

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

ПРАКТИКУМ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
(I семестр)

для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2014

Практикум з математичного аналізу (І семестр) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 58 с.

Укладачі: В.М. Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н.М. Антоненко, ст. викл., к.ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П.Чумаченко, професор, д.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н.М. Антоненко, старший викладач, к.ф.-м.н.

Затверджено
Радою загальнотехнічного
факультету ЗНТУ
Протокол № 2
від 23.10.14

Затверджено
на засіданні кафедри загальної
математики ЗНТУ
Протокол № 2
від 22.10.14

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Границі та неперервність	5
2 Похідна та її застосування	8
3 Функції багатьох змінних	17
4 Інтеграли та їх застосування	20
5 Ряди	45
Література	58

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання на протязі семестру типових розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач.

Даний практикум з математичного аналізу охоплює практично всі основні розділи курсу «Математичний аналіз», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» у I семестрі. Він покликаний допомогти студентам у виконанні типових розрахунково-графічних завдань, викладених у [7]. Саме з цих міркувань нумерація завдань, прийнята у цьому посібнику, відповідає нумерації розрахунково-графічних завдань, викладених у [7].

Практикум складається із п'яти розділів, у кожному з яких наведено приклади розв'язання типових завдань. При написанні практикуму автори спирались на той факт, що студенти у повній мірі оволоділи лекційним матеріалом. Але, незважаючи на це, при розв'язанні кожного завдання наведено теоретичний матеріал, необхідний для його виконання. У кінці практикуму наведено список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової.

1 ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Завдання 1.1. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 2$ границі чисельника та знаменника дорівнюють нулю, тому маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність, розкладемо чисельник та знаменник дробу, що стоїть під знаком границі, на множники, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+5)} = \frac{2}{7}.$$

Відповідь: $2/7$.

Завдання 1.2. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 3x^2 + 1}{3x^4 - 2x^3 + 5x + 3}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник дробу прямують до нескінченості, тобто маємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, щоб розкрити невизначеність, поділимо чисельник та знаменник дробу, який стоїть під знаком границі, на x^4 . Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 3x^2 + 1}{3x^4 - 2x^3 + 5x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^4}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{6+0+0}{3-0+0+0} = 2.$$

Відповідь: 2.

Завдання 1.3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow -1$ маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для розкриття невизначеності помножимо чисельник та знаменник дробу $\frac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}$ на вираз $\sqrt{3+2x}+1$, спряжений до чисельника, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{3+2x}-1)(\sqrt{3+2x}+1)}{(x+1)(\sqrt{3+2x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{(x+1)(\sqrt{3+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{\sqrt{3+2x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{\sqrt{3+2x}+1} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3+2x}+1} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

Завдання 1.4. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу 1^∞ . Для обчислення даної границі скористаємося другою істотною границею

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1-2}{2x+1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2x+1} \right)^{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(-\frac{2}{2x+1} \right) \right)^{-\frac{2x+1}{2}} \right]^{-\frac{2}{2x+1} \cdot (x-1)} = e^{-2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x+1}} = e^{-1}.$$

Відповідь: $1/e$.

Завдання 1.5. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$.

Розв'язання. Для обчислення даної границі перетворимо чисельник дробу, який стоїть під знаком границі, за формулою $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ та скористаємося першою

істотною границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \cdot \sin x}{x^2} = -2 \cdot 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -6 \cdot 1 \cdot 1 = -6.$$

Відповідь: -6.

2 ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 2.1. Продиференціювати функцію $y = \frac{\arccos^3 4x^2}{sh \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Використовуючи правила диференціювання частки функцій та диференціювання складеної функції, отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\arccos^3 4x^2}{sh \sqrt{x}} \right)' = \frac{(\arccos^3 4x^2)' sh \sqrt{x} - \arccos^3 4x^2 (sh \sqrt{x})'}{sh^2 \sqrt{x}} = \\ &= \frac{3 \arccos^2 4x^2 (\arccos 4x^2)' sh \sqrt{x} - \arccos^3 4x^2 ch \sqrt{x} (\sqrt{x})'}{sh^2 \sqrt{x}} = \\ &= -\frac{24x \arccos^2 4x^2}{\sqrt{1-16x^4} sh^2 \sqrt{x}} - \frac{\arccos^3 4x^2 ch \sqrt{x}}{2\sqrt{x} sh^2 \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\frac{24x \arccos^2 4x^2}{\sqrt{1-16x^4} sh^2 \sqrt{x}} - \frac{\arccos^3 4x^2 ch \sqrt{x}}{2\sqrt{x} sh^2 \sqrt{x}}.$

Завдання 2.2. Продиференціювати функцію $y = (ch 4x)^{\arctg 2x}$.

Розв'язання. Скористаємося правилом логарифмічного диференціювання:

$$y' = y(\ln y)'$$

Прологарифмуємо ліву та праву частини заданої функції:

$$\ln y = \arctg 2x \ln(ch 4x).$$

Продиференціюємо ліву та праву частини останнього співвідношення по x , вважаючи, що $y = y(x)$ – функція змінної x :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (\arctg 2x)' \ln(ch 4x) + \arctg 2x (\ln(ch 4x))' = \\ &= \frac{2}{1+4x^2} \cdot \ln(ch 4x) + \arctg 2x \cdot \frac{4sh 4x}{ch 4x} = \frac{2 \ln(ch 4x)}{1+4x^2} + 4th 4x \cdot \arctg 2x. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$y' = (\operatorname{ch} 4x)^{\operatorname{arctg} 2x} \left(\frac{2 \ln(\operatorname{ch} 4x)}{1 + 4x^2} + 4 \operatorname{th} 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x \right).$$

$$\textbf{Відповідь: } (\operatorname{ch} 4x)^{\operatorname{arctg} 2x} \left(\frac{2 \ln(\operatorname{ch} 4x)}{1 + 4x^2} + 4 \operatorname{th} 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x \right)$$

Завдання 2.3. Знайти y' та y'' для функції

$$2y = 4 + xy^2 + \sin y, \text{ заданої неявно.}$$

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність за змінною x , вважаючи y функцією від x :

$$2y' = y^2 + 2x yy' + y' \cos y. \quad (2.1)$$

Виразимо y' :

$$y' = \frac{y^2}{2 - 2xy - \cos y}.$$

Для знаходження y'' продиференціюємо вираз (2.1) за змінною x :

$$2y'' = 2y y' + 2y y' + 2xy'^2 + 2xyy'' + y'' \cos y - y' \sin y.$$

Виражаємо y'' :

$$y'' = \frac{4yy' + 2xy'^2 - y' \sin y}{2 - 2xy - \cos y}.$$

Із врахуванням того, що $y' = \frac{y^2}{2 - 2xy - \cos y}$, отримуємо:

$$y'' = \frac{4y^3 - y^2 \sin y}{(2 - 2xy - \cos y)^2} + \frac{2xy^4}{(2 - 2xy - \cos y)^3}.$$

$$\textbf{Відповідь: } y' = \frac{y^2}{2 - 2xy - \cos y},$$

$$y'' = \frac{4y^3 - y^2 \sin y}{(2 - 2xy - \cos y)^2} + \frac{2xy^4}{(2 - 2xy - \cos y)^3}.$$

Завдання 2.4. Знайти y' та y'' для функції $\begin{cases} x = 5t^3 - 3t + 4, \\ y = t^3 - 3t. \end{cases}$,

заданої параметрично.

Розв'язання. Для обчислення y' та y'' скористаємося формулами:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

Знайдемо x'_t , y'_t , x''_t та y''_t :

$$\begin{cases} x'_t = 15t^2 - 3, \\ y'_t = 3t^2 - 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x''_t = 30t, \\ y''_t = 6t. \end{cases}$$

Остаточно отримуємо:

$$y'_x = \frac{3t^2 - 3}{15t^2 - 3} = \frac{t^2 - 1}{5t^2 - 1};$$

$$y''_x = \frac{6t(15t^2 - 3) - (3t^2 - 3)30t}{(15t^2 - 3)^3} = \frac{8t}{3(5t^2 - 1)^3}.$$

Відповідь: $y'_x = \frac{t^2 - 1}{5t^2 - 1}, y''_x = \frac{8t}{3(5t^2 - 1)^3}.$

Завдання 2.5-2.6. Обчислити границі, використовуючи правило Лопітала:

1) $\lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 4x};$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{p}{2} x}.$

Розв'язання.

