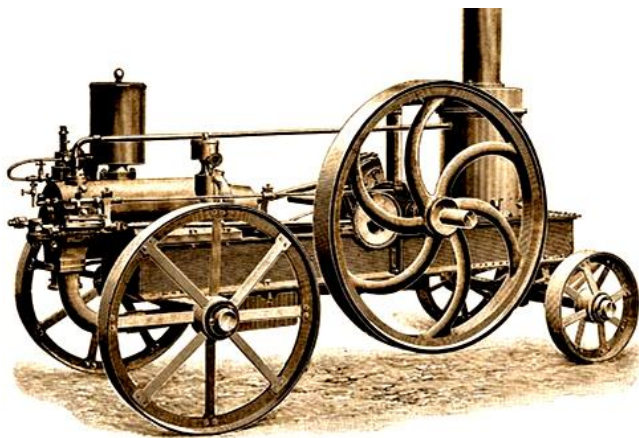


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

О.С. Омельченко, П.К. Штанько, Н.В. Шалева

Конспект лекцій з дисципліни

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання



2023

Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка» для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання / Укл.: О.С. Омельченко, П.К. Штанько, Н.В. Шалева - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 180 с.

Укладачі: О.С. Омельченко, ст. викладач;
П.К. Штанько, доцент, канд. техн. наук;
Н.В. Шалева, асистент

Рецензент: В.І. Пожусь, професор, д-р фіз-мат.наук

Відповідальний
за випуск: В.Г. Шевченко, завідувач каф. «Механіка»

Затверджено
на засіданні кафедри
«Механіка»
Протокол № 5
від "12" "12" 2022.

Рекомендовано до видання
НМК БАД факультету
Протокол № 4
від "28" "12" 2022.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	7
РОЗДІЛ 1. СТАТИКА	8
ГЛАВА 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ СТАТИКИ	8
1.1. Предмет статyki	8
1.2. Сила	8
1.3. Аксиоми статyki	10
1.4. Механічні в'язі та їх реакції	13
1.5. Задачі статyki	19
Контрольні запитання	19
ГЛАВА 2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ	20
2.1. Рівнодійна системи збіжних сил	20
2.2. Проекція сили на вісь і площину	22
2.3. Аналітичний спосіб визначення рівнодійної	23
2.4. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил	24
2.5. Теорема про три непаралельні сили	24
2.6. Аналітичні умови рівноваги	25
2.7. Статично визначувані і статично невизначувані задачі	26
2.8. Методика та приклади розв'язування задач статyki	26
Контрольні запитання	27
ГЛАВА 3. МОМЕНТИ СИЛ	28
3.1. Момент сили відносно центра (точки)	28
3.2. Теорема Варіньона для системи збіжних сил	30
3.3. Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил	32
3.4. Момент сили відносно осі	32
3.5. Залежність між моментом сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку	34
3.6. Момент сили відносно координатних осей	35
Контрольні запитання	37
ГЛАВА 4. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ	38
4.1. Додавання двох паралельних сил	38
4.2. Пара сил	41
4.3. Момент пари сил	41
4.4. Еквівалентність пар сил	43
4.5. Додавання пар сил	45
4.6. Умови рівноваги пар сил	47

Контрольні запитання	48
ГЛАВА 5. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА.....	50
5.1. Лема про паралельне перенесення сили	50
5.2. Зведення довільної системи сил. Головний вектор і головний момент системи	51
5.3. Векторні умови рівноваги довільної системи сил	52
5.4. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту довільної просторової системи сил	53
5.5. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил	55
5.6. Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил	56
5.7. Інваріанти зведення довільної просторової системи сил	56
5.8. Часткові випадки зведення довільної просторової системи сил	58
Контрольні запитання	61
ГЛАВА 6. СИСТЕМА СИЛ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ ПО ПЛОЩИНІ (ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ)	62
6.1. Визначення головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил	62
6.2. Зведення довільної плоскої системи сил	63
6.3. Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил	65
6.4. Рівновага плоскої системи паралельних сил	67
6.5. Розподілені навантаження	68
6.6. Рівновага системи тіл	70
Контрольні запитання	70
ГЛАВА 7. ТЕРТЯ	72
7.1. Тертя ковзання. Закони Кулона	72
7.2. Кут і конус тертя	75
7.3. Тертя кочення	80
7.4. Тертя вертіння	84
Контрольні запитання	88
ГЛАВА 8. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ	89
8.1. Основні поняття про плоскі ферми	89
8.2. Метод вирізання вузлів	91
8.3. Метод Ріттера	92
Контрольні запитання	92
ГЛАВА 9. ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА	93
9.1. Координати центра паралельних сил	93

9.2. Центр ваги твердого тіла	95
9.3. Центр ваги однорідного тіла	96
9.4. Методи знаходження центра ваги	98
Контрольні запитання	102
РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА	103
ГЛАВА 10. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ	103
10.1. Закон руху точки	103
10.2. Швидкість точки	110
10.3. Прискорення руху точки	114
10.4. Рівномірний та рівнозмінний рухи точки	118
Контрольні запитання	119
ГЛАВА 11. ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА	120
11.1. Число степенів вільності і закон руху твердого тіла	120
11.2. Поступальний рух твердого тіла	120
11.3. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі	121
11.4. Передавальні механізми	128
Контрольні запитання	131
ГЛАВА 12. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ	132
12.1. Означення параметрів складного руху	132
12.2. Обчислення швидкостей і прискорень в складному русі.	133
12.3. Теореми про додавання швидкостей і прискорень	134
Контрольні запитання	137
ГЛАВА 13. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ (ПЛОСКИЙ) РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	138
13.1. Плоский рух тіла та рух плоскої фігури. Рівняння руху плоскої фігури	138
13.2. Теорема про швидкість точки плоскої фігури	141
13.3. Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла	142
13.4. Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей	143
13.5. План швидкостей	146
13.6. Прискорення точки плоскої фігури	148
13.7. Миттєвий центр прискорень. Визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра прискорень	150
Контрольні запитання	152
ГЛАВА 14. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	153
14.1. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей	158

14.2. Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формули Вілліса	158
14.3. Додавання обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються	161
14.4 Рівняння сферичного руху твердого тіла. Кути Ейлера.....	163
14.5 Визначення кутової швидкості і кутового прискорення тіла за рівняннями його руху.....	165
14.6 Аналітичне знаходження швидкостей точок тіла при сферич- ному русі. Рівняння миттєвої осі обертання.....	169
14.7 Знаходження швидкостей і прискорень точок тіла при сфери- чному русі методом миттєвих осей. Теорема Ейлера – Д’Алам- бера.....	171
14.8 Рух вільного твердого тіла. Рівняння руху.....	174
14.9 Швидкості точок вільного твердого тіла.....	175
14.10 Прискорення точок вільного твердого тіла.....	177
Контрольні запитання.....	178
ЛІТЕРАТУРА	180

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка – це одна з навчальних дисциплін науки «Механіка». Саме слово «механіка» грецького походження і в прямому перекладі означає «хитрість». Цей термін уперше був застосований у III століття до н.е. одним з учнів Аристотеля під час вивчення таких явищ, в яких «менше зусилля перемагає більше», наприклад, у разі піднімання вантажу за допомогою важеля.

Механіка – це наука про найпростішу форму руху матерії – механічний рух. Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони механічного руху, який визначається переміщенням одного матеріального об'єкта відносно іншого.

Теоретична механіка, яка вивчає одну з форм руху матерії, належить до природничих наук. Серед природничих наук вона займає чільне місце, бо є науковим фундаментом для багатьох технічних дисциплін, теорія яких ґрунтується на положеннях та законах теоретичної механіки.

Основним завданням теоретичної механіки є пізнання кількісних і якісних закономірностей механічного руху та відображення їх на математичній мові у вигляді рівнянь – законів механічного руху.

Навчальну дисципліну «Теоретична механіка» прийнято розділяти на три розділи: статику, кінематику та динаміку. У такому ж порядку та відповідно до навчальної програми з дисципліни «Теоретична механіка» для бакалаврів напряду «Інженерна механіка» викладено навчальний матеріал у цьому конспекті. Форма викладення матеріалу достатньо стисла, однак спрямована на формування вмінь та навиків розв'язування задач.

Конспект містить два розділи, які поділені на глави. У кінці кожної глави наведені контрольні запитання для самоперевірки отриманих знань.

РОЗДІЛ 1 СТАТИКА

ГЛАВА 1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ СТАТИКИ

1.1 Предмет статyki

Статикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчають методи перетворення одних систем сил в еквівалентні їм, а також встановлюють умови рівноваги механічних систем під дією різних систем сил.

Вивчення цього розділу розпочнемо з розгляду основних понять статyki. Об'єктами вивчення теоретичної механіки є не реально існуючі тіла, а певні абстрактні моделі цих тіл. Такими моделями є **матеріальна точка, система матеріальних точок і абсолютно тверде тіло. Матеріальною точкою** називають тіло, розмірами якого за умовами даної задачі можна знехтувати. **Системою матеріальних точок** називають сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані. **Абсолютно твердим** називають тіло, форми й розміри якого не змінюються під дією прикладеної до нього сили, тобто недеформоване тіло. Усяке фізичне тіло у механіці уявляють як систему матеріальних точок.

У абсолютно твердих тілах відстань між будь-якими двома точками залишається постійною. Поняття про абсолютно тверде тіло є абстрактним, оскільки реальні тіла під дією сил змінюють свою форму й розміри, тобто деформуються. Методи розрахунку таких тіл розглядають у курсах опору матеріалів, теорії пружності тощо.

1.2 Сила

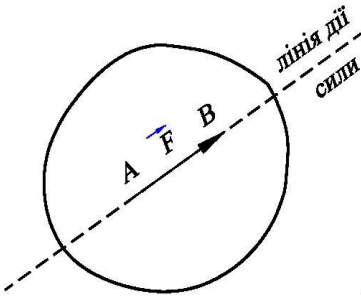
Одним з основних понять теоретичної механіки є поняття сили.

Силою називають міру механічної взаємодії між тілами, в результаті якої може змінюватися відносно положення тіл, їх швидкості та форма.

Сила – величина векторна і визначається трьома елементами: числовим значенням (модулем), напрямком дії, точкою прикладення. Напрямок, у якому відбувається взаємодія між тілами, називають **лінією дії сили** (Рис. 1.1).

За одиницю сили в системі одиниць СІ прийнятий ньютон [Н]; у технічній системі прийнято кілограм-силу [кгс].

Для порівняння: $1\text{Н} = 0,102\text{кгс}$; $1\text{кгс} = 9,81\text{Н}$. Силу, як і будь-



яку векторну величину, будемо позначати $\vec{F}$, модуль сили $|\vec{F}| = F$.

Сукупність декількох сил, прикладених до механічної системи, називають **системою сил**. Якщо лінії дії сил системи лежать в одній площині, то її називають **плоскою**, якщо лінії дії сил лежать в різних площинах, то систему сил називають **просторовою**.

