

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ОДНОВИМІРНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни
«Математичні методи оптимізації та дослідження операцій»
для студентів
напряму 6.050103 “Програмна інженерія”
денної форми навчання

2014

Лінійне програмування. Одновимірні методи оптимізації. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи оптимізації та дослідження операцій» для студентів напряму 6.050103 “Програмна інженерія” денної форми навчання / Укладачі: В.І. Дубровін, Л.Ю. Дейнега. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 85 с.

Укладачі: В.І. Дубровін,
Л. Ю. Дейнега

Рецензент: А.В. Притула

Відповідальний за випуск: В.І. Дубровін

Затверджено
на засіданні кафедри “Програмних
засобів”

Протокол №3 від 20.10.14 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ОСНОВІ ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ.....	6
1.1 Короткі теоретичні відомості	6
1.2 Завдання до лабораторної роботи.....	23
1.3 Порядок виконання роботи.....	25
1.4 Зміст звіту	26
1.5 Контрольні питання	26
2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ	28
2.1 Короткі теоретичні відомості	28
2.2 Завдання до лабораторної роботи.....	43
2.3 Порядок виконання роботи.....	46
2.4 Зміст звіту	47
2.5 Контрольні питання	47
3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	48
3.1 Теоретичні відомості.....	48
3.2 Завдання	65
3.3 Зміст звіту	73
3.4 Контрольні питання	73
4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4 ОДНОВИМІРНИЙ ПОШУК ОПТИМУМУ. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКЛЮЧЕННЯМ ІНТЕРВАЛІВ	74
4.1 Короткі теоретичні відомості	74
4.2 Завдання до лабораторної роботи.....	75
4.3 Порядок виконання роботи.....	76
4.4 Зміст звіту	77
4.5 Контрольні питання	77

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ТА МЕТОДИ ТОЧКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ.....	79
5.1 Короткі теоретичні відомості	79
5.2 Завдання до лабораторної роботи.....	80
5.3 Порядок виконання роботи.....	80
5.4 Зміст звіту	80
5.5 Контрольні питання	80
6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6 МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ.....	82
6.1 Короткі теоретичні відомості	82
6.2 Завдання до лабораторної роботи.....	82
6.3 Порядок виконання роботи.....	83
6.4 Зміст звіту	83
6.5 Контрольні питання	84
ЛІТЕРАТУРА	85

ВСТУП

Процес оптимізації лежить в основі діяльності випускників спеціальності „Інформаційні технології проектування” оскільки класичні функції інженера заключаються в тому, щоб, з однієї сторони, проектувати нові, більш ефективні та менш дорогі системи, а з іншої, розробляти методи збільшення якості функціонування існуючих систем.

Ефективність методів оптимізації, що дозволяють здійснити вибір найкращого варіанта без перевірки всіх можливих варіантів, тісно пов'язана з використанням тріади „модель-алгоритм-програма”.

Використання моделей зумовлено тим, що експерименти з реальними системами, як правило, вимагають дуже великих витрат засобів і часу, а також, в деяких випадках, пов'язані з ризиком. Моделі широко використовуються для проектування, оскільки це надає можливості для реалізації найбільш економічного способу дослідження впливу змін в значеннях основних незалежних змінних на показники якості функціонування системи.

Оскільки вимоги до задач оптимізації являються загальними та носять абстрактний характер, область використання методів оптимізації може бути доволі широкою. У зв'язку з цим в провідних університетах світу введені учбові дисципліни “Engineering Optimization” та “Operation Research”, які викладаються на рівні бакалаврата, а в деяких випадках – на рівні магістратури. Така тенденція спостерігається і в вузах України.

В даних методичних вказівках вирішуються задачі оптимізації, в яких цільова функція задана функцією однієї змінної. Аналіз задач такого типу займає важливе місце в оптимізаційних дослідженнях, як теоретичного, так і практичного напрямку. Це пов'язане не тільки з тим, що саме такі задачі вирішуються в інженерній практиці, але і з тим, що одновимірні методи оптимізації часто використовують для аналізу задач, які виникають при реалізації ітераційних процедур, орієнтованих на вирішення багатовимірних задач оптимізації.

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ОСНОВІ ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

Мета роботи - вивчити методику рішення задач лінійного програмування на основі її геометричної інтерпретації; навчитися застосовувати лінійне програмування.

1.1 Короткі теоретичні відомості

1.1.1 Застосування лінійного програмування

Приклад 1.1 Конструктор має у своєму розпорядженні три види комплектів проводів А, В, С, що мають відповідно вартість С1, С2, С3. Кожен комплект містить алюмінієві і мідні дроти, причому в комплекті А міститься а11 - алюмінієвих, а21 - мідних; у комплекті В міститься а12 - алюмінієвих, а22 - мідних; у комплекті С міститься а13 - алюмінієвих, а23 - мідних проводів.

Відомо, що на монтаж установки витрачається алюмінієвих проводів не менше b_1 , а мідних - не менше b_2 .

Задача полягає у визначенні необхідної кількості кожного з комплектів для того, щоб змонтувати установку і витратити мінімальні витрати на придбання комплектів.

Позначимо споживання кількості комплектів через X_1, X_2, X_3 . З урахуванням відомих вартостей комплектів цільова функція, що підлягає оптимізації, має вигляд

$$F = C_1 * X_1 + C_2 * X_2 + C_3 * X_3.$$

Складемо обмежувальні нерівності:

$$\begin{aligned} a_{11} * X_1 + a_{12} * X_2 + a_{13} * X_3 &\geq b_1; \\ a_{21} * X_1 + a_{22} * X_2 + a_{23} * X_3 &\geq b_2. \end{aligned}$$

Перше рівняння описує потребу в алюмінієвих проводах, а друге - в мідних.

Потрібно знайти ненегативні значення елементів рішення, що мінімізують цільову функцію з урахуванням обмежень.

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі. Знайти мінімум функції

$$F = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j \quad (1.1)$$

за умови, що її змінні задовольняють системі рівнянь

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} \cdot X_j = B_i \quad (i=1, m) \quad (1.2)$$

і умові позитивності $X_j \geq 0 \quad (j=1, n)$.

Сформульована задача є задачею лінійного програмування, оскільки функція (1.1) лінійна, а система (1.2) містить тільки лінійні рівняння.

Приклад 1.2 Потрібно розробити апаратуру на основі серійних модулів (мікросхем) двох типів M_1 і M_2 , що випускаються.

Відомо, що без урахування резервування в схемі апаратури повинно міститися модулів M_1 не менше b_1 , а модулів M_2 - не менше b_2 , крім того, відомо, що випускаються монтажні плати двох типів А і В, які передбачається використовувати як конструктивні несучі елементи для апаратури, що розробляється.

Відомо також, що в монтажному просторі плати А може розміститися a_{11} модулів M_1 і a_{21} модулів M_2 . На монтажній платі В може бути розміщено a_{12} модулів M_1 і a_{22} модулів M_2 .

Для кожного виду плат відомий ваговий коефіцієнт вартості, встановлений експертним або яким-небудь іншим методом. Для плати А він рівний C_1 ; для плати В - C_2 . Потрібно визначити необхідну кількість плат для проектування апаратури по типах з

умовою, щоб апаратура володіла максимальною якістю при мінімальних витратах.

З урахуванням умов і вимог задачі складемо цільову функцію $F = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 \rightarrow \min$, де X_1 - кількість плат типу А, X_2 - кількість плат типу В.

Складемо обмежувальні рівняння:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 &\geq b_1; \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 &\geq b_2 \end{aligned}$$

де X_1 і X_2 - цілі числа.

Перша нерівність описує розподіл модулів M_1 серед плат А і В, а друга - розподіл серед тих же плат, але вже модулів M_2 .

Приклад 1.3 Задача складання раціону.

Вміст поживних речовин в кожній складовій суміші та її вартість подані в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Складова	Вміст поживних речовин в 1 кг суміші, %		Вартість 1 кг суміші, у. о.
	білку	клітковини	
Зернові	10	2	0,40
Соеві боби	50	8	0,90

Готова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини. Загальна кількість суміші має становити понад 5 кг.

Визначити масу кожного з двох видів складових, що утворюють суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимогам до загальної маси суміші та її поживності.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 — маса зернових, а x_2 — соєвих бобів (в кг) у готовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити понад 5 кг, тобто $x_1 + x_2 \geq 5$.

Розглянемо обмеження щодо поживності суміші.

Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10 x_1 + 50 x_2 \geq 20 (x_1 + x_2),$$

а також не більше як 5 % клітковини:

$$2 x_1 + 8 x_2 \leq 5 (x_1 + x_2).$$

Загалом математична модель задачі оптимізації раціону має такий вигляд:

$$\min Z = 0,40 x_1 + 0,90 x_2$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$-10 x_1 + 30 x_2 \geq 0,$$

$$-3x_1 + 3 x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

1.1.2 Загальна і основна задача лінійного програмування

У попередньому підрозділі були розглянуті приклади завдань лінійного програмування (ЛП). У цих завданнях потрібно було знайти максимум або мінімум лінійної функції за умови, що її змінні приймали ненегативні значення і задовольняли деякій системі лінійних рівнянь або лінійних нерівностей. Кожне з цих завдань є окремим випадком загальної задачі лінійного програмування.

Визначення 1.1. Загальною задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j, \quad (1.3)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \leq b_i \quad (i=1,k); \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i \quad (i=k+1,m); \quad (1.5)$$

$$X_j \geq 0 \quad (i=1,L; L \leq n), \quad (1.6)$$

де a_{ij} , b_i , c_j - задані постійні величини і $k \leq m$.

Визначення 1.2. Функція (1.3.) називається цільовою функцією (або лінійною формою) задачі (1.3) - (1.6), а умови (1.4) - (1.6) - обмеженнями даної задачі.

Визначення 1.3. Стандартною (або симетричною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1.3) при виконанні умов (1.4) і (1.6), де $k=m$ і $L=n$.

Визначення 1.4. Основною (або канонічною) задачею лінійного програмування називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1.3) при виконанні умов (1.5) і (1.6), де $k=0$ і $L=n$.

Визначення 1.5. Сукупність чисел $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, що задовольняють обмеженням (1.5) - (1.6), називається допустимим рішенням (або планом).

Визначення 1.6. План $X^*=(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$, при якому цільова функція задачі (1.3) приймає максимальне (мінімальне) значення, називається оптимальним.

Значення цільової функції (1.3) при плані X позначатимемо через $F(X)$. Отже, X^* - оптимальний план задачі, якщо для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \leq F(X^*)$

/відповідно $F(X) \geq F(X^*)$ /.

Вказані вище три форми задачі ЛП (загальна, стандартна і основна) еквівалентні в тому сенсі, що кожна з них за допомогою стандартних перетворень може бути переписана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження рішення одної з вказаних задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план будь-якої з трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі ЛП до іншої, потрібно в загальному випадку вміти, по-перше, зводити задачі мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не підпорядковані умові позитивності.

У тому випадку, коли потрібно знайти мінімум функції $F = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + \dots + C_n \cdot X_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1 = -F = -C_1 \cdot X_1 - C_2 \cdot X_2 - \dots - C_n \cdot X_n$, оскільки $\min F = \max (-F)$.

Обмеження-нерівність початкової задачі ЛП, що має вид " $\leq$ ", можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової ненегативної змінної, а обмеження-нерівність виду " $\geq$ " - в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової ненегативної змінної.

Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n \leq b_i$$

перетвориться в обмеження-рівність

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n + X_{n+i} = b_i \quad (X_{n+i} \geq 0) \quad (1.7)$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n \geq b_i$$

у обмеження-рівність

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n - X_{n+i} = b_i \quad (X_{n+i} \geq 0). \quad (1.8)$$

В той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{aligned} a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 + \dots + a_{in} * X_n &\leq b_i; \\ -a_{i1} * X_1 - a_{i2} * X_2 - \dots - a_{in} * X_n &\leq -b_i. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Число ненегативних змінних, що вводяться, при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівність дорівнює числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, що вводяться, мають цілком певний сенс. Так, якщо в обмеженнях початкової задачі ЛП відображається витрата і наявність виробничих ресурсів, то числове значення додаткової змінної в плані задачі, записаного у формі основної, рівне об'єму невикористаного відповідного ресурсу.

