

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГІЇ ФОРМОЗМІНИ В ПЛИТІ, ЯКА ДЕФОРМУЄТЬСЯ ШТАМПОМ

*Розглядається стаціонарна задача про плоску деформацію прямокутного паралелепіпеда штампом. Нижня межа тіла вільна від навантажень. Отримано аналітичний вигляд для напружень і переміщень точок паралелепіпеда. Досліджено вплив геометричних і механічних характеристик на поведінку величини енергії, яка застосовується у четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності.*

**Ключові слова:** плита, штамп, плоска деформація, четверта гіпотеза міцності, енергія, зона пластичності.

### Вступ

Теорія пружності є одним із основних інструментів для теоретичних розрахунків при аналізі міцності інженерних конструкцій та житлових споруд, при проектуванні та будівництві авто та залізничних шляхів [1].

Руйнування структури відбувається в тих містах споруди, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення. Це твердження складає суть четвертої гіпотези міцності [2].

Представлене дослідження ведеться в напрямку пошуку найбільш небезпечних (в сенсі міцності) областей плити, що деформується штампом. Застосовується розклад функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди, який базується на роботі [3]. Для багат шарових плит метод тригонометричних розкладів застосовувався в статті [4]. Дослідження міцності плит при дещо інших межових умовах ніж тих, що розглядається у цій статті, наведені в [5, 6].

### Постановка задачі

Розглянемо прямокутний паралелепіпед нескінченної довжини, вісь якого паралельна осі  $Oz$  і який знаходиться в умовах плоскої деформації. Якщо візьмемо один із перетинів  $z = \text{const}$ , то матимемо задачу про вигін смуги. Перейдемо до безрозмірних величин таким чином, щоб смуга займала область  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq h$ . Початок координат знаходиться на верхній межі області, а вісь  $Oy$  направлено вниз.

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею смуги на всьому відрітку  $x \in [0, \pi]$ . Відповідні граничні умови мають вигляд:

$$u(x, 0) = 0, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Тут  $y = f(x)$  – рівняння лінії, яку описує нижня межа штампу в кінцевому положенні.

Нижня межа вільна від навантажень, тобто:

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_y(x, h) = 0. \quad (4)$$

За аналогією з [3] будемо вважати, що на бокових межах виконуються наступні умови:

$$v(0, y) = v(h, y) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(h, y) = 0. \quad (6)$$

Таким чином, нам потрібно знайти розв'язок задачі теорії пружності в області  $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, h]$  з межовими умовами (1)–(6).

### 2 Метод розв'язання

Функцію  $v(x, y)$  будемо шукати у вигляді тригонометричного ряду за синусами, оскільки в цьому випадку вона задовольняє умовам (5)–(6):

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(kx). \quad (7)$$

У цьому випадку розвинення функції  $u(x, y)$ ,  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$  мають вигляд:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(kx), \quad (8)$$

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(kx), \quad (9)$$

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(y) \sin(kx), \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(y) \cos(kx). \quad (11)$$

Встановимо зв'язок між функціями  $V_k, U_k, S_k, M_k$  та  $T_k$ . Для цього після підстановки розвинень (7) та (8) в рівняння матимемо системи:

$$\begin{cases} \mu U_k'' - (\lambda + 2\mu)k^2 U_k + (\lambda + \mu)k V_k' = 0, \\ (\lambda + 2\mu)V_k'' - \mu V_k k^2 - (\lambda + \mu)k U_k' = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Загальний розв'язок (12) має вигляд

$$V_k = (A_k + yB_k)ch(ky) + (C_k + yD_k)sh(ky),$$

$$U_k = \frac{1}{k}((kA_k + (3 - 4\nu)D_k + B_k y)sh(ky) + (kC_k + (3 - 4\nu)B_k + D_k y)ch(ky)).$$

Тут  $A_k, B_k, C_k, D_k$  – довільні константи та враховано співвідношення  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 2\nu$ ,  $\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 2(1 - \nu)$ , де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Після визначення  $V_k$  та  $U_k$  ми можемо знайти функції  $S_k, M_k$  та  $T_k$ , використавши обернений закон Гука:

$$S_k = \lambda V_k' - (\lambda + 2\mu)k U_k; \quad (13)$$

$$M_k = -\lambda U_k k + (\lambda + 2\mu)V_k'; \quad (14)$$

$$T_k = \mu(U_k' + kV_k). \quad (15)$$

Маємо:

$$T_k(y) = 2\mu(kA_k + kyB_k + 2(1 - \nu)D_k)ch(ky) + (kC_k + kyD_k + 2(1 - \nu)B_k)sh(ky);$$

$$S_k(y) = -2\mu((3 - 2\nu)B_k + kC_k + kyD_k)ch(ky) + ((3 - 2\nu)D_k + kA_k + kyB_k)sh(ky);$$

$$R_k(y) = 2(kA_k + kyB_k + (1 - 2\nu)D_k)sh(ky) + (kC_k + kyD_k + (1 - 2\nu)B_k)ch(ky). \quad (16)$$