1) При $x \rightarrow \frac{p}{2}$ маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$, тому можемо застосувати правило Лопітала.

Правило Лопіталя (для розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$).

Якщо для функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються наступні умови:

- 1) функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні в δ -околі точки a ,
 $g'(x) \neq 0$ для $0 < |x - a| < \delta$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (або $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$);
- 3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

то існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому має місце рівність:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 4x} &= \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \sin 2x \left[\frac{0}{0} \right]}{\operatorname{tg}^2 4x} = \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{-2 \cos 2x}{2 \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{4}{\cos^2 4x}} = - \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{\cos 2x \cdot \cos^3 4x \left[\frac{0}{0} \right]}{4 \sin 4x} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow p/4} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos^3 4x + 12 \cos 2x \cos^2 4x \sin 4x}{4 \cos 4x} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{2 \cdot (-1) + 0}{-4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2) Маємо невизначеність типу 1^∞ . Для її розкриття застосуємо метод логарифмування.

Позначимо $a = \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{p}{2} x}$. Прологарифмуємо отриману рівність:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{p}{2} x \cdot \ln (2 - x).$$

Маємо невизначеність виду $\infty \cdot 0$. Для застосування правила Лопіталя перетворимо підлогарифмічний вираз наступним чином:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{p \cdot x}{2} \cdot \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{1} = \frac{2}{p} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 \frac{p \cdot x}{2}}{(2-x)} = \frac{2}{p},$$

$$\ln a = \frac{2}{p} \Rightarrow a = e^{\frac{2}{p}}.$$

Відповідь: 1) $1/8$; 2) $e^{\frac{2}{p}}$.

Завдання 2.7. За допомогою диференціала наближено обчислити задані величини:

1) $\cos 58^\circ$; 2) $3^{2,1}$.

Розв'язання.

1) Представимо задану величину у вигляді $\cos 58^\circ = \cos(60^\circ - 2^\circ)$. Введемо функцію $y = \cos x$, де $x = x_0 + Dx$,

$$x_0 = 60^\circ, \quad Dx = -2^\circ \cdot \frac{p}{180^\circ} = -0,03.$$

Для наближеного обчислення скористаємося формулою $y(x_0 + Dx) \approx y(x_0) + y'(x_0)Dx$. Отримаємо:

$$y(x_0) = \cos 60^\circ = 0,5, \quad y'(x) = -\sin x,$$

$$y'(60^\circ) = -\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87,$$

$$\cos 58^\circ \approx 0,5 + (-0,86)(-0,03) = 0,53.$$

2) По аналогії із попереднім завданням маємо:

$$y = 3^x, \quad x_0 = 2, \quad Dx = 2,1 - 2 = 0,1, \quad y(x_0) = 3^2 = 9,$$

$$y'(x) = 3^x \ln 3, \quad y'(2) = 3^2 \ln 3,$$

$$3^{2,1} \approx 9 + (9 \cdot \ln 3) \cdot 0,1 = 9,99.$$

Відповідь: 1) 0,53; 2) 9,99.

Завдання 2.8. Провести повне дослідження функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \text{ та побудувати її графік.}$$

Загальна схема дослідження функції:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву функції, точки перетину її графіка з осями координат та вертикальні асимптоти (якщо вони існують).
3. Встановити наявність парності, непарності, періодичності функції.
4. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми.
5. Визначити проміжки опуклості та точки перегину.
6. Знайти похилі асимптоти графіка функції.
7. Зробити додаткові дослідження. Побудувати графік функції.

Розв'язання.

$$1. D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

2. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm \infty$, то $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ – точки розриву.

Вертикальні асимптоти: $x = 2$, $x = -2$.

Точка перетину графіка функції з осями координат: $(0; 0)$.

3. Функція непарна, тому її графік симетричний відносно початку координат. Функція неперіодична.

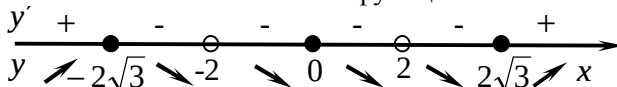
4. Знайдемо похідну функції:

$$y' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}.$$

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3}$ та не існує в точках $x_{4,5} = \pm 2$.

Отже, маємо п'ять критичних точок.

Визначимо знаки y' на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції.



Проміжки монотонності:

при $x \in (-2\sqrt{3}; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$ функція спадає;

при $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$ функція зростає.

Точки екстремуму:

$x = -2\sqrt{3}$ – точка максимуму; $y(-2\sqrt{3}) = y_{\max} = -3\sqrt{3}$

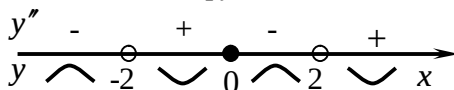
$x = 2\sqrt{3}$ – точка мінімуму; $y(2\sqrt{3}) = y_{\min} = 3\sqrt{3}$.

5. Для знаходження проміжків опуклості знайдемо другу похідну для заданої функції:

$$y'' = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

$y'' = 0$, при $x_1 = 0$ та не існує при $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Визначаємо знак другої похідної на проміжках, на які ці точки розбивають область визначення функції.



Проміжки опуклості:

$y'' < 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2) \Rightarrow$ функція опукла догори;

$y'' > 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty) \Rightarrow$ функція опукла донизу.

Оскільки при переході через $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ друга похідна y'' змінює знак, то ці точки є точками перегину.

6. Знайдемо асимптоти.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої графік функції необмежено наближається при віддаленні точки графіка від початку координат, але не перетинає її.

Якщо існують границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямі $y = kx + b$ – **похилі асимптоти** кривої $y = f(x)$ (при $k = 0$ – **горизонтальні**).

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = 0.$$

Графік даної функції має похилу асимптоту $y = x$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

7. Будемо графік функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ (рис. 2.1).

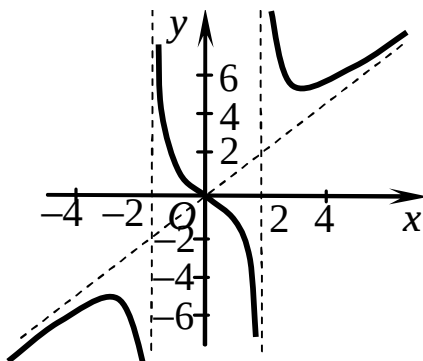


Рисунок 2.1

Завдання 2.9. Від прямокутного аркуша картону довжиною 48 см та шириною 30 см відрізають на кутах однакові квадрати. Із частини аркуша, що залишилась, склеюють відкриту прямокутну коробку. Якою повинна бути довжина сторони відрізаних квадратів, щоб об'єм коробки був найбільшим?

Розв'язання. Нехай x см – довжина сторони відрізаного квадрата ($0 \leq x \leq 15$).

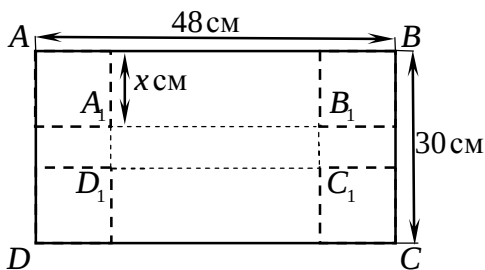


Рисунок 2.2

Коробка матиме форму прямокутного паралелепіпеда з основою $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.2). Виразимо об'єм коробки як функцію від x :

$$V(x) = (30 - 2x)(48 - 2x)x.$$

Знайдемо екстремум функції $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440.$$

$$x^2 - 26x + 120 = 0;$$

$$x_1 = 20; x_2 = 6.$$

Оскільки $0 \leq x \leq 15$, то критична точка лише $x = 6$.

Доведемо, що при $x = 6$ функція $V(x)$ набуває найбільшого значення на відрізку $[0; 15]$. Маємо $V''(x) = 24x - 312$, $V''(6) = -168 < 0$. Відповідно з другою ознакою локального екстремуму $x = 6$ – точка локального максимуму. Отже, при $x = 6$ об'єм коробки буде найбільшим.

Відповідь: 6 см.

З ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 3.1. Знайти повний диференціал функції $z = \sin^2(3x^2 + 4xy + 2y)$.

Якщо функція має неперервні частинні похідні, то повний диференціал існує та дорівнює

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (3.1)$$

Розв'язання. Для заданої функції знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \sin(3x^2 + 4xy + 2y) \cos(3x^2 + 4xy + 2y) \cdot (6x + 4y) =$$

$$= 2(3x + 2y) \sin 2(3x^2 + 4xy + 2y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \sin(3x^2 + 4xy + 2y) \cos(3x^2 + 4xy + 2y) \cdot (4x + 2) =$$

$$= 2(2x + 1) \sin 2(3x^2 + 4xy + 2y).$$

Підставляємо частинні похідні в формулу (3.1), отримуємо:

$$dz = 2 \sin 2(3x^2 + 4xy + 2y) \cdot [(3x + 2y)dx + (2x + 1)dy].$$

Відповідь: $dz = 2 \sin 2(3x^2 + 4xy + 2y) \cdot [(3x + 2y)dx + (2x + 1)dy].$

Завдання 3.2. Обчислити похідну складної функції $u = e^{x+3y}$, де $x = \cos t$, $y = \sin t$, при $t = p$ з точністю до двох знаків після коми.

Похідна складної функції обчислюється за формулою:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (3.2).$$

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+3y}, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3e^{x+3y}, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

Підставимо отримані вирази для частинних похідних в (3.2), маємо:

$$\frac{du}{dt} = -e^{x+3y} \sin t + 3e^{x+3y} \cos t.$$

При $t = p$ отримуємо, що $x(p) = \cos p = -1$, $y(p) = \sin p = 0$,

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t=p} = -e^{-1} \cdot 0 + 3e^{-1} \cdot (-1) = -3/e \approx -1,10.$$

Відповідь: $-1,10$.

Завдання 3.3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4y$ в області $\bar{D}$, обмеженій лініями $x = -1$, $y = -1$, $x + y = -6$.

Розв'язання. Зобразимо область $\bar{D}$ (рис. 3.1).

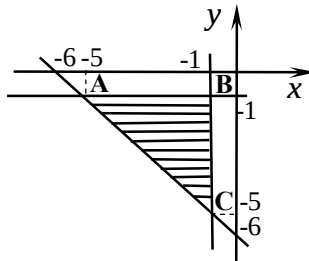


Рисунок 3.1

Знаходимо стаціонарні точки із системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0, \\ 2y - 2x + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо стаціонарну точку $M_1(-2, -4)$.

Перевіряємо, чи належить ця точка області $\bar{D}$: $M_1(-2, -4) \in \bar{D}$.

Знаходимо значення функції $z = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4y$ у цій точці:

$$z_1 = z(-2, -4) = -8.$$

Дослідимо дану функцію на границі області.

На прямій AB : $y = -1$, $z = 2x^2 + 2x - 3$. Задача зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значень функції однієї змінної на відрізку $[-5, -1]$. Знаходимо $z'_x = 4x + 2 = 0$, $x = -1/2$.

Точка $M_2\left(-\frac{1}{2}; -1\right) \notin \bar{D}$, тому значення функції в цій точці обчислювати не треба. Знайдемо значення функції на кінцях відрізка AB : $z_2 = z(A) = z(-5, -1) = 37$, $z_3 = z(B) = z(-1, -1) = -3$.

На прямій BC : $x = -1$, $z = y^2 + 6y + 2$. Задача зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значень функції однієї змінної на відрізку $[-5, -1]$. Знаходимо $z'_y = 2y + 6 = 0$, $y = -3$.

Отримали критичну точку $M_3(-1, -3)$. Знаходимо значення функції z в точці M_3 : $z_4 = z(-1, -3) = -7$.

Знаходимо значення функції z в точці C : $z_5 = z(-1, -5) = -3$.

На відрізку AC прямої $x + y = -6$ функція z має вигляд: $z = 5x^2 + 20x + 12$. По аналогії із попередніми випадками отримуємо: $z'_x = 10x + 20 = 0$, $x = -2$. Звідси знаходимо критичну точку $M_4(-2, -4)$. Знаходимо значення функції z в точці M_4 : $z_5 = z(-2, -4) = -8$.

Порівнюємо всі знайдені значення функції z та обираємо серед них найбільше та найменше:

$$z_{\text{наиб}} = z(-5, -1) = 37, \quad z_{\text{наим}} = z(-2, -4) = -8.$$

Відповідь: $z_{\text{наиб}} = 37$, $z_{\text{наим}} = -8$.

4 ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Завдання 4.1–4.6. Обчислити невизначені інтеграли.

Безпосереднє інтегрування функцій

$$1) \int \frac{4 + \sqrt[5]{x^2} - 3x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$5) \int \frac{dx}{3x^2 + 16};$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+2x)^3}} = ;$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}};$$

$$3) \int \frac{dx}{4x-5};$$

$$7) \int \sin^6 2x \cos 2x dx;$$

$$4) \int \sin(2-9x) dx;$$

$$8) \int \sin^4 4x dx.$$

Обчислити деякі невизначені інтеграли від функцій можна методом зведення їх до одного з табличних інтегралів. Цього можна досягти шляхом тотожних алгебраїчних перетворень підінтегральної функції або підведенням частини її множників під знак диференціала в невизначеному інтегралі.

$$1) \int \frac{4 + \sqrt[5]{x^2} - 3x}{\sqrt{x}} dx = 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{10}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{10}{9} x^{\frac{9}{10}} - 2x^{\frac{3}{2}} + C = 8\sqrt{x} + \frac{10}{9} \sqrt[10]{x^9} - 2x\sqrt{x} + C.$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+2x)^3}} = \int (1+2x)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{1+2x}} + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{4x-5} = \frac{1}{4} \ln|4x-5| + C.$$

$$4) \int \sin(2-9x)dx = -\frac{1}{9} \cdot (-\cos(2-9x)) + C = \\ = \frac{1}{9} \cos(2-9x) + C.$$

$$5) \int \frac{dx}{3x^2+16} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x)^2 + 4^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{4} + C.$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{5-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{10}x}{5} + C.$$

$$7) \int \sin^6 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin^6 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{14} \sin^7 2x + C.$$

$$8) \int \sin^4 4x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 8x}{2} \right)^2 dx = \\ = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 8x + \cos^2 8x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 8x + \frac{1 + \cos 16x}{2} \right) dx = \\ = \frac{3}{8} x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + C.$$

Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен у знаменнику

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29};$$

$$3) \int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}};$$

$$2) \int \frac{(5x-3)dx}{x^2 + 4x + 29};$$

$$4) \int \frac{(7x-5)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$$

1) Виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат та скористаємося табличним інтегралом

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \text{ отримаємо:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 4) + 25} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 5^2} = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} + C. \end{aligned}$$

2) Виділимо в знаменнику підінтегральної функції повний квадрат, а в чисельнику – похідну від знаменника, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{(5x-3)dx}{x^2 + 4x + 29} &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+4) - 4 - 3 \cdot \frac{2}{5}}{x^2 + 4x + 29} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x+4)dx}{x^2 + 4x + 29} - 13 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 + 4x + 29)}{x^2 + 4x + 29} - \\ &- \frac{13}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} = \frac{5}{2} \ln|x^2 + 4x + 29| - \frac{13}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} + C. \end{aligned}$$

3) Розмірковуючи аналогічно до попереднього випадку та використовуючи табличний інтеграл $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}|$,

отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}} &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x-6) + 6 - 2 \cdot \frac{2}{5}}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{(2x-6)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}} + 13 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 3^2}} = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2 - 6x + 18)}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}} + \\ &+ 13 \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 3^2}} = 5\sqrt{x^2 - 6x + 18} + 13 \ln|x-3 + \sqrt{x^2 - 6x + 18}| + C. \end{aligned}$$

4) Розмірковуючи аналогічно до попередніх випадків та використовуючи табличний інтеграл $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int \frac{(7x-5)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{(7x-5)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \\ & = -\frac{7}{2} \int \frac{(-2x-2)+2-5 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = -\frac{7}{2} \int \frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} - \\ & -12 \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = -7\sqrt{3-2x-x^2} -12 \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Метод заміни змінної