Рисунок 1.1

Якщо, не порушуючи кінематичного стану тіла, одну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ можна замінити іншою системою $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n)$, то такі системи сил називають **еквівалентними**. Під кінематичним станом тіла слід розуміти стан його руху або спокою.

Якщо система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ еквівалентна одній силі $\vec{R}$, то цю силу називають **рівнодійною** даної системи сил.

Зрівноважувальна сила дорівнює за модулем рівнодійній силі і напрямлена вздовж лінії її дії у протилежний бік. **Зрівноваженою системою** сил називають таку систему сил, під дією якої тіло не змінює свого руху або залишається у стані спокою. **Зрівноважена система сил еквівалентна нулю**.

Якщо тверде тіло під дією деякої системи сил перебуває в рівновазі або в прямолінійному рівномірному русі, то користуються скороченим виразом "рівновага сил".

Усі сили, що діють на механічну систему, поділяють на дві групи: **зовнішні** та **внутрішні**. Зовнішніми називають сили, що діють на тверде тіло з боку інших тіл. Внутрішніми називають сили взаємодії між точками даного тіла.

Силу, що діє на тверде тіло в одній точці, називають **зосередженою силою**.

Сили, що діють на точки об'єму, поверхні чи лінії тіла, називають **розподіленими силами**. Розподілені сили характеризують інтенсивністю q .

1.3 Аксиоми статички

В основі статички лежать експериментально і логічно встановлені твердження (аксиоми), які відображають властивості сил, що діють на тверде тіло.

Аксиома про дві сили

Дві сили, прикладені до твердого тіла, будуть урівноважені (еквівалентні нулю) тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють на одній прямій і спрямовані в протилежні боки (Рис. 1.2):

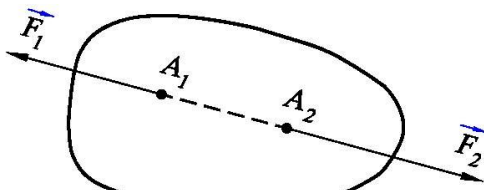


Рисунок 1.2

система $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$
еквівалентна 0;
 $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2; \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|.$

Аксиома про приєднання або вилучення зрівноважених сил

Не змінюючи системи сил, що діє на тіло, до неї можна приєднувати або з неї вилучати будь-яку зрівноважену систему сил.

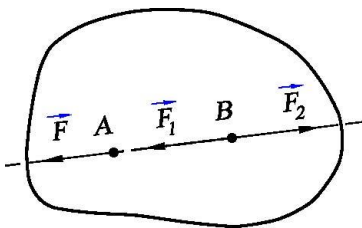


Рисунок 1.3

Наслідок з аксіом 1 і 2. Не

змінюючи дії сили на тіло, точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії.

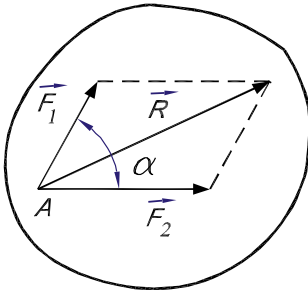
Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці A (Рис.1.3). У точці B, яка лежить на лінії дії сили $\vec{F}$, прикладемо дві зрівноважені сили $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, причому

$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$. Система сил ($\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$) еквівалентна $\vec{F}$ на підставі аксіоми 2. Сили ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) є також зрівноваженими. згідно з аксіомою 1 та за аксіомою 2 їх можна вилучити. Тоді залишається сила $\vec{F}_1$, прикладена в точці B , що необхідно було довести. Отже, силу можна переносити вздовж лінії дії, тобто вона є **ковзаючим вектором**.

Зауважимо, що аксіоми 1, 2 та наслідок з них справедливі лише для абсолютно твердих тіл.

Аксіома про паралелограм сил

Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, яка прикладена в тій самій точці, і визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах (Рис. 1.4).



Згідно з цією аксіомою система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) еквівалентна $\vec{R}$. За правилом додавання векторів рівнодійна дорівнює геометричній сумі цих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

Рисунок 1.4

Модуль рівнодійної визначають за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

де α – кут між векторами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

Аксіома про рівність дії та протидії

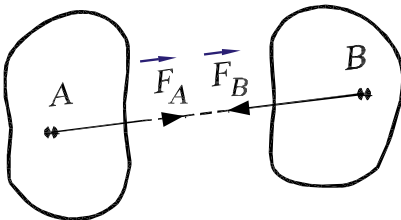


Рисунок 1.5

Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні боки.

Якщо тіло A діє на тіло B з силою $\vec{F}_A$ (Рис. 1.5), то тіло B діє на тіло A з силою $\vec{F}_B$, причому $\vec{F}_A = -$

$\vec{F}_B$, а $F_A = F_B$. Однак ці сили не зрівноважені, бо

прикладені до різних тіл, тобто система сил ($\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$) не еквівалентна нулю.

Аксіома про затвердіння або принцип затвердіння

Якщо не абсолютно тверде тіло (тіло, що деформується) перебуває в стані рівноваги, то рівновага його не порушиться, якщо воно затвердіє.

Принцип затвердіння має велике значення для вивчення рівноваги тіл, які деформуються. З нього випливає, що умови рівноваги сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, поширюються на вивчення рівноваги не абсолютно твердих тіл.

Отже, умови рівноваги сил, прикладених до твердих тіл, є необхідними, але не достатніми для деформівних тіл. Так, для рівноваги гнучкої нитки недостатньо того, щоб прикладені до її кінців сили були однакові за модулем і напрямлені по одній прямій у протилежні боки. Потрібно ще, щоб ці сили розтягували нитку.

Перш ніж перейти до формулювання останньої аксіоми статички, введемо поняття в'язей і реакцій в'язей.

Тіла в природі можна поділити на **вільні та невільні**. Вільними називають тіла, які під дією системи сил можуть переміщатися в просторі у будь-якому напрямку. Тіло, рух якого в просторі обмежений іншими тілами, називають невільним. **Тіла, які обмежують рух даного твердого тіла в просторі, називають в'язями.**

Очевидно, між тілом і в'язями існують механічні взаємодії. Вплив тіла на в'язь називатимемо дією, а вплив в'язі на тіло протидією. Протидії в'язей називають **реакціями в'язей**. **Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на тіло.** Вона спрямовується протилежно до того напрямку, в якому в'язь перешкоджає можливому руху тіла.

Оскільки в статистиці встановлюють умови рівноваги, в основному, для вільних тіл, то для використання цих умов до невільних тіл слід застосувати аксіому про в'язі.

Аксіома про в'язі або принцип звільнення від в'язей

Не змінюючи кінематичного стану тіла, всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.

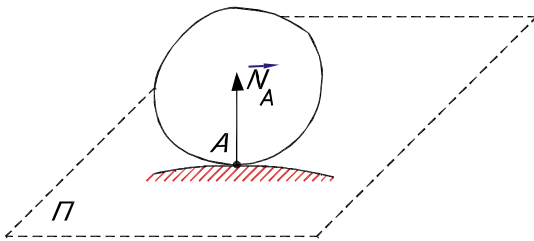
1.4 Механічні в'язі та їх реакції

Конструктивно в'язі можуть бути виконані у вигляді різних опор, шарнірних з'єднань, гнучких елементів тощо. Вважатимемо, що в'язі виконані з абсолютно твердих тіл, тертя в місцях з'єднання в'язі з основним тілом незначне, тому ним можна знехтувати. **Такі в'язі, в яких не беруть до уваги тертя, будемо називати ідеальними.** Розглянемо основні типи в'язей.

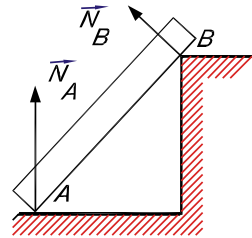
Гладка опорна поверхня

Така в'язь є ідеальною поверхнею, тобто поверхнею без тертя. Наприклад, дзеркальна, льодяна, добре відшліфована металева поверхні тощо.

Реакція $\vec{N}$ гладкої опорної поверхні спрямована по нормалі до спільної дотичної площини Π , проведеної через точку A контакту тіла і в'язі, та прикладена в цій точці (Рис. 1.6, а).



а



б

Рисунок 1.6

Напрямок реакції $\vec{N}$ протилежний до напрямку, в якому в'язь обмежує рух тіла M . Реакцію $\vec{N}$ називають нормальною реакцією.

Окремими випадками такого типу в'язей будуть обпирання тіла на ребро або точку гладкої опорної поверхні (Рис. 1.6, б). Якщо тіло обпирається до поверхні в точці (опора В на рис. 1.6, б), то реакцію спрямовують по нормалі до поверхні тіла.

Шорстка опорна поверхня

Тіло вагою $\bar{P}$ лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (Рис. 1.7, а).

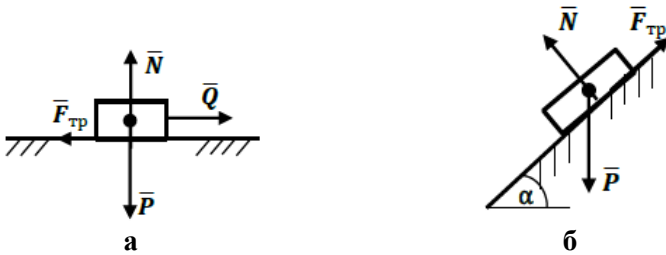


Рисунок 1.7

Якщо до тіла прикласти горизонтальну силу $\bar{Q}$, то на тіло крім двох зрівноважених сил $\bar{N}$, $\bar{P}$ і сили $\bar{Q}$, буде діяти сила $\bar{F}_{тр}$, яка виникає на границі контакту тіл і яка буде напрямлена протилежно до сили $\bar{Q}$. Силу $\bar{F}_{тр}$ називають **силою тертя ковзання**. Максимальна сила тертя ковзання визначається за формулою:

$$F_{тр} = f \cdot N,$$

де f - **статичний коефіцієнт тертя ковзання**.

(Детальніше див. в главі 7).

Гнучка в'язь

Гнучкі в'язі реалізують за допомогою ниток, шнурків, ланцюгів, канатів, які вважаємо нерозтяжними і невагомими. Гнучка в'язь не дозволяє тілу M віддалятися від точки закріплення (точка B на Рис. 1.8). Тому реакцію гнучкої в'язі спрямовують по ній від точки з'єднання тіла і в'язі до точки кріплення в'язі з нерухомою поверхнею (від точки A до точки B на Рис. 1.8). Слід зауважити, що гнучка в'язь працює тільки на розтягання.