### 3 Визначення довільних констант

З урахуванням формул (15) та розвинень (7–12), із межових умов (1–4) отримуємо систему для визначення довільних констант:

$$\begin{cases} B_k(4\nu - 3) = kC_k, \\ A_k = f_k, \\ (k(A_k + h \cdot B_k) + 2(1 - \nu)D_k)ch(kh) + \\ + (k(C_k + h \cdot D_k) + 2(1 - \nu)D_k)sh(kh) = 0, \\ (B_k(1 - 2\nu) + k(C_k + hD_k))ch(kh) + \\ + (D_k(1 - 2\nu) + k(A_k + hB_k))sh(kh) = 0. \end{cases}$$

Її розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} A_k = f_k, \\ B_k = -kf_k \frac{sh(kh)ch(kh) - kh}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ C_k = -f_k \frac{(4\nu - 3)(sh(kh)ch(kh) - kh)}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ D_k = kf_k \frac{ch^2(kh) + 1 - 2\nu}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}. \end{cases} \quad (17)$$

Отже, підставивши знайдені коефіцієнти в ряди для нормальних напружень  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  та дотичних напружень  $\tau_{xy}(x, y)$  матимемо шукані розвинення вказаних функцій у тригонометричні ряди. Застосуємо отримані результати для знаходження ділянок, які є критичними в сенсі міцності розглянутої конструкції.

Енергетична теорія міцності виходить із припущення, що кількість потенціальної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно з четвертою гіпотезою міцності:

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (18)$$

Для плоскої деформації цей вираз набуває вигляду:

$$F(x, y) = \sigma^{\text{II}} = \sqrt{\left[ (1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (19)$$

Оскільки ми маємо очевидні вирази для всіх компонент тензору напружень, то можемо дослідити функцію (19) на екстремум.

Розглянемо числову задачу. Будемо вважати, що  $f(x) = \alpha \sin x$ ,  $h = 1$ .

На рис. 1 для прикладу наведено графік функції (19) для випадку  $\nu = 0,25$ ,  $h = 1$ .

Як бачимо, максимум цієї функції знаходиться на нижній та поблизу верхньої межі плити. Тому в подальшому наведемо графіки цієї функції при  $y = 0$  та  $x = h$  з різними значеннями коефіцієнта Пуассона  $\nu$  та товщини  $h$  (1 – верхня межа, 2 – нижня межа).

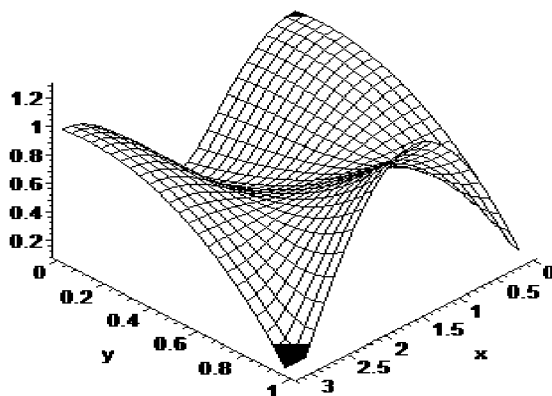


Рис. 1.

