових механізмів з конічними колесами знак передаточного відношення визначається за правилом стрілок: якщо стрілки, які визначають напрям обертання коліс напрямлені однакою у ведучого і веденого коліс, то знак буде додатним, якщо протилежно – знак буде від'ємним.

Визначення цього знаку будемо вести таким чином. У місці стикання коліс 1 і 2 (рис. 1.19 або 1.20) поставимо стрілки  $a$  і  $b$ , причому, якщо стрілка  $a$  спрямована від місця стикання, то і стрілка  $b$  повинна бути спрямована від місця стикання (рис. 1.19) або до місця стикання (рис. 1.20).

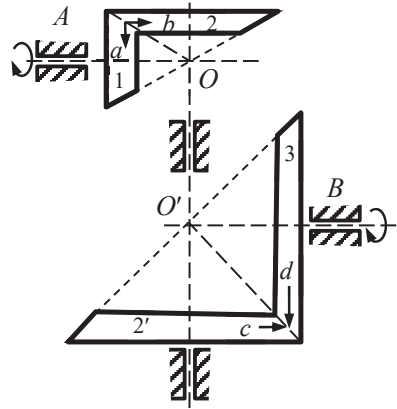


Рисунок 1.19 – Схема двохступеневої конічної передачі з додатним передаточним відношенням

When transmitting the motion over long distances or when the transmission ratio of a certain sign should be replicated, the following compound gear connections are used, as shown in Fig. 1.18. Total transmission ratio of such a connection is as follows:

$$i_{14} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4}.$$

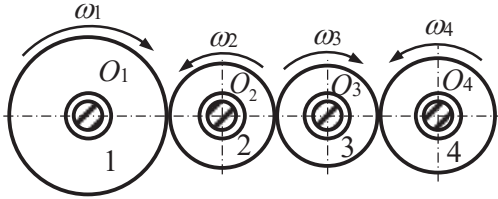


Figure 1.18 — Diagram of compound gear connection with idle gears

For compound bevel gear mechanisms, the sign of transmission ratio is determined in accordance with arrows direction: if arrows indicating the rotation direction of the gears point in the same direction at the driving and driven gear, the sign is positive; if they point in the opposite direction, the sign is negative.

Identification of this sign will be as follows. At the point of contact between gears 1 and 2 (Fig. 1.19 or 1.20), let's place arrows  $a$  and  $b$ , and if arrow  $a$  points away from the point of contact, arrow  $b$  should point away from the point of contact (Fig. 1.19) or towards the point of contact (Fig. 1.20).

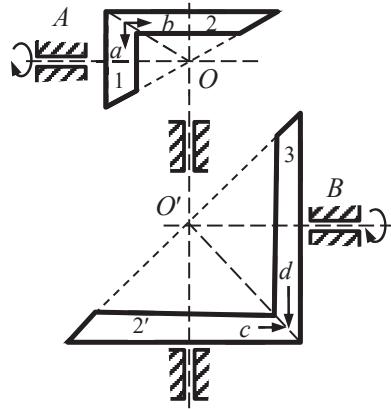


Figure 1.19 — Diagram of a two-stage bevel gear with positive transmission ratio

На колесах 2', жорстко пов'язаними з колесами 2, в місцях стикання з колесами 3 ставимо стрілку  $c$  того ж напрямку, що і стрілка  $b$ . Тоді стрілка  $d$ , згідно з вищевказаною умовою, буде мати напрямок: для колеса 3 на рис. 1.19 співпадаючим зі стрілкою  $a$ , а для колеса 3 на рис. 20 протилежний стрілці  $a$ . Якщо напрямки стрілок ведучого й веденого коліс співпадають. Якщо ж напрямки цих стрілок протилежні (рис. 1.20), то знак передаточного відношення слід вважати від'ємним.

Отже передаточне відношення для схеми зображеної на рис. 2.19 набирає вигляду

$$i_{12} = + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

а для схеми зображеної на рис. 1.20 передаточне відношення передачі має від'ємний знак:

$$i_{12} = - \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = - \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

### 3.3 Сателітні механізми

*Механізми, які мають колеса із рухомими осями, називаються сателітними.*

У механізмі наведеному на рис. 1.21, зубчасті колеса 1 і 3, осі яких співпадають з основною геометричною віссю механізму, називаються *центральною*, а колесо 2, яке знаходиться у складному русі: навколо власної осі і з власною віссю навколо центральної, називається *сателітом*. Важіль  $H$ , на якому закріплюється рухома вісь сателіта, називається *водилом*. Центральне колесо і водило є основними ланками.

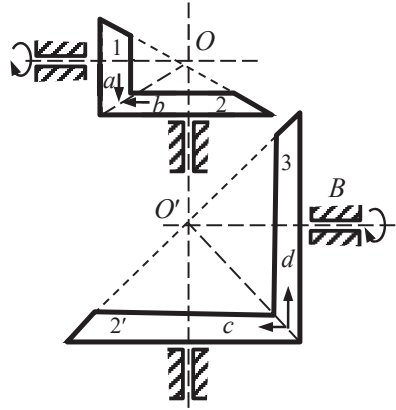


Рисунок 1.20 – Схема двохступеневої кінцевої передачі з від'ємним передаточним відношенням

Place arrow  $c$  pointing in the same direction as arrow  $b$  at the points of contact of gears  $2'$ , which are rigidly connected to gears  $2$ , with gears  $3$ . Then arrow  $d$ , according to the above condition, will have the following direction: for wheel  $3$  shown in Fig. 1.19 as coinciding with arrow  $a$ , and for wheel  $3$  shown in Fig. 1.20 — opposite to arrow  $a$ . If directions of the driver and driven gear arrows coincide. If directions of these arrows are opposite (Fig. 1.20), then the transmission ratio sign should be considered negative.

Thus, the transmission ratio for the diagram shown in Fig. 2.19 can be calculated as follows

$$i_{12} = + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3},$$

and for the diagram shown in Fig. 1.20, transmission ratio has a negative sign:

$$i_{12} = - \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = - \frac{\omega_1}{\omega_3}.$$

### 3.3 Satellite Gear Mechanisms

*Mechanisms that have gears with movable axes are called satellite gear mechanisms.*

In the mechanism shown in Fig. 1.21, gears 1 and 3, the axes of which coincide with the main geometric axis of the mechanism, are called *central gears*, and gear 2 which is in complex motion: around its axis and with its axis around the central axis it is called a *satellite gear*. Arm  $H$ , on which the movable axis of the satellite gear is fixed, is called a *carrier*. The central gear and the carrier are the main links.

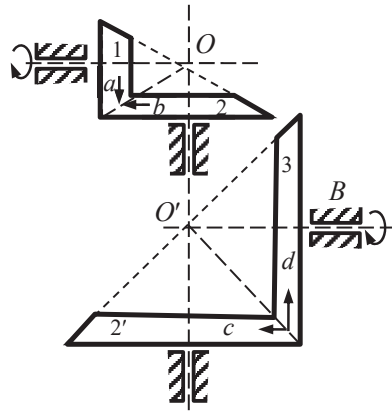


Figure 1.20 — Diagram of a two-stage bevel gear with negative transmission ratio

Ступінь рухомості механізму, показаного на рис. 1.21:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (1.22)$$

Сателітні механізми, ступінь вільності яких дорівнює двом, називаються *диференціальними механізмами*.

Для визначення залежності між кутовими швидкостями всіх ланок диференціальної передачі  $\omega_1, \omega_2, \omega_H$ , скористаємось способом обертеного руху. Задамо всьому механізму обертальний рух навколо осі  $O_1$ , який дорівнює швидкості водила  $H$ , але напрямлений в протилежний бік ( $-\omega_H$ ). Тоді отримаємо диференціальний механізм з нерухомими осями ( $\omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0$ ), а кутові швидкості рухомих ланок відносно водила дорівнюють:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H.$$

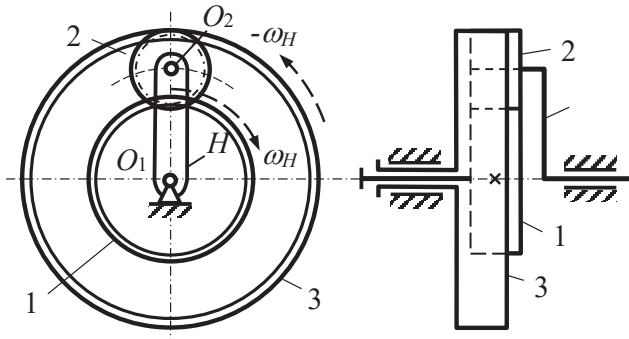


Рисунок 1.21 – Сателітний механізм

Передаточне відношення такого механізму  $i_{13}^H$  (індекс  $H$  означає, що водило зупинене), як і при рядовому з'єднанні коліс, визначається за формулою

$$i_{13}^H = \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (1.23)$$

The degree of mobility of the mechanism shown in Fig. 1.21:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (1.22)$$

Satellite gear mechanisms, a freedom degree of which is two, are called *differential gear mechanisms*.

For determining the dependence between angular velocities of all links of a differential gear train  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_H$ , we can use the method of rotational motion. Let's assume that the whole mechanism rotates around axis  $O_1$ , with a velocity equal to velocity of carrier  $H$ , but in a direction opposite to that of the carrier ( $-\omega_H$ ). Then we can find a differential gear mechanism with fixed axes ( $\omega'_H = \omega_H - \omega_H = 0$ ), and angular velocities of movable links in relation to the carrier are as follows:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \omega_H; \quad \omega'_2 = \omega_2 - \omega_H.$$

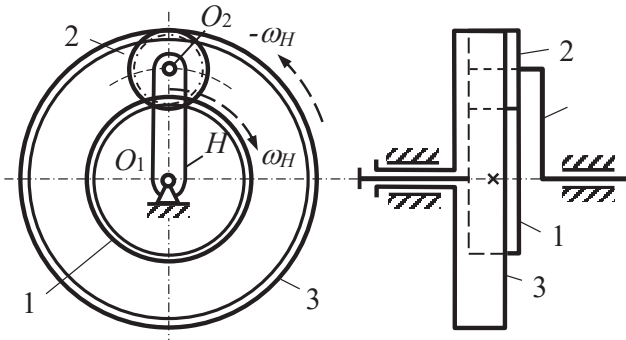


Figure 1.21 — Satellite gear mechanism

Transmission ratio of this mechanism  $i_{13}^H$  (index  $H$  means that the carrier is stopped), as with compound gear connection, shall be determined by the formula

$$i_{13}^H = \frac{\omega'_1}{\omega'_3} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \quad (1.23)$$

У загальному випадку для диференціального механізму, який складається із  $K$  коліс передаточне відношення набирає вигляду

$$i_{1K}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_K'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_K - \omega_H}. \quad (1.24)$$

Формула (1.24) носить назву *формули Віліса*. Якщо в сателітному механізмі на одне із центральних коліс накласти додаткову кінематичну в'язь (наприклад,  $\omega_3=0$ ), то дістанемо *планетарний механізм*, ступінь рухомості якого  $W=1$ , а формула Віліса має вигляд

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}. \quad (1.25)$$

і передаточне відношення планетарного механізму визначається за формулою

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H = 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \frac{z_3}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (1.26)$$

За допомогою планетарних механізмів можна отримати дуже велике передаточне відношення при невеликій кількості коліс.

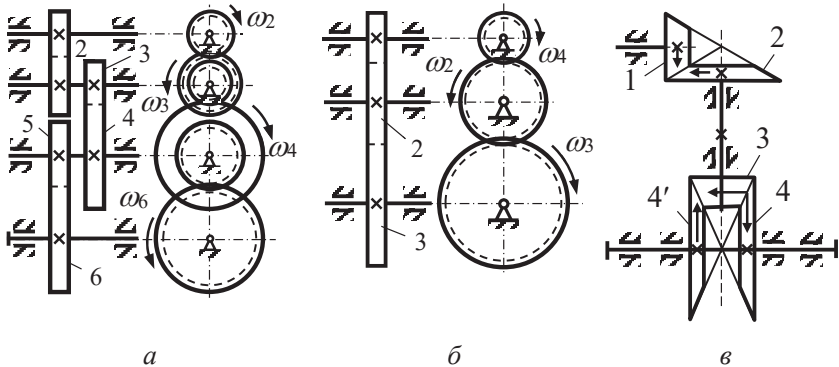


Рисунок 22 – Рядові зубчасті механізми

Generally, for a differential gear mechanism consisting of  $K$  gears, the transmission ratio can be found as follows

$$i_{1K}^H = \frac{\omega_1'}{\omega_K'} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_K - \omega_H}. \quad (1.24)$$

Formula (1.24) is called the *Willis equation*. If we add another kinematic constraint on one of central gears of the satellite gear mechanism (for example,  $\omega_3=0$ ), we get a *planetary gear mechanism* with the degree of mobility  $W=1$ , and the Willis equation will be as follows

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}. \quad (1.25)$$

and the transmission ratio of the planetary gear mechanism shall be determined by the formula

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H = 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \frac{z_3}{z_2} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (1.26)$$

By using planetary gear mechanisms, we can obtain a massive transmission ratio with a limited number of gears.