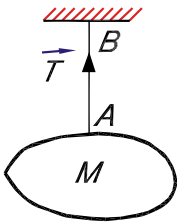


Рисунок 1.8

Циліндричний шарнір (підшипник)

Ця опора здійснюється за допомогою двох циліндрів, що мають спільну геометричну вісь (Рис. 1.9), яка перпендикулярна до площини рисунка і проходить через точку O . На Рис. 1.9, а опора зображена в розрізі. Циліндр 1, який називають віссю, прикріплений до

нерухомої основи. Циліндр 2, який називають втулкою, жорстко з'єднаний з тілом M , рівновагу якого розглядають. Циліндричний шарнір дозволяє повертатись тілу M навколо осі 1 і рухатись уздовж цієї осі.

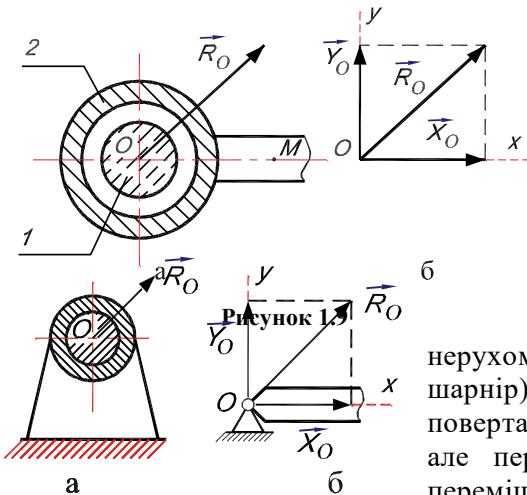
Лінія дії реакції $\vec{R}_0$ циліндричного шарніра проходить через центр O шарніра. Напрямок реакції $\vec{R}_0$ вказати неможливо. Тому у разі звільнення тіла від такої в'язі реакцію $\vec{R}_0$ доцільно замінити двома складовими $\vec{X}_0$ і $\vec{Y}_0$ (Рис. 1.9, б), напрямки яких приймають за додатними напрямками осей координат. Тоді складові реакції $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ невідомі лише за алгебраїчною величиною. Розв'язуючи конкретну задачу, знаходять алгебраїчні значення $\vec{X}_0$ і $\vec{Y}_0$. Величину і напрямок реакції $\vec{R}_0$ визначають за формулами:

$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}; \quad \cos \angle(x, \vec{R}_0) = \frac{X_0}{R_0}; \quad \cos \angle(y, \vec{R}_0) = \frac{Y_0}{R_0}.$$

На принципі циліндричного шарніру побудовано шарнірно-нерухомі і шарнірно-рухомі опори.

Шарнірно-нерухома і шарнірно-рухома опори

Шарнірно-нерухома опора (нерухомий шарнір) дає змогу тілу вільно повертатися навколо осі шарніра, але перешкоджає його лінійним переміщенням у всіх напрямках



(Рис. 1.10, а).

Рисунок 1.10

Реакція шарнірно-нерухомої опори проходить через центр O шарніра та лежить в площині, перпендикулярній до осі шарніра. При розв'язуванні практичних задач цю реакцію представляють двома складовими $\vec{X}_0$ і $\vec{Y}_0$ (Рис. 1.10, б). Шарнірно-рухома опора за своєю конструкцією аналогічна до попередньої. Відмінність лише в тому, що нижня обойма шарніра поставлена на котки (Рис. 1.11, а), які дозволяють переміщати тіло M паралельно до нерухомої опорної поверхні. Лінія дії реакції $\vec{N}$ опори проходить через центр шарніра і перпендикулярна до опорної поверхні (Рис. 1.11, б).

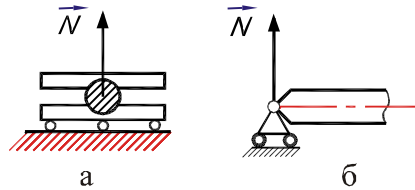


Рисунок 1.11

Сферичний шарнір

Такою в'яззю є куля, розміщена в сферичній порожнині (Рис. 1.12).

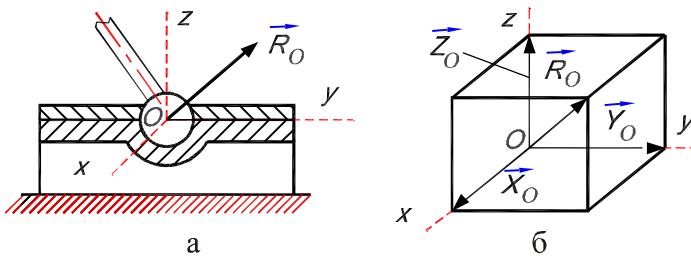


Рисунок 1.12

Реакція $\vec{R}_0$ сферичного шарніра проходить через центр O шарніра і має довільний напрямок у просторі. Практично реакцію $\vec{R}_0$ сферичного шарніра розкладають на три складових X_0 , Y_0 , Z_0 (Рис. 1.12, б). Величину і напрямок реакції $\vec{R}_0$ визначають за формулами:

$$R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2};$$

$$\cos \angle(x, \vec{R}_0) = \frac{X_0}{R_0}; \quad \cos \angle(y, \vec{R}_0) = \frac{Y_0}{R_0}; \quad \cos \angle(z, \vec{R}_0) = \frac{Z_0}{R_0}.$$

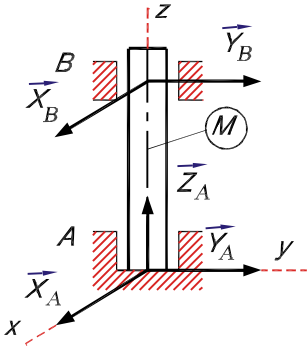


Рисунок 1.13

Підшипник і під'ятник

Підшипник є різновидом циліндричного шарніра (Рис. 1.13). Реакція підшипника B лежить у площині, перпендикулярній до осі підшипника. При практичному розв'язку задач її показують двома складовими $\vec{X}_B$ і $\vec{Y}_B$.

Під'ятник утворюється поєднанням підшипника з опорною площиною, яка обмежує переміщення тіла M вздовж осі підшипника в бік опорної площини (опора A на Рис. 1.13).

Реакцію під'ятника A при практичному розв'язанні задач представляють трьома складовими X_A , Y_A і Z_A (Рис. 1.13).

Ідеальна стержнева в'язь

В'язь виконують у вигляді жорстких стержнів, які розглядають як абсолютно тверді тіла, невагомі та ненавантажені зовнішніми силами. Такі стержні називають ідеальними. Кінці стержнів прикріплені до тіла і нерухомої основи за допомогою циліндричних або сферичних шарнірів, розмірами яких і тертям у яких нехтуємо.

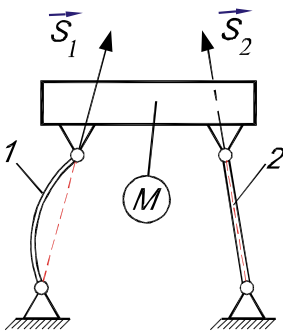


Рисунок 1.14

Нехай для тіла M , яке перебуває в рівновазі, ідеальні стержні 1 і 2 є в'язями (Рис. 1.14). Тоді кожен із стержнів є тілом, яке знаходиться в рівновазі під дією двох сил, прикладених у точкових шарнірах. На підставі аксіом 1 та 4 реакція ідеального шарнірно закріпленого стержня спрямовується по прямій, що з'єднує центри точкових шарнірів.

Жорстке защемлення

Такий тип в'язі є тоді, коли тіло нерухомо з'єднане з опорою (в'яззю) (Рис. 1.15). Ця в'язь обмежує не тільки лінійні переміщення тіла в опорі, а також повертання тіла.

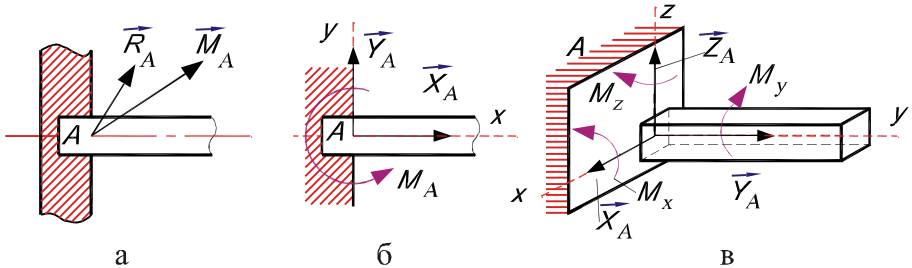


Рисунок 1.15

Тому реакцію жорсткого защемлення складають сила $\vec{R}_A$ та момент $\vec{M}_A$ (Рис. 1.15, а), величини і напрямки яких залежать від сил, прикладених до тіла M та наперед невідомі. Момент $\vec{M}_A$ називають **реактивним моментом**.

У разі, коли активні сили, що діють на тіло, розміщені в одній площині, реакція $\vec{R}_A$ і пара сил з моментом M_A теж розміщені в тій самій площині (Рис. 1.15, б).

У просторовій задачі реакцію защемлення $\vec{R}_A$ розкладають на три складові $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, а реактивний момент $\vec{M}_A$ зображають у вигляді трьох пар сил з моментами M_x , M_y , M_z (Рис. 1.15, в).

Слід зазначити, що реакція в'язі завжди направлена вздовж спільної нормалі до стичних поверхонь, яка проходить через центри кривизни цих поверхонь. Якщо центри кривизни стичних поверхонь є різними точками, то існує одна спільна нормаль, якщо центри кривизни збігаються – то існує нескінченна множина спільних нормалей. Прикладами в'язей з нескінченною множиною спільних нормалей є циліндричний або сферичний підшипники.

Вектор реакції в'язі на практиці не завжди заміняють його проєкціями. Це доцільно робити тоді, коли зручно для розв'язування задачі.

1.5 Задачі статички

У статичці абсолютно твердого тіла розглядають дві основні задачі.

Перша задача статички – це задача про еквівалентні перетворення систем сил і заміну їх простішими. Вона має важливе значення не тільки в статичці, а й у динаміці.

Друга задача – про рівновагу системи сил. Ця задача полягає у з'ясуванні необхідних для рівноваги твердого тіла умов, які повинні задовольняти системи сил, прикладені до цього тіла. Встановлені умови рівноваги використовують при розв'язуванні задач з визначення невідомих активних сил і реакцій в'язей.

Розв'язувати обидві задачі статички можна як геометричним, так і аналітичним способами.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється матеріальна точка від геометричної?
2. Яке тіло називають абсолютно твердим?
3. Що називають силою, системою сил? Якими елементами визначається сила?
4. Які дві системи сил будуть еквівалентними?
5. Що розуміють під рівновагою тіла, сил?
6. У чому схожість і різниця між: а) рівнодійною та зрівноважуючою силами; б) зовнішніми та внутрішніми силами?
7. Сформулюйте аксіоми статички.
8. Що розуміють під в'язями та їх реакціями? Чим відрізняються активні сили від реакцій?
9. Назвіть основні види в'язей. Як знаходити їхні реакції?
10. Чи залишаються постійними реакції в'язей при зміні зовнішніх сил, що діють на тіло?
11. Сформулюйте задачі статички.