Відзначимо, нарешті, що якщо змінна X_k не підпорядкована умові позитивності, то її слід замінити двома ненегативними змінними U_k і V_k , прийнявши

$$X_k = U_k - V_k.$$

Приклад 1.4 Записати у формі основної задачі лінійного програмування наступну задачу. Знайти максимум функції

$$F = 3 * X_1 - 2 * X_2 - 5 * X_4 + X_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2*X_1+X_3 - X_4+X_5 <= 2; \\ X_1-X_3+2*X_4+X_5 <= 3; \\ 2*X_2+X_3-X_4+2*X_5 <= 6; \\ X_1 + X_4-5*X_5 >= 8 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

У даному завданні потрібно знайти максимум функції, а система обмежень містить чотири нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, потрібно перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей. Оскільки число нерівностей, що входять в систему обмежень задачі, рівне чотирьом, то цей перехід може бути здійснений введенням чотирьох додаткових ненегативних змінних. При цьому до лівих частин кожної з нерівностей виду " $\leq$ " відповідна додаткова змінна додається, а з лівих частин кожної з нерівностей виду " $\geq$ " віднімається. В результаті, обмеження приймають вигляд

$$\begin{cases} 2*X_1+X_3 - X_4+X_5+X_6 = 2; \\ X_1-X_3+2*X_4+X_5+X_7 = 3; \\ 2*X_2+X_3-X_4+2*X_5+X_8 = 6; \\ X_1 + X_4-5*X_5-X_9 = 8 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_9 \geq 0.$$

Отже, дана задача може бути записана у формі основної задачі таким чином : максимізувати функцію $F = 3*X_1-2*X_2-5*X_4+X_5$ за умов

$$\begin{cases} 2*X_1+X_3 - X_4+X_5+X_6 = 2; \\ X_1-X_3+2*X_4+X_5+X_7 = 3; \\ 2*X_2+X_3-X_4+2*X_5+X_8 = 6; \\ X_1 + X_4-5*X_5-X_9 = 8 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_9 \geq 0.$$

Приклад 1.5 Записати задачу, що полягає в мінімізації функції $F = -X_1 + 2 \cdot X_2 - X_3 + X_4$ за умов

$$\begin{cases} 2 \cdot X_1 - X_2 - X_3 + X_4 \leq 6; \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 - X_4 \geq 8; \\ 3 \cdot X_1 - X_2 + 2 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 \leq 10; \\ -X_1 + 3 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 - 3 \cdot X_4 = 15 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_4 \geq 0$$

у формі основного задачі ЛП.

У даному завданні потрібно знайти мінімум цільової функції, а система обмежень містить три нерівності.

Отже, щоб записати її у формі основної задачі, замість знаходження мінімуму функції F потрібно знайти мінімум функції $F_1 = -F$ при обмеженнях, що виходять з обмежень початкової задачі додаванням до лівих частин кожного з обмежень нерівностей виду " $\leq$ " додаткової невід'ємної змінної і відніманням з лівих частин кожного з обмежень нерівностей виду " $\geq$ ".

Отже, початкова задача може бути записана у формі основної задачі ЛП так: знайти максимум функції

$F_1 = X_1 - 2 \cdot X_2 + X_3 - X_4$ за умов

$$\begin{cases} 2 \cdot X_1 - X_2 - X_3 + X_4 + X_5 = 6; \\ X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 - X_4 - X_6 = 8; \\ 3 \cdot X_1 - X_2 + 2 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 + X_7 = 10; \\ -X_1 + 3 \cdot X_2 + 5 \cdot X_3 - 3 \cdot X_4 = 15 \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_7 \geq 0.$$

1.1.3 Властивості основної задачі лінійного програмування

Розглянемо основну задачу ЛП. Як було відмічено в підрозділі 1.1.2, вона полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \cdot X_j = B_i \quad (i=1,m), \quad X_j \geq 0 \quad (j=1,n).$$

Перепишемо цю задачу у векторній формі. Знайти максимум функції

$$F = C \cdot X \quad (1.10)$$

за умов

$$X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + \dots + X_n \cdot P_n = P_0; \quad (1.11)$$

$$X \geq 0 \quad (1.12)$$

де $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$; $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$; $C \cdot X$ - скалярний добуток; $P_1, \dots, P_n$ і P_0 - m -мірні вектори-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь задачі:

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad P_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \dots; \quad P_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Визначення 1.6. План $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ називається опорним планом основної задачі лінійного програмування, якщо система векторів P_j , що входять в розкладання (1.11) з позитивними коефіцієнтами X_j , лінійно незалежна.

Оскільки вектори P_j є m -мірними, то з визначення опорного плану виходить, що число його позитивних компонент не може бути більше, ніж m .

Визначення 1.7. Опорний план називається не виродженим, якщо він містить рівно m позитивних компонент, інакше він називається виродженим.

Властивості основної задачі ЛП (1.10) - (1.12) тісним чином пов'язані з властивостями опуклих множин.

Визначення 1.8. Непорожня безліч планів основної задачі лінійного програмування називається багатогранником рішень, а будь-яка кутова точка багатогранника рішень - вершиною.

Теорема. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то максимальне значення цільова функція задачі приймає в одній з вершин багатогранника рішень. Якщо максимальне значення цільова функція приймає більш ніж в одній вершині, то вона приймає його у всякій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема. Якщо система векторів $P_1, P_2, \dots, P_k$ ($k \leq n$) у розкладанні (1.11) лінійно-незалежна і така, що

$$X_1 * P_1 + X_2 * P_2 + \dots + X_k * P_k = P_0 \quad (1.13)$$

де все $X_j \geq 0$, то крапка $X = (X_1, X_2, \dots, X_k, 0, \dots, 0)$ є вершиною багатогранника рішень.

1.1.4 Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Сформульовані теореми дозволяють зробити наступні висновки. Непорожню безліч планів основної задачі ЛП утворює опуклий багатогранник. Кожна вершина цього багатогранника визначає опорний план. В одній з вершин багатогранника рішень (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є максимальним (за умови, що функція обмежена зверху на безлічі планів). Якщо максимальне значення функція приймає більш ніж в одній вершині, то це ж значення вона приймає в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину багатогранника рішень, в якій цільова функція приймає максимальне значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана в стандартній формі, містить не більше двох змінних, тобто $n - g \leq 2$, де n - число змінних; g - ранг матриці, складеної з коефіцієнтів в системі обмежень задачі.

Знайдемо рішення задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = C_1 * X_1 + C_2 * X_2 \quad (1.14)$$

за умов

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 \leq b_i \quad (i=1, k) \quad (1.15)$$

$$X_j \geq 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.16)$$

Кожна з нерівностей (1.15), (1.16) системи обмежень визначає напівплощина відповідно з граничними прямими

$$a_{i1} * X_1 + a_{i2} * X_2 = b_i; \quad (i=1, k);$$

$$X_1 = 0 \text{ і } X_2 = 0.$$

В тому випадку, якщо система нерівностей сумісна, область її рішень є безліч точок, що належать всім вказаним напівплощинам. Оскільки безліч точок перетину даних напівплощин - опукла, то областю допустимих рішень задачі (1.14) - (1.16) є опукла безліч точок, яка називається багатокутником рішень (введений раніше термін "багатогранник рішень" зазвичай уживається, якщо $n \geq 3$). Сторони цього багатокутника лежать на прямих, рівняння яких виходять з початкової системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки точної рівності.

Таким чином, початкова задача ЛП полягає в знаходженні такої точки багатокутника рішень, в якій цільова функція F приймає максимальне значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник рішень не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху.

За вказаних умов в одній з вершин багатокутника рішень цільова функція приймає максимальне значення. Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $C_1 * X_1 + C_2 * X_2 = h$ (де h - деяка постійна), що проходить через багатокутник рішень і пересуватимемо її у напрямі вектора $C = (C_1, C_2)$ до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з багатокутником рішень. Координати вказаної точки і визначають оптимальний план даної задачі.

Закінчуючи розгляд геометричної інтерпретації задачі (1.14) - (1.16), відзначимо, що при знаходженні її рішення можуть зустрітись випадки, зображені на рис.1.1. - 1.4. Рис.1.1. характеризує такий випадок, коли цільова функція приймає максимальне значення в єдиній точці А. З рис.1.2. видно, що максимальне значення цільова функція приймає в будь-якій точці відрізка АВ. На рис.1.3.

зображений випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на безлічі допустимих рішень, а на рис.1.4. - випадок, коли система обмежень задачі несумісна.

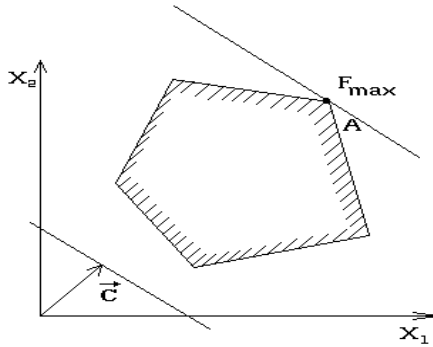


Рисунок 1.1

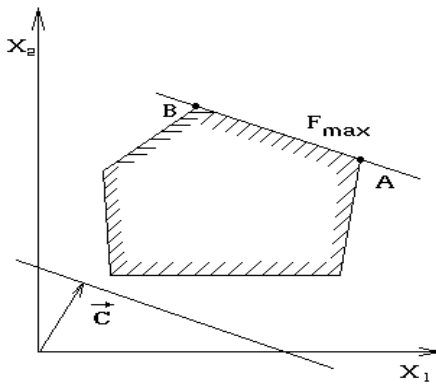


Рисунок 1.2

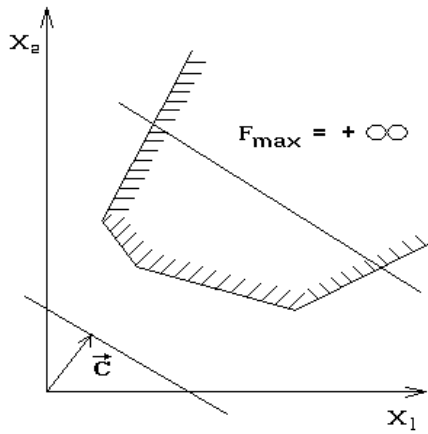


Рисунок 1.3

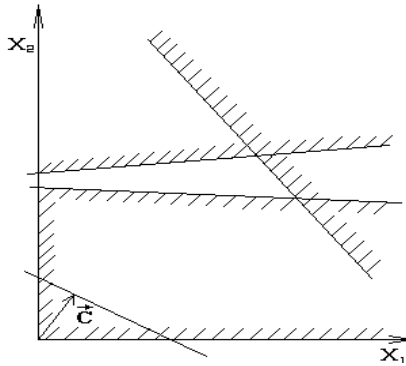


Рисунок 1.4

Відзначимо, що знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її мінімального значення при тих же обмеженнях лише тим, що лінія рівня $C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 = h$ пересувається не у напрямі вектора $C = (C_1, C_2)$, а в протилежному напрямі. Таким чином, відмічені вище випадки, що зустрічаються при знаходженні максимального значення цільової функції, мають місце і при знаходженні її мінімального значення.

Отже, знаходження рішення задачі ЛП (1.14) - (1.16) на основі її геометричної інтерпретації включає наступні етапи.

1. Будують прямі, рівняння яких виходять в результаті заміни в обмеженнях (1.15) і (1.16) знаків нерівностей на знаки точної рівності.

2. Знаходять напівплощини, які визначаються кожним з обмежень задачі.

3. Знаходять багатокутник рішень.

4. Будують вектор $C=(C_1, C_2)$.

5. Будують пряму $C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 = h$, що проходить через багатокутник рішень.

6. Пересувають пряму $C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 = h$ у напрямі вектора C , внаслідок чого знаходять точку (точки), в яких цільова функція приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість верху функції на безлічі планів.

7. Визначають координати точки максимуму функції і обчислюється значення цільової функції в цій точці.

Приклад 1.6 Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види комплектуючих. Норми витрат комплектуючих кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду приведені в табл.1.2.

Таблиця 1.2

Види комплектуючих	Витрата комплектуючих, шт, на один виріб		Загальна кількість комплектуючих, шт
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, грн.	30	40	

У табл.1.2. вказані також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість комплектуючих даного виду, яка може бути використана підприємством.

Враховуючи, що вироби А і В можуть вироблятися в будь-яких країнах, потрібно скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів виявиться максимальним.

Припустимо, що підприємство виготовить X_1 виробів виду А і X_2 виробів виду В. Оскільки виробництво продукції обмежене комплектуючими кожного виду, що є у розпорядженні підприємства і кількість виробів, що виготовляються, не може бути негативною, повинні виконуватися нерівності

$$\begin{cases} 12X_1 + 4X_2 \leq 300; \\ 4X_1 + 4X_2 \leq 120; \\ 3X_1 + 12X_2 \leq 252 \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Загальний прибуток від реалізації X_1 виробів виду А і X_2 виробів виду В складе $F = 30X_1 + 40X_2$.

Таким чином, ми приходимо до наступної математичної задачі. Серед всіх ненегативних рішень даної системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, при якому функція F приймає максимальне значення.

Знайдемо рішення сформульованої задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник рішень. Для цього в нерівностях системи обмежень і умовах позитивності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності і знайдемо відповідні прямі:

$$\begin{aligned} 12X_1 + 4X_2 &= 300 & (I) \\ 4X_1 + 4X_2 &= 120 & (II) \\ 3X_1 + 12X_2 &= 252 & (III) \\ X_1 &= 0 & (IV) \\ X_2 &= 0. & (V). \end{aligned}$$

Ці прямі зображені на рис.1.5. Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві напівплощини. Координати точок однієї

напівплощини задовольняють початковій нерівності, а інший - ні. Щоб визначити шукану напівплощину, потрібно узяти яку-небудь точку що належить одній з напівплощин, і перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності.

