

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

до практичних робіт з дисципліни «Теоретична механіка»
для студентів денної форми навчання спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Запоріжжя

2025

Методичні рекомендації та індивідуальні завдання до практичних робіт з дисципліни “Теоретична механіка” для студентів денної форми навчання спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка». Укл.: А. Д. Фурсіна, В.Г. Шевченко, Г. М. Рудь. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», Запорізький авіаційний коледж ім. О.Г. Івченка. 2025 – 30 с.

Укладачі: А. Д. Фурсіна, доцент, к.т.н., НУЗП
В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н., зав.каф. теор. та прикладної механіки НУЗП
Г. М. Рудь, викладач ЗАК

Рецензент: В. І. Пожуєв, д.т.н., професор

Затверджено

на засіданні кафедри теоретичної
та прикладної механіки

Протокол № 8

від « 18 » лютого 2025 року

Рекомендовано до видання

НМК Електротехнічного факультету

Протокол №

від « » 2025 року

ЗМІСТ

1	Правила оформлення практичних робіт	4
2	Загальні положення	5
3	Теоретичні відомості	6
	3.1 Геометричні характеристики плоских перерізів	6
4	Приклад розрахунку	9
	4.1 Вихідні дані до задачі	9
	4.2 Визначення положення центру ваги складного перерізу	9
	4.3 Визначення моментів інерції відносно центральних осей	12
	4.4 Визначення положення головних осей інерції складного перерізу	14
	4.5 Визначення головних моментів інерції	15
	4.6 Визначення моментів опору	16
5	Умови задач та вихідні дані	17
	Література	20
	Додаток А Площі і центри ваги плоских фігур	21
	Додаток Б Міжнародна метрична система одиниць	27
	Додаток В Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 30^0 та 45^0	28
	Додаток Г Геометричні характеристики плоских перерізів найпростіших фігур	29
	Додаток Д Контрольні питання	30

1 ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Розрахунково-графічну роботу треба оформлювати на стандартних аркушах А4 (210x297), писати на одній стороні аркуша і залишати поля: ліворуч – 20 мм, праворуч – 15 мм. Аркуші нумерують включаючи і титульний.

Умову кожної задачі слід записувати повністю, необхідні рисунки виконати олівцем, акуратно, без помарок та виправлень. Рішення повинно супроводжуватися стислими, послідовними і грамотними, без скорочення слів, поясненнями і кресленнями. Розрахункові формули приводяться у загальному вигляді, потім в них підставляються числові значення і записується кінцевий результат (із зазначенням одиниць розмірності). Після цього додається послідовна розшифровка і пояснення кожної з величин, яка входить до формули, якщо вона не зустрічалась в попередніх розрахунках.

Практичні роботи, що виконані неохайно, без дотримання пред'явлених вимог, або не свого варіанту, не зараховуються.

Студенти, які не виконали практичні роботи та не виправили відмічені рецензентом помилки, вважаються боржниками.

2 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Інженеру будь-якої спеціальності часто доводиться проводити розрахунки на міцність. Неправильний розрахунок самої незначної, на перший погляд деталі, може призвести до тяжких наслідків – призвести до руйнування конструкції в цілому. При проведенні розрахунків на міцність необхідно прагнути до поєднання надійності роботи конструкції з мінімальною її вартістю, досягати найбільшої міцності при найменшій витраті матеріалу.

Для успішного засвоєння студентами теоретичного матеріалу та набуття навичок в розв'язуванні задач їм потрібні посібники, в яких би викладалась методика розв'язання типових задач механіки та було показано застосування цієї методики. Мета практичних робіт полягає, в першу чергу, в поглибленому засвоєнні теоретичного курсу, закріпленні навичок практичних розрахунків конструкцій, які зазнають навантажень різного типу та чіткому оформленні результатів цих розрахунків.

При розрахунках на міцність важливу роль відіграють геометричні характеристики плоских перерізів стержнів, які використовують в даній конструкції чи машині. Геометричні характеристики поперечного перерізу визначають здатність бруса опиратись різним видам деформації.

3 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1 Геометричні характеристики плоских перерізів

Міцність та жорсткість конструкцій при крученні, згині, складному навантаженні залежить не тільки від матеріалу і діючих навантажень, але і від форми перерізу та від його орієнтації відносно прикладених навантажень. Для того, щоб раціонально навантажувати конструкцію, необхідно знати геометричні характеристики її перерізу, а також положення головних центральних осей інерції, відносно яких моменти інерції мають екстремальні значення. При вивченні деформацій кручення та згинання ми повинні знати такі геометричні характеристики плоских фігур, як моменти інерції.

Основними геометричними характеристиками перерізу є його площа, статичні моменти площі, осьові, полярний та відцентровий моменти інерції, моменти опору.

Площа перерізу A , см^2 або м^2 , статичний момент перерізу відносно осей x та y – S_x , S_y , см^3 або м^3 . За відомими статичними моментами можна визначити координати центру ваги перерізу

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}.$$

Якщо переріз складається з декількох простих фігур, то координати його центру ваги визначаються наступним чином

$$x_c = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_{c1} + A_2 \cdot x_{c2} + \dots + A_n \cdot x_{cn}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad (3.1)$$

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + \dots + A_n \cdot y_{cn}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \quad (3.2)$$

де A_1, A_2, \dots, A_n – площі перерізів простих частин, см^2 ;

$x_{c1}, x_{c2}, \dots, x_{cn}$ – координати центрів ваги простих частин по осі x , см ;

$u_{c1}, u_{c2}, \dots, u_{cn}$ – координати центрів ваги простих частин по осі u , см.