ГЛАВА 2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

2.1 Рівнодійна системи збіжних сил

Систему сил, лінії дій яких перетинаються в одній точці, називають збіжною. Системи збіжних сил можуть бути плоскими і просторовими.

Нехай на тверде тіло діє збіжна система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, лі-

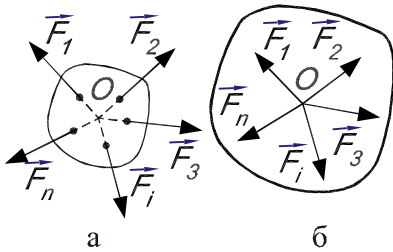


Рисунок 2.1

нії дій яких перетинаються в точці O (Рис. 2.1, а).

Використовуючи наслідок з аксіоми 2, перенесемо сили вздовж ліній їх дій в точку O і одержимо еквівалентну систему сил, прикладених до твердого тіла в одній точці (Рис. 2.1, б).

Сили, прикладені в одній точці твердого тіла, можна додавати, використовуючи аксіому про паралелограм сил. Нехай до тіла в точці O прикладена система чотирьох збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ (Рис. 2.2, а)

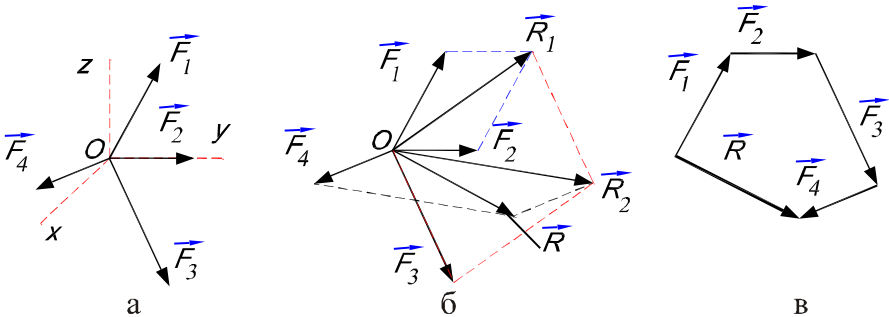


Рисунок 2.2

Знайдемо рівнодійну $\vec{R}_1$ сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (Рис. 2.2, б)

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Рівнодійна $\vec{R}_1$ еквівалентна $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. До рівнодійної $\vec{R}_1$ додамо силу $\vec{F}_3$. Одержимо

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Рівнодійна $\vec{R}_2$ еквівалентна системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$.

Додамо рівнодійну $\vec{R}_2$ з останньою силою $\vec{F}_4$ і одержимо рівнодійну чотирьох сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4,$$

Рівнодійна $\vec{R}$ еквівалентна системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$.

Поширюючи це правило додавання векторів на довільну кількість збіжних сил, можна стверджувати, що **система збіжних сил еквівалентна одній силі – рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил і прикладена в точці перетину ліній їх дій:**

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.1)$$

Як видно з рис. 2.2, б, побудова паралелограмів сил еквівалентна побудові **векторного многокутника сил**. Для системи сил, зображеної на Рис. 2.2, а, векторний многокутник сил побудуємо так: до кінця вектора $\vec{F}_1$ приєднаємо вектор, який геометрично дорівнює $\vec{F}_2$, а з його кінця відкладемо вектор $\vec{F}_3$ тощо (Рис. 2.2, в). Вектор, проведений з точки прикладання першої сили $\vec{F}_1$ до кінця $\vec{F}_4$, є рівнодійною силою $\vec{R}$. Визначення рівнодійної системи збіжних сил за правилом паралелограма або силового многокутника називають геометричним способом визначення рівнодійної.

2.2 Проекція сили на вісь і площину

Аналітичний спосіб розв'язування задач статки ґрунтується на понятті про проекцію сили на вісь.

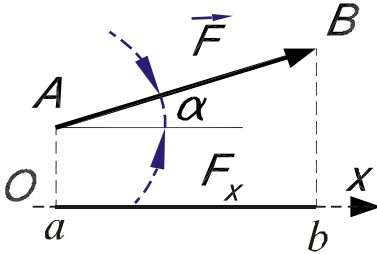


Рисунок 2.3

Проекція вектора сили на вісь є алгебраїчна величина, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатнім напрямком осі і вектором сили (Рис. 2.3).

$$F_x = np_x \vec{F} = F \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Відзначимо, що при $|\vec{F}| > 0$: $F_x > 0$ коли $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$; $F_x = 0$

коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $F_x < 0$ коли $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$.

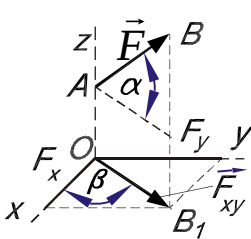


Рисунок 2.4

Проекція вектора сили $\vec{F}$ на площину Oxy є вектор $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$, що лежить між проекцією початку та кінця цього вектора на площину (Рис. 2.4).

Величина цієї проекції:

$$F_{xy} = F \cos \alpha,$$

де α – кут між вектором сили $\vec{F}$ і площиною Oxy . Знайдену проекцію сили на площину спроекуємо на осі Ox і Oy :

$$\begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta, \\ F_y = F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для розв'язування багатьох задач механіки в декартовій системі координат зручно подавати силу $\vec{F}$ через її розклад за векторами ортонормованого базису (одиничні вектори) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (Рис. 2.5).

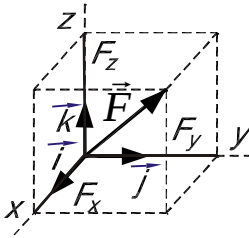


Рисунок 2.5

за формулами:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (2.4)$$

де F_x , F_y , F_z проекції сили $\vec{F}$ на осі системи координат x, y, z відповідно.

За відомими проекціями сили на осі системи координат можна визначити модуль сили і кути, які вона утворює з координатними осями,

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos \angle(\vec{i}, \vec{F}) &= \frac{F_x}{F}, \\ \cos \angle(\vec{j}, \vec{F}) &= \frac{F_y}{F}, \\ \cos \angle(\vec{k}, \vec{F}) &= \frac{F_z}{F}. \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

2.3 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної

Крім геометричного існує ще й аналітичний спосіб визначення рівнодійної системи збіжних сил. Якщо рівність (2.1) спроектуємо на осі декартової системи координат, то одержимо

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (2.6)$$

де R_x , R_y , R_z - проекції рівнодійної $\vec{R}$ на осі координат;

F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} - проекції сили $\vec{F}_i$ на осі координат.

Отже, проекція рівнодійної системи збіжних сил на будь-яку з координатних осей дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на відповідну вісь.

Модуль і напрямок рівнодійної $\vec{R}$ визначають за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (2.7)$$

$$\cos \angle(\vec{i}, \vec{R}) = \frac{R_x}{R}; \cos \angle(\vec{j}, \vec{R}) = \frac{R_y}{R}; \cos \angle(\vec{k}, \vec{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

2.4 Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

З означення зрівноваженої системи сил випливає, що тіло може перебувати у рівновазі під дією даної системи сил тоді, коли рівнодійна $\vec{R} = 0$. Якщо при побудові силового многокутника виявиться, що кінець вектора останньої сили збігається з початком вектора першої сили, то такий многокутник сил називають замкненим.

Отже, для **рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий многокутник, побудований на цих силах, був замкненим.**

Ця умова рівноваги визначається векторною рівністю

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (2.8)$$

Рівність (2.8) називають **геометричною** умовою рівноваги системи збіжних сил.

2.5 Теорема про три непаралельні сили

Теорема. Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дій цих сил перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай тіло перебуває у рівновазі під дією трьох непаралельних сил ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$) (Рис. 2.6).

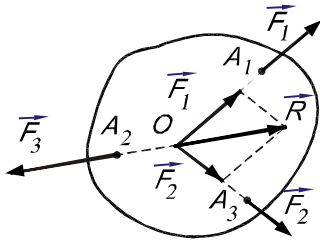


Рисунок 2.6

Знайдемо точку O перетину ліній дій сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, і перенесемо ці сили в цю точку. Згідно з аксіомою 3

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Отже, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ еквівалентна системі $\vec{R}, \vec{F}_3$.

Тепер можна вважати, що тіло перебуває в рівновазі під дією лише двох сил $\vec{R}$ і $\vec{F}_3$.

Згідно з аксіомою 1 це можливо лише при $\vec{R} = -\vec{F}_3$. Таким чином, лінія дії сили $\vec{F}_3$ повинна проходити через точку O , тобто система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ має бути збіжною.

Ця теорема є необхідною, проте не достатньою умовою рівноваги.

2.6 Аналітичні умови рівноваги

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил впливають з геометричної умови (2.8), згідно з якою модуль рівнодійної дорівнює нулю. Використовуючи це значення рівнодійної в формулі (2.7), одержуємо: $R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0$, або згідно з (2.6):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (2.9)$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з координатних осей дорівнювала нулю.

Рівності (2.9) називають **аналітичними** умовами рівноваги системи збіжних сил.

Для випадку плоскої системи збіжних сил отримаємо, відповідно, дві умови рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (2.10)$$

Аналітичні умови рівноваги широко застосовують при розв'язуванні практичних задач. У випадку просторової системи збіжних сил використовують виключно рівняння (2.9).

2.7 Статично визначувані і статично невизначувані задачі

При розв'язанні задач статичної реакції в'язей, як правило, є невідомими величинами. Для їх визначення існують умови рівноваги тієї чи іншої системи сил. Умови рівноваги, в які входять відомі активні сили і невідомі реакції в'язей, називають **рівняннями рівноваги**. Розв'язуючи рівняння рівноваги, визначають невідомі величини.

Задачі, в яких кількість невідомих величин дорівнює кількості рівнянь рівноваги, в які вони входять, називають статично визначуваними. Механічні системи, для яких це має місце, є статично визначуваними.

Задачі, в яких кількість невідомих величин більша, ніж кількість рівнянь рівноваги, в які входять ці величини, називають статично невизначуваними. Системи, для яких це має місце, є статично невизначуваними.

2.8 Методика розв'язування задач статички

Усі задачі статички розв'язують за однією методикою, згідно з якою необхідно:

- 1) вибрати об'єкт рівноваги. Це може бути точка, тіло або система тіл, до яких прикладені задані та невідомі сили;
- 2) дотримуючись певного масштабу, зробити чіткий схематичний рисунок до задачі;
- 3) зобразити на рисунку всі задані сили, прикладені до об'єкта рівноваги;
- 4) умовно звільнити об'єкт рівноваги від накладених в'язей, а їх дію замінити реакціями в'язей. Зобразити на рисунку реакції в'язей;

5) в'яснити, яка система сил діє на об'єкт рівноваги і які умови рівноваги раціонально використати;

6) відповідно до умов рівноваги скласти рівняння рівноваги або виконати відповідні графічні побудови;

7) розв'язати рівняння рівноваги, визначити невідомі величини та проаналізувати одержані результати.