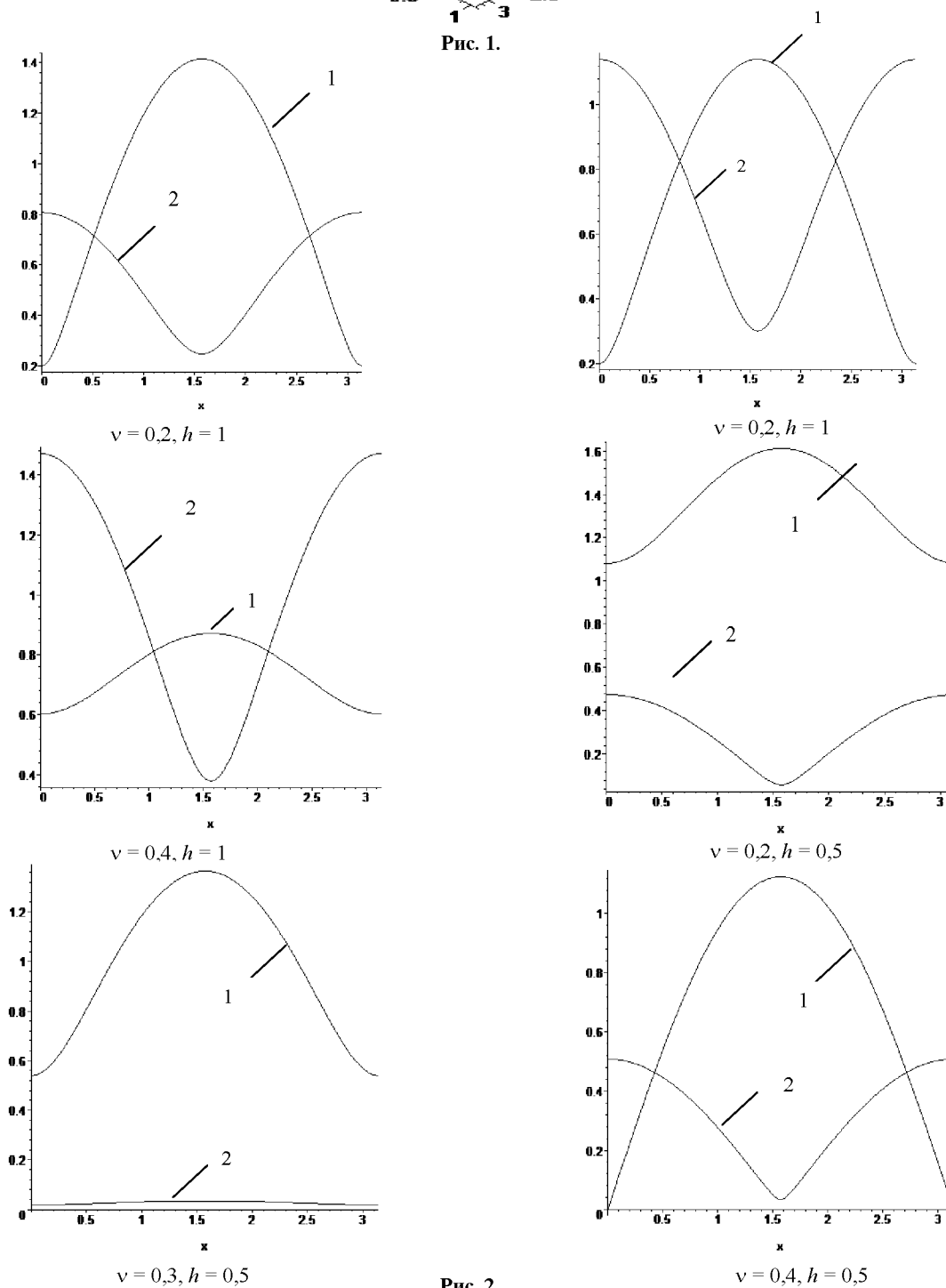


Рис. 2.

З аналізу наведених графіків випливає, що збільшення коефіцієнта Пуассона призводить до збільшення енергії в крайових точках плити на верхній межі, при цьому потенційна енергія на нижній межі мало змінюється. Зменшення товщини досліджуваної плити при незмінному коефіцієнті Пуассона призводить до зменшення енергії в крайових точках верхньої межі. Встановлено наступний механічний ефект: при зміні товщини плити розподіл енергій формозміни на нижній межі може істотно змінювати свій вигляд: при великих значеннях товщини максимум енергії спостерігається в центрі межі, а при малих значеннях – поблизу крайових точок. У подальшому планується більш детальне дослідження вказаного ефекту.

#### Висновки

У статті розглядається плита, яка знаходиться в умовах плоскої деформації під дією штамп. Отримано аналітичні вирази для функції, яка визначає міцність конструкції за четвертим критерієм міцності. Виділені найбільш небезпечні з точки зору міцності ділянки плити та досліджено вплив товщини плити та коефіцієнта Пуассона на потенційну енергію формоутворення на цих ділянках.

#### Список літератури

1. Гузь А. Н. О построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел / А. Н. Гузь // Вестник ЧГПУ, серия: Механика предельного состояния. – 2010. – № 8. – С. 79–86.
2. Малыгин Г. А. Анализ параметров субмикронной дислокационной структуры в металлах при больших пластических деформациях / Г. А. Малыгин // Физика твердого тела. – 2004. – Т. 46. – № 11. – 274 с.
3. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : ГИФМЛ, 1960. – 490 с.
4. Величко О. В. Плоская периодична контактна задача для багатопарової основи / О. В. Величко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія механіка. – Дніпропетровськ: видавництво ДНУ. – 2005. – № 10 (1). – Вип. 9. – Т. 1. – С. 118–124.
5. Плотников В. П. Теоретическое исследование упруго-пластического состояния бетонных блоков при нагружении внутренним давлением воды / В. П. Плотников // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006. – № 9. – С. 24–31.
6. Дильман В. Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне / В. Л. Дильман // Bulletin of SUSU. – 2009. – С. 56–72.

Одержано 29.03.2013

#### Штефан Т.А., Величко В.Е. Исследование энергии формоизменения в плите, деформируемой штампом

*Рассматривается стационарная задача о плоской деформации прямоугольного параллелепипеда штампом. Нижняя граница тела свободна от нагрузок. Получен аналитический вид для напряжений и перемещений точек параллелепипеда. Исследовано влияние геометрических и механических характеристик на поведение величины энергии, которая применяется в четвертой (энергетической) гипотезе прочности.*

**Ключевые слова:** плита, штамп, плоская деформация, четвертая гипотеза прочности, энергия, зона пластичности.

#### Shtefan T., Velichko E. Energy research forming a plate which deforms stamps

*The stationary problem on planar deformation of cuboid stamp was researched. Lower bound body is free from stress. The analytical form for the stresses and displacements of the points of the parallelepiped was received. The influence of geometrical and mechanical characteristics over the behavior of the value of the energy that is used in the fourth (energy) hypothesis strength was researched.*

**Key words:** plate, stamped, flat deformation, the fourth hypothesis is strength, energy, plasticity zone.