Осьові моменти інерції перерізу відносно осей x та y – I_x, I_y , см⁴ або м⁴; полярний момент інерції перерізу – I_p , см⁴ або м⁴; відцентровий момент інерції перерізу – I_{xy} , см⁴ або м⁴.

Головні центральні осі перерізу – це осі, які проходять через центр ваги перерізу і відносно яких осьові моменти інерції набувають екстремальних значень. Якщо переріз має хоча б одну вісь симетрії, то одна з головних центральних осей співпадає з нею. Друга головна центральна вісь проходить через центр ваги перпендикулярно до першої.

Між моментами інерції відносно центральних осей (I_X і I_Y) та відносно осей, що паралельні центральним (I_x і I_y), існує зв'язок

$$I_X = I_x + a^2 \cdot A; \quad (3.3)$$

$$I_Y = I_y + b^2 \cdot A; \quad (3.4)$$

$$I_x = I_X + a^2 \cdot A; \quad (3.5)$$

$$I_y = I_Y + b^2 \cdot A, \quad (3.6)$$

де a – відстань між осями X та x , см;

b – відстань між осями Y та y , см;

A – площа перерізу, см².

Моменти інерції складного перерізу дорівнюють сумі моментів інерції його складових частин

$$I_X = I_X^I + I_X^{II} + \dots + I_X^n; \quad (3.7)$$

$$I_Y = I_Y^I + I_Y^{II} + \dots + I_Y^n, \quad (3.8)$$

де I_X – момент інерції всього перерізу відносно осі X , см⁴;

I_Y – момент інерції всього перерізу відносно осі Y , см⁴;

$I_X^I, I_X^{II}, \dots, I_X^n$ – моменти інерції складових частин відносно осі X , см⁴;

$I_Y^I, I_Y^{II}, \dots, I_Y^n$ – моменти інерції складових частин відносно осі Y , см⁴.

При повороті осей на кут α моменти інерції визначають за формулами

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{x_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

Коли значення цього кута досягне величини, що визначається за формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y},$$

тоді осьові моменти інерції досягають свого максимуму та мінімуму, а відцентровий момент інерції стає рівним нулю. Осі, які займають таке положення, називаються головними осями інерції, а моменти інерції відносно них – головними моментами інерції. Якщо головні моменти інерції проходять через центр ваги плоскої фігури, то вони називаються головними центральними осями інерції. Величину головних моментів інерції можна визначити за формулою

$$I_{\max_{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}.$$

4 ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

4.1 Вихідні дані до задачі

Нехай заданий переріз складається зі швелера №20 і нерівнобічного кутника №16/10, ескіз якого зображено на рис. 4.1. Згідно таблиць сортаменту зазначених стандартів виписуємо розміри і геометричні характеристики швелера (рис. 4.2, а) та нерівнобічного кутника (рис. 4.2, б), які наведені в табл. 4.1.

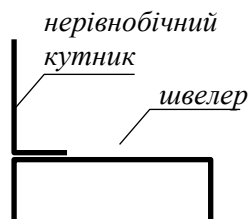


Рисунок 4.1 – Ескіз заданого складного перерізу

Таблиця 4.1 – Основні дані профілів складного перерізу

Профіль	№	h, B , см	b , см	d , см	F , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	$I_{u_{min}}$, см ⁴	y_0 , см	x_0, z_0 , см	$tg \alpha$
Швелер	20	20	7.6	0.52	23.4	1520	113	–	–	2.07	–
Кутник	16/10	16	10	1.0	25.3	667	204	121	5.23	2.28	0.39

Після цього накреслюємо заданий переріз в масштабі 1:2 і проводимо центральні осі, x_1y_1 та x_2y_2 кожного профілю з позначенням їх центрів ваги O_1, O_2 . Індеси 1 і 2 прийняті відповідно нумерації профілів в заданому складному перерізі (рис. 4.3).

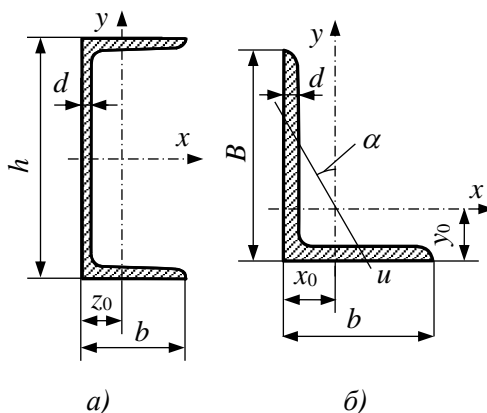


Рисунок 4.2 – Схеми заданих профілів згідно таблиць сортаменту

4.2 Визначення положення центру ваги складного перерізу

Для визначення положення центру ваги перерізу

Тепер за відомими формулами визначаємо координати центру ваги складного перерізу

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot x_{c_1} + F_2 \cdot x_{c_2}}{F_1 + F_2} =$$

$$= \frac{23.4 \cdot 10 + 25.3 \cdot 2.28}{23.4 + 25.3} = 5.989 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2}}{F_1 + F_2} =$$

$$= \frac{23.4 \cdot 5.53 + 25.3 \cdot 12.83}{23.4 + 25.3} = 9.322 \text{ см},$$

де F_1, F_2 – площі поперечних перерізів швелера і кутника.