Всі розрахунки в процесі розв'язку задачі рекомендується виконувати у загальному вигляді, а числові значення підставляти лише в кінцеві алгебраїчні вирази.

Контрольні запитання

1. Яку систему сил називають збіжною?
2. Які є системи збіжних сил? Наведіть приклади найпростіших систем збіжних сил.
3. Сформулюйте правила побудови силового трикутника, паралелограма і многокутника.
4. Сформулюйте графічні і аналітичні умови рівноваги плоскої та просторової системи збіжних сил.
5. Чи може вільне тверде тіло перебувати у рівновазі під дією: а) однієї сили; б) двох сил; в) трьох сил?
6. Що називають проекцією сили на вісь, на площину?
7. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили.
8. Як визначають модуль і напрямок рівнодійної збіжних сил?
9. Яку задачу називають статично невизначуваною?

ГЛАВА 3. МОМЕНТИ СИЛ

Поняття про момент сили – одне з основних понять механіки, яке широко використовують і в теоретичних дослідженнях, і при практичних розрахунках. До поняття моменту сили людство прийшло, розглядаючи рівновагу та рух тіл, що мають точку або вісь обертання.

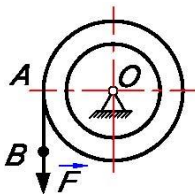


Рисунок 3.1

Наприклад, на нерухомий блок (Рис. 3.1) діє сила $\vec{F}$, яка обертає його навколо горизонтальної осі O . Мірою обертальної дії сили на тіло є момент сили.

3.1 Момент сили відносно центра (точки)

Задана сила $\vec{F}$, зображена вектором $\overrightarrow{AB}$, прикладена до тіла в точці A . Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно центра O (Рис. 3.2).

Моментом сили відносно центра (точки) називають вектор, прикладений у центрі O , який дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки A прикладання сили і вектора сили:

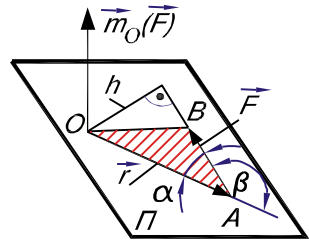


Рисунок 3.2

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (3.1)$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ - радіус-вектор точки прикладання сили відносно центра O .

Якщо радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$ і вектор сили $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ задані розкладом за векторами ортонормованого базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ декартової системи координат, тоді

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Визначимо величину (модуль) і напрямок вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ (Рис. 3.2). Відповідно до поняття і властивостей векторного добутку двох векторів величина (модуль) моменту сили відносно центра дорівнює

$$m_O(\vec{F}) = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha, \quad (3.2)$$

оскільки $\sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = \sin \beta = \sin \alpha$.

Але $r \sin \alpha = h$ (Рис. 3.2) – висота ΔOAB , опущена з вершини O на сторону AB цього трикутника, що збігається з лінією дії сили.

Відстань h від центра O до лінії дії сили називають плечем сили $\vec{F}$ відносно цього центра. Тоді модуль моменту сили відносно центра дорівнює добутку величини сили на її плече відносно цього центра:

$$|m_O(\vec{F})| = |\vec{F}|h.$$

Вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ спрямовують за правилом векторного добутку: тобто вектор-момент сили відносно центра перпендикулярний до площини Π , в якій розміщені сила і центр O так, щоб з його кінця було видно намагання сили повертати тіло навколо центра проти ходу стрілки годинника.

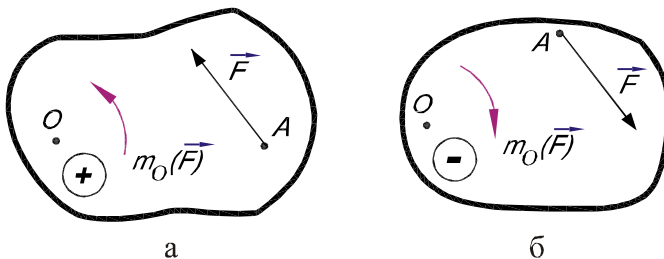


Рисунок 3.3

Якщо на тіло діє плоска система сил, то вектори момен-тів усіх сил будуть перпен-дикулярні до цієї площини, а, отже, між собою

паралельні. Тому моменти додають алгебраїчно та їх можна вважати скалярними величинами, які відрізняються лише величиною та знаками. Отже доцільно ввести алгебраїчну **величину моменту сили відносно точки, яка дорівнює взятому зі знаком "+" або "-" добутку модуля сили на її плече відносно цієї точки:**

$$m_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (3.3)$$

Уважатимемо момент **додатнім**, якщо сила намагається обернути тіло навколо точки проти ходу годинникової стрілки (Рис. 3.3, а) і **від'ємним** - якщо за ходом годинникової стрілки (Рис. 3.3, б).

Одиниці моменту сили : 1 Н·м , 1 кН·м , 1 кгс·м .

Зауважимо, що $Fh = AB \cdot h = 2S_{\Delta OAB}$. Тобто

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta OAB}. \quad (3.4)$$

Модуль моменту сили відносно центра дорівнює подвійній площі трикутника, побудованого на векторах $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

Якщо лінія дії сили проходить через центр, то момент сили відносно цього центра буде дорівнювати нулю.

Момент сили відносно точки не змінюється при перенесенні сили вздовж її лінії дії, оскільки незмінним залишається плече сили відносно центра.

3.2 Теорема Варіньона для системи збіжних сил

Теорема 1. Момент рівнодійної просторової системи збіжних сил відносно деякого центра, дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того самого центра.

Доведення. На тіло діє просторова система збіжних сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$), лінії дій яких перетинаються в точці B (Рис. 3.4, а).

Замінімо дану систему сил еквівалентною системою, усі сили якої прикладені в точці B (Рис. 3.4, б). Рівнодійну систему, прикладену в тій же точці B , позначимо $\vec{R}$. Точку O , відносно якої будемо брати моменти всіх сил, назвемо центром моментів. Знайдемо момент рівнодійної $\vec{R}$ відносно центра O .

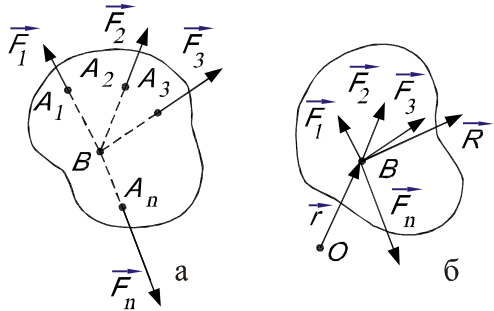


Рисунок 3.4

Згідно з формулою (3.1):

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{R},$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ – радіус-вектор точки прикладання всіх сил системи і рівнодійної відносно центра O . Відомо, що $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Тоді:

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i).$$

Отже, одержали рівність:

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i), \quad (3.5)$$

Теорему доведено.

Для плоскої системи збіжних сил теорему Варіньона записують так:

$$m_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i). \quad (3.6)$$

Теорема 2 Момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил відносно деякого центра, що лежить у площині дії сил, дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цього центра.

3.3 Рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил можна виразити не лише через проекції цих сил, а і через їх моменти. Покажемо, що для **рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо виконання умов:**

$$\sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.7)$$

де B і C довільні точки, що не лежать на одній прямій з точкою A , в якій перетинаються лінії дій сил. Необхідність цих умов виникає з того, що якщо $\sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) \neq 0$, то, як видно із (3.6), $m_B(\vec{R}_1) \neq 0$, а це значить $\vec{R}_1 \neq 0$, і рівновага неможлива. Доведемо достатність цих умов.

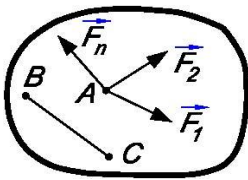


Рисунок 3.6

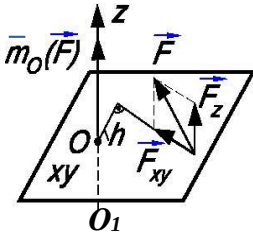
Якщо умови (3.7) виконуються, то за теоремою Варіньона $\vec{m}_B(\vec{R}) = 0$ і $\vec{m}_C(\vec{R}) = 0$, що можливо або коли $\vec{R} = 0$, або коли лінія дії сили $\vec{R}$ проходить через точки B і C одночасно. Проте в нашому випадку останнє неможливо, оскільки рівнодійна збіжних сил повинна проходити через точку A (Рис. 3.6), а пряма BC , за прийнятою умовою, через точку A не проходить. Звідси

витікає, що у разі виконання умов (3.7) рівнодійна $\vec{R} = 0$, тобто система сил перебуває у рівновазі. Виконання лише однієї з умов (3.7) для рівноваги системи недостатньо.

3.4 Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають алгебраїчну величину, що дорівнює моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до даної осі, відносно точки перетину осі з цією площиною.

Нехай до тіла в деякій точці A прикладена сила $\vec{F}$ (Рис. 3.6). Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно осі O_1z . Проведемо через точку A площину xy , перпендикулярну до осі O_1z . Точку перетину площини xy з віссю O_1z позначимо O . Спроектуємо силу $\vec{F}$ на xy і одержимо силу $\vec{F}_{xy} = np_{xy}\vec{F}$ площини.



Друга складова сили $\vec{F}$ – це $\vec{F}_z$, причому $\vec{F}_z \parallel Oz$. Згідно з означенням

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \quad (3.8)$$

Рисунок 3.6

Отже, щоб визначити момент сили відносно осі, необхідно:

- спроектувати цю силу на площину, перпендикулярну до осі;
- знайти точку перетину осі з цією перпендикулярною площиною;
- визначити алгебраїчну величину моменту одержаної проекції відносно точки перетину осі з площиною.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

1. Сила паралельна до осі ($\vec{F}_z \parallel Oz$, $np_{xy}\vec{F}_z = 0$);
2. Лінія дії сили перетинає вісь ($h = 0$).

Ці дві умови еквівалентні одній умові. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, коли сила і вісь лежать в одній площині.

Момент сили відносно осі **додатний**, якщо, дивлячись з кінця осі, бачимо, що проекція цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, намагається обертати тіло навколо осі проти ходу годинникової стрілки (Рис. 3.7, а). Якщо обертання відбувається у напрямі руху годинникової стрілки, то момент сили відносно осі буде **від'ємним** (Рис. 3.7, б).

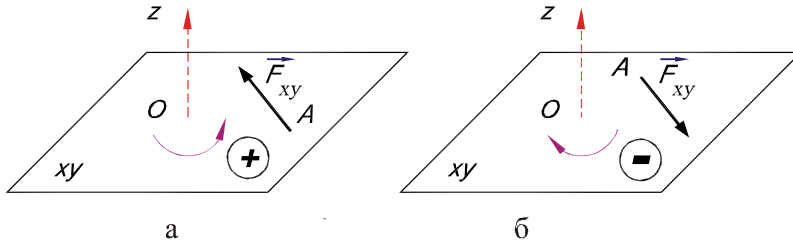


Рисунок 3.7

3.5 Залежність між моментом сили відносно точки і осі, що проходить через цю точку

Теорема. Проекція вектора-моменту сили відносно точки на вісь, що проходить через цю точку, дорівнює моменту сили відносно цієї осі.

