

УДК 519.6

Чопоров С. В.¹, Гоменюк С. И.², Лисняк А. А.³, Панасенко Е. В.⁴

¹Канд. техн. наук, старший преподаватель Запорожского национального университета

²Д-р техн. наук, старший преподаватель профессор Запорожского национального университета

^{3, 4} Канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель Запорожского национального университета

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КРЕПЕЖНЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА БАЗЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ

В статье рассмотрена проблема математического моделирования сложных геометрических объектов на базе теории R-функций. Предложены новые математические модели наиболее распространенных гаечных и болтовых соединений.

Ключевые слова: математическая модель, R-функция, гайка, болт.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений современной науки и техники является компьютерное моделирование сложных технических объек-

тов и процессов, позволяющее заменить дорогостоящее и продолжительное исследование испытательного образца вычислительным экспериментом. При этом для практического применения многих вычислительных методов, как правило, необходимо построение математических

моделей геометрических объектов (например, элементов конструкций, сооружений механизмов).

В инженерной практике активно используются различные крепежные соединения, например, гайки, болты, шайбы. Построение математических моделей таких геометрических объектов позволит их рассматривать в качестве самостоятельных единиц механических систем с собственным набором геометрических и механических свойств и, как следствие, повысить точность моделей таких механических систем в целом.

Таким образом, построение математических моделей, рассматривающих распространенные крепежные элементы в качестве самостоятельных геометрических объектов, является актуальной научно-технической задачей.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Среди наиболее распространенных на практике подходов и методов математического моделирования геометрических объектов и тел можно выделить следующее: инженерные чертежи, граничное представление и конструктивную блочную геометрию.

Одним из исторически первых подходов к моделированию геометрической структуры сложных тел являются инженерные чертежи – набор плоских проекций проектируемой детали. Данный подход получил широкое распространение в технике как средство коммуникации между инженерами. Он поддерживается большинством современных САПР, например, «AutoCAD» и «Компас». Однако следует отметить, что в общем случае для произвольного трехмерного объекта трудно определить необходимое количество плоских проекций для полного и адекватного описания его геометрии.

Граничное представление основано на предположении, что любое сплошное тело X обладает определенной границей ∂X , которая в евклидовом пространстве однозначно определяет его [1]. Возможность представлять тело совокупностью ограничивающих его объем оболочек, а также универсальность используемых структур делают такой подход одним из наиболее применимых в компьютерной графике [2, 3]. Граничное представление лежит в основе ядра геометрического моделирования Parasolid и системы Romulus. Однако необходимо отметить, что получение системы оболочек, описывающих сложное тело, является весьма трудоемкой задачей.

Конструктивная блочная геометрия (Constructive Solid Geometry, CSG) – подход, используемый для математического моделирования геометрической структуры сложных тел, позволяющий создать математическую модель сложного объекта с помощью булевых и геометрических операций комбинирования некоторого множества более простых объектов – примитивов (например, сфера, тор, конус, пирамида, куб, призма). Преимуществом такого подхода является простота и наглядность процесса моделирования. Однако, основным недостатком является относительная сложность получения границы, адекватно отражающей моделируемый объект. Также ограниченность набора базовых примитивов де-

лает затруднительным моделирование конструкции с нестандартной геометрической структурой.

Альтернативным подходом к решению задач математического моделирования геометрических объектов является функциональное представление – подход, который основан на идее моделирования геометрической структуры тела с помощью математических функций или соотношений. Наиболее часто в рамках такого подхода используются неявные функции, простейшей формой которых является ограничение на знак некоторой действительной функции $f(p)$. Например, если $f = Ax + By + Cz + D$, тогда $f(p) = 0$, $f(p) \geq 0$ и $f(p) < 0$ определяют плоскость, закрытое полупространство и открытое полупространство соответственно. Круг радиуса r на плоскости или бесконечный цилиндр в пространстве может быть определен формулой $r^2 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Развитием функционального подхода является построение более сложных функций конструктивно, используя логические комбинации более простых функций, которые эквивалентны стандартным операциям над множествами. Такие функции, принадлежащие классу C^m , разработаны в работах В. Л. Рвачева [4–8], на базе которых сформирован наиболее универсальный и общий подход, названный теорией R-функций.