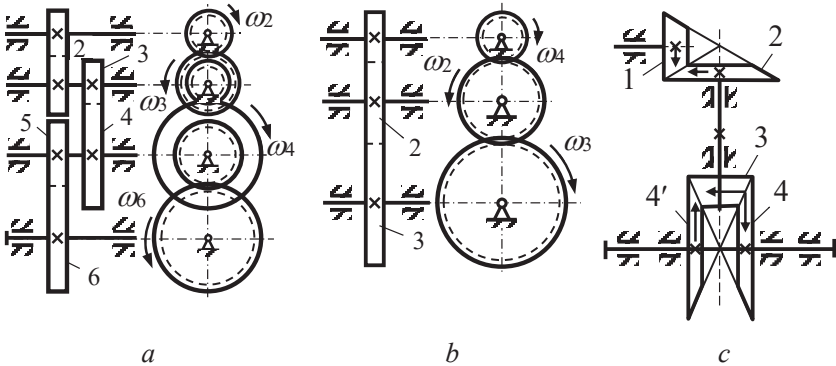


Figure 22 — Compound gear mechanisms

## 4 ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

### 4.1 Основні задачі динамічного дослідження механізмів

При кінематичному аналізі дослідження руху механізмів ведеться з урахуванням тільки структури механізмів та геометричних співвідношень між розмірами їх ланок. При динамічному дослідженні механізмів розглядається рух ланок з урахуванням сил, що на них діють. Своєю дією прикладені сили надають ланкам механізму того чи іншого закону руху.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів і машин:

- заданий закон руху початкової ланки механізму – треба визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух;
- задані зовнішні сили, що діють на ланки механізму – треба визначити закон руху початкової ланки;

Перша задача носить назву *силового аналізу механізмів*, а друга – *динаміки механізмів* (машин). Крім цього, як і в інших розділах теорії механізмів і машин, у динаміці можна виділити два класи задач – аналіз і синтез механізмів за даними динамічними умовами. З цієї причини у розділ динаміки включають ряд інших задач, які мають важливе технічне значення, а саме: розрахунок маховика, зрівноваження мас у механізмі, визначення його ККД, дослідження коливань у машинах, їх віброзахист.

Але перш ніж приступити до розв'язування задач динаміки, необхідно ознайомитися з силами, що діють на ланки механізмів і машин.

### 4.2 Сили, що діють у машинах

Усі діючі у машинах сили поділяють на дві основні групи:

- рушійні сили  $\overline{F}_p$ , які діють у бік руху тіла, тобто намагаються прискорити його рух;
- сили опору  $\overline{F}_o$ , які діють проти руху тіла, тобто намагаються сповільнити рух тіла.

У свою чергу сили опору поділяються на сили корисного (або виробничого) опору  $\overline{F}_{ко}$  та сили шкідливого (або невиробничого) опору  $\overline{F}_{шo}$ .

## 4 MECHANISMS AND MACHINES DYNAMICS

### 4.1 Basic Tasks of Dynamic Mechanism Analysis

In kinematic analysis, the motion of mechanisms is analysed taking into account only the structure of mechanisms and geometric relationships between dimensions of their links. In dynamic analysis of mechanisms, the motion of links is analysed with due regard for forces affecting them. The forces affecting the links of the mechanism provide them with a particular law of motion.

There are two main tasks in the mechanisms and machines dynamics:

- if the law of motion of the input link of the mechanism is set, we have to determine external forces that enable this motion;
- If external forces affecting the links of the mechanism are set, we have to determine the law of motion of the input link;

The first task is called the *force analysis of mechanisms*, and the second one is the *dynamic analysis of mechanisms* (machines). Furthermore, similarly to other fields of mechanisms and machines theory, we can identify two classes of tasks in dynamics: analysis and synthesis of mechanisms under given dynamic conditions. For this reason, the dynamics analysis section includes some other issues which are of great technical importance, namely: flywheel calculation, balancing of masses in a mechanism, determination of mechanism efficiency, analysis of vibrations in machines, and vibration protection of machines.

But before we begin to solve dynamics issues, forces affecting the components of mechanisms and machines should be understood.

### 4.2 Forces Acting in Machines

All forces acting in machines are divided into two main groups:

- motive forces  $\overline{F}_p$  acting in the direction of body's motion, i.e. trying to accelerate its motion;
- resistant forces  $\overline{F}_o$  acting in the direction opposite to the direction of body's motion, i.e. trying to slow down the body's motion.

In turn, resistant forces are divided into effective (or productive) resistant forces  $\overline{F}_{ERF}$  and adverse (or non-productive) resistant forces  $\overline{F}_{ARF}$ .

*Рушійні сили* – це такі сили, які приводять механізм або машину в рух. Рушійними силами можуть бути тиск пари або газу, тиск води, повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сили ваги тощо.

Напрями рушійної сили та швидкості точки, у якій прикладена ця сила, або збігаються, або складають гострий кут. Тому проекція вектора сили на напрям швидкості руху тіла завжди додатна, що і визначає додатну роботу рушійних сил.

До сил корисного опору відносяться технологічні опори руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто для здійснення якого і служить машина або механізм. Сила корисного опору напрямлена у протилежний бік руху або складає з напрямом швидкості тупий кут. Тому ця робота завжди від'ємна.

До сил шкідливого опору відносяться сили тертя у кінематичних парах, а також опір середовища. Правда, є випадки, коли силу тертя не можна віднести до шкідливого опору. В гальмах, наприклад, або у місцях стику ведучих коліс локомотива з рейками, коліс автомобіля з поверхнею дороги тертя корисне.

Розрізняють також сили ваги ланок  $\bar{G}$ , сили інерції  $\bar{F}_{in}$ , та сили реакцій  $\bar{R}$  у кінематичних парах. Проте ці сили не утворюють будь-який новий клас. Залежно від їх напрямку дії ці сили треба віднести до рушійних сил або сил опору.

Сили інерції з'являються при зміні швидкості за величиною або напрямом. При періодичному русі робота сил інерції за період руху дорівнює нулю (без урахування затрат енергії на тертя). Це пояснюється тим, що швидкості та прискорення точок рухомих ланок по закінченні кожного періоду набувають початкових значень.

Розрізняють ще сили реакцій, які виникають при взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто у кінематичних парах. Такі сили є внутрішніми силами для всього механізму в цілому, хоча для кожної окремо взятої ланки вони будуть зовнішніми. Робота сил реакцій ніколи не дорівнює нулю, оскільки не рівні нулю сили тертя у кінематичних парах.

Все, раніше викладене про сили, відноситься і до моментів пар сил  $M$ , тому що вони характеризують дію сил при обертанні:  $M = F \cdot r$ , де  $F$  – сила;  $r$  – плече цієї сили відносно осі.

*Motive forces* are forces that set a mechanism or machine in motion. Motive forces can be steam or gas pressure, water pressure, air pressure, electromagnetic forces, elastic forces of a spring, gravity forces, etc.

Directions of the motive force and velocity of the point where this force is applied either coincide or make an acute angle. Therefore, projection of the force vector onto the direction of body's velocity is always positive, which determines positive work of the motive forces.

Effective resistant forces include technological resistances to motion, which require work to overcome during a manufacturing process, i.e. the process for which the machine or mechanism is used. Effective resistant force is directed in the opposite direction of motion or makes an obtuse angle with velocity direction. Therefore, this work is always negative.

Adverse resistant forces include frictional forces in kinematic pairs and resistance of the medium. However, there are some cases where friction force cannot be classified as adverse resistance force. For example, in brakes, or at the contact points between the locomotive's drive wheels and the rails, or between the vehicle's wheels and the road surface, frictional force is effective.

There are also gravity of links  $\bar{G}$ , forces of inertia  $\bar{F}_{in}$ , and reaction forces  $\bar{R}$  in kinematic pairs. However, these forces do not constitute a new class. Depending on the direction of action, these forces can be classified as either motive or resistant forces.

Forces of inertia appear when velocity changes in magnitude or direction. In periodic motion, the work of forces of inertia during the period of motion is zero (excluding the energy consumption for friction). This is because velocities and accelerations of the points of moving links return to their initial values at the end of each period.

There are also reaction forces that arise when links interact at the points of contact, i.e. in kinematic pairs. These forces are internal forces for the entire mechanism, although they are external forces for each individual link. The work of reaction forces is never equal to zero because friction forces in kinematic pairs are not equal to zero.

Everything previously stated about forces also applies to moments of the couples of forces  $M$  because they represent the action of forces during rotation:  $M = F \cdot r$ , where  $F$  is the force;  $r$  is the arm of this force in relation to the axis.

Рушійні сили та сили корисного опору залежно від їх механічних, фізичних і технологічних характеристик можуть бути сталими або функціями різних кінематичних параметрів – переміщень, швидкостей, прискорень і часу. Рушійні сили та сили опору, як правило, визначають експериментальним шляхом, використовуючи відповідні прилади.

#### 4.3 Визначення сил інерції ланок і сил реакцій у кінематичних парах

З курсу теоретичної механіки відомо, що у загальному випадку сили інерції будь-якої ланки  $AB$  (рис. 1.23), яка здійснює плоскопаралельний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, можуть бути зведені до сили інерції  $\vec{F}_{in}$ , яку прикладаємо в центрі мас (ваги)  $S$ , і до пари сил інерції, момент яких дорівнює  $M_{in}$ .

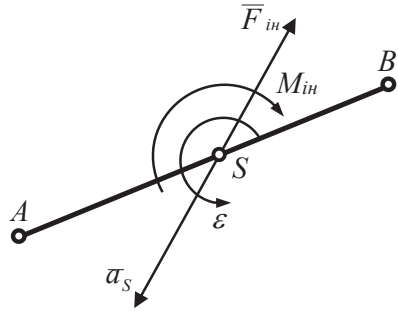


Рисунок 1.23 – Визначення сил інерції

Сила інерції ланки визначається

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_S, \quad (1.27)$$

де  $\vec{F}_{in}$  – вектор сили інерції ланки  $AB$ ,  $H$ ;

$m$  – маса ланки, кг;

$\vec{a}_S$  – вектор повного прискорення центра мас  $S$ ,  $m/c^2$ .

Сила інерції ланки  $\vec{F}_{in}$  напрямлена протилежно вектору прискорення центра мас  $\vec{a}_S$ .

Таким чином, для визначення сили інерції  $\vec{F}_{in}$  ланки треба знати її масу та вектор повного прискорення  $\vec{a}_S$  центра мас. Як видно із формули (1.27), сила інерції має розмірність  $[кг\ м/с^2]$ , тобто вимірюється у ньютонках (Н).

Depending on their mechanical, physical, and technological characteristics, the motive and effective resistant forces can be constant or can be functions of various kinematic parameters such as displacements, velocities, accelerations, and time. Motive and resistant forces are usually determined experimentally using appropriate instrumentation.

#### 4.3 Identification of Links Inertia Forces and Reaction Forces in Kinematic Pairs

It is known from the course of theoretical mechanics that, in general, the inertia forces of any link  $AB$  (Fig. 1.23), which performs plane-parallel motion and has a plane of symmetry parallel to the plane of motion, can be reduced to the force of inertia  $\bar{F}_{in}$  applied at the centre of mass (weight)  $S$  and to a couple of inertia forces, the moment of which equals to  $M_{in}$ .