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+4}}; & 3) \int \sqrt{64-x^2} dx; \\ 2) \int \frac{9x^3}{2x^4-3} dx; & 4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}. \end{array}$$

Ідея методу заміни змінної (методу підстановки). Якщо функція $x = j(t)$ має неперервну похідну, то в заданому невизначеному інтегралі $\int f(x)dx$ завжди можна перейти до змінної t за формулою:

$$\int f(x)dx = \int f(j(t))j'(t)dt, \quad (4.1)$$

потім обчислити інтеграл в правій частині формули (4.1) та повернутися до початкової змінної x .

$$1) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+4}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+4}, x = t^2 - 4 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2t}{1+t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2(t + \ln|t+1|) + C = \\
 &= 2(\sqrt{x+4} + \ln|\sqrt{x+4}+1|) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &2) \int \frac{9x^3}{2x^4-3} dx = \left| t = x^4, dt = 4x^3 \right| = \frac{9}{4} \int \frac{dt}{2t-3} = \\
 &= \frac{9}{8} \ln|2x^4-3| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &3) \int \sqrt{64-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 8 \sin t, \\ dx = 8 \cos t \end{array} \right| = 64 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\
 &= 64 \int \cos^2 t dt = 64 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 32 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \\
 &= 32(t + \sin t \cdot \cos t) + C = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin \frac{x}{8}, \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2/64} \end{array} \right| = \\
 &= 32 \arcsin \frac{x}{8} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{64-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \left| t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \\
 &= - \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = - \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1} \right| + C = \\
 &= - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Інтегрування частинами

- 1) $\int (x+3)\cos 4x dx$; 4) $\int \frac{x \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$;
 2) $\int (x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx$; 5) $\int x \ln(2x+3) dx$;
 3) $\int \arccos 9x dx$.

Інтегрування частинами виконується за наступним правилом:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні диференційовні функції.

$$\begin{aligned} 1) \int (x+3)\cos 4x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x+3, & du = dx \\ dv = \cos 4x dx, & v = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4}(x+3)\sin 4x - \frac{1}{4} \int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(x+3)\sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int (x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 - 2x + 3, & du = (2x-2)dx \\ dv = e^{-x} dx, & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 - 2x + 3)e^{-x} + 2 \int (x-1)e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x-1, & du = dx \\ dv = e^{-x} dx, & v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= -(x^2 - 2x + 3)e^{-x} - 2(x-1)e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -(x^2 + 3)e^{-x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \arccos 9x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arccos 9x & du = -\frac{9dx}{\sqrt{1-81x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = \\ &= x \arccos 9x + 9 \int \frac{x}{\sqrt{1-81x^2}} dx = x \arccos 9x - \frac{1}{9} \sqrt{1-81x^2} + C. \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{x \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin 3x, \quad du = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx, \quad v = -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} \arcsin 3x + \frac{1}{3} \int dx = -\frac{1}{9} \sqrt{1-9x^2} \arcsin 3x + \frac{1}{3} x + C.$$

$$5) \int x \ln(2x+3) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(2x+3) \quad du = \frac{2 dx}{2x+3} \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(2x+3) - \int \frac{x^2}{2x+3} dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x+3) - \frac{1}{4} \int \frac{(4x^2-9)+9}{2x+3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(2x+3) - \frac{1}{4} \int \left(2x-3 + \frac{9}{2x+3} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln(2x+3) - \frac{1}{4} x^2 +$$

$$+ \frac{3}{4} x - \frac{9}{8} \ln|2x+3| + C.$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

$$1) \int \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)(x+5)} dx; \quad 3) \int \frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx;$$

$$2) \int \frac{4x^2+x+13}{(x+1)(x-3)^2} dx; \quad 4) \int \frac{3x^3+5x^2-2}{x^3+x^2} dx.$$

1) Розкладаємо підінтегральну функцію на елементарні дроби [6]:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5}.$$

Невідомі коефіцієнти A , B і C знаходимо *методом частинних значень* [6]. Відповідно до цього методу зведемо праву частину

останньої тотожності до спільного знаменника та прирівняємо чисельники, отриманої рівності:

$$3x + 5 = A(x + 3)(x + 5) + B(x - 1)(x + 5) + C(x - 1)(x + 3).$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів скористаємося тим фактом, що тотожність повинна виконуватися для будь яких значень змінної x , в якості таких значень зручно обирати нулі знаменника. Отримуємо:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \\ x = -5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 8 = 24A, \\ -4 = -8B, \\ -10 = 12C \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{3}, \\ B = \frac{1}{2}, \\ C = -\frac{5}{6}. \end{array} \right.$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 3)(x + 5)} dx &= \int \left(\frac{1/3}{x - 1} + \frac{1/2}{x + 3} + \frac{-5/6}{x + 5} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 3} - \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x + 5} = \frac{1}{3} \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln|x + 3| - \frac{5}{6} \ln|x + 5| + C \end{aligned}$$

2) Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дробі:

$$\frac{4x^2 + x + 13}{(x + 1)(x - 3)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{x - 3}.$$

Невідомі коефіцієнти A , B і C знайдемо *методом невизначених коефіцієнтів* [6]. Для знаходження невідомих коефіцієнтів згідно з цим методом необхідно праву частину тотожності звести до спільного знаменника та прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x в чисельнику. Отримуємо:

$$\begin{aligned} 4x^2 + x + 13 &= A(x - 3)^2 + B(x + 1) + C(x - 3)(x + 1) = \\ &= (A + C)x^2 + (-6A + B - 2C)x + (9A + B - 3C). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} 4 = A + C, \\ 1 = -6A + B - 2C, \\ 13 = 9A + B - 3C. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = 13, \\ C = 3. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + x + 13}{(x+1)(x-3)^2} &= \frac{1}{x+1} + \frac{13}{(x-3)^2} + \frac{3}{x-3}. \\ \int \frac{4x^2 + x + 13}{(x+1)(x-3)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{13}{(x-3)^2} + \frac{3}{x-3} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{x+1} + 13 \int \frac{dx}{(x-3)^2} + 3 \int \frac{dx}{x-3} = \ln|x+1| + 3\ln|x-3| - \frac{13}{x-3} + C. \end{aligned}$$

3) Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 5}.$$

Невідомі коефіцієнти A , B і C знайдемо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 5 &= A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x+1) = \\ &= (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + (5A+C). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} 1 = A + B, \\ 3 = 2A + B + C, \\ 5 = 5A + C. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{3}{4}, \\ B = \frac{1}{4}, \\ C = \frac{5}{4}. \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 5)} dx = \int \left(\frac{3/4}{x+1} + \frac{1/4 x + 5/4}{x^2 + 2x + 5} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{8} \int \frac{(2x+2) - 2 + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{8}}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{3}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \int \frac{d(x^2 + 2x + 5)}{x^2 + 2x + 5} + \\
&+ \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{3}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.
\end{aligned}$$

4) Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо в підінтегральній функції цілу частину раціонального дробу та правильний раціональний дріб:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + x^2} = \frac{2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 2}{x^3 + x^2} = 2 + \frac{3x^2 - 2}{x^2(x+1)}.$$

Розкладемо дріб $\frac{3x^2 - 2}{x^2(x+1)}$ на елементарні дробі:

$$\frac{3x^2 - 2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}.$$

$$3x^2 - 2 = A(x+1) + B(x^2 + x) + Cx^2 = (B+C)x^2 + (A+B)x + A.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 = B + C, \\ 0 = A + B, \\ -2 = A. \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 2, \\ C = 1. \end{cases}$$

Остаточо маємо:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + x^2} dx &= \int \left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
&= 2x + \frac{2}{x} + 2 \ln|x| + \ln|x+1| + C.
\end{aligned}$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

$$1) \int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{3x+2}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}; \quad 3) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{4+x^2}}.$$

Інтеграл виду

$$2 \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r_i}{s_i}}, \mathbf{K}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{r_k}{s_k}} \right) dx,$$

де R – раціональна функція, a, b, c, d – сталі, r_i, s_i – цілі додатні числа, $i = \overline{1, k}$, можна звести до інтегралу від раціональної функції нової змінної u з допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = u^m, \quad (4.2)$$