В рамках теории R-функций сформирован ряд систем функций, логически соответствующих булевым операциям над неявными действительными функциями, моделирующими части объекта. Наиболее распространенная система R-функций имеет вид

$$\begin{cases} \neg x \equiv -x, \\ x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где \neg – R-отрицание, \wedge – R-конъюнкция, \vee – R-дизъюнкция.

Например, при помощи формулы

$$F_1(x, y, z, R, r) = (F_{ball}(x, y, z, R, 0, 0, 0) \wedge \neg F_{ball}(x, y, z, r, -R, 0, 0) \wedge \neg F_{ball}(x, y, z, r, R, 0, 0) \wedge \neg F_{ball}(x, y, z, r, 0, -R, 0) \wedge \neg F_{ball}(x, y, z, r, 0, R, 0)) \wedge \vee \neg F_{ball}(x, y, z, r, 0, 0, -R) \wedge \neg F_{ball}(x, y, z, r, 0, 0, R). \quad (2)$$

можно представить тело в виде объединения шара радиуса R , центр которого в начале координат, с пятью полукруглыми отверстиями радиуса r , центры которых симметрично расположены на границе первого шара (рис. 1). При этом функция F_{ball} соответствует модели шара радиуса r с центром в точке (x_0, y_0, z_0) :

$$F_{ball}(x, y, z, r, x_0, y_0, z_0) = r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2. \quad (3)$$

АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В процессе построения функциональных моделей геометрических объектов можно выделить несколько основных этапов:

1. Декомпозиция – умозрительный анализ геометрической структуры объекта или конструкции с целью вы-

деления наиболее простых составных частей или элементов (при этом в качестве исходных данных могут выступать чертежи или макеты проектируемых объектов).

2. Формализация – формирование системы базовых функций (как правило, элементарных функций, примитивов), соответствующих выделенным частям объекта.

3. Композиция – формирование комплексной функциональной модели путем применения последовательности R-операций, операций движения и вращения к базовым функциям.

При этом декомпозиция, как правило, производится методом «сверху в низ» с использованием пошаговой детализации моделей.

Полученные в результате выполнения описанных выше этапов модели сложных тел могут рассматриваться в качестве базовых функций для построения новых моделей, таким образом, формируя библиотеку примитивов.

При анализе геометрической структуры гайки (чертеж на рис. 2) можно увидеть, что она состоит из цилиндрического тела, в сечении которого шестиугольник, ширины H , с отверстием диаметра d и фаской под углом 30° на расстоянии $dw / 2$ от центра. Следовательно, для построения функциональной модели, соответствующей гайке, необходимо разработать соответствующие функциональные представления ее логических частей.

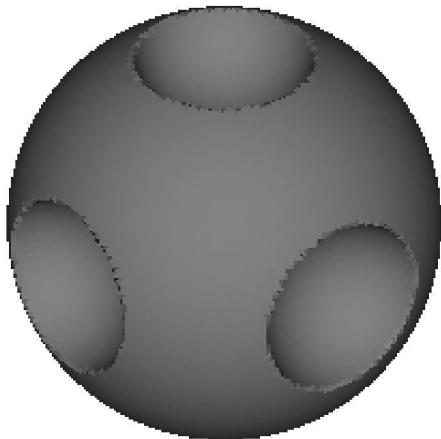


Рис. 1. Поверхность тела, представленного формулой (2): $R = 0,7, r = 0,3$

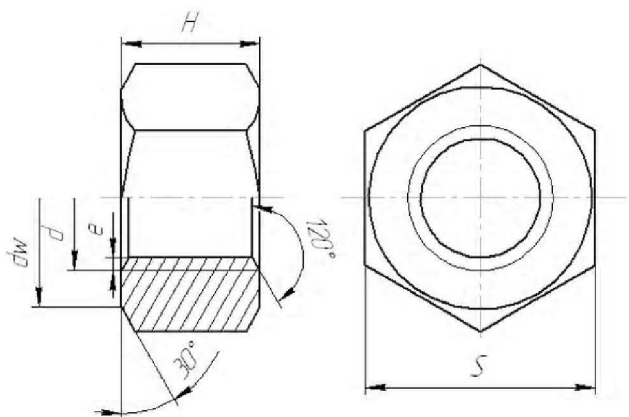


Рис. 2. Чертеж гайки

Пусть S – размер гайки «под ключ», тогда, опираясь на данные соответствующих ГОСТов, можно определить табличные значения d и H . Значение dw может принимать значения [9]