За результатами обчислення положення центру ваги перерізу проводимо на кресленні систему центральних осей x_c, y_c (штрих пунктир). Точка перетину цих осей є центр ваги складного перерізу. З метою перевірки правильності розрахунку необхідно упевнитись в тому, що точка перетину центральних осей лежить на прямій, яка з'єднує центри ваги O_1 і O_2 . Тепер визначимо в системі осей x_c, y_c координати центрів ваги швелера та кутника

$$c_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 5.989 = 4.011 \text{ см};$$

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 5.53 - 9.322 = -3.792 \text{ см};$$

$$c_2 = x_{c_2} - x_c = 2.28 - 5.989 = -3.709 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 12.83 - 9.322 = 3.508 \text{ см}.$$

4.3 Визначення моментів інерції відносно центральних осей

Момент інерції складного перерізу відносно центральних осей визначається як сума моментів інерції кожного профілю, з яких складається заданий переріз, тобто

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} ; \quad I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} ; \quad I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^I + I_{x_c y_c}^{II} ,$$

де I_{x_c} , I_{y_c} – осьові моменти інерції;

$I_{x_c y_c}$ – відцентровий момент інерції.

В свою чергу моменти інерції відносно центральних осей кожного профілю визначаються за формулами паралельного переносу осей, наприклад,

$$I_{x_c}^I = I_{x_1} + a_1^2 F_1 ; \quad I_{y_c}^I = I_{y_1} + c_1^2 F_1 ; \quad I_{x_c y_c}^I = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1 ,$$

де I_{x_1} , I_{y_1} – осьові моменти інерції швелера відносно своїх центральних осей x_1 y_1 (рис. 4.3);

$I_{x_1 y_1}$ – відцентровий момент інерції швелера відносно осей x_1 , y_1 .

Якщо підставити відповідні числові значення у наведені залежності, будемо мати наступне.

Осьові моменти інерції

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = 449.475 + 978.343 = 1427.82 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^I = I_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + (-3.792)^2 \cdot 23.4 = 449.475 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^{II} = I_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 = 667 + 3.508^2 \cdot 25.3 = 978.343 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = 1896.462 + 552.044 = 2448.507 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^I = I_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1 = 1520 + 4.011^2 \cdot 23.4 = 1896.462 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^{II} = I_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2 = 204 + (-3.709)^2 \cdot 25.3 = 552.044 \text{ см}^4,$$

де $I_{x_1}=113 \text{ см}^4$, $I_{y_1}=1520 \text{ см}^4$ – моменти інерції швелера відносно осей x , y (рис. 4.2, а), які позначені на рис. 4.3 як осі x_1 та y_1 відповідно, тобто швелер в складному перерізі має горизонтальне положення, а не таке, як в таблиці сортаменту.

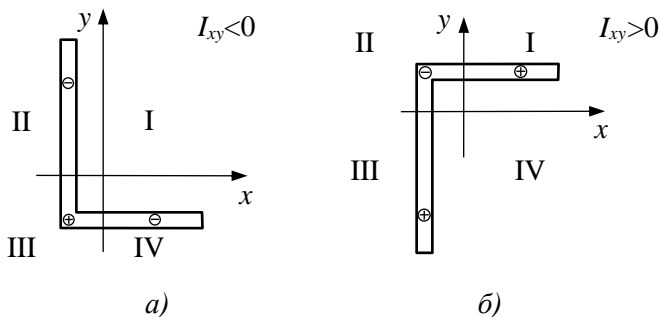


Рисунок 4.4 – До визначення знаку відцентрового моменту

Відцентровий момент інерції

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^I + I_{x_c y_c}^{II} = -355.91 - 542.08 = -897.99 \text{ см}^4.$$

$$I_{x_c y_c}^I = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + (-3.792) \cdot 4.011 \cdot 23.4 = -355.91 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c}^{II} = I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 F_2 = -212.9 + 3.508 \cdot (-3.709) \cdot 25.3 = -542.08 \text{ см}^4,$$

де $I_{x_1 y_1}$ – відцентровий момент інерції швелера відносно своїх осей x_1 , y_1 ;

$I_{x_2 y_2}$ – відцентровий момент інерції кутника відносно своїх осей x_2 , y_2 .

Так як осі x_1 , y_1 швелера є головними центральними осями (вісь x_1 є віссю симетрії), то $I_{x_1 y_1} = 0$. Це стосується також і двотаврового профілю.

Осі x_2 , y_2 нерівнобічного кутника не є головними, тому відцентровий момент інерції відносно таких осей можна визначити за формулою

$$I_{x_2 y_2} = (I_x - I_{u_{min}}) \cdot \operatorname{tg} \alpha = (667 - 121) \cdot 0.39 = -212.9 \text{ см}^4.$$

Знак відцентрового моменту визначається знаком відцентрових моментів окремих частин кутника, розташованих у відповідних квадрантах центральної системи осей x, y (рис. 4.4, *a*), тобто

$$I_{xy} = \int_F xy dF = \int_{F_{II}} xy dF + \int_{F_{III}} xy dF + \int_{F_{IV}} xy dF = I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} + I_{xy}^{IV}.$$

Так як сума площ окремих частин кутника ($F_{II}+F_{IV}$) з від'ємними добутками координат xy більша ніж площа F_{III} з додатнім добутком xy , то відцентровий момент кутника згідно рис. 4.4, *a* є від'ємним, тобто $I_{xy}<0$.

Порівнюючи зображення нерівнобічного кутника і напрям центральних осей x_2, y_2 на рис. 4.3 та x, y на рис. 4.4, *a*, можна дійти висновку, що $I_{x_2y_2}<0$. Для іншого напрямку центральних осей або іншого розташування кутника, наприклад, зображеного на рис. 4.3, *б*, можна визначити, що відцентровий момент кутника в цьому випадку є додатній ($I_{xy}>0$).