The inertia force of the link can be calculated as follows

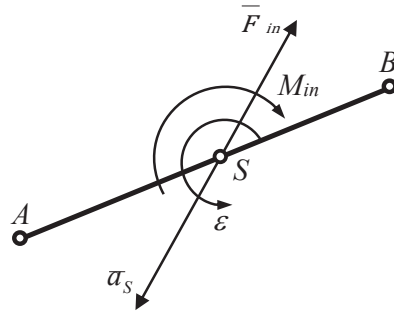


Figure 1.23 — Determination of inertia forces

$$\bar{F}_{in} = -m\bar{a}_s, \quad (1.27),$$

where  $\bar{F}_{in}$  is a vector of the inertia force of link  $AB$ ,  $N$ ;

$m$  is mass of the link,  $kg$ ;

$\bar{a}_s$  is a vector of total acceleration of the centre of mass  $S$ ,  $m/s^2$ .

The inertia force of link  $\bar{F}_{in}$  is directed opposite to the acceleration vector of the centre of mass  $\bar{a}_s$ .

Therefore, we need to know the mass of the link and the vector of total acceleration  $\bar{a}_s$  of the centre of mass to determine the inertia force  $\bar{F}_{in}$ . As can be seen from formula (1.27), the inertia force is expressed in  $[kg \cdot m/s^2]$ , i.e. it is measured in Newtons (N).

Момент пари сил інерції напрямлений протилежно кутовому прискоренню  $\varepsilon$  і може бути визначений як

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}. \quad (1.28)$$

У формулі (1.28)  $J_S$  – момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і перпендикулярна до площини руху ланки, а  $\overline{\varepsilon}$  – кутове прискорення ланки.

Момент інерції  $J_S$  має розмірність  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ , кутове прискорення  $\overline{\varepsilon}$  –  $\text{рад}/\text{с}^2$ , тому момент пари сил інерції має розмірність  $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ , що представляє собою Н·м.

Силу інерції  $\overline{F}_{in}$  і момент пари сил інерції  $\overline{M}_{in}$  можна замінити однією рівнодією силою  $\overline{F}'_{in}$ , що дорівнює силі інерції  $\overline{F}_{in}$  (рис. 1.24), лінія дії якої зміщена відносно центра мас  $S$  на відстань  $h = \frac{M_{in}}{F_{in}}$ , тобто момент пар сил інерції

$M_{in} = F_{in} \cdot h$  замінюємо парою сил  $(\overline{F}_{in}, \overline{F}'_{in})$ .

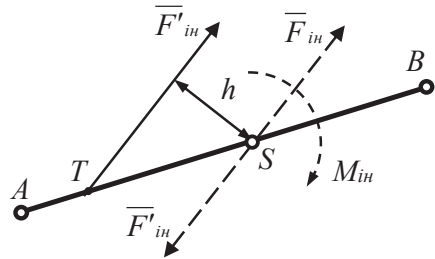


Рисунок 1.24 – Зведення сил інерції ланки до однієї рівнодієвої

Визначення сил реакцій у кінематичних парах зводиться до пошуку їх величини, напрямку і точки прикладення.

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені нормально до цих поверхонь. Тому в обертальній кінематичній парі V класу (рис. 1.25, а) реакція  $\overline{R}_{21}$  яка прикладена до ланки 1 з боку ланки 2, буде завжди проходити через центр шарніра  $O$ . Значення й напрям дії цієї сили  $\overline{R}_{21}$  невідомі, тому що вони залежать від сил, які прикладені до ланок 1 і 2.

Викладене повністю стосується і реакції  $\overline{R}_{12}$ , яка прикладена до ланки 2 з боку ланки 1, тому що сили взаємодії зв'язані між собою третім законом Ньютона:  $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$ .

The moment of the couple of inertia forces is opposite to angular acceleration  $\varepsilon$  and can be defined as

$$\overline{M}_{in} = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}. \quad (1.28)$$

In equation (1.28),  $J_S$  is the moment of inertia of the link in relation to the axis passing through the centre of mass and perpendicular to the plane of motion of the link, and  $\overline{\varepsilon}$  is angular acceleration of the link.

The moment of inertia  $J_S$  is expressed in  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , and angular acceleration  $\overline{\varepsilon}$  is expressed in  $\text{rad}/\text{s}^2$ , so the moment of the couple of inertia forces is expressed in  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ , which is  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

The force of inertia  $\overline{F}_{in}$  and the moment of the couple of forces of inertia  $\overline{M}_{in}$  can be replaced by one resultant force  $\overline{F}'_{in}$  equal to the force of inertia  $\overline{F}_{in}$  (Fig. 1.24) having a line of action shifted from the centre of mass  $S$  by distance  $h = \frac{M_{in}}{F_{in}}$ , i.e. we re-

place the moment of the couple of forces of inertia  $M_{in} = F_{in} \cdot h$  with a couple of forces  $(\overline{F}_{in}, \overline{F}'_{in})$ .

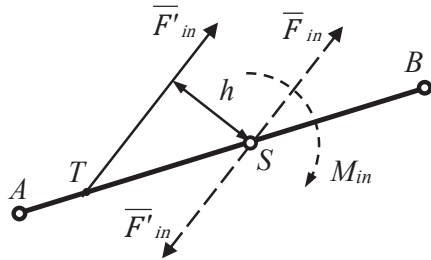


Figure 1.24 — Reduction of inertia forces of a link to a single resultant force

Determination of reaction forces in kinematic pairs is reduced to finding their value, direction, and point of application.

Reaction forces (interaction forces) between two bodies (links) in contact, without any friction, are always directed perpendicularly to these surfaces. Therefore, in a Class V revolute kinematic pair (Fig. 1.25, a), reaction  $\overline{R}_{21}$  applied to link 1 by link 2 will always pass through the centre of hinge  $O$ . The value and direction of action of this force  $\overline{R}_{21}$  are unknown because they depend on forces applied to links 1 and 2.

The above-mentioned fully applies to reaction  $\overline{R}_{12}$ , which is applied to link 2 by link 1, because interaction forces are governed by Newton's third law:  $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$ .

У поступальній парі (рис. 1.25, б) результуюча реакція  $\bar{R}_{21}$  буде напрямлена перпендикулярно до осі руху  $x-x$  ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її значення та точка прикладення.

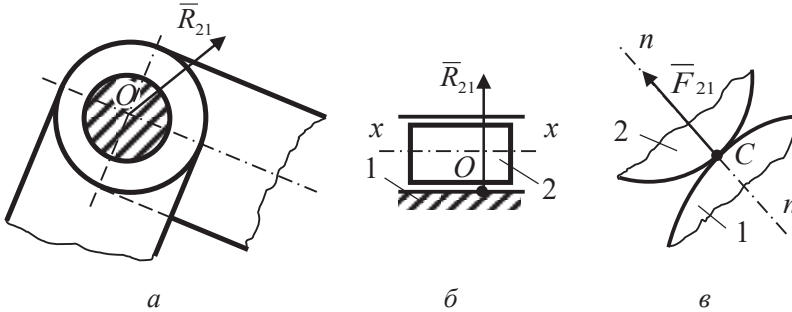


Рисунок 1.25 – Реакції в кінематичних парах V і IV класів

У вищій парі IV класу (рис. 1.25, в) реакція  $\bar{R}_{21}$  напрямлена вздовж нормалі  $n-n$  (без врахування тертя) і прикладена у точці дотику  $C$ . Тому в такій кінематичній парі відомі точка прикладення та напрям сили реакції. Невідомим є її значення.

Отже, під час визначення реакцій у кінематичних парах V класу необхідно відшукати дві невідомі у кожній парі. Якщо число пар п'ятого класу у механізмі  $P_5$ , то число невідомих дорівнює  $2P_5$  і якщо  $n$  – число рухомих ланок, то число рівнянь рівноваги дорівнює  $3n$ . Механізм буде статично визначений при умові  $2P_5=3n$ . Отримана рівність співпадає із структурною формулою групи Ассура. Отже групи Ассура є статично визначеними, а під час пошуку реакцій у кінематичних парах механізму можна розглядати рівновагу кожної групи Ассура окремо.

В основі методу визначення реакцій прийнято принцип Д'Аламбера, у відповідності з яким динамічна система умовно зводиться до статичної шляхом приєднання сил інерції і для розв'язання задачі використовуються рівняння рівноваги статички:

$$\sum \bar{F}_i + \bar{G}_i + \sum \bar{R}_{ji} + \bar{F}_{in_i} = 0, \quad (1.29)$$

In a prismatic pair (Fig. 1.25, *b*), the resulting reaction  $\bar{R}_{21}$  will be oriented perpendicularly to the axis of motion  $x-x$  of links in this pair, while its value and point of application remain unknown.

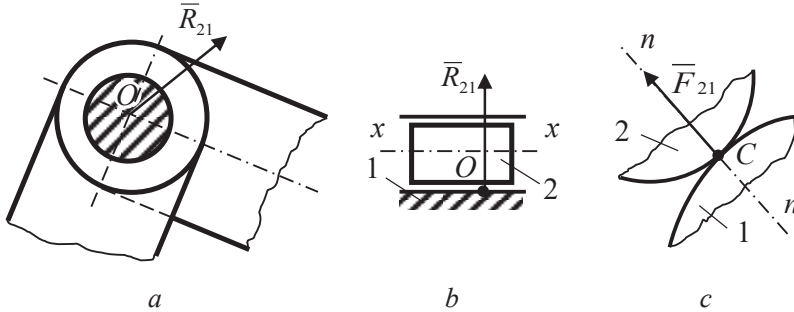


Figure 1.25 — Reactions in kinematic pairs of Classes V and IV

In the higher pair of Class IV (Fig. 1.25, *c*), reaction  $\bar{R}_{21}$  is directed along the normal line  $n-n$  (excluding friction) and is applied at the point of contact  $C$ . Therefore, the point of application and direction of the reaction force are known in this kinematic pair. Its value is unknown.

Hence, when determining the reactions in kinematic pairs of Class V, two indeterminate values should be found in each pair. If the number of Class V pairs in the mechanism is equal to  $P_5$ , then the number of indeterminate values is equal to  $2P_5$ , and if  $n$  is the number of movable links, then the number of equilibrium equations is equal to  $3n$ . *The mechanism will be statically determined if  $2P_5=3n$ .* The resulting equation coincides with the structural formula of the Assur group. Therefore, the Assur group is statically determined, and when determining reactions in kinematic pairs of the mechanism, equilibrium of each Assur group can be analysed separately.

The method of determining the reactions is based on the D'Alembert's principle, which states that a dynamic system is conditionally reduced to a static system by adding the forces of inertia and using the equations of static equilibrium to solve the problem:

$$\sum \bar{F}_i + \bar{G}_i + \sum \bar{R}_{ji} + \bar{F}_{in_i} = 0, \quad (1.29)$$

де  $\sum \bar{F}_i$  – сума всіх зовнішніх сил, які діють на  $i$ -ту ланку;

$\bar{G}_i$  – сила ваги  $i$ -тої ланки;

$\sum \bar{R}_{ji}$  – сума силової взаємодії з боку інших ланок на  $i$ -ту ланку

( $j$ -та ланка стикається з  $i$ -тою ланкою);

$\bar{F}_{in_i}$  – сила інерції  $i$ -тої ланки.

*Визначення реакцій у кінематичних парах механізмів виконується у такій послідовності:*

- спочатку викреслюється механізм у заданих положеннях і у прийнятому масштабі  $\mu_i$ ;
- механізм розподіляємо на групи Ассура, які викреслюються у відповідному масштабі  $\mu_i$ ;
- до ланок групи Ассура у відповідних точках прикладаємо всі задані сили і моменти (сили інерції, сили ваги, сили корисного опору і інші);
- до зовнішніх пар кожної групи прикладаємо невідомі сили реакцій, які замінюють дію відкинутих ланок сусідніх груп;
- потім складаються рівняння рівноваги ланок для визначення відповідних тангенційних складових реакцій у зовнішніх кінематичних парах;
- у прийнятому масштабі  $\mu_F$  будуються силові багатокутники і визначаються нормальні складові, а також повні реакції у кінематичних парах;
- визначення реакцій необхідно починати з групи Ассура, найбільш віддаленої від ведучої ланки, поступово переходячи до послідовних груп, а закінчувати дослідження ведучою ланкою, тобто механізму I класу.

where  $\sum \bar{F}_i$  is a sum of all external forces acting on the  $i$ -th link;

$\bar{G}_i$  Is gravity force of the  $i$ -th link;

$\sum \bar{R}_{ji}$  Is a sum of force interaction from other links on the  $i$ -th link  
(the  $j$ -th link is in contact with the  $i$ -th link);

$\bar{F}_{in_i}$  Is inertia force of the  $i$ -th link.