$$dw = \delta S, \quad 0,9 \leq \delta \leq 0,95.$$

Из чертежа можно увидеть, что радиус окружности, описанной вокруг образующего шестиугольника, может быть представлен при помощи формулы

$$R = \frac{S}{\sqrt{3}}.$$

МОДЕЛИ ОСНОВНЫХ ПРИМИТИВОВ

Правильный n -угольник, вписанный в окружность радиуса r с центром в точке $(x_0; y_0)$, первая вершина которого расположена на пересечении оси ординат и окружности (пример картины линий уровня на рис. 3), может быть представлен формулой

$$\xi_i = x_0 + r \sin a_i, \eta_i = y_0 + r \cos a_i, a_i = \frac{2\pi}{n}(i-1), i = \overline{1, n},$$

$$F_{\text{regular polygon}}(x, y, r, x_0, y_0, n) = F_{HS}(x, y, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \wedge$$

$$\wedge F_{HS}(x, y, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3) \wedge \dots \wedge$$

$$\wedge F_{HS}(x, y, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \xi_n, \eta_n) \wedge F_{HS}(x, y, \xi_n, \eta_n, \xi_1, \eta_1), \quad (4)$$

где функция $F_{HS}(x, y, x_0, y_0, x_1, y_1)$ определяет полуплоскость, заданную упорядоченной парой точек $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, и расположенную по правую сторону при движении от первой ко второй точке:

$$F_{HS}(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) = (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1). \quad (5)$$

Для моделирования фасок можно воспользоваться функцией, которая является результатом вращения пря-

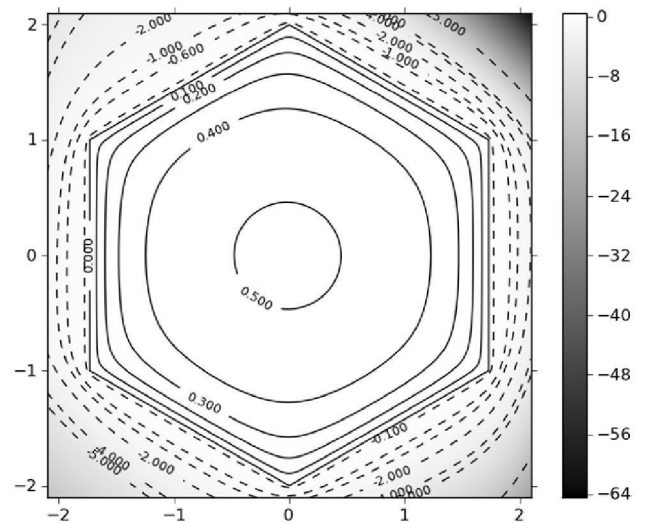


Рис. 3. Картина линий уровня функции правильного n -угольника: $n = 6, r = 1, x_0 = 0, y_0 = 0$

моугольника с симметрично срезанными узлами вокруг горизонтальной оси. Такой прямоугольник (рис. 4) может быть представлен формулой

$$F_{BS}(x, y, w, h, d, \alpha) = \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] \wedge \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \wedge F_{HS} \left(x, y, \frac{w}{2} - \frac{h-d}{2} \tan \alpha, \frac{h}{2}, \frac{w}{2}, \frac{d}{2} \right) \wedge F_{HS} \left(x, y, \frac{w}{2}, -\frac{d}{2}, \frac{w}{2} - \frac{h-d}{2} \tan \alpha, -\frac{h}{2} \right) \wedge F_{HS} \left(x, y, -\frac{w}{2}, \frac{d}{2}, -\frac{w}{2} + \frac{h-d}{2} \tan \alpha, \frac{h}{2} \right) \wedge F_{HS} \left(x, y, -\frac{w}{2} + \frac{h-d}{2} \tan \alpha, -\frac{h}{2}, -\frac{w}{2}, -\frac{d}{2} \right), \quad (6)$$

где w и h – ширина и высота базового прямоугольника; $d/2$ – расстояние до фаски, $0 < \alpha < \pi/2$ – угол фаски.