Описані вище пояснення щодо знаку відцентрового моменту стосуються також і рівнобічного кутника (рис. 4.5), модуль якого визначається формулою

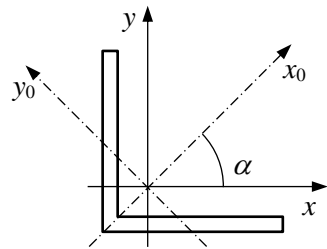


Рисунок 4.5 – До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника

$$I_{xy} = \frac{I_{x_0max} - I_{y_0min}}{2} \sin 2\alpha,$$

де I_{x_0max}, I_{x_0min} – головні моменти інерції відносно головних осей x_0, y_0 .

Головна вісь x_0 є віссю симетрії, тому кут $\alpha=45^\circ$, а $\sin 2\alpha=1$.

4.4 Визначення положення головних осей інерції складного перерізу

Положення головних осей інерції визначається формулою

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}}.$$

Після підстановки значень I_{x_c} , I_{y_c} , $I_{x_c y_c}$ будемо мати

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2(-897.99)}{2448.507 - 1427.82} = -1.75958;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-1.75958) = -30.2^\circ.$$

Знак мінус вказує на те, що головні осі, відносно центральних, необхідно повернути за годинниковою стрілкою.

На рис. 4.3 головні осі позначені як u , v (жирна суцільна лінія). З метою перевірки правильності визначення кута α_0 обчислимо відцентровий момент відносно головних осей, який повинен дорівнювати нулю

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = \\ &= \frac{1427.82 - 2448.507}{2} \cdot (-0.86941) + (-897.99) \cdot 0.4941 = \\ &= 8.8 \cdot 10^{-4} \approx 0. \end{aligned}$$

Головні центральні осі мають найбільш практичне значення, так як розрахунок напружень і деформацій в системі цих осей набагато спрощується. Всі подальші розрахунки в опорі матеріалів будемо виконувати в системі головних центральних осей.

4.5 Визначення головних моментів інерції

$$\begin{aligned} I_{\max}^{\min} &= \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{1427.82 + 2448.507}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1427.82 - 2448.507}{2}\right)^2 + (-897.99)^2} = \\ &= 1938.164 \pm 1032.878; \end{aligned}$$

$$I_{\max} = 1938.164 + 1032.878 = 2971.042 \text{ см}^4 \rightarrow I_v;$$

$$I_{min}=1938.164-1032.878=905.286 \text{ см}^4 \rightarrow I_u;$$

Так як $I_{y_c} > I_{x_c}$, то максимальний момент буде відносно головної осі v , яка відхиляється від центральної осі y_c на кут α_0 .

4.6 Визначення моментів опору

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}} = \frac{905.286}{11.1} = 81.56 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{I_v}{u_{max}} = \frac{2971.042}{16.8} = 176.8 \text{ см}^3,$$

де v_{max} , u_{max} – відстані від головних осей до найбільш віддалених точок перерізу, які можна відшукувати за допомогою трикутника та лінійки безпосередньо на кресленні або за аналітичними формулами

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Наприклад, координати крайньої точки D (рис. 4.3) в системі центральних осей будуть такими

$$x_D = c_1 + h_1/2 = 4.011 + 10 = 14.011 \text{ см};$$

$$y_D = -y_c = -9.322 \text{ см}; \quad \text{кут } \alpha = \alpha_0 = -30.2^\circ,$$

тоді $u_{max} = -9.322 \cdot \sin(-30.2) + 14.011 \cdot \cos(-30.2) = 16.8 \text{ см}$.

Аналогічно обчислюють або відшукують відстані інших крайніх точок і серед них вибирають максимальні.

5 УМОВИ ЗАДАЧ ТА ВИХІДНІ ДАНІ

Задача. *Визначення головних центральних моментів інерції складного перерізу*

Для заданого складного перерізу треба визначити положення головних центральних осей та обчислити головні центральні моменти інерції. Вихідні дані та вигляд перерізу – див. рис. 5.1.