де. $m = HCK(s_1, s_2, \dots, s_k)$

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt{3x+2}} dx &= \left| \begin{array}{l} m = HCK(2,3) = 6 \\ 3x+2 = u^6 \\ dx = 3u^5 du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{u^3-1}{u^2+u^3} 3u^5 du = \int \frac{u^3-1}{u^2+u^3} 3u^5 du = 2 \int \frac{u^6-u^3}{u+1} du = \\ &= 2 \int \left(u^5 - u^4 + u^3 - 2u^2 + 2u - 2 + \frac{2}{u+1} \right) du = \\ &= \frac{u^6}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^4}{2} - \frac{4u^3}{3} + 2u^2 - 4u + 4 \ln|u+1| = \\ &= x + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \sqrt[6]{(3x+2)^5} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{(3x+2)^2} - \frac{4}{3} \sqrt{3x+2} + 2\sqrt[3]{3x+2} - \\ &- 4\sqrt[6]{3x+2} + 4 \ln|\sqrt[6]{3x+2}+1| + C. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралів від диференціального Біному

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

де a, b – відмінні від нуля сталі, $m, n, p \in Q$, використовують підстановки Чебишова:

- 1) якщо $p \in Z$, то використовуємо підстановку $a + bx^n = u^s$, s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n ;
- 2) якщо $(m+1)/n \in Z$, то застосовується підстанова $a + bx^n = u^s$, s – знаменник дробу p , $s > 0$;
- 3) якщо $(m+1)/n + p \in Z$, то застосовується підстанова $a + bx^n = u^s x^n$, s – знаменник дробу p , $s > 0$.

$$2) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-3} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \begin{array}{l} m = -3, n = 2, p = -\frac{1}{2}, \\ \frac{m+1}{n} = -1 \in Z, \\ 1+x^2 = u^2, \\ x = \sqrt{u^2 - 1}, \\ dx = u(u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} du \end{array} \right| =$$

$$= \int (u^2 - 1)^{\frac{3}{2}} u^{-1} u (u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} du = \int \frac{du}{(u^2 - 1)^2}.$$

Для обчислення інтегралу $\int \frac{du}{(u^2 - 1)^2}$ розкладемо дріб

$\frac{1}{(u^2 - 1)^2}$ на елементарні дроби, отримаємо:

$$\frac{1}{(u^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{du}{(u^2 - 1)^2} &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1} \right) du = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\ln|u+1| - \ln|u-1| - \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) + C = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\ln|\sqrt{1+x^2} + 1| - \ln|\sqrt{1+x^2} - 1| - \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{4+x^2}} &= \int x^{-4} (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \left. \begin{array}{l} m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}, \\ \frac{m+1}{n} + p = -2 \in \mathbb{Z}, \\ 4+x^2 = u^2 x^2, \\ x = 2(u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \\ dx = -2u(u^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} du \end{array} \right| = \\
 &= \int \left(2(u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right)^{-4} \left(u^2 4(u^2 - 1)^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} (-2)u(u^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} du = \\
 &= -\frac{1}{16} \int (u^2 - 1) du = -\frac{1}{16} \left(\frac{u^3}{3} - u \right) + C = \left| u = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \right| = \\
 &= -\frac{\sqrt{4+x^2}(2-x^2)}{24x^3} + C.
 \end{aligned}$$

Інтегрування деяких тригонометричних виразів

$$1) \int \frac{dx}{3\sin x - \cos x + 3};$$

$$2) \int \frac{dx}{2\cos^2 x + 5\sin^2 x + 7};$$

$$3) \int \frac{\sin^3 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx.$$

Інтеграли виду

$$\int R(\cos x, \sin x) dx, \quad (4.3)$$

де R – раціональна функція, зводяться до інтегралів від раціональних функцій нової змінної t за допомогою універсальної підстановки

$tg \frac{x}{2} = t$. Зазначимо, що в цьому випадку

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{3\sin x - \cos x + 3} &= \left| \begin{array}{l} t = tg \frac{x}{2}, \quad x = 2arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{2dt/(1+t^2)}{3 \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \int \frac{dt}{2t^2 + 3t + 1} = \int \left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \ln|2t+1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| 2tg \frac{x}{2} + 1 \right| - \ln \left| tg \frac{x}{2} + 1 \right| + C. \end{aligned}$$

Якщо для підінтегральної функції інтегралу (4.3) виконується рівність

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x),$$

то для зведення цієї функції до раціональної використовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$. У цьому випадку маємо:

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{2\cos^2 x + 5\sin^2 x + 7} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{dt/(1+t^2)}{2\frac{1}{1+t^2} + 5\frac{t^2}{1+t^2} + 7} = \int \frac{dt}{12t^2 + 9} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}t}{3} + C = \frac{\sqrt{3}}{18} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Для обчислення інтегралів типу

$$\int f(\cos x) \sin x dx, \quad \int f(\sin x) \cos x dx$$

використовують підстановки $\cos x = t$, $\sin x = t$ відповідно.

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{\sin^3 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \cos 4x, \\ dt = -4 \sin 4x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \int \frac{1-t^2}{t^{\frac{2}{3}}} dt = \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(t^{-\frac{2}{3}} - t^{\frac{4}{3}} \right) dt = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{t} + \frac{3}{28} t^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{t} + C = -\frac{3}{4} \sqrt[3]{\cos 4x} + \\ &+ \frac{3}{28} \cos^2 4x \sqrt[3]{\cos 4x} + C. \end{aligned}$$

Завдання 4.7. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) площу фігури, обмеженої вказаними лініями:

1) $y = x^3$, $y = x^2 + 2x$;

2) $r^2 = 4 \cos 2j$;

3) $x = 4 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну невід'ємну функцію $f(x)$. Фігура, обмежена графіком цієї функції, відрізком $[a; b]$ та прямими $x = a$, $x = b$, називається *криволінійною трапецією* (рис. 4.1). Її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \geq 0.$$

Нехай $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на проміжку $[a; b]$ функції і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$, тоді площу фігури, зображеної на рис. 4.2, обчислюють за формулою:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (4.4)$$

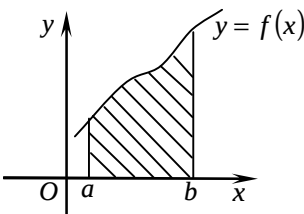


Рисунок 4.1

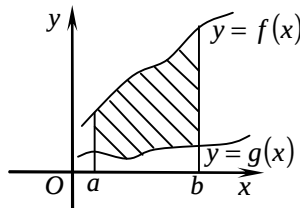


Рисунок 4.2

Розв'язання.

1) Визначимо абсциси точок перетину даних ліній:

$$x^3 = x^2 + 2x \Rightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2.$$

Отже, точки перетину – $A(-1; -1)$, $O(0; 0)$, $B(2; 8)$.

Зобразимо дані криві в одній системі координат (рис. 4.3). Площу фігури, обмеженої даними лініями, знайдемо як суму площ областей D_1 та D_2 .

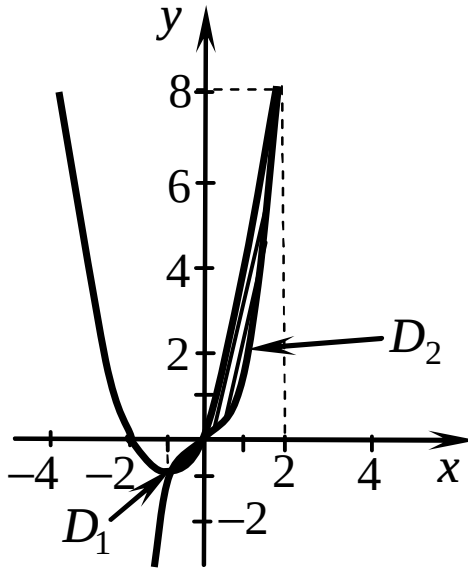


Рисунок 4.3

Використовуючи формулу (4.4), обчислимо площі фігур D_1 та D_2 :

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_{-1}^0 = \frac{5}{12} \text{ ум. кв. од.}$$

$$S_2 = \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ ум. кв. од.}$$

Площа всієї області, обмеженої даними лініями:

$$S = S_1 + S_2 = 3\frac{1}{12} \text{ ум. кв. од.}$$

Площа криволінійного сектора OAB (рис. 4.4) обчислюється за формулою (4.5).