Частными случаями формулы (6) являются односторонние фаски. Например, правосторонняя фаска (со срезанными правыми углами) имеет вид

$$F_{BR}(x, y, w, h, d, \alpha) = \left[\left(\frac{w}{2} \right)^2 - x^2 \right] \wedge \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \wedge F_{HS} \left(x, y, \frac{w}{2} - \frac{h-d}{2} \tan \alpha, \frac{h}{2}, \frac{w}{2}, \frac{d}{2} \right) \wedge F_{HS} \left(x, y, \frac{w}{2}, -\frac{d}{2}, \frac{w}{2} - \frac{h-d}{2} \tan \alpha, -\frac{h}{2} \right), \quad (7)$$

Трехмерная модель фаски может быть получена путем подстановки $y \leftarrow \sqrt{y^2 + z^2}$, определяющей вращение относительно оси ординат.

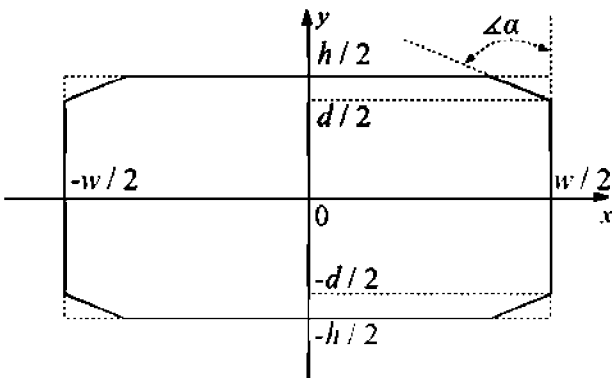


Рис. 4. Сечение фаски

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ КРЕПЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Тогда трехмерная модель гайки (рис. 5), определенной чертежом 2, может быть получена на базе формул (4)–(6):

$$F_{Nut}(x, y, z, H, R, dw, d) = F_{BS} \left(x, \sqrt{y^2 + z^2}, H, 2R, dw, \frac{\pi}{6} \right) \wedge F_{regular\ polygon}(y, z, R, 0, 0, 6) \wedge \left[y^2 + z^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right], \quad (8)$$

Аналогичный вид примет формула, соответствующая болту (рис. 5):

$$F_{Bolt}(x, y, z, H, R, dw, dl) = \left[F_{BR} \left(x, \sqrt{y^2 + z^2}, H, 2R, dw, \frac{\pi}{6} \right) \wedge F_{regular\ polygon}(y, z, R, 0, 0, 6) \right] \vee \left[\left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 - z^2 \right] \wedge \left[\left(\frac{l+h}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{l}{2} \right)^2 \right] \right], \quad (9)$$

где l – табличное значение длины ножки болта; параметры H, R, dw, d – аналогичны одноименным параметрам гайки.

Аналогично могут быть получены функциональные модели винтов с цилиндрической, полукруглой и потайной головками.

Винты с цилиндрической головкой (рис. 6) могут быть представлены объединением цилиндров и прямоугольным вырезом для учета прорези под отвертку:

$$F_{BCi}(x, y, z, d, D_H, H_H, b, h, l) = \left[\left[\left[\left(\frac{D_H}{2} \right)^2 - y^2 - z^2 \right] \wedge \left[\left(\frac{H_H}{2} \right)^2 - x^2 \right] \right] \vee \left[\left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 - z^2 \right] \wedge \left[\left(\frac{l + H_H}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{l}{2} \right)^2 \right] \right] \right] \wedge \left[\left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right] \wedge \left(x - \frac{H_H}{2} + h \right) \right], \quad (10)$$

Для моделирования винта с полукруглой головкой (рис. 6) можно воспользоваться формулой

$$F_{BS}(x, y, z, d, D_H, H_H, b, h, l) = \left[\left[\left[\left(\frac{D_H}{2} \right)^2 - \left(x + \frac{D_H}{2} - H_H \right)^2 - y^2 - z^2 \right] \wedge x \right] \vee \left[\left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 - z^2 \right] \wedge (x+l) \wedge (-x+0,01d) \right] \right] \wedge \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right] \wedge (x - H_H + h), \quad (11)$$