*Reactions in kinematic pairs of mechanisms are determined in the following sequence:*

- firstly, we plot the mechanism in specified positions and on the accepted scale  $\mu_i$ ;
- Then divide the mechanism into Assur groups, which are plotted to the appropriate scale  $\mu_i$ ;
- We apply all the specified forces and moments (inertia, gravity forces, effective resistant forces, etc.) to links of the Assur group at the appropriate points;
- We apply unknown reaction forces to outer pairs of each group, which replace the effect of the removed links of neighbouring groups;
- Then derive equilibrium equations for the links to determine the corresponding tangential components of reactions in the external kinematic pairs;
- We create polygons of forces in the accepted scale  $\mu_F$  followed by determination of normal components and full reactions in kinematic pairs;
- Determination of reactions should begin with the Assur group, furthest from the driving link, gradually moving to subsequent groups, and ending the analysis with the driving link, i.e. a Class I mechanism.

#### 4.4 Силевий розрахунок плоских механізмів без врахування сил тертя

Розглянемо методику силового розрахунку механізмів II класу прикладі шарнірного чотириланкового механізму, кінематичну схему якого зображено на рисунку 1.26.

Для спрощення задачі будемо вважати, що всі зовнішні сили (сили опору, ваги, інерції тощо), які діють на ланки групи, відомі і для кожної ланки зведено до однієї рівнодійної сили  $\bar{F}_i$  та одного рівнодійного моменту  $\bar{M}_i$ , де  $i=1, 2, 3, \dots, n$  – номер ланки. Таке спрощення не впливає на методику силового розрахунку структурної групи, яка входить до складу механізму (рис. 1.26).

При силовому розрахунку необхідно визначити реакції у кінематичних парах та зрівноважуючу силу або зрівноважуючий момент, який прикладають до початкової ланки.

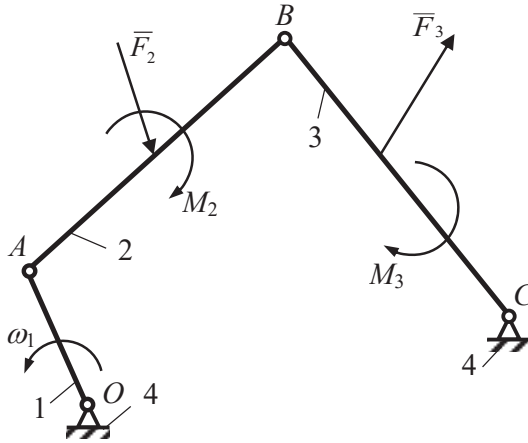


Рисунок 1.26 – Схема силового навантаження шарнірного чотириланкового механізму

До складу механізму входить механізм I класу, утворений кривошипом 1 і стояком 4 та групи Ассур II класу II порядку (шатун 2 та коромисло 3). Силевий розрахунок починаємо з групи 2-3.

#### 4.4 Calculation of Planar Mechanisms Forces Without Considering Friction Forces

Let's discuss the method of force calculation of Class II mechanisms by using the example of a four-link hinged mechanism, the kinematic diagram of which is shown in Fig. 1.26.

For the purpose of simplifying the problem, we assume that all external forces (resistant, gravity, inertia, etc.) affecting the links of the group are known, and for each link are reduced to one resultant force  $\bar{F}_i$  and one resultant moment  $\bar{M}_i$ , where  $i=1, 2, 3, \dots, n$  is a number of the link. This simplification does not affect the method of force calculation of the structural group constituting a part of the mechanism (Fig. 1.26).

When performing a force calculation, reactions in kinematic pairs and the balancing force or balancing moment applied to the input link should be determined.

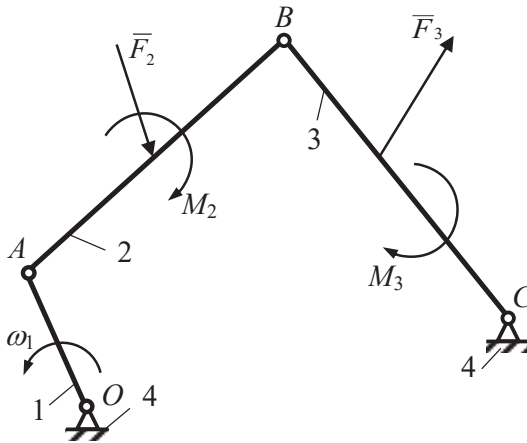


Figure 1.26 — Diagram of forces acting on a four-link hinged mechanism

The structure consists of a Class I mechanism comprising crank 1 and fixed member 4 and a Class II Assur group of order II (connecting rod 2 and rocker arm 3). Force calculation starts with group 2-3.

Для цього групу від'єднуємо від інших ланок (кривошипа 1 і сто-  
 яка 4) і замість них прикладаємо до елементів кінематичних пар  $A$  і  $C$   
 реакції  $\bar{R}_{12}$  та  $\bar{R}_{43}$  (рис. 1.27,  $a$ ), значення та напрям яких невідомі.

Крім цього до ланок групи прикладаємо всі зовнішні сили  $\bar{F}_2$ ,  
 $\bar{F}_3$  та моменти  $M_2$  і  $M_3$ .

Запишемо рівняння рівноваги ланок групи під дією прикладених сил

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0. \quad (1.30)$$

У рівнянні (1.30) відомими є сили  $\bar{F}_2$  і  $\bar{F}_3$ , а невідомими – реакції  
 $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$ , тобто чотири невідомі (невідомими вважаються і значення і  
 напрям сил). Моменти  $M_2$  і  $M_3$  та реакція у кінематичній парі  $B$  у рів-  
 няння (1.30) не входять.

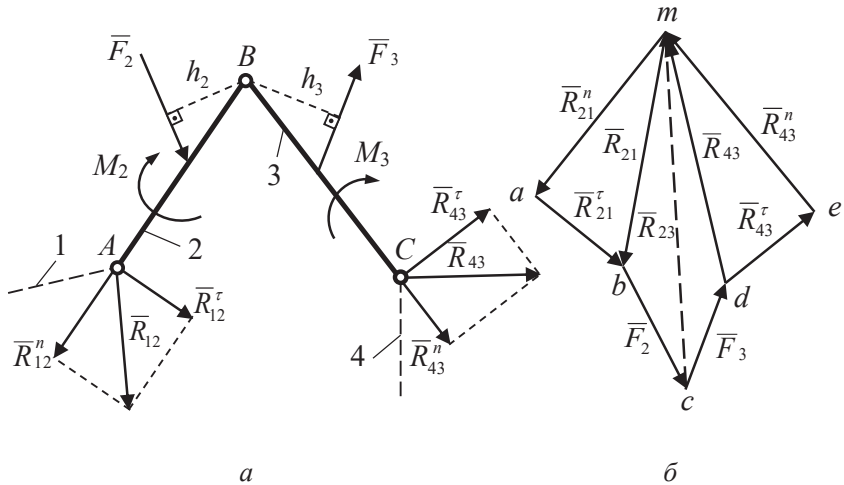


Рисунок 1.27 – Побудова плану сил групи II класу II порядку

For this purpose, we disconnect the group from other links (crank 1 and fixed member 4) and instead apply reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$  to the elements of kinematic pairs  $A$  and  $C$  (Fig. 1.27,  $a$ ), the values and directions of which are unknown.

In addition, we apply all external forces  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  and moments  $M_2$  and  $M_3$  to the links of the group.

Let's write the equilibrium equation for links of the group under the forces applied

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43} = 0. \quad (1.30)$$

In equation (1.30), forces  $\bar{F}_2$  and  $\bar{F}_3$  are known, and reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$  are unknown, i.e. we have four indeterminate values (a value and direction of action of the forces are considered unknown). Moments  $M_2$  and  $M_3$  and reaction in kinematic pair  $B$  are not included in equation (1.30).

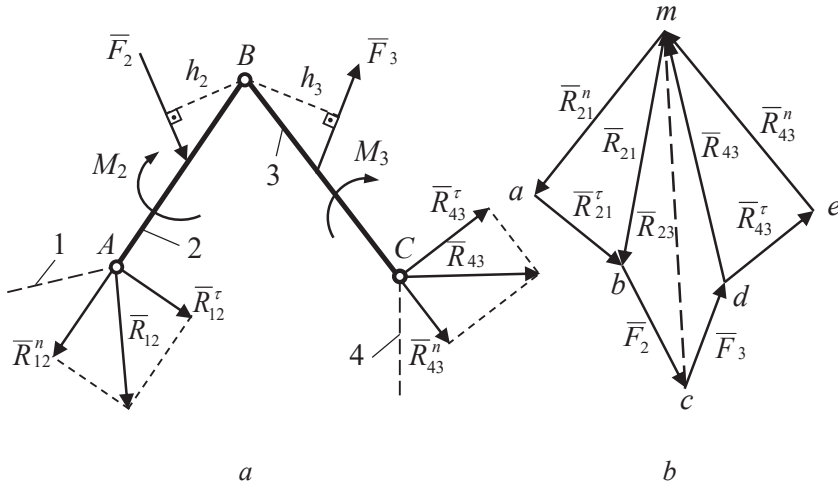


Figure 1.27 — Construction of a diagram of forces for Class II group of order II

Задача про знаходження сил може розв'язуватися аналітично та графічно. На практиці досить широко використовується графічний спосіб визначення сил шляхом побудови планів сил. Для побудови плану сил у рівнянні рівноваги (2.30) може бути не більше, як два невідомих. У нашому випадку необхідно зменшити кількість невідомих із 4 до 2. Розкладаємо реакції  $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$  на дві складові, які напрямлені вздовж відповідних ланок  $AB$  і  $BC$  та перпендикулярно до них, тобто

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r \quad \text{і} \quad \bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^r. \quad (1.31)$$

Визначаємо дотичні складові реакцій. Для цього складаємо для кожної ланки рівняння рівноваги у вигляді суми моментів сил відносно точки  $B$ :

для ланки 2 
$$\sum_{i=1}^n M_B^{(2)}(\bar{F}_i) = R_{12}^r \cdot l_{AB} + F_2 \cdot h_2 - M_2 = 0,$$

звідки: 
$$R_{12}^r = \frac{M_2 - F_2 \cdot h_2}{l_{AB}}; \quad (1.32)$$

для ланки 3 
$$\sum_{i=1}^n M_B^{(3)}(\bar{F}_i) = R_{43}^r \cdot l_{BC} + F_3 \cdot h_3 - M_3 = 0,$$

звідки 
$$R_{43}^r = \frac{M_3 - F_3 \cdot h_3}{l_{BC}}, \quad (1.33)$$

де  $h_2$  і  $h_3$  – дійсні величини плечей, а  $l_{AB}$  і  $l_{BC}$  – дійсні довжини ланок.

У залежностях (1.32), (1.33) і далі вказані в дужках цифри 2 та 3, які показують номери ланок, рівновага яких розглядається. Якщо при обчисленні дотичні складові дістанемо від'ємними, то на плані сил треба їх спрямувати у протилежний бік.

Підставивши залежності (1.31) у рівняння рівноваги (1.30), дістанемо

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^r + \bar{R}_{43}^n = 0. \quad (1.34)$$

The problem of determining the forces can be solved analytically and graphically. In practice, graphical method of determining the forces by construction of the diagram of forces is widely used. In order to construct a diagram of forces, the equilibrium equation (2.30) can have no more than two indeterminates. In our case, we need to reduce the number of indeterminates from 4 to 2. Let's decompose reactions  $\bar{R}_{12}$  i  $\bar{R}_{43}$  into two components, which are oriented along the corresponding links  $AB$  and  $BC$  and perpendicularly to them, i.e.