Якщо координати узяті точки задовольняють даній нерівності, то шуканою є та напівплощина, якій належить ця точка, інакше - інша напівплощина.

Знайдемо, наприклад, напівплощину, яка визначена нерівністю $12 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 < 300$ (на рис.1.5. це пряма I), візьмемо яку-небудь точку, що належить одній з напівплощин, наприклад, початок координат - точку (0;0). Координати цієї точки задовольняють нерівності $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; таким чином, напівплощина якій належить точка (0;0), визначається нерівністю $12 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 300$. Це і показано стрілками на рис.1.5.

Перетин отриманих напівплощин і визначає багатокутник рішень даної задачі.

Як видно з рис.1.5, багатокутником рішень є п'ятикутник OABCD. Координати будь-якої точки, що належить цьому п'ятикутнику, задовольняють даній системі нерівностей і умові позитивності змінних. Тому, сформульована задача буде вирішена, якщо ми зможемо знайти точку, що належить п'ятикутнику OABCD, в якій функція F приймає максимальне значення.

Щоб знайти вказану точку, побудуємо вектор $C = (30;40)$ і пряму $30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 = h$, де h - деяка постійна, при якій пряма $30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 = h$ має загальні точки з багатокутником рішень. Покладемо, наприклад, $h = 480$ і побудуємо пряму $30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 = 480$ (рис.1.5).

Якщо тепер узяти яку-небудь точку, що належить побудованій прямій і багатокутнику рішень, то її координати визначають такий план виробництва виробів А і В, при якому прибуток від їх реалізації рівний 480 грн. Далі, вважаючи h рівним деякому числу, більшому ніж 480, ми будемо отримувати різні паралельні прямі. Якщо вони мають загальні точки з багатокутником рішень, то ці точки визначають плани виробництва деталей А і В, при яких прибуток від їх реалізації перевершить 480 грн.

Переміщаючи побудовану пряму $30 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 = 480$ у напрямі вектора C , бачимо, що останньою загальною точкою її з багатокутником рішень задачі служить точка В. Координати цієї точки

і визначають план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки В як точки перетину прямих II і III. Отже, її координати задовольняють рівнянням цих прямих

$$\begin{cases} 4 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 = 120 \\ 3 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 = 252. \end{cases}$$

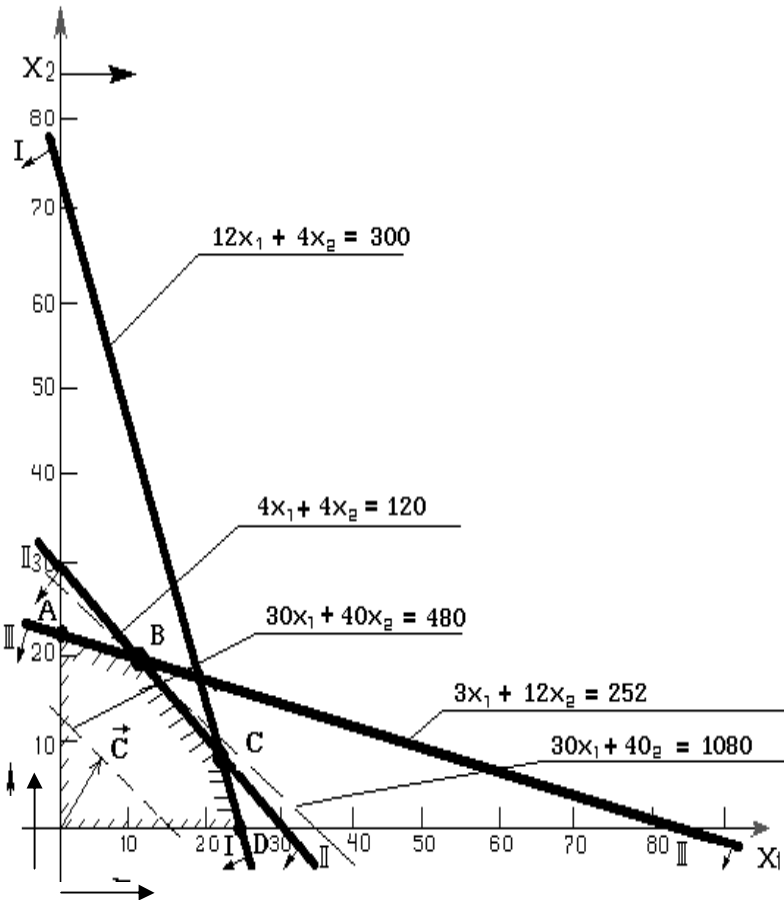


Рисунок 1.5

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо $X_1'=12$, $X_2'=18$. Отже, якщо підприємство виготовить 12 виробів виду А і 18 виробів виду В, то воно отримає максимальний прибуток, $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ грн.

1.2 Завдання до лабораторної роботи

Використовуючи геометричну інтерпретацію, знайти рішення (або переконатися в нерозв'язності) задачі ЛП.

1. $F=7 \cdot X_1+6 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $2 \cdot X_1+5 \cdot X_2 \geq 10$,
 $5 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \geq 10$
 $X_1 \leq 6$,
 $X_2 \leq 5$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
2. $F=3 \cdot X_1-2 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $2 \cdot X_1+X_2 \leq 11$
 $-3 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \leq 10$
 $3 \cdot X_1+4 \cdot X_2 \geq 20$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
3. $F=5 \cdot X_1-3 \cdot X_2 \rightarrow \min$;
 $3 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \geq 6$,
 $2 \cdot X_1-3 \cdot X_2 \geq -6$,
 $X_1-X_2 \leq 4$,
 $4 \cdot X_1+7 \cdot X_2 \leq 28$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
4. $F=X_1+X_2 \rightarrow \max$;
 $2 \cdot X_1+X_2 \leq 14$
 $-3 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \leq 9$
 $3 \cdot X_1+4 \cdot X_2 \geq 27$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
5. $F=7 \cdot X_1-2 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $5 \cdot X_1-2 \cdot X_2 \leq 3$,
 $X_1+X_2 \geq 1$,
 $-3 \cdot X_1+X_2 \leq 3$,
 $2 \cdot X_1+X_2 \leq 4$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
6. $F=2 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $X_1-2 \cdot X_2 \geq 4$
 $5 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \geq 10$
 $4 \cdot X_1-3 \cdot X_2 \leq 12$
 $7 \cdot X_1+4 \cdot X_2 \leq 28$;
 $X_1, X_2 \geq 0$.
7. $F=2 \cdot X_1+2 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $3 \cdot X_1-2 \cdot X_2 \geq -6$,
 $X_1+X_2 \geq 3$,
 $X_1 \leq 3$,
8. $F=2 \cdot X_1-4 \cdot X_2 \rightarrow \max$;
 $8 \cdot X_1-5 \cdot X_2 \leq 16$
 $X_1+3 \cdot X_2 \leq 2$
 $2 \cdot X_1+7 \cdot X_2 \geq 9$;

$$\begin{aligned} X_2 &\leq 5; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} 9. \quad F &= X_1 + 2X_2 \rightarrow \max; \\ 5X_1 - 2X_2 &\leq 4, \\ X_1 - 2X_2 &\geq -4, \\ X_1 + X_2 &\geq 4; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad F &= 3X_1 + 3X_2 \rightarrow \max; \\ X_1 - 4X_2 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 2; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad F &= 2X_1 - X_2 \rightarrow \max; \\ X_1 - X_2 &\geq -3, \\ 6X_1 + 7X_2 &\leq 42 \\ 2X_1 - 3X_2 &\leq 6, \\ X_1 + X_2 &\geq 4; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. \quad F &= 5X_1 + X_2 \rightarrow \min; \\ X_1 + 7X_2 &\geq 7 \\ -2X_1 + X_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + 5X_2 &\geq 10 \\ 5X_1 + 2X_2 &\geq 10 \\ 7X_1 + 7X_2 &\geq 7 \\ X_1 &\leq 6 \\ X_2 &\leq 7; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13. \quad F &= X_1 - X_2 \rightarrow \max; \\ -X_1 + X_2 &\geq 8, \\ 8X_1 + 5X_2 &\leq 80, \\ X_1 - 2X_2 &\leq 2, \\ X_1 + 4X_2 &\geq 4; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \quad F &= 7X_1 + X_2 \rightarrow \max; \\ X_1 + X_2 &\leq 14 \\ 3X_1 - 5X_2 &\leq 15 \\ 5X_1 + 3X_2 &\geq 21; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15. \quad F &= 7X_1 - X_2 \rightarrow \min; \\ X_1 + X_2 &\geq 3, \\ 5X_1 + X_2 &\geq 5, \\ X_1 + 5X_2 &\leq 5; \\ 0 &\leq X_1 \leq 4; \\ 0 &\leq X_2 \geq 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \quad F &= X_1 + X_2 \rightarrow \min; \\ 3X_1 + X_2 &\geq 8 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 6 \\ X_1 - X_2 &\leq 3; \\ X_1, X_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad F &= X_1 + 3X_2 \rightarrow \max; \\ -X_1 + X_2 &\leq 3, \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 20; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. \quad F &= 2X_1 + X_2 \rightarrow \max; \\ X_1 - X_2 &\geq 4 \\ X_1 + X_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$4X_1 - X_2 \leq 12$$

$$7X_1 + X_2 \leq 7;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$19. F = 2X_1 + 2X_2 \rightarrow \max;$$

$$3X_1 - 2X_2 \geq -6,$$

$$X_1 + X_2 \geq 3,$$

$$X_1 \leq 3,$$

$$X_2 \leq 5;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$20. F = 2X_1 - 4X_2 \rightarrow \max;$$

$$8X_1 - 5X_2 \leq 16$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 2$$

$$2X_1 + 7X_2 \leq 9;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$21. F = 3X_1 + 2X_2 \rightarrow \max;$$

$$3X_1 + X_2 \leq 21,$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$2X_1 \leq 16;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$22. F = X_1 + X_2 \rightarrow \max;$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 14$$

$$-5X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$4X_1 + 6X_2 \geq 24;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$23. F = X_1 + 2X_2 \rightarrow \max;$$

$$4X_1 - 2X_2 \leq 12,$$

$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 16;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$24. F = -2X_1 + X_2 \rightarrow \min;$$

$$3X_1 - 2X_2 \leq 12$$

$$-X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 6;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$25. F = 2X_1 + 3X_2 \rightarrow \min;$$

$$2X_1 + X_2 \geq 8,$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 6;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

$$26. F = X_1 + 2X_2 \rightarrow \max;$$

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$*X_1 + 10X_2 \leq 26$$

$$X_1 + 11X_2 \leq 20;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

1.3 Порядок виконання роботи

1. Вивчити приведені в підрозд.1.1. теоретичні відомості про лінійне програмування (ЛП), звернувши особливу увагу на розглянуті приклади застосування ЛП.

2. Для знаходження рішення задачі ЛП на основі її геометричної інтерпретації на першому етапі необхідно побудувати прями, рівняння яких виходять в результаті заміни в обмеженнях

задачі знаків нерівностей на знаки рівності. При побудові прямих рекомендується для кожної з них визначити точки перетину осей координат, потім через ці точки провести шукану пряму.

3. Знайти напівплощини, які визначені кожним з обмежень задачі.

4. Визначити багатокутник рішень даної задачі (якщо обмеження задачі сумісні).

5. Побудувати вектор $C = (C_1, C_2)$, де C_1, C_2 - константи при невідомих цільовій функції задачі ЛП.

6. Побудувати пряму $C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 = h$, де h - деяка постійна, при якій вказана пряма має загальні точки з багатокутником рішень.

7. Переміщаючи побудовану пряму у напрямі вектора C , знайти точку (точки), в якій цільова функція приймає максимальне значення.

8. Визначити координати точки максимуму цільової функції і обчислити значення цільової функції в цій точці.

9. Етапи рішення задачі ЛП на основі її геометричної інтерпретації оформити аналогічно рішенню прикладу 1.6.

1.4 Зміст звіту

1.4.1 Сформульована мета роботи.

1.4.2 Постановка задачі ЛП згідно варіанту.

1.4.3 Результати роботи. Привести рисунок, аналогічний рис.1.6, побудований за допомогою Matlab.

1.4.4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

1.5 Контрольні питання

1.5.1 Приведіть приклад використання ЛП. Складіть математичну модель задачі.

1.5.2 Сформулюйте загальну задачі ЛП.

1.5.3 Дайте визначення стандартної (симетричної) і основної (канонічної) задачі ЛП.

1.5.4 Що називається допустимими і оптимальним рішеннями задачі ЛП? Дайте геометричну інтерпретацію.

1.5.5 Як визначити кількість додаткових ненегативних змінних, які слід вводити при переході від обмежень-нерівностей задачі ЛП до обмежень-рівності. Який їх сенс?