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dj. \quad (4.5)$$

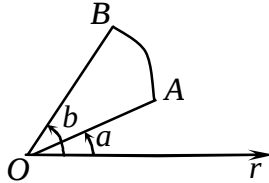


Рисунок 4.4

2) Дана крива задає лемніскату Бернуллі (рис.4.5). В силу симетрії лемніскати відносно осей координат знайдемо площу її чверті за формулою (4.5):

$$S' = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{4}} 4 \cos 2j \, dj = \sin 2j \Big|_0^{\frac{p}{4}} = 1.$$

Площа всієї фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі, буде дорівнювати $S = 4S' = 4$ ум. кв. од.

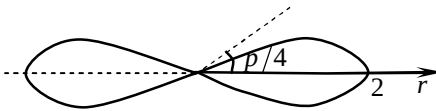


Рисунок 4.5

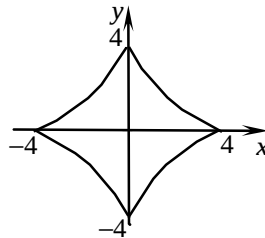


Рисунок 4.6

Якщо крива, яка обмежує криволінійну трапецію, задана параметричними рівняннями $x = j(t)$, $y = y(t)$, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b y(t) j'(t) dt, \quad (4.6)$$

де a і b визначаються із рівнянь $j(a) = a$ і $y(b) = b$ ($y(t) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$).

3) Задані параметричні рівняння описують астроїду (рис. 4.6). В силу симетрії астроїди відносно осей Ox та Oy знайдемо площу четвертої частини фігури, яку вона обмежує. За формулою (4.6) отримуємо:

$$\begin{aligned} S' &= -48 \int_{p/2}^0 \sin^3 t \cdot \cos^2 t \, dt = 48 \int_{p/2}^0 (1 - \cos^2 t) \cos^2 t \, d(\cos t) = \\ &= 48 \int_{p/2}^0 (\cos^2 t - \cos^4 t) \, d(\cos t) = 48 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5} \right) \Big|_{p/2}^0 = \frac{32}{5} = 6,4. \end{aligned}$$

Площа всієї фігури $S = 4S' = 25,6$.

Відповідь: 1) $3\frac{1}{12}$; 2) 4; 3) 25,6.

Завдання 4.8. Обчислити довжину дуги заданої кривої.

1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ між точками перетину з віссю Ox ;

2) $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (довжина однієї арки циклоїди);

3) $r = 4 \cos j$, $0 \leq j \leq \frac{\pi}{4}$.

Довжина дуги кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – неперервна диференційовна функція, обчислюється за формулою:

$$l = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} \, dx. \quad (4.7)$$

Розв'язання.

1) Знайдемо точки перетину кривої з віссю Ox : $\sqrt{4 - x^2} = 0$,
 $x = \pm 2$.

Використовуючи формулу (4.7), обчислюємо довжину дуги:

$$l = \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \left(\sqrt{4-x^2}\right)'^2} dx = 2 \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \\ = 2(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2\pi .$$

Довжина кривої, яка задана параметричними рівняннями $x = j(t)$, $y = y(t)$, обчислюється за формулою:

$$l = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt . \quad (4.8)$$

2) Продиференціюємо по t параметричні рівняння циклоїди (рис. 4.7):

$$x' = 3(1 - \cos t), \quad y' = 3 \sin t .$$

За формулою (4.8) обчислюємо довжину однієї арки циклоїди:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + 9\sin^2 t} dt = 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ = 6 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -6 \cdot 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -12(\cos \pi - \cos 0) = 24 .$$

Довжина кривої, яка задана в полярній системі координат рівнянням $r = f(j)$, обчислюється за формулою:

$$l = \int_{j_A}^{j_B} \sqrt{r^2 + r'^2} dt \quad (j_A < j_B) . \quad (4.9)$$

3) Це рівняння задає коло в полярній системі координат (рис. 4.8). Довжину дуги знайдемо за формулою (4.9):

$$l = \int_0^{p/4} \sqrt{(4 \cos j)^2 + (-4 \sin j)^2} dj = 4 \int_0^{p/4} dj = p .$$

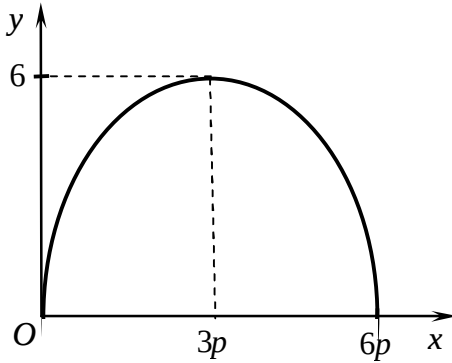


Рисунок 4.7

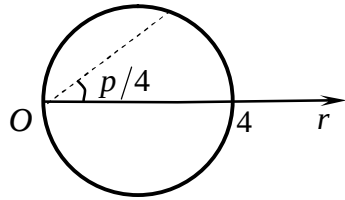


Рисунок 4.8

Відповідь: 1) $2p$; 2) 24 ; 3) p .

Завдання 4.9. Обчислити (з точністю до двох знаків після коми) об'єм тіла, утвореного обертанням фігури Φ навколо вказаної осі координат:

1) $y = \sqrt{x}$, $y = x$, Ox ;

2) $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, Oy .

Об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$) (рис. 4.9), обчислюється за формулою:

$$V_x = p \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (4.10)$$

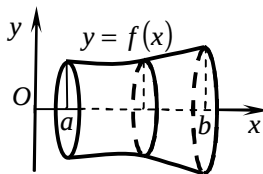


Рисунок 4.9

Розв'язання.

1) Утворена даними лініями фігура $OABC$ (рис. 4.10) при обертанні утворює тіло, об'єм якого можна обчислити як різницю

об'ємів тіл, утворених обертанням навколо осі абсцис трапецій $OABD$ і $OCBD$.

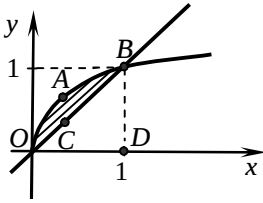


Рисунок 4.10

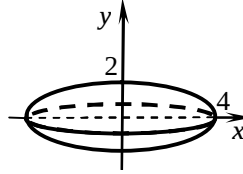


Рисунок 4.11

За формулою (4.10) знайдемо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $OABD$ навколо осі Ox :

$$V_1 = p \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = p \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{p}{2}.$$

Аналогічно обчислюємо об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання трапеції $OCBD$ навколо осі Ox :

$$V_2 = p \int_0^1 x^2 dx = p \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{p}{3}.$$

Шуканий об'єм $V = V_1 - V_2 = \frac{p}{6}$.

Об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $x = g(y)$ ($g(y) \geq 0$), віссю ординат та прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$) (рис. 4.12), обчислюється за формулою:

$$V_y = p \int_c^d (g(y))^2 dy. \quad (4.11)$$

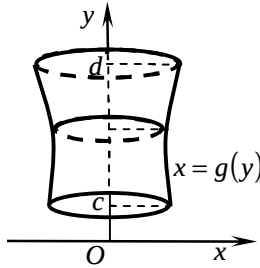


Рисунок 4.12

2) Дані рівняння є параметричними рівняннями еліпса. За умовою треба обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням еліпса навколо осі ординат (об'єм еліпсоїда) (рис. 4.11). Відповідно до формули (4.11), враховуючи симетрію еліпса відносно осей координат, отримуємо:

$$V = p \int_{-2}^2 (g(y))^2 dy = 2p \int_0^2 (g(y))^2 dy.$$

Перейдемо в останньому інтегралі до змінної t :
 $g(y) = 4 \cos t$, $dy = 2 \cos t dt$, якщо $y = 0$, то $t = 0$, якщо $y = 2$, то $t = \frac{p}{2}$.

Остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} V &= 64p \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^3 t dt = 64p \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \\ &= 64p \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{128}{3} p \text{ ум. куб. од.} \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $p/6$; 2) $128p/3$.

Завдання 4.10. Обчислити невластні інтеграли або довести їх розбіжність:

$$1) \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5};$$

$$3) \int_{-1}^1 \frac{5x^2 + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$2) \int_2^{+\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{\sqrt{x^5 - 1}} dx;$$

$$4) \int_{-2/5}^0 \frac{dx}{\sqrt{5x + 2}}.$$

Розв'язання.