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r \text{ and } \bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^r. \quad (2.31)$$

Thereafter, we determine the tangential components of reactions. For this purpose, we derive an equilibrium equation for each link as a sum of moments of forces in relation to point  $B$ :

for link 2 
$$\sum_{i=1}^n M_B^{(2)}(\bar{F}_i) = R_{12}^r \cdot l_{AB} + F_2 \cdot h_2 - M_2 = 0,$$

from where: 
$$R_{12}^r = \frac{M_2 - F_2 \cdot h_2}{l_{AB}}; \quad (1.32)$$

for link 3 
$$\sum_{i=1}^n M_B^{(3)}(\bar{F}_i) = R_{43}^r \cdot l_{BC} + F_3 \cdot h_3 - M_3 = 0,$$

from where 
$$R_{43}^r = \frac{M_3 - F_3 \cdot h_3}{l_{BC}}, \quad (1.33)$$

where  $h_2$  and  $h_3$  are actual quantities of arms, and  $l_{AB}$  and  $l_{BC}$  are actual lengths of links.

In equations (1.32), (1.33) and below, numbers 2 and 3 in parentheses indicate the numbers of links, the equilibrium of which is considered. If tangential components are negative as a result of calculation, they should be directed in the opposite direction on the diagram of forces.

By substituting equations (1.31) into the equilibrium equation (1.30), we derive

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{R}_{43}^r + \bar{R}_{43}^n = 0. \quad (1.34)$$

У цьому рівнянні невідомі тільки нормальні складові реакцій  $\bar{R}_{12}^n$ ,  $\bar{R}_{43}^n$  значення яких можна визначити, побудувавши план сил за рівнянням (1.34). Для цього проводимо пряму, паралельну лінії дії  $\bar{R}_{12}^n$ , на якій вибираємо довільну точку  $a$ , з якої у вибраному масштабі  $\mu_F$  послідовно відкладаємо вектори дотичної складової  $\bar{R}_{12}^t$  (рис. 1.27, б),  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{R}_{43}^t$  (див. рівняння 1.34). Вектор  $\bar{R}_{43}^n$  продовжуємо до перетину з напрямом вектора  $\bar{R}_{12}^n$ . Точка перетину напрямів  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{43}^n$  (точка  $m$ ) визначає величини відрізків, які зображують у вибраному масштабі вектори  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{43}^n$ . Напрями цих векторів повинні бути такими, щоб при обході контура плану всі сили були напрямлені у напрямі обходу. Складаючи на плані сил вектори  $\bar{R}_{12}^n$  і  $\bar{R}_{12}^t$ , дістанемо повну реакцію  $\bar{R}_{12}$ , аналогічно знаходимо повну реакцію  $\bar{R}_{43}$  (1.31).

Щоб визначити реакцію  $\bar{R}_{32}$  ланки 3 на ланку 2, напишемо рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 2:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32}. \quad (1.35)$$

У цьому рівнянні маємо два невідомих: значення та напрям реакції  $\bar{F}_{32}$ . Їх можна визначити, побудувавши план сил для ланки 2 згідно з рівнянням (1.35). Для цього на плані сил (рис. 1.27, б) досить сполучити початок вектора  $\bar{R}_{12}$  з кінцем вектора  $\bar{F}_2$  і дістанемо реакцію  $\bar{R}_{32}$  (вона показана штриховою лінією). Очевидно, що реакція  $\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}$  і її можна визначити так само, як і  $\bar{R}_{32}$ , розглянувши рівновагу ланки 3.

Згідно з рис. 2.27, б величини реакцій  $\bar{R}_{12}$  і  $\bar{R}_{43}$  визначаються:

$$\bar{R}_{12} = mb \cdot \mu_F; \quad \bar{R}_{43} = md \cdot \mu_F. \quad (1.36)$$

In this equation, only normal components  $\bar{R}_{12}^n$ ,  $\bar{R}_{43}^n$  of reactions are unknown, the values of which can be determined by constructing a diagram of forces according to equation (1.34). For this purpose, we draw a line parallel to the line of action  $\bar{R}_{12}^n$ , on which we select an arbitrary point  $a$ , which will be a starting point for the tangent component vectors  $\bar{R}_{12}^t$  in the chosen scale  $\mu_F$  (Fig. 1.27, *b*),  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$ ,  $\bar{R}_{43}^t$  (see equation 1.34). We continue vector  $\bar{R}_{43}^n$  until it intersects with the direction of vector  $\bar{R}_{12}^n$ . The point of intersection of directions  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{43}^n$  (point  $m$ ) determines the size of segments that represent vectors  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{43}^n$  at the selected scale. The directions of these vectors must be such that when bypassing the contour plan, all forces are directed in the direction of the bypass. By adding vectors  $\bar{R}_{12}^n$  and  $\bar{R}_{12}^t$  on the diagram of forces, we obtain total reaction  $\bar{R}_{12}$ ; similarly, we derive total reaction  $\bar{R}_{43}$  (1.31).

For determining reaction  $\bar{R}_{32}$  of link 3 to link 2, let's derive the equilibrium equation for the forces acting on link 2:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{R}_{12} + \bar{F}_2 + \bar{F}_{32}. \quad (1.35)$$

There are two indeterminate values in this equation: magnitude and direction of the reaction  $\bar{F}_{32}$ . They can be determined by constructing the diagram of forces for link 2 according to equation (1.35). For this purpose, connecting the beginning of vector  $\bar{R}_{12}$  with the end of vector  $\bar{F}_2$  will suffice to get reaction  $\bar{R}_{32}$  (it is shown by a dashed line) on the diagram of forces (Fig. 1.27, *b*). It is clear that reaction  $\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23}$  and can be determined in the same way as  $\bar{R}_{32}$  by analysing the equilibrium of link 3.

According to Fig. 2.27, *b*, the magnitudes of reactions  $\bar{R}_{12}$  and  $\bar{R}_{43}$  are determined as follows:

$$\bar{R}_{12} = mb \cdot \mu_F; \quad \bar{R}_{43} = md \cdot \mu_F. \quad (1.36)$$

Слід виділити, що при силовому розрахунку структурної групи кривошипно-повзунного механізму, тангенційну складову реакції  $\bar{R}_{43}$  визначати не потрібно, тому що напрям реакції  $\bar{R}_{43}$  відомий (реакція  $\bar{R}_{43}$  має напрям перпендикулярний руху переміщення повзуна).

Після силового розрахунку всіх груп Ассура, які входять до складу механізму, переходимо до силового розрахунку початкової ланки, тобто початкового механізму I класу.

Ведуча ланка не є групою Ассура, і не може знаходитись у рівновазі під дією прикладених сил, тому для її зрівноваження необхідно прикладати зрівноважувальний момент або силу. Величина зрівноважувальної сили або моменту залежить від способу приведення ведучої ланки у рух.

Так, якщо вал електродвигуна безпосередньо з'єднаний з валом ланки 1, то вона зрівноважується моментом; якщо обертання виконується через зубчасту або фрикційну передачу, то на ланку 1 діє зрівноважувальна сила.

Лінія дії і точка прикладення сили  $\bar{F}_{zp}$  залежить від механізму приводу. Величина і напрямок зрівноважувального моменту  $M_{zp}$  (рис. 1.28, а) визначається із умови рівноваги ланки I;

$$\sum M_A = 0;$$

$$-F_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_{21} + M_{zp} = 0,$$

звідки

$$M_{zp} = F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}. \quad (1.37)$$

It should be highlighted that in force calculation of the structural group of the crank and slider mechanism, the tangential component of reaction  $\bar{R}_{43}^r$  does not need to be determined, since the direction of reaction  $\bar{R}_{43}$  is known (reaction  $\bar{R}_{43}$  has a direction perpendicular to direction of the slider's motion).

After force calculation of all Assur groups included in the mechanism, we proceed to force calculation of the input link, i.e. of the original Class I mechanism.

The driving link is not the Assur group and cannot be in equilibrium under the action of the applied forces, so a balancing moment or balancing force must be applied to balance it. The magnitude of the balancing force or balancing moment depends on the method of actuation of the driving link.

For example, if the electric motor shaft is directly connected to the shaft of link 1, it is balanced by a moment; if rotation is performed through a gear train or friction gear, it means that the balancing force affects link 1.

The line of action and point of application of force  $\bar{F}_{bal}$  depends on the driving mechanism. The magnitude and direction of the balancing moment  $M_{bal}$  (Fig. 1.28, *a*) is determined from the equilibrium condition of link 1;

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ -F_1 \cdot h_1 - R_{21} \cdot h_{21} + M_{bal} &= 0, \end{aligned}$$

from where

$$M_{bal} = F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}. \quad (1.37)$$

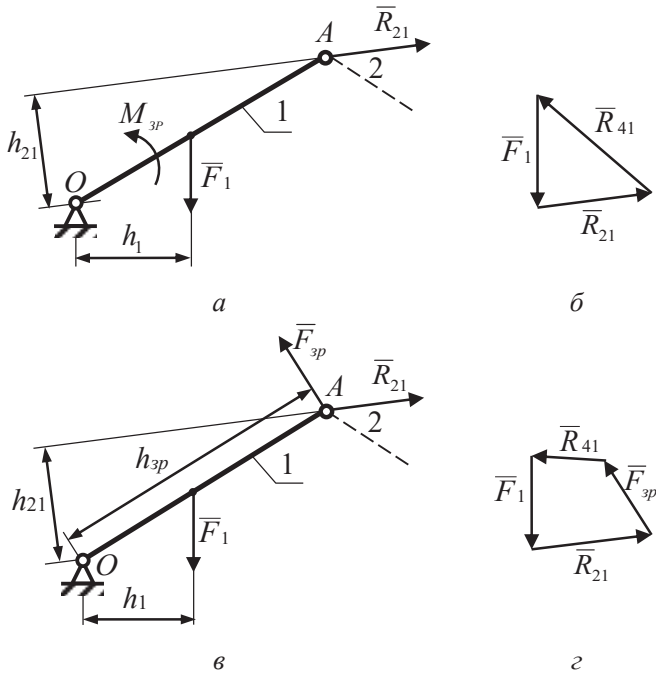


Рисунок 1.28 – Визначення зрівноважувальних момента та сили

При цьому величина реакції  $\vec{R}_{41}$  визначається за планом сил (рис. 1.28, б), який задовольняє умову

$$\vec{F}_1 + \vec{R}_{21} + \vec{R}_{41} = 0. \quad (1.38)$$

Якщо зрівноважувальний момент співпадає за напрямком з кутовою швидкістю ланки 1, то він є рушійним, а якщо проти руху – гальмом.

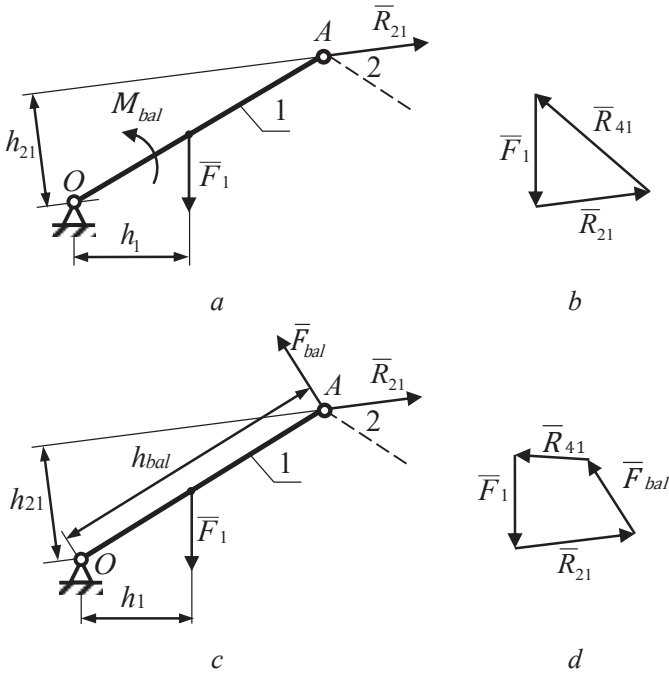


Figure 1.28 — Determination of balancing moment and force

In this example, the magnitude of reaction  $\bar{R}_{41}$  is determined by the diagram of forces (Fig. 1.28, b), which satisfies the condition

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (1.38)$$

If direction of the balancing moment coincides with direction of angular velocity of link 1, it is a driving moment, and if its direction is opposite to the motion, it is a braking moment.

Якщо ланка 1 зрівноважується силою  $\bar{F}_{zp}$  (рис. 1.28, в), лінія дії якої відома, то її величина визначається з рівняння  $\sum M_A = 0$

$$F_{zp} = \frac{F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}}{h_{zp}}. \quad (1.39)$$

Величина реакції  $\bar{R}_{41}$  у цьому випадку також визначається із рівняння рівноваги ланки 1:

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{F}_{zp} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (1.40)$$

Це рівняння розв'язується графічно (дивись рис. 1.28, з).