1.5.6 Як можна звести задачі мінімізації цільової функції до задачі максимізації?

1.5.7 Яким чином замінюються змінні, що не підкоряються умові позитивності?

1.5.8 Як підготувати і вирішити задачу ЛП на основі її геометричної інтерпретації?

1.5.9 Дайте геометричну інтерпретацію можливих при рішенні задачі ЛП випадків: коли цільова функція приймає максимальне значення в єдиній крапці або на відрізку; коли цільова функція не обмежена зверху на безлічі рішень; коли система обмежень задачі несумісна.

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА N2 ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи - вивчити методику вирішення задачі лінійного програмування симплексним методом.

2.1 Короткі теоретичні відомості

2.1.1 Знаходження оптимального плану задачі лінійного програмування симплексним методом

Вирішення задачі лінійного програмування можна знайти симплексним методом. Перш ніж застосовувати цей метод, слід записати початкову задачу у формі основної задачі ЛП, якщо вона не має такої форми запису.

Симплексний метод рішення задачі ЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умови, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план є не виродженим).

Вказаний перехід можливий, якщо відомий який-небудь початковий опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна безпосередньо записати.

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = C_1 * X_1 + C_2 * X_2 + \dots + C_n * X_n$$

за умов

$$\begin{cases} X_1 + A_{1m} * X_m + \dots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ X_2 + A_{2m} * X_m + \dots + A_{2n} * X_n = B_2 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

представлених у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису.

Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^m X_{ij} \cdot P_i \quad (j=0, n).$$

Покладемо

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i \cdot X_{ij} \quad (j=1, n); \quad j = Z_j - C_j \quad (j=1, n).$$

Оскільки вектори $P_1, P_2, \dots, P_m$ - одиничні, то

$$X_{ij} = A_{ij} \quad \text{і} \quad Z_j = \sum_{i=1}^m C_i \cdot A_{ij}, \text{ а}$$

$$j = \sum_{i=1}^m C_i \cdot A_{ij} - C_j.$$

Теорема 2.1. (ознака оптимальності опорного плану).

Опорний план $X'=(X_1'; X_2'; \dots; X_m'; 0; 0; \dots; 0)$ задачі є оптимальним, якщо $j \geq 0$ для будь-якого j ($j=1, n$).

Теорема 2.2. Якщо $k < 0$ для деякого $j=k$ і серед чисел A_{ik} ($i=1, m$) немає позитивних ($A_{ik} \leq 0$), то цільова функція задачі не обмежена на безлічі її планів.

Теорема 2.3. Якщо опорний план X задачі не вироджений і $k < 0$, але серед чисел A_{ik} є позитивні (не всі $A_{ik} \leq 0$), то існує опорний план X' такий, що $F(X') > F(X)$.

Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним і виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручніше вести, якщо умови задачі і первинні дані, отримані після визначення початкового опорного плану, записати, як показано в табл.2.1.

Таблиця 2.1

і	Базис	C _б	P ₀	C ₁	C ₂	...	C _r	...	C _m	C _{m+1}	...	C _k	...	C _n
				P ₁	P ₂	...	P _r	...	P _m	P _{m+1}	...	P _k	...	P _n
1	P ₁	C ₁	B ₁	1	0	...	0	...	0	A _{1m+i}	...	A _{1k}	...	A _{1n}
2	P ₂	C ₂	B ₂	0	1	...	0	...	0	A _{2m+i}	...	A _{2k}	...	A _{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P _r	C _r	B _r	0	1	...	0	...	0	A _{rm+i}	...	A _{rk}	...	A _{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P _m	C _m	B _m	0	0	...	1	...	1	A _{mm+i}	...	A _{mk}	...	A _{mn}
m+1			F ₀	0	0	...	0	...	0	A _{m+1}	...	A _k	...	A _n

У стовпці C_б цієї таблиці записують коефіцієнти при невідомих цільової функції, що мають ті ж індекси, що і вектори даного базису.

У стовпці P₀ записують позитивні компоненти початкового опорного плану, у ньому ж в результаті обчислень отримують позитивні компоненти опорного плану. Стовпці векторів P_j являють собою коефіцієнти розкладання цих векторів за векторами даного базису.

У табл.2.1. перші m рядків визначаються початковими даними задачі, а показники (m+1) -го рядка обчислюють.

У цьому рядку в стовпці вектора P₀ записують значення цільової функції, яке вона приймає при даному опорному плані, а в стовпці вектора P_j - значення $j = Z_j - C_j$.

Значення Z_j знаходиться як скалярний добуток вектора P_j (j=1,n) на вектор C_б = (C₁, C₂, ..., C_m):

$$Z_j = \sum_{i=1}^m C_i \cdot A_{ij}, \quad (j=1,n).$$

Значення F₀ рівне скалярному добутку вектора P₀ на вектор C_б:

$$F_0 = \sum_{i=1}^m C_i \cdot B_i.$$

Після заповнення табл.2.1. початковий опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього проглядають елементи $(m+1)$ -го рядка таблиці. В результаті може мати місце один з наступних трьох випадків:

а) $\Delta_j \geq 0$ для $j=m+1, m+2, \dots, n$ (при $\overline{j=1, m} \ Z_j = C_j$ і, відповідно, $j=0$). Тому в даному випадку числа $j \geq 0$ для всіх j від 1 до n ;

б) $\Delta_j < 0$ для деякого j та всі відповідні цьому індексу величини $A_{ij} \leq 0$ ($i=1, m$);

в) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів j та для кожного такого j хоча б одне з чисел A_{ij} позитивне.

У першому випадку на підставі ознаки оптимальності початковий опорний план є оптимальним. У другому випадку цільова функція не обмежена зверху на безлічі планів, а в третьому випадку можна перейти від початкового плану до нового опорного плану, при якому значення цільової функції збільшиться. Цей перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється виключенням з початкового базису якого-небудь з векторів і введенням в нього нового вектору. Як вектор, що вводиться в базис, можна узяти будь-який з векторів P_j , що має індекс j , для якого $\Delta_j < 0$. Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і вирішено ввести в базис вектор P_k . Для визначення вектора, який підлягає виключенню з базису, знаходять $\min (B_i/A_{ik})$ для всіх $A_{ik} > 0$. Хай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису виключають вектор P_r , а число A_{rk} називають розв'язуючим елементом. Стовець і рядок, на перетині яких знаходиться розв'язуючий елемент, називають направляючим.

Після виділення розв'язуючого рядка і розв'язуючого стовпця знаходять новий опорний план X і коефіцієнти розкладання векторів P_j через вектори нового базису, відповідні новому опорному плану. Позитивні компоненти нового опорного плану обчислюють по формулам

$$B_i' = \begin{cases} B_i - (B_r/A_{rk}) \cdot A_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ B_r/A_{rk} & \text{при } i=r, \end{cases} \quad (2.1)$$

Коефіцієнти розкладання векторів P_j через вектори нового базису, що відповідають новому опорному плану, по формулам

$$A_{ij}' = \begin{cases} A_{ij} - (A_{rj}/A_{rk}) * A_{ik} & \text{при } i < r; \\ A_{rj}/A_{rk} & \text{при } i = r. \end{cases} \quad (2.2)$$

Після обчислення B_i' і A'_{ij} згідно (2.1) і (2.2) їх значення заносять в табл.2.2.

Таблица 2.2

i	Базис	СБ	P_0	C_1	C_2	...	C_r	...	C_m	C_{m+1}	...	C_k	...	C_n
				P_1	P_2	...	P_r	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	C_1	B'_1	1	0	...	A'_{1r}	...	0	A'_{1r+1}	...	0	...	A'_{1n}
2	P_2	C_2	B'_2	0	1	...	A'_{2r}	...	0	A'_{2r+1}	...	0	...	A'_{2n}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	P_r	C_r	B'_r	0	1	...	A'_{rr}	...	0	A'_{rm+1}	...	1	...	A'_{rn}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	C_m	B'_m	0	0	...	A'_{mr}	...	1	A'_{mm+1}	...	0	...	A'_{mn}
m+1			F'_0	0	0	...	Z'_{r-} C_r	...	0	Z'_{m+1-} C_{m+1}	...	0	...	Z'_{n-} C_n

Елементи (m+1) -го рядка цієї таблиці можуть бути обчислені по формулам

$$F'_0 = F_0 - (B_r/A_{rk}) * \Delta_k; \quad (2.3)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - (A_{rj}/A_{rk}) * \Delta_k \quad (2.4)$$

або на підставі їх визначення.

Наявність двох способів знаходження елементів $(m+1)$ -го рядка дозволяє здійснювати контроль правильності обчислень, що проводяться.

З (2.3) витікає, що при переході від одного опорного плану до іншого найдоцільніше ввести в базис вектор P_j , що має індекс j , при якому максимальним по абсолютній величині є число $(B_i/A_{ij}) \cdot j$ ($j > 0$, $A_{ij} > 0$). Проте в цілях спрощення обчислювального процесу надалі будемо вектор, що вводиться в базис, визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини негативних чисел j . Якщо ж таких чисел декілька, то в базис вводитимемо вектор, що має такий же індекс, як і максимальне з чисел C_j , що визначаються даними числами j ($j < 0$).

Отже, перехід від одного опорного плану до іншого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислити як за допомогою формул (2.1) - (2.4), так і по правилам, що безпосередньо витікають з них. Ці правила полягають в наступному.

У стовпцях векторів, що входять в базис, на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляють одиниці, а решта всіх елементів даних стовпців покладають рівними нулю.

Елементи векторів P_0 і P_j в рядку нової симплекс-таблиці, в якій записаний вектор, що вводиться в базис, отримують з елементів цього ж рядка початкової таблиці діленням їх на величину розв'язуючого елементу. У стовпці C_6 в рядку вектора, що вводиться, проставляють величину C_k , де k - індекс вектора, що вводиться.

Решта елементів стовпців векторів P_0 і P_j новою симплекс-таблиці, обчислюють за правилом трикутника. Для обчислення кожного з цих елементів знаходять три числа.

1. Число, що стоїть в початковій симплекс-таблиці на місці шуканого елементу нової симплекс-таблиці.

2. Число, що стоїть в початковій симплекс-таблиці на перетині рядка, в якому знаходиться шуканий елемент нової симплекс-таблиці, і стовпця, відповідного вектору, що вводиться в базис.

3. Число, що стоїть в новій симплекс-таблиці на перетині стовпця, в якому стоїть шуканий елемент, і рядка вектора, що знов вводиться в базис. Як відзначено раніше, цей рядок виходить з рядка

початкової симплекс-таблиці діленням її елементу на розв'язуючий елемент.

Ці три числа утворюють своєрідний трикутник, дві вершини якого відповідають числам, що знаходяться в початковій симплекс-таблиці, а третя - числу, що знаходиться в новій симплекс-таблиці. Для визначення шуканого елементу нової симплекс-таблиці з першого числа віднімають добуток другого і третього.

Після заповнення нової симплекс-таблиці переглядають елементи $(m+1)$ -го рядка. Якщо всі $Z'_j - C_j \geq 0$, то новий опорний план є оптимальним. Якщо ж серед вказаних чисел є негативні, то, використовуючи описану вище послідовність дій, знаходять новий опорний план. Цей процес продовжують до тих пір, поки або не отримують оптимальний план задачі, або не встановлюють її нерозв'язності.

При знаходженні рішення задачі ЛП припускали, що ця задача має опорні плани і кожен такий план є не виродженим. Якщо ж задача має вироджені опорні плани, то на одній з ітерацій одна або декілька змінних опорного плану можуть виявитися рівними нулю.

Таким чином, при переході від одного опорного плану до іншого значення функції може залишитися тим самим. Більш того, можливий випадок, коли функція зберігає своє значення протягом декількох ітерацій, а також можливе повернення до первинного базису.

В останньому випадку зазвичай говорять, що відбулося зациклення. Проте при рішенні задач цей випадок зустрічається дуже рідко, тому на ньому зупинятися не будемо.

2.1.2 Приклад вирішення задачі лінійного програмування симплексним методом

Для виготовлення різних виробів А, В і С підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрати сировини на виробництво виробів кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в табл.2.3.

Таблиця 2.3

Тип сировини	Норми витрат сировини, кг на один виріб			Загальний фонд сировини, кг
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	240
Ціна одного виробу, грн.	9	10	16	-

Вироби А, В і С можуть проводитися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду.

Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї проведеної підприємством продукції є максимальною.