1) За означенням невластного інтегралу першого роду $\square$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x-1}{2} \Big|_3^A = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\arctg \frac{A-1}{2} - \arctg 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2} - \frac{p}{4} \right) = \frac{p}{8}. \end{aligned}$$

2) Використовуючи ознаку порівняння, доведемо, що заданий інтеграл розбіжний

Ознака порівняння. Нехай на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, причому виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді:

1) якщо невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ збігається, то інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ також збігається, причому } 0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx;$$

2) якщо невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається, то інтеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \text{ також розбігається.}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{\sqrt{x^5 - 1}} > \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Оскільки інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбіжний (як окремий випадок

інтегралу $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} \frac{1}{a-1}, a > 1, \\ +\infty, a \leq 1. \end{cases}$), то за ознакою порівняння інтеграл

$\int_2^{+\infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{\sqrt{x^5 - 1}} dx$ також розбіжний.

3) За означенням невласного інтегралу другого роду отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{5x^2 + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0-} \int_{-1}^a \left(5x^{\frac{4}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} \right) dx + \\ &+ \lim_{b \rightarrow 0+} \int_b^1 \left(5x^{\frac{4}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \lim_{a \rightarrow 0-} \left(\frac{15x^{\frac{7}{3}}}{7} + 9\sqrt[3]{x} \right) \Big|_{-1}^a + \\ &+ \lim_{b \rightarrow 0+} \left(\frac{15x^{\frac{7}{3}}}{7} + 9\sqrt[3]{x} \right) \Big|_b^1 = \lim_{a \rightarrow 0-} \left(\frac{15a^{\frac{7}{3}}}{7} + 9\sqrt[3]{a} - \left(-\frac{15}{7} - 9 \right) \right) + \\ &+ \lim_{b \rightarrow 0+} \left(\frac{15}{7} + 9 - \left(\frac{15b^{\frac{7}{3}}}{7} + 9\sqrt[3]{b} \right) \right) = 22\frac{2}{7}. \end{aligned}$$

4) За означенням невласного інтегралу другого роду отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{-2/5}^0 \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_{-2/5+e}^0 \frac{dx}{\sqrt{5x+2}} = \frac{2}{5} \lim_{e \rightarrow 0} \sqrt{5x+2} \Big|_{-2/5+e}^0 = \\ &= \frac{2}{5} \lim_{e \rightarrow 0} (\sqrt{2} - \sqrt{5e}) = \frac{2\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $p/8$; 2) інтеграл розбіжний; 3) $22\frac{2}{7}$; 4) $2\sqrt{2}/5$.

5 РЯДИ

Завдання 5.1-5.4. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатними членами:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7 \cdot n!};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(2n+1)};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{6n^2};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}.$$

Розв'язання.

1) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємося ознакою Даламбера.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то цей ряд при $q < 1$ – збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, при $q = 1$ – для дослідження на збіжність необхідно застосовувати іншу ознаку.

$$a_n = \frac{5^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}/(n+1)!}{5^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, за ознакою Даламбера даний ряд збіжний.

2) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємося радикальною ознакою Коші.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то цей ряд при $q < 1$ – збіжний, при $q > 1$ – розбіжний, при $q = 1$ – для дослідження на збіжність необхідно застосовувати іншу ознаку.

$$a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{6n^2},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+1} \right)^{6n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+1} \right)^{(3n+1) \frac{6n}{3n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{3n+1}} = e^2 > 1. \end{aligned}$$

Отже, за радикальною ознакою Коші даний ряд розбіжний.

3) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємося інтегральною ознакою Коші.

Інтегральна ознака Коші. Нехай задано ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, де $f(x)$ – неперервна додатна монотонно спадна функція на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді заданий ряд збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

$$f(x) = \frac{1}{(2x+1) \ln^2(2x+1)},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1) \ln^2(2x+1)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{(2x+1) \ln^2(2x+1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \ln^{-2}(2x+1) d(\ln(2x+1)) = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(2x+1)} \right) \Big|_1^A = \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(2A+1)} + \frac{1}{\ln 3} \right) = -\frac{1}{2 \ln 3}.
\end{aligned}$$

Невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x+1) \ln^2(2x+1)}$ збіжний, а, отже, заданий ряд також збіжний.

4) Для дослідження на збіжність даного ряду скористаємося ознакою порівняння.

Ознака порівняння.

Варіант 1. Нехай задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \leq b_n$. Тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний; якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ також розбіжний.

Варіант 2. Нехай задано два ряди з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q$, причому $q \neq 0$, $q \neq \infty$, тоді обидва ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Члени даного ряду $a_n = \frac{1}{n \cdot 5^n}$, починаючи з другого, менше відповідних членів нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$, яка є

збіжним рядом, оскільки її знаменник $q = \frac{1}{5} < 1$. Тому за ознакою порівняння заданий ряд збіжний.

Відповідь: 1) збіжний; 2) розбіжний; 3) збіжний; 4) збіжний.

Завдання 5.5. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність знакопочережні ряди:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}};$$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{4^n}.$$

Розв'язання.

1) Для дослідження на збіжність заданого ряду скористаємося ознакою Лейбніца.

Ознака Лейбніца. Знакопочережний ряд

$$a_1 - a_2 + a_2 - \mathbf{L} + (-1)^{n+1} a_n + \mathbf{L} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (5.1)$$

збігається, якщо виконуються наступні умови:

$$a_1 > a_2 > a_2 > \mathbf{L} \text{ та } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца для заданого ряду:

$$1 > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{7}} > \mathbf{L} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0.$$

Отже, за ознакою Лейбніца даний ряд збіжний. Дослідимо його на абсолютну збіжність.

Знакопочережний збіжний ряд (5.1) називається **абсолютно (умовно)** збіжним, якщо збігається (розбігається) ряд, складений із абсолютних

величин його членів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дослідимо на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{2x+1} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\sqrt{2A+1} - 1) = \infty.$$

За інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ розбіжний. Отже, заданий ряд збігається умовно.

2) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца для цього ряду:

$$\frac{1}{4} > \frac{3}{16} > \frac{5}{64} > \mathbf{L} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{4^n} = 0.$$

За ознакою Лейбніца даний ряд збіжний. Дослідимо його на абсолютну збіжність. Для цього дослідимо на збіжність ряд із абсолютних величин членів цього ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{4^n}$. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)/4^{n+1}}{(2n-1)/4^n} = \frac{1}{4} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{4^n}$ збіжний. Отже, заданий ряд абсолютно збіжний.

Відповідь: 1) умовно збіжний; 2) абсолютно збіжний.

Завдання 5.6. Знайти область збіжності функціонального ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2} \cdot \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (8 - x^2)^n.$$

Розв'язання:

1) За ознакою Даламбера маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3(n+1)^2 + 2}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right)^{n+1}}{\frac{3n^2 + 2}{n^2} \cdot \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right)^n} \right| =$$

$$= \left| \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (3n^2 + 6n + 5)}{(3n^2 + 2)(n^2 + 2n + 1)} = \left| \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right| < 1.$$

Розв'яжемо отриману нерівність: $\left| \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} \right| < 1.$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} > -1, \\ \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 4x + 5} < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty), \\ x \in (-4; -1) \cup (0; +\infty). \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty).$$

При $x = 0$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2}$ для якого не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2} = 3 \neq 0$. Отже, при $x = 0$ цей ряд розбігається. Область збіжності досліджуваного ряду $(0; +\infty)$.

2) За радикальною ознакою Коші маємо:

$$u_n = (8 - x^2)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|8 - x^2|^n} = |8 - x^2| < 1.$$

Розв'яжемо отриману нерівність $|8 - x^2| < 1.$

$$\begin{cases} 8 - x^2 > -1, \\ 8 - x^2 < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-3; 3), \\ x \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-3; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 3).$$

Перевіримо, чи входять кінці інтервалів в область збіжності заданого ряду. При $x = \pm 3$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Цей ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду. При $x = \pm\sqrt{7}$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$. Цей ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду. Отже, область збіжності досліджуваного ряду: $x \in (-3; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 3)$.

Відповідь: 1) $(0, +\infty)$; 2) $(-3; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; 3)$.

