

УДК 539

Попович О.Г.¹, Шевченко В.Г.²

¹ канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

ОБМЕЖЕННЯ ПРИ ЗАСТОСУВАННІ РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ „БАЛКА НА ВІНКЛЕРОВСЬКІЙ ОСНОВІ”

Розрахункова модель „балка на пружній основі” застосовується при вирішенні ряду задач будівельної механіки. Інтенсивність сил реакції q_R вінклерівської основи в будь-якому перерізі балки пропорційна величині прогину балки w в цьому перерізі: $q_R = -\alpha \cdot w$, де α - коефіцієнт пропорційності.

Якщо задане навантаження на балку являє собою сукупність зосереджених сил і пар сил, а зовнішні розподілені навантаження відсутні, то диференціальне рівняння зігнутої вісі такої балки має вигляд [1]:

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + \frac{\alpha}{E \cdot I_x} = 0, \quad (1)$$

де E – модуль Юнга для матеріалу, з якого виготовлено балку; I_x – момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі, яка проходить через його центр тяжіння перпендикулярно до площини, в якій лежить зігнута вісь балки.

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (1) можна записати у вигляді [2]:

$$w(z) = C_1 \cdot \sin(k \cdot z) \cdot \operatorname{sh}(k \cdot z) + C_2 \cdot \sin(k \cdot z) \cdot \operatorname{ch}(k \cdot z) + \\ + C_3 \cdot \cos(k \cdot z) \cdot \operatorname{sh}(k \cdot z) + C_4 \cdot \cos(k \cdot z) \cdot \operatorname{ch}(k \cdot z), \quad (2)$$

де через k позначено величину $k = \sqrt[4]{\alpha / (4 \cdot E \cdot I_x)}$; C_1, C_2, C_3, C_4 - постійні інтегрування, що визначаються із граничних умов.

Наприклад, для балки загальною довжиною $(2 \cdot l)$, яку навантажено посередині її довжини спрямовано вниз зосередженою силою F_0 , при відліку координати z від середини балки, для постійних інтегрування можна отримати формули [2]:

$$C_1 = \frac{F_0}{8 \cdot E \cdot I_x \cdot k^3} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(k \cdot l) + \sin^2(k \cdot l)}{\operatorname{sh}(k \cdot l) \cdot \operatorname{ch}(k \cdot l) + \sin(k \cdot l) \cdot \cos(k \cdot l)}, \quad C_2 = \frac{-F_0}{8 \cdot E \cdot I_x \cdot k^3}, \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{F_0}{8 \cdot E \cdot I_x \cdot k^3}, \quad C_4 = \frac{-F_0}{8 \cdot E \cdot I_x \cdot k^3} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2(k \cdot l) + \cos^2(k \cdot l)}{\operatorname{sh}(k \cdot l) \cdot \operatorname{ch}(k \cdot l) + \sin(k \cdot l) \cdot \cos(k \cdot l)}. \quad (4)$$

При цьому передбачається, що прогин балки може мати як від'ємні значення (тобто вбік матеріалу основи), так і додатні, а пружна основа чинить опір прогину балки як вниз, так і вгору. Але очевидно, що у випадках, коли балка не з'єднана з основою, на тих ділянках, де балка прогинається вгору, ця основа не буде створювати сили реакції, спрямовані вниз (тобто вбік матеріалу основи). На таких ділянках балка буде відокремлюватися від основи, і на балку не діятимуть сили реакції основи. Відповідно зовнішнє навантаження на балку буде зрівноважено силами реакції основи, розподіленими по тих ділянках, де балка прогинається вниз.

Тому, окрім визначення постійних інтегрування у виразі (2), необхідно з'ясувати, при якій граничній довжині балки прогин балки по всій її довжині буде від'ємним. У розглянутій розрахунковій схемі для визначення шуканого

граничного значення довжини L_0 нами складено рівняння $w|_{z=L_0} = 0$; при цьому було взято до уваги, що символ L_0 слід записати не тільки замість z у виразі (2) для прогину, а й замість l у виразах (3) і (4) для постійних інтегрування. Отримане громіздке рівняння після математичних перетворень було приведено нами до вигляду $\cos(k \cdot L_0) = 0$. При цьому шукане значення L_0 є найменшим додатнім коренем останнього рівняння, тобто $L_0 = \pi/(2 \cdot k)$.

Таким чином, якщо довжина розглянутої балки на пружній основі не перевищує значення $2 \cdot L_0 = \pi/k$, то залежність прогину w цієї балки від координати z відображається формулою (2) з урахуванням (3) і (4). Якщо ж $l > L_0$, то формули (3) і (4) будуть правильними за умови, що пружна основа протидіятиме прогину балки не тільки вниз, а й вгору. Розроблений підхід можна застосовувати і при інших схемах навантаження балки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М.: Физматлит, 1982. – 856 с.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1974. – 560 с.