#### 4.5 Визначення зрівноважувальної сили за методом М. Є. Жуковського

При аналізі механізмів бувають випадки, коли нема потреби робити повний силовий розрахунок механізму, в результаті якого визначаються реакції у кінематичних парах, задача зводиться тільки до визначення зрівноважуючої сили, або зрівноважуючого моменту, який прикладають до початкової ланки.

В таких випадках для знаходження зрівноважуючої сили користуються так званим методом (правилом) "жорсткого" важеля М.Є. Жуковського. *Правило М.Є. Жуковського* ґрунтується на використанні принципу можливих переміщень, згідно з яким, якщо на будь-яку зрівноважену механічну систему діє ряд сил, то сума елементарних робіт усіх діючих на дану систему сил на будь-яких можливих для даного її положення переміщеннях, дорівнює нулю.

М.Є. Жуковський показав, що рівновазі механізму з одним ступенем вільності відповідає рівновага деякого важеля, і запропонував спосіб побудови та навантаження такого важеля, який сформульований у наступній теоремі.

*Якщо вектори всіх сил, що прикладені у різних точках ланок і зрівноважених на механізмі, перенести паралельно самим собі в однойменні точки повернутого на  $90^\circ$  проти миттєвого обертання плану швидкостей, узявши фігуру плану за жорсткий важіль, то сума моментів усіх указаних сил відносно полюса плану буде дорівнювати нулю.*

If link 1 is balanced by force  $\bar{F}_{bal}$  (Fig. 1.28, c), the line of action of which is known, then its magnitude is determined from equation  $\sum M_A = 0$

$$F_{bal} = \frac{F_1 \cdot h_1 + R_{21} \cdot h_{21}}{h_{bal}}. \quad (1.39)$$

The magnitude of reaction  $\bar{R}_{41}$  in this example is also determined from the equilibrium equation of link 1:

$$\bar{F}_1 + \bar{R}_{21} + \bar{F}_{bal} + \bar{R}_{41} = 0. \quad (1.40)$$

This equation is solved graphically (see Fig. 1.28, d).

#### 4.5 Calculation of the Balancing Force by the Method of M. Ie. Zhukovsky

When analysing mechanisms, there are situations when there is no need to perform a complete force calculation of the mechanism, as a result of which reactions in kinematic pairs are determined, and the task is reduced only to determining the balancing force or balancing moment applied to the input link.

In such cases, the so-called “rigid” lever method (rule) derived by M.Ie. Zhukovsky is used to find the balancing force. *The rule of M.Ie. Zhukovsky* is based on the principle of possible displacements, according to which, *if some forces affect any balanced mechanical system, the sum of elementary works of all forces affecting this system at any possible displacements for a given position is zero.*

M.Ie. Zhukovsky showed that the equilibrium of a mechanism with one degree of freedom corresponds to equilibrium of a certain lever, and proposed a method of constructing and loading such a lever, which is formulated in the following theorem.

*If vectors of all forces applied at different points of the links and balanced on the mechanism are transferred parallel to themselves to the same points of the velocity diagram rotated by  $90^\circ$  against instantaneous rotation, taking the figure of the diagram as a rigid lever, the sum of moments of all the indicated forces in relation to the pole of the diagram will be zero.*

У математичній формі це записується так:

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0, \quad (1.41)$$

де  $h_i$  – плече сили  $F_i$  відносно полюса повернутого плану швидкостей.

Така геометрична інтерпретація принципу можливих переміщень дуже зручна для розв'язування задач динаміки.

Розглянемо приклад визначення зрівноважуючої сили  $\bar{F}_{zp}$  за допомогою правила важеля Жуковського. Нехай нам задана кінематична схема кривошипно-повзунного механізму (рис. 1.29), на ланки якого діють сили  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  і момент сил  $M_2$ , швидкість обертання кривошипу  $OA$  дорівнює  $\omega_1$ . Зрівноважуючу силу прикладаємо до кривошипу  $OA$  у точці  $A$  і спрямовуємо перпендикулярно до лінії  $OA$ . Будемо для заданого положення механізму повернутий проти миттєвого обертання на  $90^\circ$  план швидкостей (рис. 1.29, б), у відповідних точках якого прикладаємо сили  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_{zp}$ , а момент  $M_2$  розкладаємо на пару сил  $F'_2 = \frac{M_2}{l_{AB}}$  (на рис. 2.29 сили  $F'_2$  показано штриховими лініями), які прикладаємо відповідно у точках  $a$  та  $b$  перпендикулярно до  $AB$  ( $ab \parallel AB$ ).

Враховуючи, що під дією цих сил, включаючи зрівноважуючу силу, механізм знаходиться у рівновазі, то можна записати таке рівняння моментів усіх сил, що прикладені до повернутого плану швидкостей, який умовно вважаємо жорстким важелем.

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = F_{zp}pa - F_1 \cdot h_1 + F'_2 \cdot h_2 - F_2 \cdot h_3 + F'_2 \cdot h_4 - F_3pb = 0,$$

звідки маємо:

$$F_{zp} = \frac{F_1 \cdot h_1 - F'_2 \cdot h_2 + F_2 \cdot h_3 - F'_2 \cdot h_4 + F_3pb}{pa}, \quad (1.42)$$

Mathematically, this is written as follows:

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0, \quad (1.41)$$

where  $h_i$  is the arm of force  $F_i$  in relation to the pole of the rotated velocity diagram.

This geometric interpretation of the principle of possible displacements is very convenient for solving the dynamics problems.

Let's review an example of determining the balancing force  $\bar{F}_{bal}$  using the Zhukovsky's lever rule. Suppose we have a kinematic diagram of a crank and slider mechanism (Fig. 1.29), with forces  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  affecting it and the moment of forces  $M_2$ , rotation rate of crank  $OA$  is equal to  $\omega_1$ . We apply the balancing force to crank  $OA$  at point  $A$  and direct it perpendicularly to line  $OA$ . For a specified position of the mechanism, we construct a velocity diagram rotated  $90^\circ$  against instantaneous rotation (Fig. 1.29,  $b$ ), at the corresponding points of which we apply forces  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_{bal}$ , and decompose the moment  $M_2$  into a couple of forces  $F'_2 = \frac{M_2}{l_{AB}}$  (Fig. 2.29 shows

forces  $F'_2$  as dashed lines), which we apply at points  $a$  and  $b$  perpendicularly to  $AB$  ( $ab \parallel AB$ ).

Assuming that under the action of these forces, including the balancing force, the mechanism is in equilibrium, we can write the following equation of moments of all forces applied to the rotated velocity diagram, which we consider to be a rigid lever.

$$\sum_{i=1}^n M_p(\bar{F}_i) = F_{bal}pa - F_1 \cdot h_1 + F'_2 \cdot h_2 - F_2 \cdot h_3 + F'_2 \cdot h_4 - F_3pb = 0,$$

from where:

$$F_{bal} = \frac{F_1 \cdot h_1 - F'_2 \cdot h_2 + F_2 \cdot h_3 - F'_2 \cdot h_4 + F_3pb}{pa}, \quad (1.42)$$

де  $h_i$  – плечі відповідних сил відносно полюса повернутого плану швидкостей, мм. Зауважимо, що модуль не залежить від того, в який бік повернути на  $90^\circ$  план швидкостей.

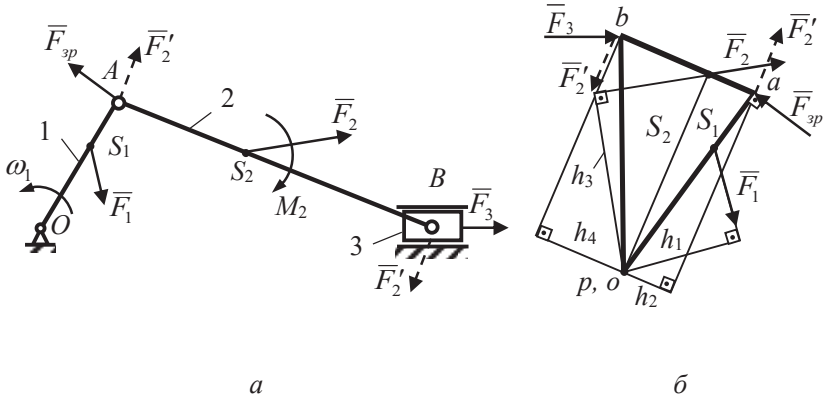


Рисунок 1.29 – Визначення зрівноважуючих сил за допомогою важеля М.С. Жуковського

where  $h_i$  is arms of the corresponding forces in relation to the pole of the rotated velocity diagram, mm. Note that the modulus does not depend on the direction in which the velocity diagram is rotated by  $90^\circ$ .

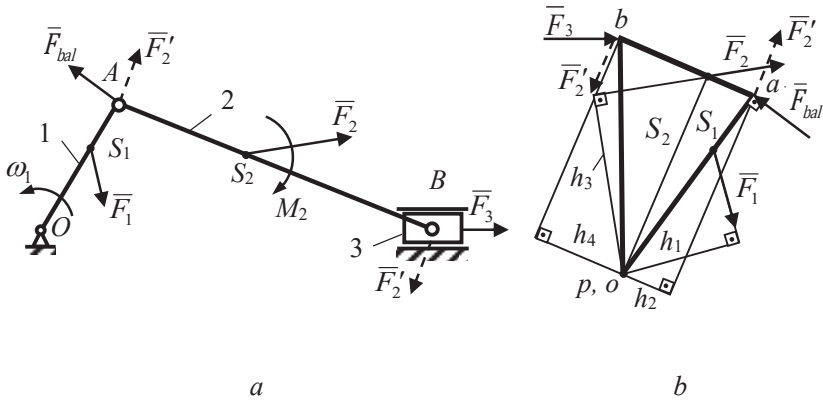


Figure 1.29 — Calculation of balancing forces using the lever of M.Ie. Zhukovsky

## ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевський І.І. Теорія механізмів і машин. – К.: Укрдержвидав техн. літ-ри, 1954. – 696 с.
2. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наукова думка, 2002. – 467 с.
3. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірності / П.Л. Свердан. – К. : Знання, 2008. – 450 с.
4. Курсове проектування з теорії механізмів і машин: підручник/ О.С.Кореняко та ін., за ред. О.С.Кореняка, – Київ: Вища школа, 1993. – 332 с.
5. Rattan S.S. Theory of Machines. – New Delhi: Tata McGraw Hill Education Private Limited, 2009. – 732 p.
6. Ткаченко Н.Д. Англо-український словник з інженерної механіки / Н.Д. Ткаченко. – К. : НУХТ, 2011. – 55 с.
7. Технологія машинобудівних підприємств: підручник/ В.Л.Дикань, Ю.Є.Калабухін, Н.Є.Каличева та ін., за заг. ред. В.Л.Диканя, – Харків: УкрДУЗТ, 2020. – 386 с.

**REFERENCES**

1. I.I. Artobolevskiy. Mechanisms and Machines Theory. – K.: Ukrderzhvydav tekhn. lit-ry, 1954. – 696 p.
2. Ia.T. Kinytskyi. Mechanisms and Machines Theory. – K.: Naukova dumka, 2002. – 467 p.
3. P.L. Sverdan. Advanced Mathematics. Mathematical Analysis and Probability Theory / P.L. Sverdan. – K.: Znannia, 2008. – 450 p.
4. Term Design Work in Mechanisms and Machines Theory: textbook / O.S. Koreniako et al., eds O.S. Koreniaka. – Kyiv: Vyscha shkola, 1993 – 332 p.
5. S.S. Rattan Theory of Machines. – New Delhi: Tata McGraw Hill Education Private Limited, 2009. – 732 p.
6. N.D. Tkachenko English-Ukrainian Dictionary of Engineering Mechanics / N.D. Tkachenko. – K.: NUKhT, 2011. – 55 p.
7. Technology of Machine-Building Enterprises: Textbook / V.L. Dykan, Iu.Ie. Kalabukhin, N.Ie. Kalycheva et al., eds V.L. Dykan. – Kharkiv: UkrDUZT, 2020. – 386 p.