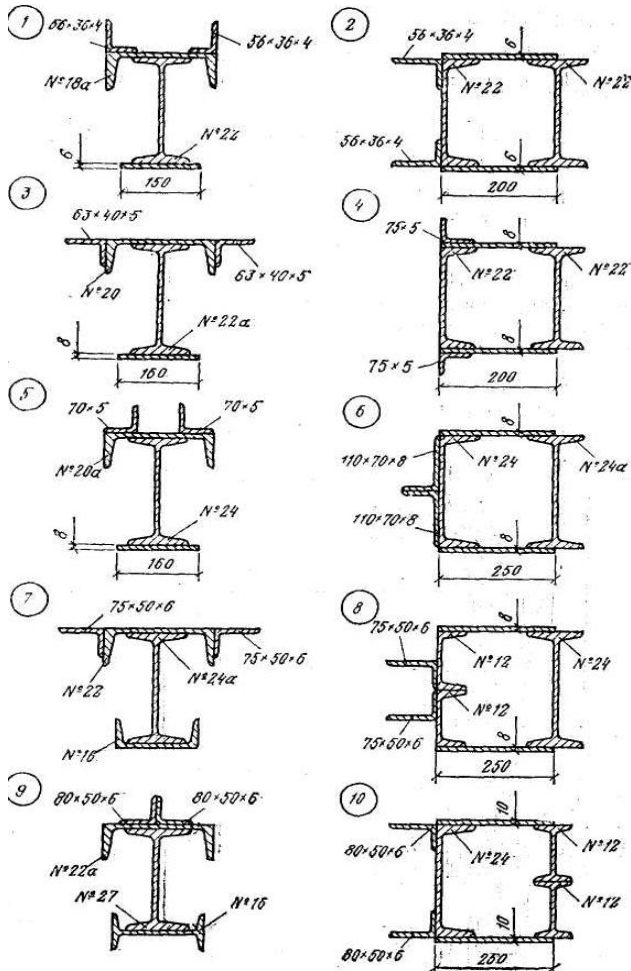


Рисунок 5.1

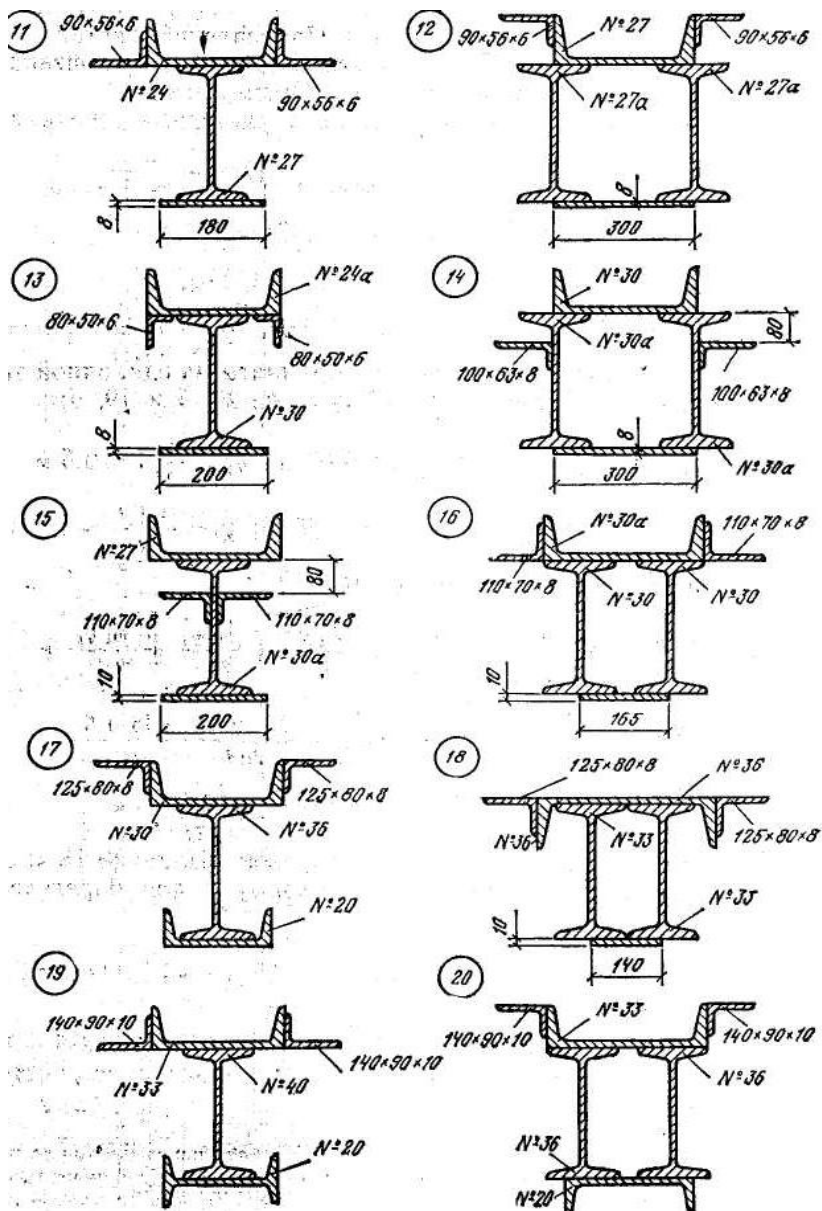


Рисунок 5.1, лист 2

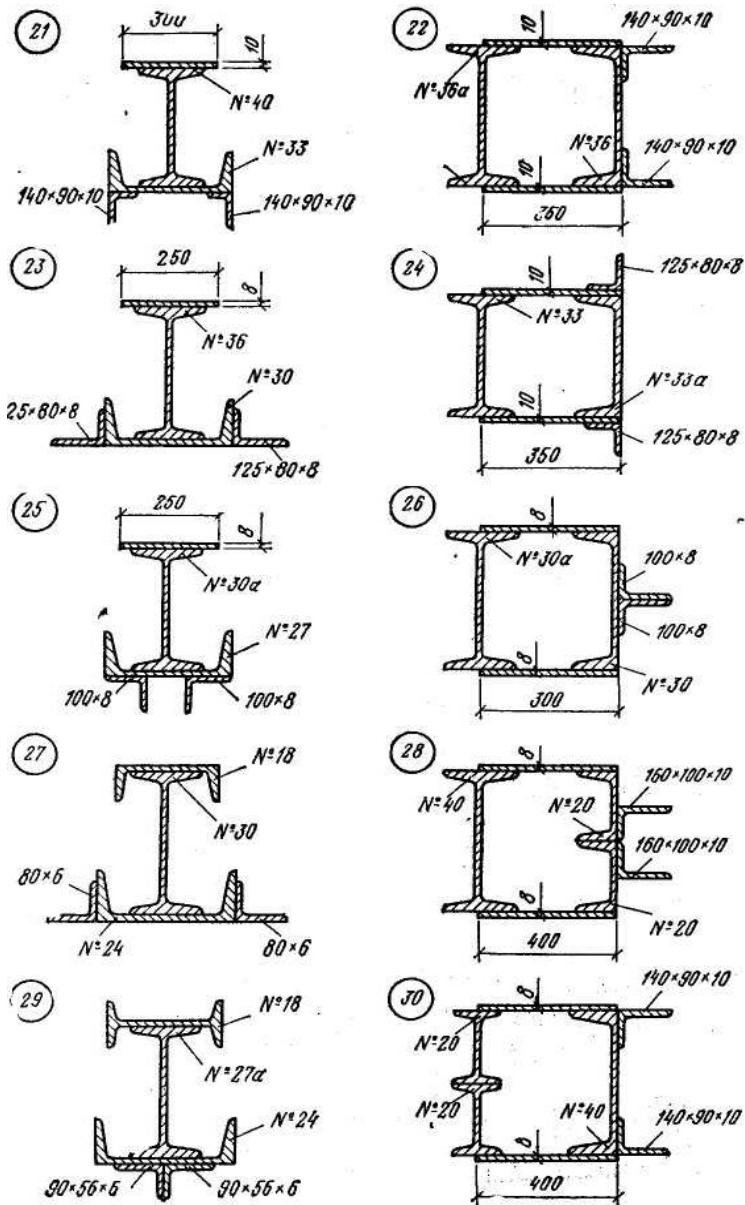


Рисунок 5.1, лист 3

ЛІТЕРАТУРА

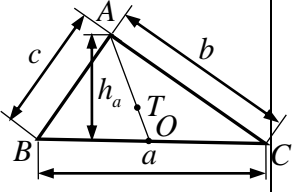
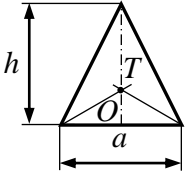
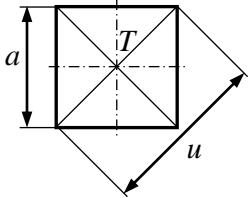
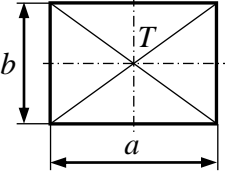
1. С.М. Тарг. Скорочений курс теоретичної механіки . -К.: В. шк. - 2001. -478 с.
2. М.М. Никітін. Курс теоретичної механіки. .-К.: В.шк. -2011. -608 с.
3. Теоретична та прикладна механіка = Theoretical and Applied Mechanics: навчальний посібник : в 4 ч. Частина I. Теоретична механіка/ Шевченко В.Г., Фурсіна Ф.Д., Шумикін С.О., Кружнова С.Ю. – Запоріжжя – Просвіта, 2022. – 188с.
4. Методичні вказівки і завдання до практичних робіт з курсу «Теоретична та прикладна механіка» для студентів денної форми навчання спеціальностей: 131 «Прикладна механіка» (частина 1, частина 2) (В. Г. Шевченко, А. Д. Фурсіна, С. Ю. Кружнова) - Запоріжжя: НУЗП. - 2019. - 26 с.; 22 с.
5. Методичні вказівки і завдання до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Технічна механіка» для студентів денної форми навчання галузі знань 173 «Авіоніка». Спеціалізація «Електротехнічні комплекси та системи літальних апаратів» / Укл.: А.Д. Фурсіна, С.Ю. Кружнова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 14 с.
6. Методичні вказівки і завдання до практичних робіт з курсу “Теоретична та прикладна механіка” для студентів денної форми навчання спеціальностей 131 “Прикладна механіка” (Обладнання та технології ливарного виробництва. Технології та устаткування зварювання. Відновлення та підвищення зносостійкості деталей та конструкцій). Частина 2 / Укл.: В.Г. Шевченко, А.Д. Фурсіна, С.Ю. Кружнова, – Запоріжжя: НУЗП, 2019. – 22 с.