Завдання 5.7.

1) Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = x \cos \sqrt{x}$. Вказати область збіжності отриманого ряду.

2) Розкласти функцію $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = \frac{p}{2}$. Знайти область збіжності отриманого ряду.

Нехай функція $f(x)$ нескінченно диференційовна в околі точки x_0 .

Рядом Тейлора для функції $f(x)$ називають степеневий ряд за степенями двочлена $x - x_0$ виду

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \mathbf{L} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathbf{L}.$$

Якщо $x_0 = 0$, то ряд

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \mathbf{L} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathbf{L}$$

називають **рядом Маклорена**.

1) У відомому ряді Маклорена
 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \mathbf{L} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{L}$ покладемо $t = \sqrt{x}$,

отримаємо:

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \mathbf{L} + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \mathbf{L} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Остаточо маємо:

$$\begin{aligned} x \cos \sqrt{x} &= x \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \mathbf{L} + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \mathbf{L} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Відомо, що область збіжності ряду для функції $\cos t - t \in (-\infty; +\infty)$.
 Оскільки функція $\cos \sqrt{x}$ визначена лише при $x \geq 0$, то область збіжності заданого ряду – $x \in [0; +\infty)$.

2) Для розвинення функції $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ в ряд Тейлора знайдемо значення функції та її похідних до n -го порядку включно в точці $x_0 = p/2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos \frac{x}{2}, & f\left(\frac{p}{2}\right) &= \cos \frac{p}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ f'(x) &= -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{p}{2} \right), & f'\left(\frac{p}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ f''(x) &= -\frac{1}{2^2} \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2^2} \cos \left(\frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{p}{2} \right), & f''\left(\frac{p}{2}\right) &= -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ f'''(x) &= \frac{1}{2^3} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2^3} \cos \left(\frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{p}{2} \right), & f'''\left(\frac{p}{2}\right) &= \frac{1}{2^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ f^{IV}(x) &= \frac{1}{2^4} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2^4} \cos \left(\frac{x}{2} + 4 \cdot \frac{p}{2} \right), & f^{IV}\left(\frac{p}{2}\right) &= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$f^n(x) = \frac{1}{2^n} \cos\left(\frac{x}{2} + n \cdot \frac{p}{2}\right), \quad f^n\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \cos\left(\frac{p}{4} + n \frac{p}{2}\right)$$

Отримані числові значення підставляємо в ряд Тейлора при $x_0 = \frac{p}{2}$,

маємо:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)}{2 \cdot 1!} - \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^4}{2^4 \cdot 4!} - \mathbf{L} \right. \\ \left. \mathbf{L} \pm \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^n}{2^n \cdot n!} + \mathbf{L} \right].$$

Дослідимо отриманий ряд на збіжність за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^n}{2^n \cdot n!}, \quad u_{n+1} = \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x - \frac{p}{2}}{2(n+1)} \right| = 0 < 1.$$

Звідси випливає, що цей ряд збігається до функції $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ при будь-яких x . Отже, область його збіжності: $-\infty < x < +\infty$.

Відповідь: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n)!}$, область збіжності $x \in [0; +\infty)$;

$$2) \frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 - \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)}{2 \cdot 1!} - \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^4}{2^4 \cdot 4!} - \mathbf{L} \pm \frac{\left(x - \frac{p}{2}\right)^n}{2^n \cdot n!} + \mathbf{L} \right],$$

область збіжності $x \in (-\infty; +\infty)$.

Завдання 5.8. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Користуючись рядом Маклорена для функції $\ln(1+x)$, розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена. У розвиненні функції $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \mathbf{L}$ покладемо $t = \sqrt{x}$, маємо:

$$\ln(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5} - \mathbf{L}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз в межах від 0 до $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x}) dx &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{15} - \frac{x^3}{412} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{35} - \mathbf{L} \Bigg|_0^{1/4} = \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{64} + \frac{1}{240} - \frac{1}{768} + \frac{1}{2240} - \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Для подальшого обчислення скористаємося тим фактом, що для знакопочережного ряду має місце наступна властивість: у разі заміни суми ряду частинною сумою похибка не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду.

Оскільки п'ятий член ряду $\frac{1}{2240} \approx 0,0004 < 0,001$, то для обчислення інтегралу з точністю до 0,001 достатньо взяти суму перших чотирьох членів ряду.

Остаточно маємо:

$$\int_0^{1/4} \ln(1 + \sqrt{x}) dx \approx 0,0833 - 0,0156 + 0,0042 - 0,0013 = 0.071.$$

Відповідь: 0.071.

Завдання 5.9. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графічно (рис. 5.1).

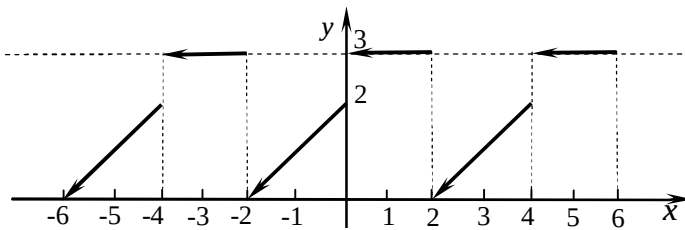


Рисунок 5.1

Рядом Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $(-l; l)$ називається тригонометричний ряд виду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{p nx}{l} + b_n \sin \frac{p nx}{l} \right),$$

де
$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{p nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{p nx}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \mathbf{K}.$$

Розв'язання. Запишемо аналітичний вираз для заданої функції:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 < x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Задана функція є періодичною з періодом $T = 4$.

Для заданої функції шуканий ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{pnx}{2} + b_n \sin \frac{pnx}{2} \right), \quad l = \frac{T}{2} = 2.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (x+2) dx + \int_0^2 3 dx \right) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^0 + 3x \Big|_0^2 \right) = 3$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{p n x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (x+2) \cos \frac{p n x}{2} dx + 3 \int_0^2 \cos \frac{p n x}{2} dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx, \\ dv = \cos \frac{p n x}{2}, \quad v = \frac{2}{p n} \sin \frac{p n x}{2} \end{array} \right| = \frac{2}{p n} (x+2) \sin \frac{p n x}{2} \Big|_{-2}^0 -$$

$$- \frac{2}{p n} \int_{-2}^0 \sin \frac{p n x}{2} dx + \frac{6}{p n} \sin \frac{p n x}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{p^2 n^2} \cos \frac{p n x}{2} \Big|_{-2}^0 =$$

$$= \frac{4}{p^2 n^2} (1 - \cos p n) = \frac{4}{p^2 n^2} (1 + (-1)^{n+1}) = \frac{8}{p^2 (2n-1)^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{p n x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (x+2) \sin \frac{p n x}{2} dx + 3 \int_0^2 \sin \frac{p n x}{2} dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx, \\ dv = \sin \frac{p n x}{2}, \quad v = -\frac{2}{p n} \cos \frac{p n x}{2} \end{array} \right| = -\frac{2}{p n} (x+2) \cos \frac{p n x}{2} \Big|_{-2}^0 +$$

$$+ \frac{2}{p n} \int_{-2}^0 \cos \frac{p n x}{2} dx - \frac{6}{p n} \cos \frac{p n x}{2} \Big|_0^2 = -\frac{4}{p n} + \frac{4}{p^2 n^2} \sin \frac{p n x}{2} \Big|_{-2}^0 -$$

$$-\frac{6}{p n}(\cos p n - 1) = -\frac{4}{p n} - \frac{6(-1)^n}{p n} + \frac{6}{p n} = \frac{2 + 6(-1)^{n+1}}{p n}.$$

Шуканий ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{8}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)p x/2}{(2n-1)^2} + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3(-1)^{n+1}}{n} \sin p n x/2.$$

Відповідь: $\frac{3}{2} + \frac{8}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)p x/2}{(2n-1)^2} + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3(-1)^{n+1}}{n} \sin p n x/2.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
2. Бугров Я.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : Высшая школа, 2003. – Ч. 2. – 2003. – 415 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.
6. Письменный Д.Т. Коспект лекцій по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
7. Розрахунково-графічні завдання з математичного аналізу (І семестр) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 50 с.
8. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.II. Специальные разделы математического анализа / под ред. В.А. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1986. – 615с.
9. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М. : Высшая школа, 1973. – 576 с.