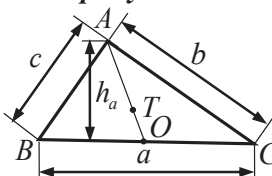
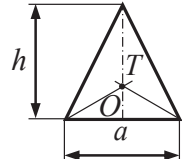
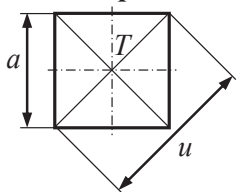
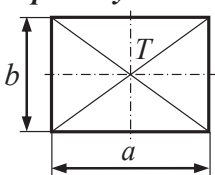
## **ДОДАТКИ**

## **APPENDICES**

## ДОДАТОК А

## Площі і центри ваги плоских фігур

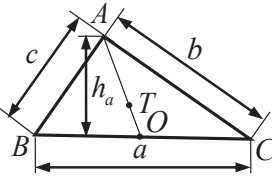
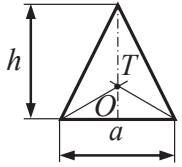
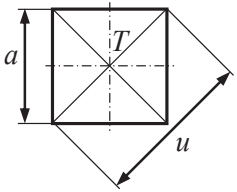
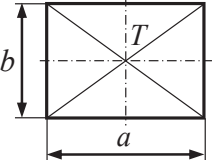
Таблиця А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p><b>Трикутник</b></p> 	$F = \frac{1}{2} ah_a$	$BO = OC;$ $TO = \frac{1}{3} AO.$ <p>Центр ваги – в точці перетину медіан</p>
<p><b>Рівнобічний трикутник</b></p> 	$F = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3};$ $h = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$	$TO = \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} a\sqrt{3}$
<p><b>Квадрат</b></p> 	$F = a^2 = \frac{1}{2} u^2;$ $a = 0.7071u = \sqrt{F};$ $u = 1.414a = 1.414\sqrt{F}$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>
<p><b>Прямокутник</b></p> 	$F = ab = a\sqrt{u^2 - a^2} =$ $= b\sqrt{u^2 - b^2};$ $u = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>

## APPENDIX A

## Areas and Centres of Gravity of Plane Figures

Table A.1

Figure	Area	Centre of gravity
<p><b>Triangle</b></p> 	$F = \frac{1}{2}ah_a$	$BO = OC ;$ $TO = \frac{1}{3}AO .$ <p>The centre of gravity is at the point of intersection of medians</p>
<p><b>Equilateral triangle</b></p> 	$F = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} ;$ $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$	$TO = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$
<p><b>Square</b></p> 	$F = a^2 = \frac{1}{2}u^2 ;$ $a = 0.7071u = \sqrt{F} ;$ $u = 1.414a = 1.414\sqrt{F}$	<p>The centre of gravity is at the intersection of axes and diagonals</p>
<p><b>Rectangle</b></p> 	$F = ab = a\sqrt{u^2 - a^2} =$ $= b\sqrt{u^2 - b^2} ;$ $u = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p>The centre of gravity is at the intersection of axes and diagonals</p>

## Продовження таблиці А.1

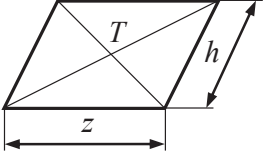
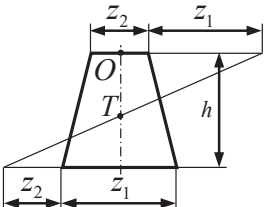
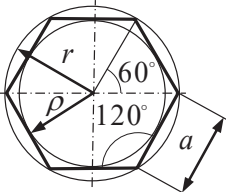
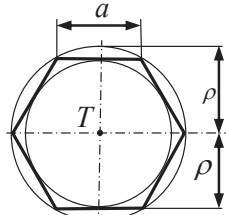
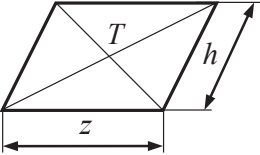
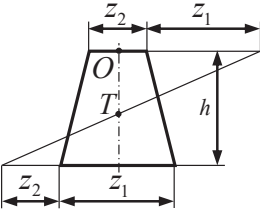
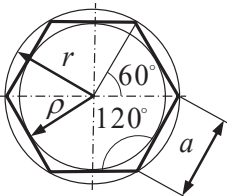
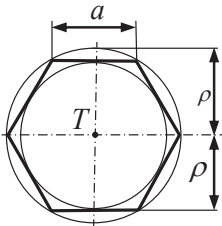
Фігура	Площа	Центр ваги
<p><b>Паралелограм</b></p> 	$F = zh$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>
<p><b>Трапеція</b></p> 	$F = \frac{z_1 + z_2}{2} h$	$TO = \frac{1}{3} h \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$
<p><b>Правильний шестикутник</b></p> 	$F = 2.5981a^2 = 3.4641\rho^2;$ $r = a = 1.1547\rho;$ $\rho = 0.8660a$	<p>Центр ваги – у центрі шестикутника</p>
<p><b>Правильний n-кутник</b></p> 	$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} =$ $= n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$ $= n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$	<p>Центр ваги – у центрі багатокутника, тобто у точці перетину осей і діагоналей</p>

Table A.1 (continued)

Figure	Area	Centre of gravity
<p><b>Parallelogram</b></p> 	$F = zh$	<p>The centre of gravity is at the intersection of axes and diagonals</p>
<p><b>Trapezoid</b></p> 	$F = \frac{z_1 + z_2}{2} h$	$TO = \frac{1}{3} h \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$
<p><b>Regular hexagon</b></p> 	$F = 2.5981a^2 = 3.4641\rho^2;$ $r = a = 1.1547\rho;$ $\rho = 0.8660a$	<p>The centre of gravity is at the centre of hexagon</p>
<p><b>Regular n-gon</b></p> 	$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} =$ $= n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$ $= n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$	<p>The centre of gravity is at the centre of polygon, i.e. at the intersection of axes and diagonals</p>

## Продовження таблиці А.1

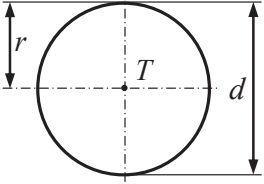
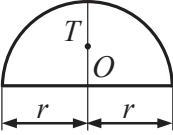
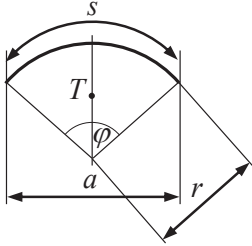
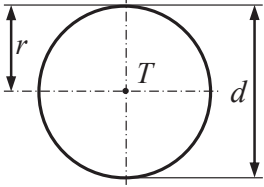
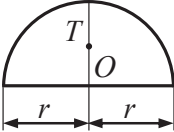
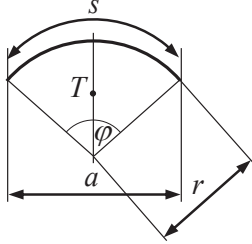
Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;"><b>Коло</b></p> 	$F = \pi r^2 = 3.1416r^2 =$ $= \frac{1}{4} \pi d^2 = 0.7854d^2;$ <p style="text-align: center;">периметр:</p> $2\pi r^2 = 6.2832r =$ $= \pi d = 3.1416d.$	<p style="text-align: center;">Центр ваги – у центрі кола, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>
<p style="text-align: center;"><b>Напівколо</b></p> 	$F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{8} \pi d^2 =$ $= 0.393d^2$	$TO = \frac{4r}{3\pi} = 0.4244r$
<p style="text-align: center;"><b>Круговий сектор</b></p> <p><math>\varphi</math> – центральний кут; <math>a</math> – довжина хорди</p> 	$F = \frac{1}{2} sr = \frac{1}{360} \varphi^\circ \pi r^2$ <p style="text-align: center;">;</p> $s = r \varphi^\circ \frac{\pi}{180} =$ $= 0.01745r \varphi^\circ;$ $\varphi^\circ = \frac{57.296s}{r};$ $r = \frac{2F}{s} = \frac{57.296s}{\varphi^\circ}$	$TO = \frac{2}{3} r \sin \frac{\varphi^\circ}{2} =$ $= \frac{2}{3} \frac{ra}{s} = \frac{r^2 a}{3F} =$ $= 38.197r \sin \frac{\varphi^\circ}{2}.$ <p>При <math>\varphi^\circ = 90^\circ</math> : <math>TO = 0.600r</math> ;</p> <p>при <math>\varphi^\circ = 60^\circ</math> : <math>TO = 0.6366r</math> .</p>

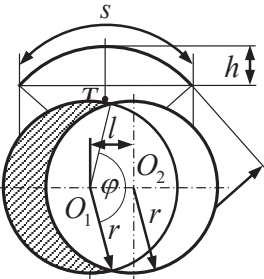
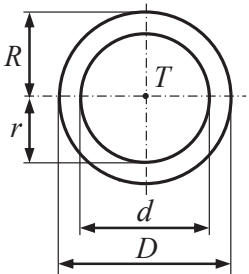
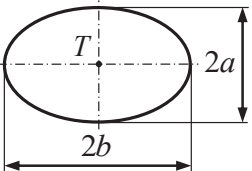
Table A.1 (continued)

Figure	Area	Centre of gravity
<p style="text-align: center;"><b>Circle</b></p> 	$F = \pi r^2 = 3.1416r^2 =$ $= \frac{1}{4}\pi d^2 = 0.7854d^2;$ <p style="text-align: center;">perimeter:</p> $2\pi r^2 = 6.2832r =$ $= \pi d = 3.1416d.$	<p>The centre of gravity is at the centre of the circle, i.e. at the intersection of axes (diameters)</p>
<p style="text-align: center;"><b>Semicircle</b></p> 	$F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{8}\pi d^2 =$ $= 0.393d^2$	$TO = \frac{4r}{3\pi} = 0.4244r$
<p style="text-align: center;"><b>Circular sector</b></p> <p><math>\varphi</math> – central angle;  <math>a</math> – Chord length</p> 	$F = \frac{1}{2}sr = \frac{1}{360}\varphi^\circ\pi r^2$ <p style="text-align: center;">;</p> $s = r\varphi^\circ \frac{\pi}{180} =$ $= 0.01745r\varphi^\circ;$ $\varphi^\circ = \frac{57.296s}{r};$ $r = \frac{2F}{s} = \frac{57.296s}{\varphi^\circ}$	$TO = \frac{2}{3}r \sin \frac{\varphi^\circ}{2} =$ $= \frac{2}{3} \frac{ra}{s} = \frac{r^2 a}{3F} =$ $= 38.197r \sin \frac{\varphi^\circ}{2}.$ <p>At <math>\varphi^\circ = 90^\circ</math> :  <math>TO = 0.600r</math> ;</p> <p>at <math>\varphi^\circ = 60^\circ</math> :  <math>TO = 0.6366r</math> .</p>

## Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа										Центр ваги									
<p data-bbox="171 347 417 379"><b>Круговий сегмент</b></p> <p data-bbox="171 403 387 435"><math>\varphi</math> – центральний кут;</p> <p data-bbox="238 467 288 499"><math>s</math></p> 	$F = \frac{r(s-a)+ah}{2};$ $a = 2\sqrt{h(2r-h)};$ $h = r - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}$										$TO = \frac{a^3}{12F} =$ $= \frac{2}{3} r^3 \frac{\sin^3 \varphi}{F}$									
	$F = r^2 \left( \pi + \sin \varphi - \frac{\varphi \pi}{180} \right) = r^2 \eta$																			
	$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9										
$\eta$	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02											
<p data-bbox="199 799 389 831"><b>Кругове кільце</b></p> 	$F = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \frac{1}{4} \pi(D^2 - d^2) =$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$										<p data-bbox="776 847 977 1086">Центр ваги – у центрі кіл, що обмежують кругове кільце, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>									
<p data-bbox="255 1150 333 1182"><b>Еліпс</b></p> 	$F = \pi \cdot a \cdot b = 3.1416a \cdot b =$ $= 3.1416 \times$ $\times \sqrt{2(a^2 + b^2)} \frac{(a-b)^2}{2.2}$										<p data-bbox="776 1190 977 1358">Центр ваги – у середині еліпса, тобто в точці перетину його осей</p>									

Table A.1 (continued)