7. Методичні вказівки і завдання до практичних робіт з курсу “Теоретична та прикладна механіка” для студентів денної форми навчання спеціальностей 131 “Прикладна механіка” (Обладнання та технології ливарного виробництва. Технології та устаткування зварювання. Відновлення та підвищення зносостійкості деталей та конструкцій). Частина 1 / Укл.: В.Г. Шевченко, А.Д. Фурсіна, С.Ю. Кружнова, – Запоріжжя: НУЗП, 2019. – 26 с.

ДОДАТКИ

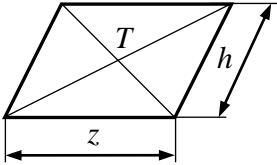
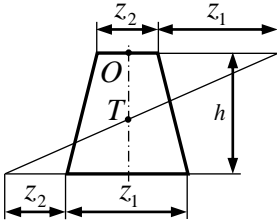
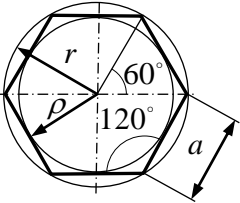
Додаток А

Площі і центри ваги плоских фігур

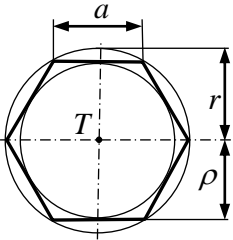
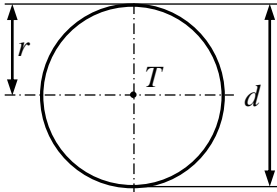
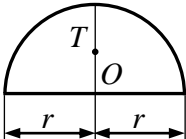
Таблиця А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Трикутник</p> 	$F = \frac{1}{2} ah_a$	$BO = OC ;$ $TO = \frac{1}{3} AO .$ <p>Центр ваги – в точці перетину медіан</p>
<p>Рівнобічний трикутник</p> 	$F = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} ;$ $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$TO = \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$
<p>Квадрат</p> 	$F = a^2 = \frac{1}{2} u^2 ;$ $a = 0.7071u = \sqrt{F} ;$ $u = 1.414a = 1.414\sqrt{F}$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>
<p>Прямокутник</p> 	$F = ab = a\sqrt{u^2 - a^2} =$ $= b\sqrt{u^2 - b^2} ;$ $u = \sqrt{a^2 + b^2}$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>