Доведення. Сила $\vec{F}$ прикладена в точці A простору. Виберемо довільну точку O і проведемо осі Ox , Oy , Oz (Рис. 3.8). Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно осі Oz і відносно точки O на ній.

Відомо, що

$$|m_O(\vec{F})| = Fh = 2S_{\triangle OAB},$$

$$a \quad |m_z(\vec{F})| = |m_O(\vec{F}_{xy})| = F_{xy}h = 2S_{\triangle OA_1B_1} \quad (3.9)$$

З курсу елементарної геометрії відомо, що

$$S_{\triangle OA_1B_1} = np_{xy} S_{\triangle OAB},$$

$$S_{\triangle OA_1B_1} = S_{\triangle OAB} \cos \gamma, \quad (3.10)$$

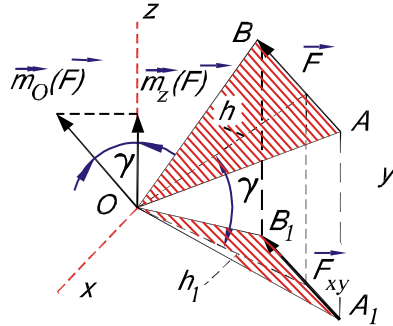


Рисунок 3.8

де γ – кут між площинами цих трикутників, а отже, і кут між перпендикулярами до цих площин.

Оскільки $\vec{m}_O(\vec{F}) \perp (OAB)$, а $(Oz) \perp (OA_1B_1)$, то $\angle(\vec{m}_O(\vec{F}), Oz) = \gamma$.

Враховуючи рівності (3.9) і (3.10), одержимо

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos \gamma.$$

Знак $m_z(\vec{F})$ повністю визначається знаком $\cos \gamma$.

Оскільки $|\vec{m}_O(\vec{F}) \cos \gamma| = n p_{Oz} \vec{m}_O(\vec{F})$, то

$$m_z(\vec{F}) = n p_{Oz} \vec{m}_O(\vec{F}), \quad (3.11)$$

що й треба було довести.

3.6 Момент сили відносно координатних осей

Нехай на тіло діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці A (Рис.3.9). Виберемо довільну точку O та зв'яжемо з нею праву декартову систему координат з ортонормованим базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Визначимо момент сили $\vec{F}$ відносно осей цієї системи координат. Для цього запишемо вираз для моменту сили $\vec{F}$ відносно точки O .

Згідно з (3.1)

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

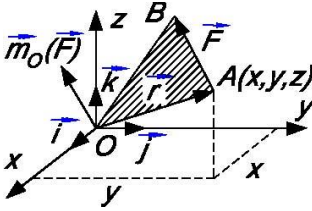


Рисунок 3.9

Запишемо розклад векторів $\vec{F}$ і $\vec{r}$ за векторами базису $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

де $x = r_x$, $y = r_y$, $z = r_z$ – координати точки A .

Тоді

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи визначник, отримуємо:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x) \quad (3.12)$$

Вектор-момент $\vec{m}_O(\vec{F})$ також представимо через його проекції на осі координат:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_{Ox} \vec{i} + m_{Oy} \vec{j} + m_{Oz} \vec{k}.$$

Оскільки

$$m_{Ox}(\vec{F}) = m_x(\vec{F}); \quad m_{Oy}(\vec{F}) = m_y(\vec{F}); \quad m_{Oz}(\vec{F}) = m_z(\vec{F}),$$

то

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_x(\vec{F}) \vec{i} + m_y(\vec{F}) \vec{j} + m_z(\vec{F}) \vec{k}. \quad (3.13)$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь (3.13) і (3.12), одержимо

$$\begin{cases} m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \\ m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \\ m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \end{cases} \quad (3.14)$$

Контрольні запитання

1. Що називають моментом сили відносно точки? Якими одиницями його вимірюють у системі СІ?
2. Як визначають напрям і модуль моменту сили відносно точки?
3. Чи змінюється момент сили відносно деякої точки у разі переносу сили вздовж лінії її дії?
4. У якому випадку момент сили відносно даної точки дорівнює нулю?
5. Дайте визначення моменту сили відносно осі.
6. Як визначити плече сили відносно осі?
7. У якому випадку момент сили відносно даної осі дорівнює нулю?
8. Сформулюйте теорему Варіньона для просторової та плоскої систем збіжних сил.
9. Як визначити момент сили відносно координатних осей?
10. Запишіть залежність між моментом сил відносно точки та осі.
11. Коли момент сили відносно точки (осі) додатний і коли від'ємний?
12. Напишіть рівняння моментів для плоскої системи збіжних сил.

ГЛАВА 4. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

4.1 Додавання двох паралельних сил

Сили спрямовані в один бік

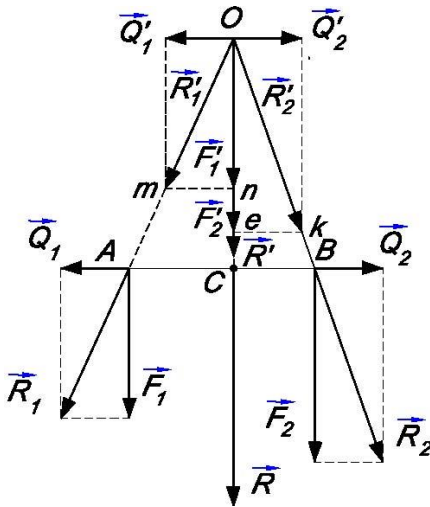


Рисунок 4.1

Нехай до абсолютно твердого тіла в точках A і B прикладені дві паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, спрямовані в один бік (Рис. 4.1).

Знайдемо їх рівнодійну. Для цього в точках A і B до тіла прикладемо дві однакові за величиною та протилежні за напрямком сили $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$ що діють по прямій AB .

Оскільки $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$, то відповідно до аксіом 1 і 2 статики система сил $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ еквівалентна 0, а система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$

еквівалентна системі $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Додаючи попарно сили $\vec{F}_1$ і $\vec{Q}_1$, $\vec{F}_2$ і $\vec{Q}_2$, одержимо $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{Q}_1$ і $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{Q}_2$. Перенесемо сили $\vec{R}_1$ і $\vec{R}_2$ вздовж ліній дії в точку їх перетину O . $\vec{R}'_1 = \vec{R}_1$ і $\vec{R}'_2 = \vec{R}_2$. Розкладемо тепер силу $\vec{R}'_1$ на складові $\vec{Q}'_1 = \vec{Q}_1$ і $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$, а силу $\vec{R}'_2$ – на складові $\vec{Q}'_2 = \vec{Q}_2$ і $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$. Сили $\vec{Q}'_1$ і $\vec{Q}'_2$ зрівноважені, тому їх вилучили.

Оскільки сили $\vec{F}'_1$ і $\vec{F}'_2$ спрямовані по одній прямій в один бік, то їх рівнодійна $\vec{R}' = \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ спрямована по тій самій прямій у тому самому напрямку. Перенесемо силу $\vec{R}$ вздовж лінії її дії в точку C відрізка

AB. Одержимо силу $\vec{R}' = \vec{R}$. Це означає, що сила $\vec{R}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (4.1)$$

Знайдемо точку прикладання рівнодійної $\vec{R}$ сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. З подібності трикутників OAC і Omn , OCB і Oek запишемо:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{F_2}{Q_2} \text{ і } \frac{OC}{AC} = \frac{F_1}{Q_1}.$$

Оскільки $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2$, то $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB$. Звідси, враховуючи властивість пропорції, маємо:

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R}. \quad (4.2)$$

Отже рівнодійна двох паралельних сил, спрямованих в один бік, паралельна до цих сил, спрямована в той самий бік, що й складові сили. Ця рівнодійна дорівнює сумі складових сил, а лінія її дії поділяє відстань між точками прикладання цих сил внутрішньо на частини, обернено пропорційні до цих сил.

Примітка. 1. З доведеного випливає, що довільну силу можна також розкласти на дві паралельні сили.

2. Якщо $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$, то $AC = CB$.

Сили, спрямовані в протилежні боки

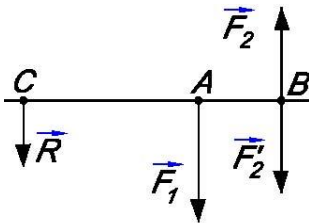


Рисунок 4.2

Нехай паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ спрямовані в різні боки, і $F_1 > F_2$ (Рис. 4.2). Знайдемо рівнодійну сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Для цього відповідно до примітки 1 розкладаємо силу $\vec{F}_1$ на дві паралельні сили: силу F'_2 , прикладену в точці B,

приймаючи $F'_2 = F_2$, та силу $\vec{R}$, прикладену в точці C. Сила $\vec{F}_1$ є

рівнодійною сил $\vec{F}_2'$ і $\vec{R}$, тому сила $\vec{F}_1$ еквівалентна системі сил ($\vec{F}_2'$, $\vec{R}$). Згідно з (4.1) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2' + \vec{R}$, звідси

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \quad (4.3)$$

Оскільки сила $\vec{F}_1$ еквівалентна системі сил ($\vec{F}_2', \vec{R}$), то система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) еквівалентна системі сил ($\vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{R}$). Але ($\vec{F}_2', \vec{F}_2$) еквівалентна 0, тому ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) еквівалентна $\vec{R}$. Оскільки сила $\vec{R}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2'$ і $\vec{R}$, то із формули (4.2) одержимо:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (4.4)$$

Отже рівнодійна двох паралельних, не однакових за модулем та протилежно спрямованих сил, є паралельна до них, спрямована у бік більшої сили й дорівнює різниці складових сил. Лінія дії рівнодійної проходить через точку, що лежить зовні відрізка АВ з боку більшої сили та поділяє відстань між точками прикладання сил зовнішньо на відрізки, обернено пропорційні до цих сил.

Сили, рівні за модулем і спрямовані протилежно одна одній

Розглянемо дві рівні за модулем і спрямовані протилежно паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладені до тіла в точках А і В (Рис. 4.3).

Згідно з (4.3) при $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ одержуємо $\vec{R} = 0$. Хоча рівнодійна цих сил дорівнює нулю, однак тіло під дією такої системи сил, як відомо із практики, не буде знаходитись в рівновазі. Такі дві сили намагаються обернути тіло.

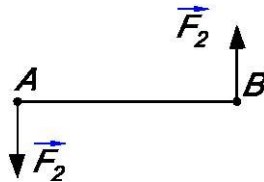


Рисунок 4.3

Цей випадок особливий, оскільки такі дві сили є якісно новим елементом статyki, який називають **парою сил**.