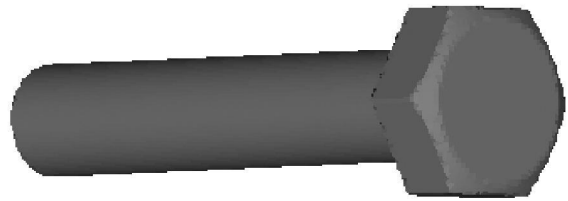
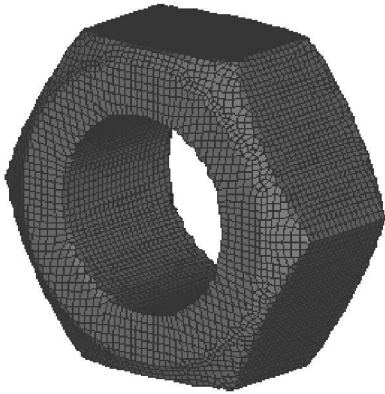


Рис. 5. Примеры визуализации моделей гайки и болта

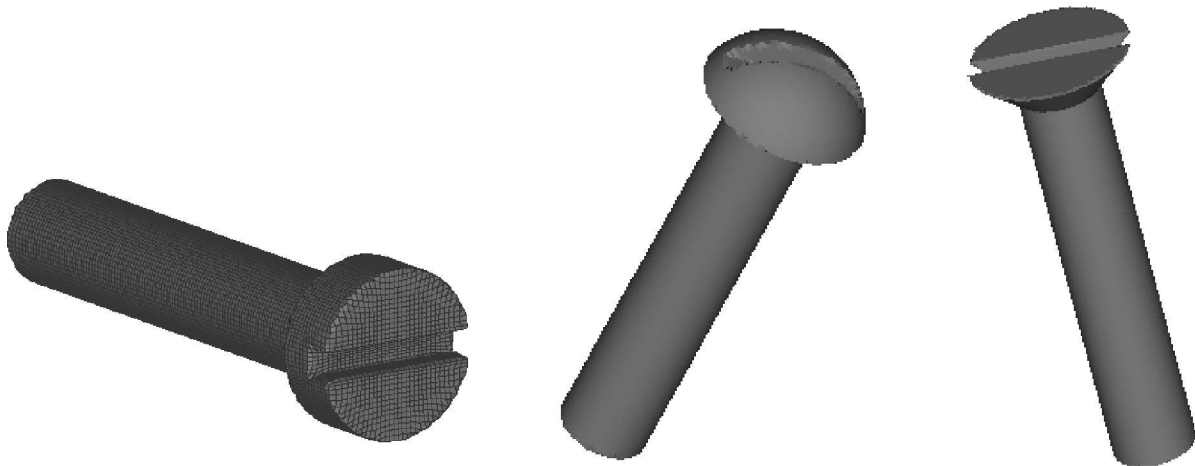


Рис. 6. Примеры визуализации моделей винтов

Аналогично может быть получена модель винта с потайной головкой (рис. 6), как объединение конусообразного элемента с цилиндрической ножкой:

$$\begin{aligned}
 F_{BCo}(x, y, z, d, D_H, H_H, b, h, l) = & \\
 = & \left(\left[F_{HS} \left(x, \sqrt{y^2 + z^2}, -\frac{H_H}{2}, \frac{d}{2}, \frac{H_H}{2}, \frac{D_H}{2} \right) \wedge \right. \right. \\
 & \left. \left. \wedge \left(x + \frac{H_H}{2} \right) \wedge \neg \left(x - \frac{H_H}{2} \right) \right] \right) \vee \\
 \vee & \left[\left[\left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 - y^2 - z^2 \right) \wedge \left(x + l + \frac{H_H}{2} \right) \wedge \neg x \right] \wedge \right. \\
 & \left. \wedge \neg x \right] \wedge \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right] \wedge \left(x - \frac{H_H}{2} + h \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

В формулах (10)–(12) следующие параметры: d – номинальный диаметр резьбы; D_H – диаметр головки; H_H – длина головки; b – ширина прорези под отвертку; h – глубина прорези под отвертку; l – длина ножки винта.