Складемо математичну модель задачі. Шуканий випуск виробів А позначимо через X_1 , виробів В - через X_2 , виробів С - через X_3 . Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини сировини кожного виду, змінні X_1 , X_2 , X_3 повинні задовольняти наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} 18 \cdot X_1 + 15 \cdot X_2 + 12 \cdot X_3 \leq 360; \\ 6 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 + 8 \cdot X_3 \leq 192; \\ 5 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 180. \end{cases} \quad (2.5)$$

Загальна вартість проведеної підприємством продукції за умови випуску X_1 виробів А, X_2 виробів В і X_3 виробів С складає

$$F = 9 \cdot X_1 + 10 \cdot X_2 + 16 \cdot X_3. \quad (2.6)$$

За своїм змістом змінні X_1 , X_2 , X_3 можуть приймати тільки ненегативні значення

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0. \quad (2.7)$$

Таким чином, приходимо до наступного математичного задачі: серед всіх ненегативних рішень системи нерівностей (2.5) потрібно знайти таке, при якому функція (2.6) приймає максимальне значення.

Запишемо цю задачу у формі основної задачі ЛП. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей.

Введемо три додаткові змінні, внаслідок чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} 18*X_1+15*X_2+12*X_3+X_4 = 360; \\ 6*X_1+4*X_2+8*X_3+X_5 = 192; \\ 5*X_1+3*X_2+3*X_3+X_6 = 180. \end{cases}$$

Введені додаткові змінні означають не використовувану при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду. Наприклад, X_4 - це неживана кількість сировини I виду.

Перетворену систему рівнянь запишемо у векторній формі:

$$X_1*P_1 + X_2*P_2 + X_3*P_3 + X_4*P_4 + X_5*P_5 + X_6*P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}; P_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; P_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}; P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; P_0 = \begin{bmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Оскільки серед векторів P_1, P_2, P_3 є три одиничні вектори (нагадаємо, що одиничним називається вектор, модуль якого рівний одиниці), для даного задачі можна безпосередньо записати опорний план. Таким є план $X = (0;0;0;360;192;180)$, що визначений системою тривимірних одиничних векторів P_4, P_5, P_6 , які утворюють базис тривимірного векторного простору.

Складаємо симплексну таблицю для I ітерації (табл.2.4), підраховуємо значення F_0 , $Z_j - C_j$ і перевіряємо початковий опорний план на оптимальність:

$$F_0 = (C, P_0) = 0; Z_1 = (C_1, P_1) = 0; Z_2 = (C_2, P_2) = 0;$$

$$Z_3 = (C_3, P_3) = 0; Z_1 - C_1 = 0 - 9 = -9; Z_2 - C_2 = 0 - 10 = -10;$$

$$Z_3 - C_3 = -16.$$

Для векторів базису, тобто для векторів P_4, P_5, P_6

$$Z_j - C_j = 0.$$

Таблиця 2.4

i	Базис	СБ	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Як видно з табл.2.4, значення всіх основних змінних X_1, X_2, X_3 рівні нулю, а додаткові змінні X_4, X_5, X_6 приймають свої значення відповідно до обмежень задачі.

Ці значення змінних відповідають такому "плану", при якому нічого не проводиться, сировина не використовується і значення цільової функції рівне нулю (тобто вартість проведеної продукції відсутня). Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно і з 4-го рядка табл.2.4, оскільки в ній є три негативні числа: $Z_1 - C_1 = -9$; $Z_2 - C_2 = -10$; $Z_3 - C_3 = -16$.

Негативні числа свідчать не тільки про можливість збільшення загальної вартості виготовляємої продукції, але і показують, на скільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того або іншого виду продукції.

Так, число -9 означає, що при включенні в план виробництва одного виробу А забезпечується збільшення випуску продукції на 9 грн. Якщо включити в план виробництва по одному виробу В і С, то загальна вартість продукції, що виготовляється, зростає відповідно на

10 і 16 грн. Тому найбільш доцільним є включення в план виробництва виробів С. Те ж необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне по абсолютній величині негативне число стоїть в 4-му рядку стовпця вектора P_3 . Отже, в базис введемо вектор P_3 .

Визначимо вектор, що підлягає виключенню з базису. Для цього знаходимо

$$\theta_0 = \min(B_i/A_{i3}) \text{ для } A_{i3} > 0, \text{ тобто}$$

$$\theta_0 = \min(360/12; 192/8; 180/3) = 192/8.$$

Знайшовши число $192/8 = 24$, ми тим самим визначили, яка кількість виробів С підприємство може виготовляти з урахуванням норм витрати і наявних об'ємів сировини кожного виду. Оскільки сировини даного виду відповідно є 360, 192 і 180 кг, а на один виріб С потрібно витратити сировини кожного виду відповідно 12, 8 і 3 кг, то максимальне число виробів С, яке може бути виготовлене підприємством рівне $\min(360/12; 192/8; 180/3 = 192/8 = 24)$, тобто обмежуючим чинником для виробництва виробів С є наявний об'єм сировини II виду. З урахуванням його наявності підприємство може виготовити 24 вироби С. При цій сировині II виду буде повністю реалізовано.

Отже, вектор P_5 підлягає виключенню з базису. Стовпець вектора P_3 і 2-й рядок є направляючим. Складемо таблицю для II ітерації (табл.2.5).

Таблиця 2.5

i	Базис	СБ	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Спочатку заповнюємо рядок вектора, знов введеного в базис, тобто рядок, номер якого співпадає з номером направляючого рядка. Тут направляючим є другий рядок. Елементи цього рядка табл.2.5.

отримуються з відповідних елементів табл. 2.4. діленням їх на розв'язувальний елемент (тобто на 8). При цьому в стовпці C_6 записується коефіцієнт $C_3=16$, що стоїть в стовпці вектора P_2 , що вводиться в базис.

Потім заповнюємо елементи стовпців для векторів P_4 , P_3 , P_6 , що входять в новий базис. У цих стовпцях на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляємо одиниці, а решта всіх елементів вважаємо рівними нулю.

Для визначення решти елементів табл.2.5 застосовуємо правило трикутника.

Обчислимо елементи табл.2.5, що стоять в стовпці вектора P_0 . Перший з них знаходиться в 1-му рядку цього стовпця. Для його обчислення знаходимо три числа:

- число, що стоїть в табл.2.4 на перетині стовпця вектора P_0 і 1-го рядка (360);
- число, що стоїть в табл.2.4 на перетині стовпця вектора P_3 і 1-го рядка (12);
- число, що стоїть в табл.2.5 на перетині стовпця вектора P_0 і 2-го рядка (24).

Віднімаючи з першого числа добуток двох інших, знаходимо шуканий елемент: $360-12*24=72$; записуємо його в 1-му рядку стовпця P_0 табл.2.5.

Другий елемент вектора P_0 табл.2.5 у нас обчислений раніше. Для обчислення третього елементу стовпця вектора P_0 також знаходимо три числа. Перше з них (180) знаходиться на перетині 3-го рядка і стовпця вектора P_0 табл.2.4, друге (3) - на перетині 3-го рядка і стовпця вектора P_3 табл.2.4, третє (24) - на перетині 2-го рядка і стовпця вектора P_0 табл.2.5. Отже, вказаний елемент є $180-24*3=108$. Число 108 записуємо в третьому рядку стовпця вектора P_0 табл.2.5. Значення F_0 в 4-му рядку табл.2.5 вектора P_0 можна знайти двома способами:

- по формулі $F_0 = (C, P_0)$, тобто $F_0 = 0*72+16*24+0*108 = 384$;
- за правилом трикутника; в даному випадку трикутник утворений числами 0, -16, 24. Цей спосіб приводить до того ж результату: $0-(-16)*24 = 384$.

При визначенні за правилом трикутника елементів стовпця вектора P_0 третє число (24), що стоїть в нижній вершині трикутника, весь час залишалося незмінним і мінялися лише перші два числа.

Врахуємо це при знаходженні елементів стовпця вектора P_1 табл.2.5. Для обчислення вказаних елементів перші два числа беремо із стовпців векторів P_1 і P_3 табл.2.4, а третє число - з табл.2.5. Це число $(3/4)$ стоїть на перетині 2-го рядка і стовпця вектора P_1 останньої таблиці. В результаті отримуємо значення шуканих елементів: $18 - 12 * (3/4) = 9$, $5 - 3 * (3/4) = 11/4$.

Число Z_1-C_1 в 4-му рядку стовпця вектора P_1 табл.2.5 можна знайти двома способами:

- по формулі $Z_1-C_1=(3, P_1)-C_1$ маємо $0*9+16*3/4+0*11/4-9=3$;
- за правилом трикутника отримаємо $-9 - (-16) * (3/4) = 3$.

Аналогічно знаходимо елементи вектора P_2 . Елементи стовпця вектора P_5 обчислюємо за правилом трикутника. Проте, побудовані для визначення цих елементів трикутники виглядають інакше.

При обчисленні елементу 1-го рядка вказаного стовпця виходить трикутник, утворений числами 0, 12 і $1/8$. Отже, шуканий елемент рівний $0 - 12 * (1/8) = -3/2$. Елемент, що стоїть в 3-му рядку даного стовпця, дорівнює $0 - 3 * (1/8) = -3/8$.

Після закінчення розрахунку всіх елементів табл.2.5 в ній отримані новий опорний план і коефіцієнти розкладання векторів P_j ($j=1,6$) через базисні вектори P_3, P_4, P_6 і значення ΔJ і F_0 . Як видно з цієї таблиці, новим опорним планом задачі є план $X = (0; 0; 24; 72; 0; 108)$. При даному плані виробництва виготовляються 24 вироби С і залишається невикористаним 72 кг сировини І виду і 106 кг сировини ІІІ виду. Вартість всієї вироблюваної при цьому продукції дорівнює 384 грн. Вказані числа записані в стовпці вектора P_6 табл.2.5. Як видно, дані цього стовпця є параметрами даної задачі, хоча вони зазнали значні зміни.

Змінилися дані і інших стовпців, а їх смисловий зміст став складнішим. Візьмемо, наприклад, дані стовпця вектора P_2 . Число $1/2$ в 2-му рядку цього стовпця показує, на скільки слід зменшити виготовлення виробів, якщо запланувати випуск одного виробу.

Числа 9 і $3/2$ в 1-му і 3-му рядках вектора P_2 показують відповідно, скільки буде потрібно сировини І і ІІІ виду при включенні в план виробництва одного виробу В, а число -2 у 4-му рядку показує, що якщо буде запланований випуск одного виробу В, то це забезпечить збільшення випуску продукції у вартістю на 2 грн. Іншими словами, якщо включити в план виробництва продукції один

виріб, то це спричинить зменшення випуску виробу С на $1/2$ од. і зажадає додаткових витрат 9 кг сировини І виду і $3/2$ кг ІІІ виду, а загальна вартість продукції, що виготовляється, відповідно до нового опорного плану зростає на 2 грн.

Таким чином числа 9 і $3/2$ виступають як би новими "нормальними" витрат сировини І і ІІІ виду на виготовлення одного виробу В (як видно з табл.2.4, раніше вони були рівні 15 і 3), що пояснюється зменшенням випуску виробів С.

Такий же зміст мають і дані стовпця вектора P_1 табл.2.5.

Декілька інший зміст мають числа, записані в стовпці вектора P_5 . Число $1/8$ в 2-му рядку цього стовпця показує, що збільшення об'ємів сировини ІІ виду на 1 кг дало б можливість збільшити випуск виробів на $1/8$ од. Одночасно було б потрібно додатково $3/2$ кг сировини І виду і $3/8$ кг сировини ІІІ виду. Збільшення випуску виробів С на $1/8$ од. приведе до зростання випуску продукції на 2 грн.

З викладеного змісту даних табл.2.5 виходить, що знайдений на ІІ ітерації план задачі не є оптимальним. Це видно і з 4-го рядка табл.2.5, оскільки в стовпці вектора P_2 цього рядка стоїть негативне число -2. Значить, в базис слід ввести вектор P_2 , тобто в новому опорному плані слід передбачити випуск виробів В. При визначенні можливого числа виготовлених виробів В слід враховувати наявну кількість сировини кожного виду, а саме: можливий випуск виробів В визначається $\min(B'_i/A'_{i2})$ для $A'_{i2} > 0$, тобто знаходимо $Q_0 = \min(72/9; 24 \cdot 2/1; 108 \cdot 2/3) = 72/9 = 8$.

Отже, виключенню з базису підлягає вектор P_4 , іншими словами, випуск виробів В обмежений сировиною І виду, що є у розпорядженні підприємства. З урахуванням наявних об'ємів цієї сировини підприємству слід виготовити 8 виробів. Число 9 - розв'язувальний елемент, а стовець вектора P_2 і 1-й рядок табл.2.5 є направляючим. Складаємо таблицю для ІІІ ітерації (табл.2.6).

Таблиця 2.6

і	Бази с	Сб	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1	-1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_5	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

У табл.2.6 спочатку заповнюємо елементи 1-го рядка, який є рядком що знов вводиться в базис вектора P_2 . Елементи цього рядка отримуємо з елементів 1-го рядка табл.2.5 діленням останніх на розв'язувальний елемент (тобто на 9). При цьому в стовпці Сб даного рядка записуємо $C_2 = 10$.