4.2 Пара сил

Систему двох однакових за модулем, паралельних, протилежно спрямованих сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, називають парою сил (або просто парою).

Нехай до деякого тіла прикладена пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ (Рис. 4.4).

Згідно з означенням пари сил $\vec{F} = -\vec{F}'$.

Елементи пари: сили що складають пару; плече пари; площа дії пари. **Плече пари h** – це найкоротша відстань між лініями дії сил пари. **Площина дії пари** - це площина, в якій розміщені сили пари. **Система пар сил** - це сукупність пар сил, прикладених до одного твердого тіла. Пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ не має рівнодійної, бо геометрична сума цих сил дорівнює нулю.

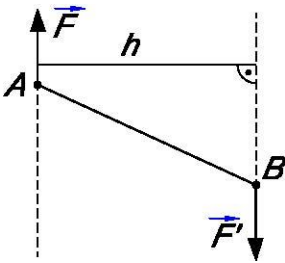


Рисунок 4.4

Пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ не є системою зрівноважених сил. Згідно з аксіомою 1 дві однакові за модулем і протилежні за напрямком сили будуть зрівноваженою системою сил, лише тоді, коли вони мають **спільну лінію дії**.

Пара сил, що діє на тіло, намагається обернути його. Мірою обертальної дії сили в статисти є момент. Тому дію пари сил на тіло характеризують моментом.

4.3 Момент пари сил

Моментом пари сил називають вектор, який дорівнює векторному добутку вектора, що з'єднає точки прикладання сил, і вектора однієї сили пари:

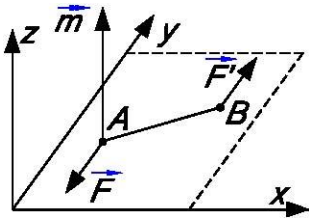


Рисунок 4.5

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}'. \quad (4.5)$$

Вектор-момент пари спрямовують **перпендикулярно до площини дії пари** так, щоб із його кінця було видно намагання пари сил обертати тіло проти ходу годинникової стрілки (Рис. 4.5).

Алгебраїчним моментом пари сил називають взятий зі знаком "+" або "-" добуток однієї з сил пари на плече пари:

$$m = \pm Fh. \quad (4.6)$$

Момент пари сил вважаємо **додатнім**, якщо пара сил намагається обертати тіло проти ходу годинникової стрілки і **від'ємним**, якщо пара сил намагається обертати тіло за ходом годинникової стрілки.

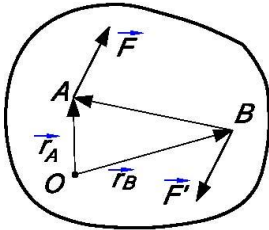


Рисунок 4.6

Теорема. Сума моментів сил пари відносно довільного центра в просторі є величиною сталою для даної пари й дорівнює моменту цієї пари.

Доведення. Нехай задано пару сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ (Рис. 4.6). Оскільки дія пари на тіло спричиняє обертання, знайдемо суму моментів сил пари відносно центра O , довільно розміщеного в просторі. Згідно з (3. 1) одержимо:

$$\begin{aligned} \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} = \vec{m}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Залишається нез'ясованим питання про точку прикладання вектора-моменту пари сил. Оскільки момент пари сил не залежить від вибору центра моментів сил пари, то можна допустити, що вектор-момент пари сил можна прикладати в будь-якій точці простору, тобто вважати його вільним вектором. Це буде доведено за допомогою теорем про еквівалентність пар.

4.4 Еквівалентність пар сил

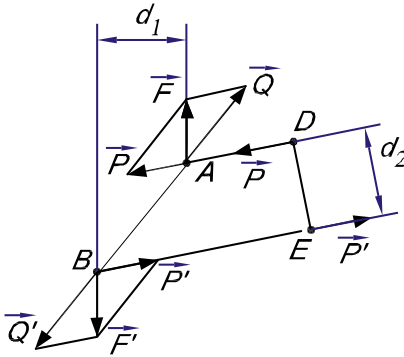


Рисунок 4.7

Доведення. На абсолютно тверде тіло діє пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ (Рис. 4.7), плече якої d_1 .

Проведемо в площині дії пари через довільні точки D і E дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дії сил пари $(\vec{F}, \vec{F}')$ в точках A та B і прикладемо сили $\vec{F}$ та $\vec{F}'$ у цих точках (початково сили $\vec{F}$ та $\vec{F}'$ можуть бути прикладені в довільних точках на лініях дії цих сил). Відстань між прямими AD і BE позначимо d_2 . Розкладемо силу $\vec{F}$ по напрямках BA та DA на сили $\vec{Q}$ та $\vec{P}$, а силу $\vec{F}'$ – по напрямках AB та BE на сили $\vec{Q}'$ та $\vec{P}'$. При цьому $\vec{P} = -\vec{P}'$, $\vec{Q} = -\vec{Q}'$. Сили $\vec{Q}$ та $\vec{Q}'$, як зрівноважені, можна вилучити. Тоді пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$ буде замінена парою $(\vec{P}, \vec{P}')$ з іншим плечем та іншими силами, які можна прикласти в точках D , E . У силу довільності вибору точок D , E та напрямків прямих AD і BE , пара сил $(\vec{P}, \vec{P}')$ може бути розміщена в площині дії де завгодно.

Розглянемо теореми, з яких випливають основні властивості пар сил та які встановлюють умови їх еквівалентності.

Теорема 1. Дія пари сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо пару сил замінити будь-якою другою парою сил, що лежить у тій же площині й має той же момент.

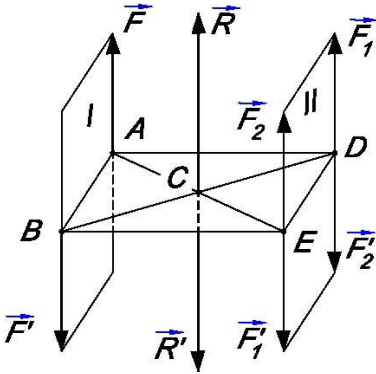


Рисунок 4.8

Доведемо, що моменти пар $(\vec{P}, \vec{P}')$ та $(\vec{F}, \vec{F}')$ однакові. Оскільки сила $\vec{F}$ є рівнодійною сил $\vec{Q}$ та $\vec{P}$, то за теоремою Варіньона запишемо

$$m_B(\vec{F}) = m_B(\vec{P}) + m_B(\vec{Q}).$$

Але

$$m_B(\vec{F}) = Fd_1,$$

$$m_B(\vec{P}) = Pd_2, \quad m_B(\vec{Q}) = 0.$$

Звідси $Fd_1 = Pd_2$, тобто

моменти пар однакові і теорема доведена.

З доведеної теореми випливають такі **властивості пар сил**:

1. Задану пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна переносити куди завгодно в площині дії пари;
2. У заданій парі, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна довільно змінювати модулі сил або довжину плеча, зберігши незмінним її момент.

Звідси витікає, що дві пари, які лежать в одній площині і мають однакові моменти, **еквівалентні**.

Теорема 2. Дія пари сил на тверде тіло не змінюється, якщо пару сил перенести із однієї площини в другу, їй паралельну.

Доведення. Розглянемо пару сил $(\vec{F}, \vec{F}')$, що лежить у площині I (Рис. 4.8). Проведемо площину II і візьмемо на ній відрізок DE, який дорівнює відрізку AB і паралельний до нього. У точках D та E прикладемо чотири попарно зрівноважені сили $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$; $\vec{F}'_1 = \vec{F}'_2 = \vec{F}'$. Фігура ABED є паралелограмом, діагоналі якого точка C ділить навпіл. Складемо тепер паралельні сили $\vec{F}$ та $\vec{F}_2$, замінимо їх рівнодійною $\vec{R}$, що прикладена в точці C, при цьому $\vec{R} = 2\vec{F}$. Сили $\vec{F}'$ та $\vec{F}'_2$ замінимо силою $\vec{R}'$, що прикладена посередині відрізка BD, тобто в точці C $\vec{R}' = 2\vec{F}' = \vec{R}$. Сили $\vec{R}$ та $\vec{R}'$ зрівноважені і їх можна

вилучити. Таким чином, пара $(\vec{F}, \vec{F}')$ замінена парою $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, що лежить у площині Π . З доведеної теореми виходить, що дві пари, які лежать в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

4.5 Додавання пар сил

Геометричне визначення моменту результуючої пари сил

Встановимо правило додавання пар сил, що лежать у площинах, які перетинаються. Це правило впливає з такої теореми.

Теорема. Дві пари сил, які лежать у площинах, що перетинаються, еквівалентні одній парі, вектор-момент якої дорівнює геометричній сумі векторів-моментів даних пар.

Доведення. Нехай пари сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ і $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ з моментами $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$ розміщені в площинах Π_1 і Π_2 (Рис. 4.9), тобто система

$\{(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2')\}$ еквівалентна $\{(\vec{P}_1, \vec{P}_1'), (\vec{P}_2, \vec{P}_2')\}$. Додамо сили, прикладені в точках A і B . Одержимо $\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ і $\vec{R}' = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$. Зважаючи на те, що $\vec{P}_1 = -\vec{P}_1'$ і $\vec{P}_2 = -\vec{P}_2'$, отримаємо $\vec{R} = -\vec{R}'$. Отже система пар $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ і $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ є еквівалентною одній парі $(\vec{R}, \vec{R}')$. Знайдемо вектор-момент цієї пари:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{BA} \times \vec{R}' = \vec{BA} \times (\vec{P}_1' + \vec{P}_2') = \\ &= \vec{BA} \times \vec{P}_1' + \vec{BA} \times \vec{P}_2' = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.\end{aligned}$$

Відомо, що вектор $\vec{M}$ можна подати у вигляді

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}.$$

Модуль та напрямок вектора визначаються за формулами:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

$$\cos \angle(\vec{M}, \vec{i}) = \frac{M_x}{M}; \quad \cos \angle(\vec{M}, \vec{j}) = \frac{M_y}{M}; \quad \cos \angle(\vec{M}, \vec{k}) = \frac{M_z}{M}.$$

Додавання пар сил на площині

Як впливає з попереднього, щоб додати пари сил на площині необхідно додати їх моменти. Відомо, що вектори-моменти пар, розміщених в одній площині, є паралельними і тому додаються алгебраїчно. Отже, **момент результуючої пари плоскої системи пар дорівнює сумі алгебраїчних моментів складових пар:**

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.8)$$

4.6 Умови рівноваги пар сил

Геометрична умова рівноваги просторової системи пар сил

Нехай на тіло діє n пар сил, довільно розміщених у просторі, вектори-моменти яких дорівнюють $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$.

У підрозділі 4.5 було доведено, що така система пар сил еквівалентна одній парі сил, вектор-момент якої визначають за рівнянням (4.7).