Figure	Area	Centre of gravity										
<p><b>Circular segment</b>  <math>\varphi</math> – central angle;</p> 	$F = \frac{r(s-a)+ah}{2};$ $a = 2\sqrt{h(2r-h)};$ $h = r - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}$	$TO = \frac{a^3}{12F} =$ $= \frac{2}{3} r^3 \frac{\sin^3 \varphi}{F}$										
	$F = r^2 \left( \pi + \sin \varphi - \frac{\varphi \pi}{180} \right) = r^2 \eta$											
	<table border="1"> <tr> <td><math>\frac{l}{d}</math></td> <td>0.1</td> <td>0.2</td> <td>0.3</td> <td>0.4</td> <td>0.5</td> <td>0.6</td> <td>0.7</td> <td>0.8</td> <td>0.9</td> </tr> </table>	$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9			
	<table border="1"> <tr> <td><math>\eta</math></td> <td>0.4</td> <td>0.79</td> <td>1.18</td> <td>1.56</td> <td>1.91</td> <td>2.25</td> <td>2.55</td> <td>2.81</td> <td>3.02</td> </tr> </table>	$\eta$	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02	
$\eta$	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02			
<p><b>Annulus</b></p> 	$F = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \frac{1}{4} \pi(D^2 - d^2) =$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$	<p>The centre of gravity is at the centre of circles bounding the circular ring, i.e. at the point of intersection of axes (diameters)</p>										
<p><b>Ellipse</b></p> 	$F = \pi \cdot a \cdot b = 3.1416a \cdot b =$ $= 3.1416 \times$ $\times \sqrt{2(a^2 + b^2)} \frac{(a-b)^2}{2.2}$	<p>The centre of gravity is in the middle of the ellipse, i.e. at the point of intersection of its axes</p>										

## Продовження таблиці А.1

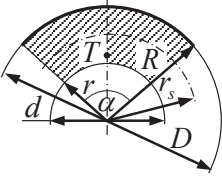
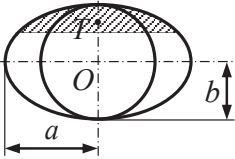
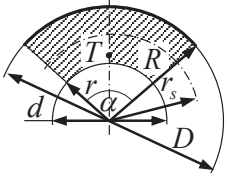
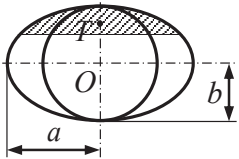
Фігура	Площа	Центр ваги
<p data-bbox="182 336 403 403"><b>Сектор кругового кільця</b></p> 	$F = \frac{\alpha \cdot \pi}{360} (R^2 - r^2) =$ $= 0.00873\alpha (R^2 - r^2).$ <p data-bbox="484 547 655 579">При <math>\alpha = 180^\circ</math></p> $F = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2} =$ $= 1.5708 (R^2 - r^2).$	$OT = 38.197 \times$ $\frac{(R^3 - r^3) \sin \frac{\alpha}{2}}{(R^2 - r^2) \frac{\alpha}{2}}.$ <p data-bbox="762 563 932 595">При <math>\alpha = 180^\circ</math></p> $OT = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} =$ $= 0.424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$
<p data-bbox="208 852 378 919"><b>Еліптичний сегмент</b></p> 	<p data-bbox="434 852 707 1070">Площа еліптичного сегмента визначається добутком відношення <math>a/r</math> на площу відповідного кругового сегмента</p> $F_{ел} = \frac{a}{r} F_{кр}$	<p data-bbox="714 919 983 1086">Центр ваги еліптичного сегмента співпадає з центром ваги кругового сегмента при <math>d = 2b</math></p>
<p data-bbox="462 1201 960 1262">Аналогічне правило справедливо і для еліпсоїда обертання</p>		

Table A.1 (continued)

Figure	Area	Centre of gravity
<p data-bbox="165 336 356 368"><b>Annulus sector</b></p> 	$F = \frac{\alpha \cdot \pi}{360} (R^2 - r^2) = 0.00873\alpha (R^2 - r^2).$ <p data-bbox="462 547 613 579">At <math>\alpha = 180^\circ</math></p> $F = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2} = 1.5708 (R^2 - r^2).$	$OT = 38.197 \times \frac{(R^3 - r^3) \sin \frac{\alpha}{2}}{(R^2 - r^2) \frac{\alpha}{2}}.$ <p data-bbox="742 563 893 595">At <math>\alpha = 180^\circ</math></p> $OT = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} = 0.424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$
<p data-bbox="202 855 320 927"><b>Elliptical segment</b></p> 	<p data-bbox="406 855 669 1070">Area of an elliptic segment is determined by the product of the ratio <math>a/r</math> and the area of the corresponding circular segment</p> $F_{elp} = \frac{a}{r} F_{cir}$ <p data-bbox="440 1193 921 1257">A similar rule is true for the ellipsoid of revolution</p>	<p data-bbox="686 898 955 1102">The centre of gravity of the elliptic segment coincides with the centre of gravity of the circular segment at <math>d = 2b</math></p>

## Продовження таблиці А.1

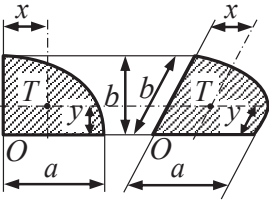
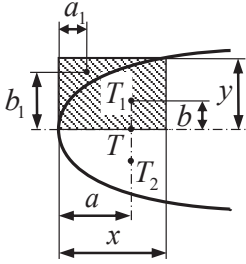
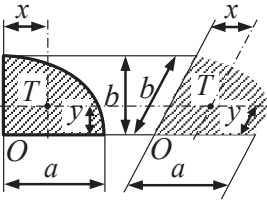
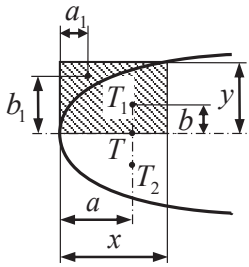
Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;"><b>Квадрант</b> (четвертина) еліпса</p> 	<p><math>F</math> – площа квадранта:</p> $F = \frac{1}{4} \pi ab.$ <p><math>F'</math> – площа доповнення до квадранта:</p> $F' = ab \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$	<p>координати центра ваги квадранта:</p> $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{ba}{\pi}; \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi};$ <p>координати центра ваги доповнення до квадранта:</p> $x_1 = \frac{a}{6} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right);$ $y_1 = \frac{b}{6} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$
<p style="text-align: center;"><b>Параболічний напівсегмент</b></p> 	$F = \frac{2}{3} xy$	<p>відстань центра ваги параболічного напівсегмента від вершини:</p> $a = \frac{3}{5} x; \quad b = \frac{3}{8} y;$ <p>центр ваги доповнення до параболічного напівсегмента:</p> $a_1 = 0.3x; \quad b_1 = 0.75y.$

Table A.1 (continued)

Figure	Area	Centre of gravity
<p data-bbox="128 316 388 384"><b>Quadrant</b> (quarter) of an ellipse</p> 	<p data-bbox="404 368 591 437"><math>F</math> – area of a quadrant:</p> $F = \frac{1}{4} \pi ab.$ <p data-bbox="404 568 669 636"><math>F'</math> – quadrant complement area:</p> $F' = ab \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right).$	<p data-bbox="688 288 949 384">coordinates of the quadrant's centre of gravity:</p> $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{ba}{\pi}; \quad y = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi};$ <p data-bbox="688 496 949 636">coordinates of the centre of gravity of the completion of the quadrant:</p> $x_1 = \frac{a}{6} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right);$ $y_1 = \frac{b}{6} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$
<p data-bbox="165 943 356 1011"><b>Parabolic half-segment</b></p> 	$F = \frac{2}{3} xy$	<p data-bbox="688 855 930 1023">distance from the vertex to the centre of gravity of the parabolic half-segment:</p> $a = \frac{3}{5} x; \quad b = \frac{3}{8} y;$ <p data-bbox="688 1134 938 1270">Centre of gravity of the completion of the parabolic half-segment:</p> $a_1 = 0.3x; \quad b_1 = 0.75y.$

## ДОДАТОК Б

## Міжнародна метрична система одиниць

## Міри довжини

Назва	Скорочене позначення	Величина	Відношення до см	Відношення до основної одиниці (м)
Пікометр	<i>пм</i>	0.001 <i>нм</i>	$10^{-10}$	$10^{-12}$
Нанометр	<i>нм</i>	0.001 <i>мк</i>	$10^{-7}$	$10^{-9}$
Мікрон (мікрометр)	<i>мк</i>	0.000001 <i>м</i> = 0.001 <i>мм</i>	$10^{-4}$	$10^{-6}$
Міліметр	<i>мм</i>	1000 <i>мк</i>	$10^{-1}$	$10^{-3}$
Сантиметр	<i>см</i>	0.01 <i>м</i> = 10 <i>мм</i>	1	$10^{-2}$
Дециметр	<i>дм</i>	0.1 <i>м</i> = 10 <i>см</i> = 100 <i>мм</i>	10	$10^{-1}$
Метр	<i>м</i>	100 <i>см</i> = 1 000 <i>мм</i>	$10^2$	1
Кілометр	<i>км</i>	1 000 <i>м</i> = 1 000 000 <i>мм</i>	$10^5$	$10^3$
Мегаметр	<i>Мм</i>	1 000 000 <i>м</i>	$10^8$	$10^6$

## APPENDIX B

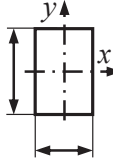
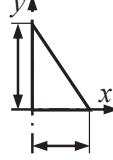
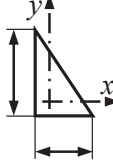
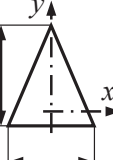
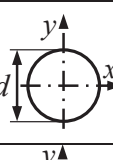
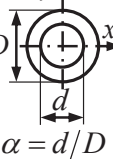
### International Metric System of Units

#### Measures of Length

Name	Abbreviation	Value	Ratio to cm	Ratio to the basic unit of measurement ( <i>m</i> )
Picometer	<i>pm</i>	0.001 <i>nm</i>	$10^{-10}$	$10^{-12}$
Nanometre	<i>nm</i>	0.001 $\mu m$	$10^{-7}$	$10^{-9}$
Micron (micrometre)	$\mu m$	0.000001 <i>m</i> = 0.001 <i>mm</i>	$10^{-4}$	$10^{-6}$
Millimetre	<i>mm</i>	1000 $\mu m$	$10^{-1}$	$10^{-3}$
Centimetre	<i>cm</i>	0.01 <i>m</i> = 10 <i>mm</i>	1	$10^{-2}$
Decimetre	<i>dm</i>	0.1 <i>m</i> = 10 <i>cm</i> = 100 <i>mm</i>	10	$10^{-1}$
Metre	<i>m</i>	100 <i>cm</i> = 1,000 <i>mm</i>	$10^2$	1
Kilometre	<i>km</i>	1,000 <i>m</i> = 1,000,000 <i>mm</i>	$10^5$	$10^3$
Megametre	<i>Mm</i>	1,000,000 <i>m</i>	$10^8$	$10^6$

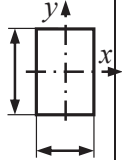
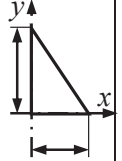
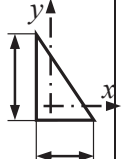
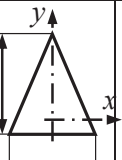
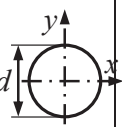
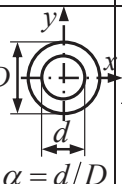
## ДОДАТОК В

## Геометричні характеристики плоских перерізів

Форма перерізу	Позначення геометричних характеристик							
	$F$	$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$	$I_p$	$W_x$	$W_y$	$W_p$
	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	—	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	—	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	—
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$		
	$\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	0	$\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$		

## APPENDIX C

## Geometrical Characteristics of Flat Sections

Section shape	Designation of geometrical characteristics							
	$F$	$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$	$I_p$	$W_x$	$W_y$	$W_p$
	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	—	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	—	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	—
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
	$\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	0	$\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$		

*Навчальне видання*

ФУРСІНА Анна Дмитрівна  
ШЕВЧЕНКО Володимир Григорович  
КРУЖНОВА Світлана Юрївна

## **ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА**

### **Частина 2**

### **Теорія механізмів і машин**

Комп'ютерний набір *Фурсіна А.Д.*  
Верстання *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 05.10.2023. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,15.  
Тираж 100 прим. Зам. № 764.

Національний університет «Запорізька політехніка»  
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64  
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019.