Потім заповнюємо елементи стовпців векторів базису і за правилом трикутника обчислюємо елементи решти стовпців. В результаті в табл.2.6 отримуємо новий опорний план $X = (0; 8; 20; 0; 0; 96)$ і коефіцієнти розкладання векторів P_j ($j=1,6$) через базисні вектори P_2, P_3, P_6 і відповідні значення Δ_j і F_0 .

Перевіряємо, чи є даний опорний план оптимальним. Для цього розглянемо 4-й рядок табл.2.6. У цьому рядку серед чисел Δ_j немає негативних. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним і $F_{\max} = 400$.

Отже, план випуску продукції, що включає виготовлення 8 виробів В і 20 виробів С, є оптимальним. При даному плані випуску виробів повністю використовується сировина І і ІІ видів і залишається невикористаними 96 кг сировини ІІІ виду, а вартість продукції дорівнює 400 грн.

Оптимальним планом виробництва продукції не передбачається виготовлення виробів А. Додавання до плану випуску виробів виду А призвело б до зменшення вказаної загальної вартості. Це видно з 4-го рядка стовпця вектора P_1 , де число 5 показує що при даному плані включення в його випуску одиниці виробу А приводить лише до зменшення загальної вартості на 5 грн.

Рішення даного прикладу симплексним методом можна було б проводити, використовуючи лише одну таблицю (табл.2.7). У цій

таблиці послідовно записано одна за одною всі три ітерації обчислювального процесу.

Таблиця 2.7

i	Баз ис	СБ	P ₀	9	10	16	0	0	0
				P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
1	P ₄	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P ₅	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P ₆	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0
1	P ₄	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P ₅	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P ₆	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0
1	P ₂	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P ₃	16	20	1/4	0	1	-1/8	5/24	0
3	P ₆	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

2.2 Завдання до лабораторної роботи

Розробити програмну реалізацію вирішення завдань ЛП симплексним методом :

1. $F = -3x_1 + 6x_2 \rightarrow \min;$

2. $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -4,$$

$$x_1 + x_2 \geq 4;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$-5x_1 + x_2 \leq 0,$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leq 7, \\ -x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1 + x_2 &\leq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. $F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ 3x_1 + x_2 &\geq 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

5. $F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

6. $F = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 10, \\ 3x_1 + x_2 &\geq 15; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. $F = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6, \\ -3x_1 + 2x_2 &\geq 3; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

8. $F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 1; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

9. $F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\leq 16, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + 7x_2 &\leq 9; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

10. $F = 8x_1 - 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\leq 4, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3; \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

11. $F = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\geq 7, \\ 7x_1 - 5x_2 &\geq 35, \\ x_1 - x_2 &\leq 0; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

12. $F = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 14, \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 9, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 27; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

13. $F=2x_1-3x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 5x_1+2x_2 &\geq 10, \\ x_1+3x_2 &\leq 12; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

14. $F=x_1+x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 2x_1+11x_2 &\leq 38, \\ x_1+x_2 &\leq 7, \\ 4x_1-5x_2 &\leq 5; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

15. $F=x_1+2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 4x_1-2x_2 &\leq 12, \\ -x_1+3x_2 &\leq 6, \\ 2x_1+4x_2 &\geq 16; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

16. $F=-2x_1+x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2 &\leq 12, \\ -x_1+2x_2 &\leq 8, \\ 2x_1+3x_2 &\geq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

17. $F=2x_1+3x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &\geq 8, \\ x_1+2x_2 &\geq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

18. $F=x_1+2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\leq 6, \\ 3x_1+10x_2 &\leq 26, \\ x_1+11x_2 &\leq 20; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

19. $F=2x_1+6x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 8x_1-5x_2 &\leq 40, \\ 2x_1+5x_2 &\geq 10, \\ -6x_1+5x_2 &\leq 60, \\ 2x_1+x_2 &\leq 14; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

20. $F=3x_1+x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\geq 5, \\ 2x_1+4x_2 &\leq 16, \\ 3x_1+x_2 &\geq 6, \\ x_1+3x_2 &\leq 9; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

21. $F=3x_1+2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &\leq 2, \\ 2x_1+x_2 &\leq 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

22. $F=3x_1+2x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{aligned} 4x_1+2x_2 &\geq 12, \\ x_1+2x_2 &\leq 10, \\ 2x_1+2x_2 &= 6; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$23. F=x_1+2x_2 \rightarrow \max;$$

$$5x_1-2x_2 \leq 4,$$

$$x_1-2x_2 \geq -4,$$

$$x_1+x_2 \geq 4,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$24. F=2x_1-x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1-x_2 \geq -3,$$

$$6x_1+7x_2 \leq 42,$$

$$2x_1-3x_2 \leq 6;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

2.3 Порядок виконання роботи

2.3.1 Проаналізувати початкове завдання. Записати завдання в формі основної задачі лінійного програмування.

2.3.2 Записати систему рівнянь у векторній формі.

2.3.3 Написати програму, що реалізовує методику рішення основної задачі лінійного програмування. Розроблена програма повинна:

- знаходити початковий опорний план;
- складати результатну симплекс-таблицю;
- з'ясовувати, чи є в симплекс-таблиці хоч би одне негативне число $-j$. Якщо негативних чисел немає, то знайдений опорний план оптимальний. Якщо ж серед чисел $-j$ є негативні, то або встановити нерозв'язність задачі, або переходити до нового опорного плану;
- знаходити направляючий стовпець. Він визначається найбільшим по абсолютній величині негативним числом Δ_j ;
- знаходити направляючий рядок. Він визначається мінімальним з відносин компонент вектора P_0 до позитивних компонентів напрямного стовпця;
- знайти розв'язувальний елемент;
- визначати вектори нового базису;
- за правилом трикутника або по формулах (2.1) - (2.4) визначати позитивні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладання векторів P_j по векторах нового базису і числа F_0 , Δ_j . Всі ці числа записувати в новій симплекс-таблиці;

- перевіряти знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану, то повернутися до етапу встановлення направляючого стовпця, а у разі отримання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес рішення задачі закінчується.

2.4 Зміст звіту

2.4.1 Сформульована мета роботи.

2.4.2 Постановка задачі ЛП згідно варіанту.

2.4.3 Програма реалізації методики рішення загальної задачі лінійного програмування.

2.4.4 Результати роботи програми, що містять результатну і отримані симплекс-таблиці та результатний і знайдені опорні плани.

2.4.5 Аналіз отриманих результатів і висновки.

2.5 Контрольні питання

2.5.1 Яким чином за умовами задачі ЛП заповнюється результатна симплекс-таблиця?

2.5.2 Як можна отримати початковий опорний план?

2.5.3 Як перевірити опорний план на оптимальність? Назвіть умови отримання оптимального плану.

2.5.4 Як за допомогою симплексного методу визначити, що задача ЛП має необмежений оптимум (тобто цільова функція необмежена зверху на безлічі планів і рішення задачі відсутнє)?

2.5.5 Як вибрати направляючий стовпець і направляючий рядок?

2.5.6 Як визначити розв'язувальний елемент?

2.5.7 Як визначити елементи нової симплекс-таблиці?

2.5.8 Який фізичний зміст правила мінімального відношення, використовуюваного для визначення вектора, що підлягає виключенню з базису?

2.5.9 Назвіть етапи рішення задачі ЛП симплексним методом.

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

3.1 Теоретичні відомості

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукування оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i -го постачальника до кожного B_j -го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву **транспортної задачі за критерієм вартості перевезень**.

Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача

$(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. Тоді умови задачі зручно подати у вигляді такої таблиці:

Таблиця 3.1

Споживачі		$B1$	$B2$	...	Bn
Постачальні		$b1$	$b2$	...	bn
ики					
1	A	$a1$	1 $c1$	2 $c1$	n $c1$
			1 $x1$	2 $x1$	n $x1$
			1	2	n
2	A	$a2$	1 $c2$	2 $c2$	n $c2$
			1 $x2$	2 $x2$	n $x2$
			1	2	n
...	...	...	...	...	...
m	A	am	1 cm	2 cm	n cm
			1 xm	2 xm	n xm
			1	2	n

Мають виконуватися такі умови:

- сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i -го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:
- сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j -му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

- сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3.1)$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}); \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (3.4)$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.5)$$

Транспортну задачу називають *збалансованою*, або *закритою*, якщо виконується умова (3.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають *незбалансованою*, або *відкритою*.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (3.2)—(3.4), який позначають матрицею $X = x_{ij} \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. Значення невідомих величин x_{ij} — обсяги продукції, що мають бути перевезені від i -х постачальників до j -х споживачів, називатимемо *перевезеннями*.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x_{ij}^* \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$, яка задовольняє умовам задачі, і для якої цільова функція (3.1) набирає найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі): необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної

задачі є її збалансованість:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Якщо при перевірці збалансованості виявилось, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у

разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{i=1}^m a_i \right)$, із

ресурсом обсягом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$. Якщо ж загальні запаси

постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j \right)$, то до

закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного)

споживача B_{m+1} з потребою $b_{m+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{n+1} (або фіктивного споживача B_{m+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Назвемо **опорним планом** транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є не виродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то маємо вироджений опорний план.

Якщо **умови транспортної задачі** і її **опорний план** записані у вигляді табл. 1.1, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для не виродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Назвемо **циклом** таку послідовність заповнених клітин таблиці 1.1, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Теорема. Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Отже, базисні клітини опорного плану завжди утворюють ациклічну послідовність клітин.

Наслідок теореми. Будь-яка сукупність з $m + n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Теорема. Якщо всі запаси a_i ($i = \overline{1, m}$) і всі потреби b_j ($j = \overline{1, n}$) є невід'ємними цілими числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Як і в звичайному симплексному методі, **розв'язування транспортної задачі** полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам.

Нехай умови конкретної транспортної задачі подані в табл. 3.2.

Ідея **методу північно-західного кута** полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1 . Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1 , використовуючи запаси першого постачальника A_1 . У нашому прикладі (табл. 3.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника — $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1 , b_1 , тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2 . Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить $150 - 110 = 40$. Отже, від

першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітинку $A1B2$ записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника $A2$.

Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача $50 - 40 = 10$, тому в клітинку $A2B2$ записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до задоволення потреб наступного споживача $B3$. У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить $60 - 10 = 50$. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка $A2B3$ міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника $A2$ будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника $A3$. Залишилися незадоволеними потреби третього споживача в обсязі $60 - 50 = 10$. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника $A3$. У клітинку $A3B3$ записуємо число 10, і потреби споживача $B3$ також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача $B4$ з потребами $b_4 = 80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: $90 - 10 = 80$.

Отже, в таблиці 3.2 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях — обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним.

Таблиця 3.2

Постачальники	Запаси	Споживачі			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме $110 \cdot 4 = 440$ ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.)}.$$

Теорема. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх постачань може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея **методу мінімальної вартості** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі (табл. 3.3).

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції —

1 ум. од.). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, $A2B3$. Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину $A2B3$ ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину $A3B2$.

З клітинок таблиці, що залишились незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин $A1B3$, $A2B4$, $A3B1$ та $A3B4$. Заповнення клітин $A2B4$ та $A1B3$ неможливе, оскільки постачальник $A2$ вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача $B3$, а споживач $B3$ повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину $A3B1$ чи $A3B4$. Заповнимо $A3B1$. Обсяг запасів $a3 = 90$, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок $90 - 50 = 40$, а потреби $b1 = 110$, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину $A3B4$ не можна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишились пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені.

Таблиця 3.3

b_j	$b1 =$	$b2 =$	$b3 =$	$b4 =$
a_i	110	50	60	80
150	$a1 =$ 4 70	4	2	5 80
60	$a2 =$ 5	3	1 60	2
90	$a3 =$ 2 40	1 50	4	2

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_{ij}^* (u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u_i^* \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^* - a_i \right) = 0, i = \overline{1, m}; \\ v_j^* \left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^* - b_j \right) = 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.

Перша умова виконується у двох випадках:

а) якщо $x_{ij}^* = 0$. Другий співмножник $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) \leq 0$, бо за умовою $u_i + v_j \leq c_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$);

б) якщо $x_{ij}^* > 0$, то за умовою транспортної задачі $x_{ij}^* > 0$, тоді $(u_i^* + v_j^* - c_{ij}) = 0 \Rightarrow u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j , для яких виконуються умови:

$$u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1, m}$ та $j = \overline{1, n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв'язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи замкнута). За необхідності слід звести задачу до замкнутого типу.

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.

3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові поставання.

4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m + n - 1$, а кількість невідомих — $(m + n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max \{ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \}$.

Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить $m + n$, отже, з цих клітин обов'язково утвориться цикл (теореми та наслідок § 5.2). У межах даного циклу здійснюють перерахунки, які приводять до перерозподілу поставань продукції. Кожній вершині

циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «-» та «+». У клітинках зі знаком «-» вибирають значення $q = \min x_{ij}$ і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «-». Якщо значенню q відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невідродженість опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору q дістаємо новий опорний план, який не містить від'ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число q додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальною величиною x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану.

Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану.

Зауважимо, що аналогічно з розв'язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність $u_i + v_j = c_{ij}$, то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

Приклад розв'язування транспортної задачі методом потенціалів

Компанія контролює три фабрики A_1 , A_2 , A_3 , здатні виготовляти відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала

договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4 , яким потрібно щотижня доставляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в табл. 3.10.

Таблиця 3.10 - Вартість транспортування продукції

Фабрика	Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити оптимальний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i -ї фабрики до j -го замовника ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 4}$). Оскільки транспортна задача за умовою є

збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 290 \right)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

$$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}.$$

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

$$\min Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Розв'язання. Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці (табл. 3.11) та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом мінімальної вартості.

Таблиця 3.11

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 2	5 40	$u_1 = 5$
$a_2 = 60$	5	3	60 1	2 0	$u_2 = 2$
$a_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Загальна вартість перевезень продукції згідно з першим опорним планом визначається у такий спосіб:

$$Z1 = 4 \times 110 + 5 \times 40 + 1 \times 60 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 820 \text{ (ум. од.)}.$$

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

Для дальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту клітинку, яка не утворює замкненого циклу із заповненими клітинами. Наприклад, заповнимо нулем клітинку $A2B4$. Тепер перший план транспортної задачі є не виродженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь (для заповнених клітин таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4; \\ u_1 + v_4 = 5; \\ u_2 + v_3 = 1; \\ u_2 + v_4 = 2; \\ u_3 + v_2 = 1; \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, узявши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$. Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$$A1B2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$$

$$A1B3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$$

$$A2B1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$$

$$A2B2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$$

$$A3B1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$$

$$A3B3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітинки $A1B3$. Порухення $D13 = (u1 + v3) - c13 = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку $A1B3$, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки $A1B3$, та позначаємо вершини циклу по черговому знаками «-» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у порожню клітинку $A1B3$ переносимо менше з чисел x_{ij} , які розміщені в клітинках зі знаком «-». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «-».

У даному разі $\min\{60; 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для клітинки $A1B3$ — 40 од. продукції, а для $A2B3$ — $(60 - 40) = 20$ од., а для $A2B4$ — $(0 + 40) = 40$ од. Клітинка $A1B4$ звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невинородженості плану, тобто порівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 3.12):

Таблиця 3.12

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4 -	2 + 40	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$		5 3	1 - 20	2 + 40	$u_2 = -1$
$a_3 = 80$	2 1	1 40	4 -	2 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

$Z_2 = 4 \times 110 + 2 \times 40 + 1 \times 20 + 2 \times 40 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 740$ (ум. од.).

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл. 3.13:

Таблиця 3.13

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
150 $a_1 =$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
60 $a_2 =$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
80 $a_3 =$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

$Z_3 = 4 \times 90 + 2 \times 60 + 2 \times 60 + 2 \times 20 + 1 \times 40 + 2 \times 20 = 720$ (ум. од.).

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому:

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

3.2 Завдання

Розробити програмну реалізацію вирішення транспортної задачі та отримати рішення згідно варіанту:

3.2.1

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \hline & 1 & 8 & 2 & 3 & 30 \\ & 4 & 7 & 5 & 1 & 50 \\ & 5 & 3 & 4 & 4 & 20 \\ \hline b_i & 15 & 15 & 40 & 30 & \end{array}$$

3.2.2

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \hline & 2 & 4 & 5 & 1 & 60 \\ & 2 & 3 & 9 & 4 & 70 \\ & 3 & 4 & 22 & 5 & 20 \\ \hline b_i & 40 & 30 & 30 & 50 & \end{array}$$

3.2.3

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \hline & 4 & 5 & 5 & 7 & 100 \\ & 8 & 7 & 5 & 4 & 120 \\ & 9 & 6 & 4 & 5 & 150 \\ & 3 & 2 & 9 & 3 & 130 \\ \hline b_i & 140 & 130 & 90 & 140 & \end{array}$$

3.2.4

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 60 \\ 70 \\ 20 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad 40 \quad 30 \quad 30 \quad 50 \end{array}$$

3.2.5

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 60 \\ 65 \\ 70 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad 40 \quad 60 \quad 70 \quad 25 \end{array}$$

3.2.6

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 40 \\ 30 \\ 35 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad 20 \quad 34 \quad 16 \quad 10 \quad 15 \end{array}$$

3.2.7

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 50 \\ 5 & 2 & 7 & 5 & 20 \\ 6 & 4 & 8 & 2 & 30 \\ 7 & 1 & 5 & 7 & 20 \end{array} \\ b_i \quad 40 \quad 30 \quad 35 \quad 15 \end{array}$$

3.2.8

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 40 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 30 \\ 5 & 7 & 5 & 1 & 20 \end{array} \\ b_i \quad 30 \quad 25 \quad 18 \quad 20 \end{array}$$

3.2.9

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 10 & 5 & 7 & 4 & 40 \\ 7 & 4 & 9 & 10 & 25 \\ 6 & 14 & 8 & 7 & 35 \end{array} \\ b_i \quad 15 \quad 40 \quad 30 \quad 15 \end{array}$$

3.2.10

$$C = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & a_i \\ \hline & 3 & 2 & 4 & 1 & 50 \\ & 2 & 3 & 1 & 5 & 40 \\ & 3 & 2 & 7 & 4 & 20 \\ \hline b_i & 30 & 25 & 35 & 20 & \end{array}$$

3.2.11

$$C = \begin{array}{cccccc|c} & & & & & & a_i \\ \hline & 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 & 130 \\ & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 90 \\ & 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 & 100 \\ & 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 & 140 \\ \hline b_i & 110 & 50 & 30 & 80 & 100 & 90 & \end{array}$$

3.2.12

$$C = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 7 & 60 \\ & 3 & 40 & 15 & 5 & 55 \\ & 6 & 4 & 8 & 3 & 40 \\ & 24 & 3 & 3 & 1 & 35 \\ \hline b_i & 70 & 5 & 45 & 70 & \end{array}$$

3.2.13

$$C = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & a_i \\ \hline 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 30 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 45 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 2 & 70 \\ \hline b_i & 10 & 35 & 15 & 25 & 35 \end{array}$$

3.2.14

$$C = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & a_i \\ \hline 1 & 3 & 3 & 8 & & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 6 & & 20 \\ 7 & 7 & 3 & 8 & & 40 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & & 45 \\ \hline b_i & 25 & 30 & 40 & 15 & \end{array}$$

3.2.15

$$C = \begin{array}{ccccc|c} & & & & & a_i \\ \hline 8 & 12 & 4 & 9 & 10 & 60 \\ 7 & 5 & 15 & 3 & 6 & 40 \\ 9 & 4 & 6 & 12 & 7 & 100 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 50 \\ \hline b_i & 30 & 80 & 65 & 35 & 40 \end{array}$$

3.2.16

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{cccc} 18 & 2 & 9 & 7 \\ 30 & 4 & 1 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 68 \\ 55 \\ 40 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 3 & 16 \end{array} \end{array}$$

3.2.17

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 20 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad \begin{array}{cccc} 16 & 18 & 12 & 15 \end{array} \end{array}$$

3.2.18

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & a_i \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 130 \\ 90 \\ 40 \end{array} \end{array} \\ b_i \quad \begin{array}{ccccc} 110 & 30 & 50 & 80 & 90 \end{array} \end{array}$$

3.2.19

$$C = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{array} \right| \begin{array}{c} a_i \\ 45 \\ 35 \\ 70 \end{array} \\ b_i \quad 20 \quad 60 \quad 55 \quad 45 \end{array}$$

3.2.20

$$C = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right| \begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 20 \\ 40 \\ 50 \end{array} \\ b_i \quad 35 \quad 20 \quad 55 \quad 30 \end{array}$$

3.2.21

$$C = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} 2 & 8 & 6 & 8 & 2 & 10 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right| \begin{array}{c} a_i \\ 130 \\ 90 \\ 100 \\ 140 \end{array} \\ b_i \quad 110 \quad 50 \quad 30 \quad 80 \quad 100 \quad 90 \end{array}$$

3.2.22

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 3 & 3 & 8 & a_i \\ \hline & 8 & 6 & 2 & 6 & 20 \\ \hline & 7 & 7 & 3 & 8 & 40 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & 5 & 45 \\ \hline b_i & 25 & 30 & 40 & 15 & \end{array}$$

3.2.23

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 5 & 3 & 4 & a_i \\ \hline & 6 & 1 & 2 & 5 & 45 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 8 & 35 \\ \hline b_i & 20 & 60 & 55 & 45 & \end{array}$$

3.2.24

$$C = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 3 & 3 & 8 & a_i \\ \hline & 8 & 6 & 2 & 6 & 10 \\ \hline & 4 & 7 & 7 & 3 & 20 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & 5 & 35 \\ \hline b_i & 25 & 30 & 40 & 15 & 45 \end{array}$$

3.3 Зміст звіту

- 3.3.1 Сформульована мета роботи.
- 3.3.2 Завдання до роботи. Текст програми.
- 3.3.3 Результати роботи програми.
- 3.3.4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

3.4 Контрольні питання

- 3.4.1 Наведіть математичну модель транспортної задачі.
- 3.4.2 Яка транспортна задача є відкритою, яка є закритою?
- 3.4.3 Як перетворити відкриту транспортну задачу до закритої?
- 3.4.4 Яка умова є необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі?
- 3.4.5 Перелічіть методи побудови початкового опорного плану задачі. Які з них є більш ефективними?
- 3.4.6 Наведіть алгоритм методу потенціалів.
- 3.4.7 Як здійснюється перехід до наступного опорного плану?
- 3.4.8 Наведіть умову оптимальності опорного плану транспортної задачі.
- 3.4.9

4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4

ОДНОВИМІРНИЙ ПОШУК ОПТИМУМУ. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКЛЮЧЕННЯМ ІНТЕРВАЛІВ

Мета роботи - вивчити одновимірні методи оптимізації з виключенням інтервалів; навчитися застосовувати методи оптимізації для аналізу й обробки інформації.

4.1 Короткі теоретичні відомості

Дана робота відкриває цикл лабораторних робіт, присвячених методам одновимірного пошуку оптимуму. Аналіз завдань цього класу займає центральне місце в оптимізаційних дослідженнях. Це пов'язано не тільки з тим, що саме такі завдання зазвичай вирішуються на практиці, але й з тим, що одновимірні методи оптимізації часто використовуються для аналізу завдань, які виникають при реалізації процедур, що орієнтовані на рішення багатомірних завдань оптимізації.

Важливість оптимізаційних завдань із однією керованою змінною обумовила розробку великої кількості алгоритмів їх рішення. У даній лабораторній роботі досліджуються одновимірні методи пошуку, орієнтовані на знаходження точки оптимуму всередині заданого інтервалу. Методи пошуку, що дозволяють визначити оптимум функції однієї змінної шляхом послідовного виключення підінтервалів і, отже, шляхом зменшення інтервалу пошуку, називаються методами виключення інтервалів.

Методи пошуку, що розглядаються, засновані на припущенні, що досліджувана функція в припустимій області має властивість унімодальності. Користь цієї властивості визначається тим фактором, що для унімодальної функції порівняння значень функції у двох різних точках інтервалу пошуку дозволяє визначити, у якому із заданих двома зазначеними точками підінтервалів точка оптимуму відсутня.

4.2 Завдання до лабораторної роботи

Розробити програмну реалізацію алгоритму встановлення меж інтервалу, що містить точку оптимуму, і процедури зменшення інтервалу пошуку з використанням обох вивчених методів одновимірного пошуку. Завдання надані в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Варіанти функцій

№	Функція	Інтервал
1	$x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3} + 2$	$[-1, 1]$
2	$(2x+1)^2(x-4)$	$[-1, 5]$
3	$x^4 - 12x + 3$	$[-4, 4]$
4	$3x^2 + \frac{12}{x^3} - 5$	$[0.5, 2, 5]$
5	$(10x^3 + 3x^2 + x + 5)^2$	$[-1, 1]$
6	$\frac{\ln^2 x}{e^x}$	$[0.5, 2]$
7	$\sqrt{x^2 - x + e^x}$	$[-2, 2]$
8	$3x^4 + (x-1)^2$	$[-1, 4]$
9	$x \cos x \sin x$	$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
10	$e^{\frac{3x^2 - \ln(x+1)}{x+1}}$	$[-0.5, 2]$
11	$e^{x^2} - 2x^2 + x - 1$	$[-3, 3]$
12	$\frac{x^2}{2} - \sin x$	$[-5, 5]$
13	x^{x-1}	$[0.1, 5]$

№	Функція	Інтервал
14	$2x^2 - e^x$	$[-1, 1]$
15	$-e^{-x} \ln x$	$[0.5, 3]$
16	$\frac{(x^2 - x)^2}{x}$	$[0.5, 3]$
17	$2x^2 + 3e^{-x}$	$[-1, 1]$
18	$(1 - e^x \cos x)^2$	$[1, 3]$
19	$-\frac{\ln(x^2 + 1)}{e^x}$	$[0, 3]$
20	$(x - 2)^2$	$[-1, 3]$
21	$e^{x^2} - 2$	$[-1, 1]$
22	$x^4 + \cos x - \ln x^2$	$[0.5, 1.5]$
23	$x^5 - x - 0.2$	$[0, 5]$
24	$x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$	$[0.01, 0.99]$
25	$(x^2 - 1)^2$	$[0, 2]$

4.3 Порядок виконання роботи

4.3.1 Написати й відлагодити програму, що реалізує етап встановлення меж інтервалу, що містить точку оптимуму, і процедуру зменшення інтервалу пошуку з використанням обох вивчених методів одновимірного пошуку.