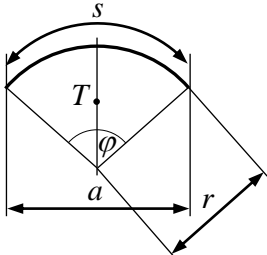
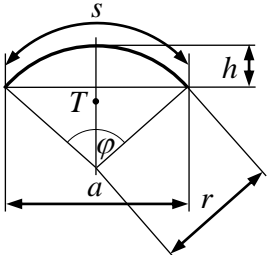
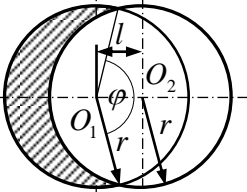
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;">Паралелограм</p> 	$F = zh$	<p>Центр ваги – в точці перетину осей і діагоналей</p>
<p style="text-align: center;">Трапеція</p> 	$F = \frac{z_1 + z_2}{2} h$	$TO = \frac{1}{3} h \frac{2z_1 + z_2}{z_1 + z_2}$
<p style="text-align: center;">Правильний шестикутник</p> 	$F = 2.5981a^2 = 3.4641\rho^2;$ $r = a = 1.1547\rho;$ $\rho = 0.8660a$	<p>Центр ваги – у центрі шестикутника</p>

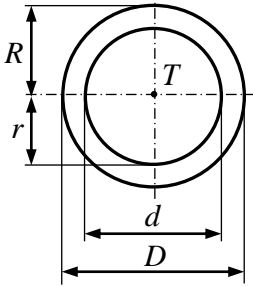
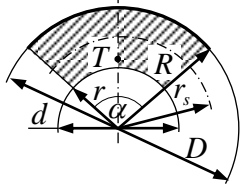
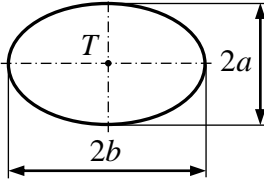
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p>Правильний n-кутник</p> 	$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} =$ $= n \rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} =$ $= n \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$	<p>Центр ваги – у центрі багатокутника, тобто у точці перетину осей і діагоналей</p>
<p>Коло</p> 	$F = \pi r^2 = 3.1416r^2 =$ $= \frac{1}{4} \pi d^2 = 0.7854d^2;$ <p>периметр:</p> $2\pi r = 6.2832r =$ $= \pi d = 3.1416d.$	<p>Центр ваги – у центрі кола, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>
<p>Напівколо</p> 	$F = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{1}{8} \pi d^2 =$ $= 0.393d^2$	$TO = \frac{4r}{3\pi} = 0.4244r$

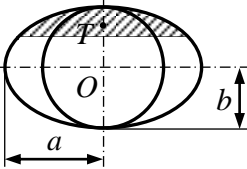
Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги							
<p>Круговий сектор</p> <p>φ – центральний кут; a – довжина хорди</p> 	$F = \frac{1}{2}sr = \frac{1}{360}\varphi^{\circ}\pi r^2;$ $s = r\varphi^{\circ}\frac{\pi}{180} = 0.01745r\varphi^{\circ};$ $\varphi^{\circ} = \frac{57.296s}{r};$ $r = \frac{2F}{s} = \frac{57.296s}{\varphi^{\circ}}$	$TO = \frac{2}{3}r \sin \frac{\sin \varphi^{\circ}}{\frac{\varphi^{\circ}}{2}} =$ $= \frac{2}{3} \frac{ra}{s} = \frac{r^2 a}{3F} =$ $= 38.197r \sin \frac{\sin \varphi^{\circ}}{\frac{\varphi^{\circ}}{2}}$ <p>При $\varphi^{\circ} = 90^{\circ}$: $TO = 0.600r$; при $\varphi^{\circ} = 60^{\circ}$: $TO = 0.6366r$.</p>							
<p>Круговий сегмент</p> <p>φ – центральний кут;</p> 	$F = \frac{r(s-a) + ah}{2};$ $a = 2\sqrt{h(2r-h)};$ $h = r - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}$	$TO = \frac{a^3}{12F} =$ $= \frac{2}{3}r^3 \frac{\sin^3 \frac{\varphi^{\circ}}{2}}{F}$							
	$F = r^2 \left(\pi + \sin \varphi - \frac{\varphi^{\circ} \pi}{180} \right) = r^2 \eta$								
$\frac{l}{d}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
η	0.4	0.79	1.18	1.56	1.91	2.25	2.55	2.81	3.02

Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;">Кругове кільце</p> 	$F = \pi(R^2 - r^2) =$ $= \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) =$ $= 0.7854(D^2 - d^2)$	<p>Центр ваги – у центрі кіл, що обмежують кругове кільце, тобто в точці перетину осей (діаметрів)</p>
<p style="text-align: center;">Сектор кругового кільця</p> 	$F = \frac{\alpha \cdot \pi}{360}(R^2 - r^2) =$ $= 0.00873\alpha(R^2 - r^2).$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $F = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{2} =$ $= 1.5708(R^2 - r^2).$	$OT = 38.197 \times$ $\frac{(R^3 - r^3) \sin \frac{\alpha}{2}}{(R^2 - r^2) \frac{\alpha}{2}}.$ <p>При $\alpha = 180^\circ$</p> $OT = \frac{4(R^3 - r^3)}{3\pi(R^2 - r^2)} =$ $= 0.424 \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$
<p style="text-align: center;">Еліпс</p> 	$F = \pi \cdot a \cdot b = 3.1416a \cdot b =$ $= 3.1416 \times$ $\times \sqrt{2(a^2 + b^2)} \frac{(a-b)^2}{2.2}$	<p>Центр ваги – у середині еліпса, тобто в точці перетину його осей</p>