ВЫВОДЫ

Таким образом, формулами (8)–(12) представлены функциональные модели геометрической структуры наиболее распространенных крепежных элементов: гайек, болтов и винтов различных типов. Параметризация таких моделей предоставляет гибкий механизм для моделирования таких объектов с различными размерными характеристиками. Полученные модели после построения соответствующих дискретных представлений позволяют рассматривать крепежные объекты в качестве самостоятельных участников вычислительного эксперимента (например, в контактных задачах на базе метода конечных элементов). Общим недостатком полученных моделей является отсутствие геометрической информации о структуре резьбы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Farin, G. Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Kim. – Amsterdam : Elsevier Science B.V., 2002 – 848 p.
2. Agoston, M. K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms / Max K. Agoston. – London : Springer-Verlag, 2005. – 959 p.
3. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Издательство физико-математической литературы, 2002. – 472 с.

4. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова думка, 1982. – 552 с.
5. Рвачев, В. Л. Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрией / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко, В. Шапиро // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 146–159.
6. Рвачев В. Л. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, А. В. Толок, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – № 2. – С. 119–130.
7. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46–58.
8. Кравченко, В. Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев. – М. : Физматлит, 2006. – 416 с.
9. Потішко, А. В. Справочник по инженерной графике / А. В. Потішко, Д. П. Крушевская. – К. : Будівельник, 1983. – 264 с.

Стаття надійшла до редакції 20.03.2012.

Чопоров С. В., Гоменюк С. І., Лисняк А. О., Панасенко Є. В.
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ
КРПІЛЬНИХ З'ЄДНАНЬ НА БАЗІ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ

У статті розглянута проблема математичного моделювання складних геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій. Запропоновано нові математичні моделі найбільш поширених гайкових та болтових з'єднань.

Ключові слова: математична модель, R-функція, гайка, болт.

Choporov S. V., Gomenyuk S. I., Lisnyak A. A., Panasenko E. V.
MATHEMATICAL MODELING OF SOME FASTENERS
ON THE BASIS OF R-FUNCTIONS

The functional approach is one of the most general approaches in geometrical modeling. The functional approach describes complex geometrical objects (like engines, aircrafts, etc.) using mathematical formulas. A popular method for representation geometrical object in mathematical formulas uses implicit functions. These implicit functions can be constructed using logical operations under

corresponded to simple objects functions. V.L. Rvachev real-valued functions called R-functions represent logical operations (negation, conjunction, disjunction, etc) under implicit functions.

A fastener is a hardware device that mechanically joins or affixes two or more objects together. In the article authors propose geometrical models based on R-functions for different fasteners (some types of bolts, nuts).

In the first section of the article authors describe implicit functions for representation of basic primitives (a regular polygon, a chamfer). The next section aims to obtain of 3D models of fasteners using R-functions under primitives. Some visual examples are shown in the final section.

Key words: mathematical model, R-function, nut, bolt.

REFERENCES

1. Farin G., Hoschek J., Kim M. S. Handbook of computer-aided geometric design, Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2002, 848 p.
2. Agoston M.K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms, London, Springer-Verlag, 2005, 959 p.
3. Golovanov N.N. Geometricheskoe modelirovanie, Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury', 2002, 472 p.
4. Rvachyov V.L. Teoriya R-funkciy I nekotory'e eyo ghbki zheniya, Kiev, Naykova dumka, 1982, 552 p.
5. Rvachev V. L., Sheyko T. I., Shapiro V. Metod R-funkciy v kraevy'x zadachax s geometricheskoy I fizicheskoy simmetriey, *Matematychni metody te fiziko-mekhanichni polia*, 1998, 41 No 1, pp. 146–159.
6. Rvachev V.L., Sheyko T.I. Novy'e podkhody' k postroeniyu uravneniy tpekmerny'x lokusov s pomoshh'yu R-funkciy, *Vicnyk Zaporizkoho derzhavnoho universytetu*, 2000, No 2, pp. 119–130.
7. Rvachev V.L., Sheyko T.I. Vvelenie v teoriyu R-funkciy, *Problemy' mashinostroeniya*, Vol. 4, No 1–2, pp. 46–58.
8. Kravchenko V.F., Rvachev V.L. Algebra logiki, atomarny'e funkciy i veyvlety' v fizicheskix prilozheniyax, Moscow, Fizmatlit, 2006, 416 p.
9. Potishko A.V., Krushevskaya D.P. Spravochnik po inzhernoy grafike, Kiev, Budivelnik, 1983, 264 p.