4.3.2 Вибрати початкову точку x_0 й величину кроку Δ і встановити границі інтервалу, що містить точку оптимуму.

4.3.3 Реалізувати попередній етап для величини кроку, що дорівнює 2Δ і $\Delta/2$.

4.3.4 Оцінити залежність ефективності пошуку граничних точок інтервалу від величини кроку Δ . Всі наступні етапи завдання виконувати для величини кроку, обраної в п.4.3.3.

4.3.5 Реалізувати процедуру одновимірного пошуку точки оптимуму заданої функції, використовуючи метод золотого перетину й метод розподілу інтервалу навпіл. У кожному випадку виконати задану викладачем кількість ітерацій.

4.3.6 Порівняти результуючі інтервали пошуку, отримані за допомогою обох методів оптимізації з виключенням інтервалів.

4.4 Зміст звіту

4.4.1 Сформульована мета роботи.

4.4.2 Алгоритм і програми процедури встановлення границь інтервалу, що містить точку оптимуму, і процедур зменшення інтервалу пошуку з використанням методу розподілу інтервалу навпіл і методу золотого перетину,

4.4.3 Результати роботи програм.

4.4.4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

4.5 Контрольні питання

4.5.1 У чому полягають питання аналізу "у статиці" і "в динаміці", що виникають при аналізі оптимізаційних завдань?

4.5.2 У чому полягають необхідні умови того, що дана точка є точкою локального мінімуму (максимуму)?

4.5.3 Сформулюйте достатні умови оптимальності.

4.5.4 Що таке стаціонарна точка?

4.5.5 Що таке точка перегину (сідлова точка) і як її ідентифікувати?

4.5.6 Як перевірити, чи є функція випуклою або ввігнутою?

4.5.7 У чому полягає властивість унімодальності функцій і в чому полягає важливе значення цієї властивості при рішенні завдань оптимізації з однією змінною?

4.5.8 Нехай дана точка задовольняє достатнім умовам існування локального мінімуму. Як встановити, чи є цей мінімум глобальним?

4.5.9 Як вирішується завдання керування запасами?

4.5.10 Сформулюйте правило виключення інтервалів.

4.5.11 Яким чином визначаються пробні точки при встановленні границь інтервалу, що містить точку оптимуму?

4.5.12 Яким чином визначається знак кроку при встановленні границь інтервалу і як його величина впливає на ефективність пошуку граничних крапок?

4.5.13 У чому полягає мінімаксна стратегія пошуку?

4.5.14 Опишіть пошукову процедуру, що реалізує метод розподілу інтервалу навпіл.

4.5.15 Опишіть схему пошуку за допомогою методу золотого перетину.

4.5.16 Порівняйте методи розподілу інтервалу навпіл і золотого перетину, використовуючи як показники ефективності характеристику відносного зменшення вихідного інтервалу й кількість обчислень значення функції, необхідних для досягнення заданого ступеня точності (заданої величини відносного зменшення інтервалу).

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ТА МЕТОДИ ТОЧКОВОГО ОЦІНЮВАННЯ

Мета роботи - вивчити методи пошуку оптимуму з використанням квадратичної апроксимації й точкового оцінювання; навчитися застосовувати метод Пауелла для оптимізації об'єктів керування.

5.1 Короткі теоретичні відомості

Застосування методів виключення інтервалів, яким присвячена попередня лабораторна робота, накладає єдину вимогу на досліджувану функцію: вона повинна бути унімодальною.

Отже, зазначені методи можна використати для аналізу як безперервних так і розривних функцій, а також у випадках, коли змінні приймають значення з дискретної множини. Логічна структура пошуку за допомогою методів виключення інтервалів заснована на простому порівнянні значень функції у двох пробних точках. Крім того, при такому порівнянні до уваги береться тільки відношення порядку на множині значень функції і не враховується величина різниці між значеннями функції. У даній лабораторній роботі розглядаються методи пошуку, які дозволяють врахувати відносні зміни значень функції та, як наслідок, у ряді випадків виявляються більш ефективними, ніж методи виключення інтервалів. Однак виграш в ефективності досягається ціною введення додаткової вимоги, відповідно до якої досліджувані функції повинні бути досить гладкими (нагадаємо, що гладка функція - це функція, що має безперервну похідну).

5.2 Завдання до лабораторної роботи

Розробити програмну реалізацію методу пошуку оптимуму з використанням квадратичної апроксимації й точкового оцінювання. Завдання надані в табл. 4.1.

5.3 Порядок виконання роботи

5.3.1 Написати й відлагодити програму, що реалізує метод Пауелла.

5.3.2 Вибрати початкову точку x_0 , величину кроку Δ і параметри збіжності ε_1 і ε_2 .

5.3.3 Реалізувати процедуру одновимірного пошуку точки оптимуму заданої функції, застосувавши метод послідовного оцінювання з використанням квадратичної апроксимації (метод Пауелла).

5.4 Зміст звіту

5.4.1 Сформульована мета роботи.

5.4.2 Алгоритм і програма методу Пауелла.

5.4.3 Результати роботи програми.

5.4.4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

5.5 Контрольні питання

5.5.1 У чому полягає основна ідея методів поліноміальної апроксимації й точкового оцінювання?

5.5.2 Сформулюйте необхідні умови ефективної реалізації методу пошуку, заснованого на поліноміальній апроксимації.

5.5.3 По заданих точках і відповідних значеннях функції виведіть формули для оцінки параметрів апроксимуючого квадратичного полінома й оцінки координати точки оптимуму.

5.5.4 Приведіть схему алгоритму методу послідовного оцінювання з використанням квадратичної апроксимації (метод Пауелла).

5.5.5 Чи є методи виключення інтервалів у цілому більше ефективними, ніж методи точкового оцінювання? Чому?

5.5.6 При реалізації пошукових методів рекомендується приймати рішення про закінчення пошуку на основі перевірок як величини різниці значень змінної, так і величини різниці значень функції. Чи можлива ситуація, коли результат однієї з перевірок указує на збіжність до точки мінімуму, тоді як отримана точка в дійсності мінімуму не відповідає? Пояснить відповідь малюнком.

6 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОХІДНИХ

Мета роботи - вивчити одновимірні методи оптимізації з використанням похідних.

6.1 Короткі теоретичні відомості

Використані в попередніх лабораторних роботах методи оптимізації засновані на припущеннях про унімодальність й у ряді випадків про безперервність досліджуваної цільової функції об'єкта, що оптимізується. Доцільно припустити, що якщо на додаток до умови безперервності ввести вимогу диференційності функції, то ефективність пошукових процедур можна істотно підвищити.

Нагадаємо, що необхідна умова існування локального мінімуму функції в деякій точці полягає в тому, що перша похідна функції в цій точці дорівнює нулю.

Якщо функція містить члени, що включають незалежну змінну в третій і більш високих ступенях, то безпосереднє знаходження мінімуму функції може виявитися скрутним.

У таких випадках використовуються наближені методи послідовного пошуку стаціонарної точки. Вивченню цих методів присвячена дана робота.

6.2 Завдання до лабораторної роботи

Розробити програмну реалізацію одновимірних методів оптимізації з використанням похідних. Завдання надані в табл. 4.1.

6.3 Порядок виконання роботи

6.3.1 Написати й відлагодити програми на Паскалі, що реалізують метод Ньютона-Рафсона, метод середньої точки (пошук Больцано), метод січних (метод хорд) і метод оптимізації з використанням кубічної апроксимації.

6.3.2 Для методу оптимізації з використанням кубічної апроксимації в якості вихідних даних вибрати значення початкової точки x_0 , величину кроку Δ і параметрів збіжності ε_1 і ε_2 .

6.3.3 Для методу Ньютона-Рафсона в якості вихідних даних вибрати значення початкової точки x_0 і параметра збіжності ε_1 .

6.3.4 Для методу середньої точки (пошук Больцано) і методу січних (метод хорд) у якості вихідних даних вибрати значення початкової точки x_0 і параметра збіжності ε_1 . Для визначення двох крапок L і R, що містять стаціонарну точку, використати відповідну процедуру пошуку границь інтервалу методу кубічної апроксимації. При цьому початкова точка x_0 приймає значення, що відповідає одній з границь інтервалу (L або R).

6.3.5 Реалізувати процедури пошуку точки оптимуму заданої функції використовуючи метод Ньютона-Рафсона, метод середньої точки (пошук Больцано), метод січних (метод хорд) і метод оптимізації з використанням кубічної апроксимації.

6.3.6 Порівняти результати пошуку точки оптимуму, отримані за допомогою чотирьох методів оптимізації з використанням похідних.

6.4 Зміст звіту

6.4.1 Сформульована мета роботи.

6.4.2 Алгоритми й програми методу Ньютона-Рафсона, методу середньої точки (пошуку Больцано), методу січних (методу хорд) і методу оптимізації з використанням кубічної апроксимації.

6.4.3 Результати роботи програми.

6.4.4 Аналіз отриманих результатів і висновки.

6.5 Контрольні питання

6.5.1 Розглянуті раніше методи оптимізації засновані на припущенні про унімодальність й у ряді випадків про безперервність досліджуваної цільової функції. Виконання якої додаткової умови необхідно для реалізації методів оптимізації з використанням похідних?

6.5.2 Опишіть пошукову процедуру, що реалізує метод Ньютона-Рафсона.

6.5.3 Як впливає вибір початкової точки на збіжність алгоритму методу Ньютона-Рафсона. Пояснить відповідь малюнками.

6.5.4 Опишіть схему пошуку з використанням методу середньої точки (пошуку Больцано).

6.5.5 Приведіть схему алгоритму методу січних (методу хорд).

6.5.6 Приведіть опис алгоритму методу пошуку з використанням методу кубічної апроксимації.

ЛІТЕРАТУРА

основна

1. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер с англ.- М.: Радио и связь, 1988.-128 с.
2. Гудман С., Хидетниemi С. Введение в разработку и анализ алгоритмов.-М.: Мир, 1981.-368 с.
3. Дубровін В.І., Субботін С.О. Методи оптимізації та їх застосування в задачах навчання нейронних мереж: Навчальний посібник.- Запоріжжя: ЗНТУ, 2003.-136 с.
4. Дубровин В.И., Субботин С.А., Богуслаев А.В., Яценко В.К. Интеллектуальные средства диагностики и прогнозирования надежности авиадвигателей.- Запорожье: ОАО "Мотор Сич", 2003.- 279 с.
5. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Пер с англ.— М.:Мир, 1986.- Кн. 1: 349 с., Кн. 2: 320с.
6. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.-534 с.

додаткова

7. Аведьян Э.Д. Алгоритмы настройки многослойных нейронных сетей // Автоматика и телемеханика. — 1995. - № 4. - С. 106-118.
8. Аоки М. Введение в методы оптимизации. - М.: Наука, 1977. — 343 с.
9. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 176 с.
10. Вагнер Г. Основы исследования операций: в 3х т.: Пер. с англ. — М.: Мир. Т.1, 1972. — 336 с., Т.2, 1973. — 488 с., Т.3, 1973. — 502 с.
11. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио, 1972. - 552 с.
12. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985.-509 с.

13. Глудкин О.П., Обичкин Ю.Г., Блохин В.Г. Статистические методы в технологии производства радиоэлектронной аппаратуры. - М.: Энергия, 1977. - 296 с.
14. Деннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. - М.: Мир, 1988.- 440с.
15. Дубровин В.И. Идентификация и оптимизация сложных технических процессов и объектов.- Запорожье: ЗГТУ, 1997.- 92 с.
16. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища школа, 1979. – 392 с.
17. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. – К.: Вища школа, 1984. – 224 с.
18. Исследование операций: Пер. с англ.: В 2х т.:/ Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. Т.1 – 712 с., Т.2 – 678 с.
19. Корнеев В.В. Параллельные вычислительные системы .- М.: Нолидж, 1999.-320 с.
20. Кофанов Ю.Н. Теоретические основы конструирования, технологии и надёжности радиоэлектронных средств. - М.: Радио и связь, 1991. - 360 с.
21. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука, 1978. - 352 с.
22. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. - М.:Наука, 1975.- 319 с.
23. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций: В 2х кн.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. кн. 1 – 479 с., кн. 2 – 496 с.