Продовження таблиці А.1

Фігура	Площа	Центр ваги
<p style="text-align: center;">Еліптичний сегмент</p> 	<p>Площа еліптичного сегмента визначається добутком відношення a/r на площу відповідного кругового сегмента</p> $F_{ел} = \frac{a}{r} F_{кр}$ <p style="text-align: center;">Аналогічне правило справедливо і для еліпсоїда обертання</p>	<p>Центр ваги еліптичного сегмента співпадає з центром ваги кругового сегмента при $d = 2b$</p>
<p style="text-align: center;">Квадрант (четвертина) еліпса</p> 	<p>F – площа квадранта:</p> $F = \frac{1}{4} \pi ab .$ <p>F' – площа доповнення до квадранта:</p> $F' = ab \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) .$	<p>координати центра ваги квадранта:</p> $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{ba}{\pi} ; y = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi} ;$ <p>координати центра ваги доповнення до квадранта:</p> $x_1 = \frac{a}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) ;$ $y_1 = \frac{b}{6} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$
<p style="text-align: center;">Параболічний напівсегмент</p> 	$F = \frac{2}{3} xy$	<p>відстань центра ваги параболічного напівсегмента від вершини:</p> $a = \frac{3}{5} x ; b = \frac{3}{8} y ;$ <p>центр ваги доповнення до параболічного напівсегмента:</p> $a_1 = 0.3x ; b_1 = 0.75y .$ <p style="text-align: center;">Справедливо також і для випадку, коли хорда утворює із віссю косий кут.</p>

Додаток Б

Міжнародна метрична система одиниць

Міри довжини

Назва	Скорочене позначення	Величина	Відношення до см	Відношення до основної одиниці (м)
Пікометр	<i>пм; pm</i>	0.001 <i>нм</i>	10^{-10}	10^{-12}
Нанометр	<i>нм; nm</i>	0.001 <i>мк</i>	10^{-7}	10^{-9}
Мікрон (мікрометр)	<i>мк; μ</i>	0.000001 <i>м=0.001 мм</i>	10^{-4}	10^{-6}
Міліметр	<i>мм; mm</i>	1000 <i>мк</i>	10^{-1}	10^{-3}
Сантиметр	<i>см; cm</i>	0.01 <i>м=10 мм</i>	1	10^{-2}
Дециметр	<i>дм; dm</i>	0.1 <i>м=10 см=100 мм</i>	10	10^{-1}
Метр	<i>м; m</i>	100 <i>см=1000 мм</i>	10^2	1
Кілометр	<i>км; km</i>	1000 <i>м=1 000 000 мм</i>	10^5	10^3
Мегаметр	<i>Мм; Mm</i>	1 000 000 <i>м</i>	10^8	10^6

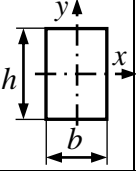
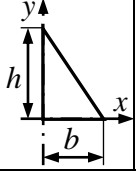
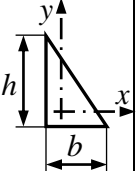
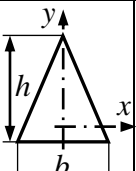
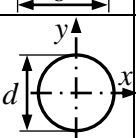
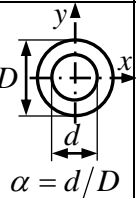
Додаток В

Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 30° та 45°
 $(\frac{\pi}{6}$ та $\frac{\pi}{4})$

	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin a$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos a$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg a$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
$ctg a$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$sec a$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\pm \infty$	-1	$\pm \infty$	1

Додаток Г

Геометричні характеристики плоских перерізів найпростіших фігур

Форма перерізу	Позначення геометричних характеристик							
	F	I_x	I_y	I_{xy}	I_p	W_x	W_y	W_p
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	—	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{b^2h^2}{24}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$	—	—	—	—
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	—	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{24}$	—
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$		0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
 $\alpha = d/D$	$\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$		0	$\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$	

Додаток Д

Контрольні питання

1. Як визначається статичний момент фігури через її площу та координати центра ваги? Яка розмірність статичного момента?
2. Чому дорівнює статичний момент площі фігури відносно осі, яка проходить через центр ваги фігури?
3. За якими формулами визначаються координати центра ваги фігури?
4. Що називається осьовим, полярним та відцентровим моментами інерції? Яка їх розмірність?
5. Як пов'язані між собою суми осьових моментів інерції відносно точки перетину цих осей?
6. Які моменти інерції завжди додатні?
7. Записати формули для визначення осьових та відцентрового моментів інерції при паралельному переносі осей.
8. Чому дорівнює осьовий момент інерції прямокутника відносно його центральної осі, паралельній основі?
9. Чому дорівнюють полярний та осьові моменти інерції кола відносно його центральних осей?
10. Які осі називаються головними центральними осями?
11. Чому вісь симетрії фігури завжди є однією із головних осей інерції?
12. Як визначається момент інерції складної фігури?
13. Як визначається кут нахилу головних осей складного перерізу?
14. Що таке момент опору перерізу?
15. Як визначається момент опору складного перерізу?