Очевидно, що тіло під дією системи пар сил перебуває в рівновазі, якщо вектор-момент результуючої пари буде дорівнювати нулю: $\vec{M} = 0$.

Цю умову рівноваги, враховуючи формулу (4.7), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \vec{m}_i = 0 . \quad (4.9)$$

Формула (4.9) є геометричною умовою рівноваги просторової системи пар, яку можна сформулювати так: **просторова система пар сил буде перебувати у рівновазі тоді й тільки тоді, коли вектор-момент результуючої пари, або геометрична сума векторів-моментів складових пар, буде дорівнювати нулю.**

Аналітичні умови рівноваги просторової системи пар сил

З умови (4.9) одержуємо, що у разі рівноваги просторової системи пар сил $M_x = M_y = M_z = 0$, тобто

$$\sum_{i=1}^n m_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iz} = 0 . \quad (4.10)$$

Формули (4.10) є аналітичними умовами рівноваги просторової системи пар сил, які формують так: **просторова система пар сил перебуває у рівновазі тоді й тільки тоді, коли алгебраїчна сума проєкцій векторів-моментів складових пар на три взаємно перпендикулярні осі координат дорівнює нулю.**

Умова рівноваги плоскої системи пар сил

Умову рівноваги плоскої системи пар сил одержуємо з рівності (4.8).

Плоска система пар сил буде перебувати у рівновазі тоді й тільки тоді, коли алгебраїчна сума моментів складових пар сил буде дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^n m_i = 0 . \quad (4.11)$$

Контрольні запитання

1. Як визначають напрям і модуль рівнодійної двох паралельних сил, спрямованих в один бік?

2. Як визначають напрям і модуль двох паралельних протилежно спрямованих сил?
3. Що називають парою сил? Моментом пари сил?
4. Як визначають напрям і модуль вектор-моменту пари сил?
5. Чому дорівнює сума моментів сил пари відносно довільного центра?
6. Сформулюйте теореми про еквівалентність пар сил.
7. Які пари називають еквівалентними?
8. Що таке рівнодійна (результуюча) пара і як визначити її величину? (Геометричне і аналітичне визначення).
9. Сформулюйте геометричну умову рівноваги просторової системи пар сил.
10. Запишіть аналітичні умови рівноваги просторової та плоскої системи пар сил.

ГЛАВА 5. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА

Як було зазначено, однією з двох основних задач статички є зведення системи сил, які діють на абсолютно тверде тіло, до простішого вигляду.

Зупинимось на методі зведення довільної незбіжної системи сил до заданого центра. Цей метод ґрунтується на використанні леми Пуансо про паралельне перенесення сили.

5.1 Лема про паралельне перенесення сили

Лема Пуансо. Не змінюючи дії сили, прикладеної в деякій точці тіла, на це тіло, її можна переносити паралельно самій собі в іншу довільну точку тіла, додавши при цьому пару сил з моментом, який дорівнює моменту заданої сили відносно нової точки.

Доведення. Нехай у точці A твердого тіла прикладена сила $\vec{F}$ (Рис. 5.1, а). Прикладемо в точці B систему двох взаємозрівноважених сил $(\vec{F}', \vec{F}'')$ (Рис. 5.1, б). При цьому $F' = F'' = F$ і $\vec{F}' \parallel \vec{F}'' \parallel \vec{F}$.

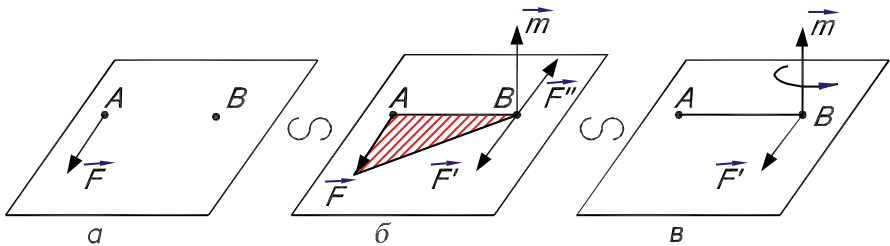


Рисунок 5.1

Тоді сила $\vec{F}$ еквівалентна системі сил $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$. Але сили $\vec{F}'$ і $\vec{F}''$ утворюють пару сил, причому момент пари $\vec{m}$ дорівнює моменту даної сили $\vec{F}$ відносно нової точки B :

$$\vec{m} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{m}_B(\vec{F}).$$

Лему доведено.

5.2 Зведення довільної системи сил. Головний вектор і головний момент системи

На підставі леми Пуансо доведемо основну теорему статички.

Теорема 1. Довільну систему сил можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної у довільно вибраній точці (центрі зведення), і яку називають головним вектором даної системи сил, і однієї пари сил, момент якої називають головним моментом даної системи сил.

Доведення. Розглянемо систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Виберемо за центр зведення довільну точку O (Рис. 5.2, а). Згідно з лемою Пуансо перенесемо всі сили у центр зведення O . У результаті система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, буде еквівалентною системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених у точці O , і системі пар сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, $(\vec{F}_n, \vec{F}_n')$, моменти яких $\vec{m}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$, $\vec{m}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$, $\vec{m}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$ показано на рис. 5.2, б, де $\vec{r}_i$ радіуси-вектори, проведені з центра зведення O до точок прикладання сил $\vec{F}_i$.

Одержану збіжну систему сил і систему пар сил можна замінити однією силою $\vec{R}$ і однією парою сил з моментом $\vec{M}_O$ (Рис. 5.2, в), тобто

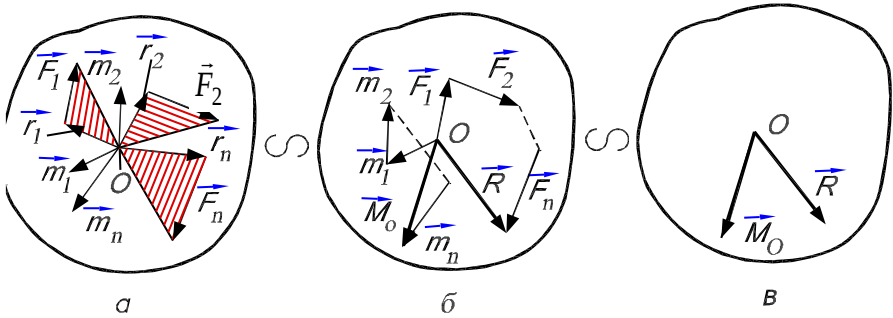


Рисунок 5.2

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' ; \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Силу $\vec{R}$ називають **головним вектором** системи сил.

Момент $\vec{M}_O$ називають **головним моментом** системи сил відносно центра зведення O . Теорема доведена.

Вектори $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ називають елементами зведення. Як видно з (5.1) і (5.2), головний вектор **не залежить**, а головний момент **залежить** від вибору центра зведення.

5.3 Векторні умови рівноваги довільної системи сил

Згідно з основною теоремою статички довільна система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) при зведенні до заданого центра можна замінити простішою еквівалентною системою з однієї сили $\vec{R}$ і однієї пари сил з моментом $\vec{M}_O$.

Зупинимося на другій задачі статички і визначимо умови, при яких довільна система сил еквівалентна нулю, тобто умови її рівноваги. Доведемо таку теорему.

Теорема 2. Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи і її головний момент відносно довільно вибраного центра зведення одночасно дорівнювали нулю:

$$\vec{R} = 0; \vec{M}_O = 0 \quad (5.3)$$

або

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Доведення.

Необхідність. Припустимо, що задана система сил перебуває у рівновазі. Покажемо, що тоді виконується умова (5.3). Дійсно, якщо, наприклад, $\vec{R} \neq 0$, але $\vec{M}_O = 0$, то задана система сил звелась би до рівнодійної $\vec{R}' = \vec{R}$, прикладеної в центрі зведення O , і рівноваги б не було. Якщо $\vec{R} = 0$, але $\vec{M}_O \neq 0$, то задана система сил звелась би до однієї пари і рівноваги також не було б. Коли $\vec{R} \neq 0$ і $\vec{M}_O \neq 0$, то рівноваги також не було б, оскільки сила та пара сил взаємно не зрівноважені.

Достатність. Нехай для довільної просторової системи сил виконуються умови (5.3). Очевидно, що така система сил еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі. Теорему доведено.

Умови (5.3) називають **умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі**.

5.4 Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту довільної просторової системи сил

Для обчислення головного вектора і головного моменту довільної просторової системи сил використаємо метод проекції. Для цього виберемо декартову систему координат (Рис. 5.3).

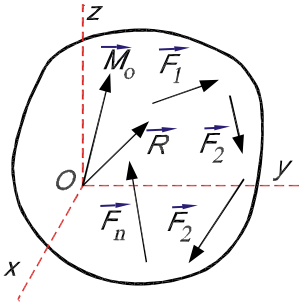


Рисунок 5.3

Проектуючи рівність (5.1) на осі вибраної системи координат, знайдемо проекції R_x , R_y , R_z головного вектора на осі:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy};$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (5.4)$$

Формули (5.4) показують, що проекції головного вектора системи сил на осі системи координат дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій усіх сил на ці осі.

Модуль і напрям головного вектора

$$\begin{cases} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}; \\ \cos \angle(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \cos \angle(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}; \cos \angle(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Проектуючи рівність (5.2) на осі координат, отримаємо

$$np_x \vec{M}_O = M_{Ox} = \sum_{i=1}^n np_x \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_i);$$

$$np_y \vec{M}_O = M_{Oy} = \sum_{i=1}^n np_y \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i);$$

$$np_z \vec{M}_O = M_{Oz} = \sum_{i=1}^n np_z \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_i),$$

або

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n m_x(\vec{F}_i); \quad M_{Oy} = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i); \quad M_{Oz} = \sum_{i=1}^n m_z(\vec{F}_i) \quad (5.6)$$

Отже, проекція головного моменту відносно центра на будь-

яку вісь, що проходить через цей центр, дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно осі.

Модуль і напрям головного моменту

$$\left\{ \begin{aligned} M_O &= \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n m_x (\vec{F}_{ix})\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_y (\vec{F}_{iy})\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n m_z (\vec{F}_{iz})\right)^2}; \\ \cos \angle(\vec{M}_O, x) &= \frac{M_{Ox}}{M_O}; \cos \angle(\vec{M}_O, y) = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \cos \angle(\vec{M}_O, z) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \end{aligned} \right. \quad (5.7)$$

5.5 Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил

Із векторних умов рівноваги (5.3) довільної просторової системи сил випливає, що модулі головного вектора і головного моменту повинні дорівнювати нулю, а відповідно до (5.5) і (5.7) це відповідає шести алгебраїчним рівнянням, які виражають умови рівноваги цієї системи сил в аналітичній формі:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n F_{ix} &= 0; \quad \sum_{i=1}^n m_x (\vec{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=0}^n F_{iy} &= 0; \quad \sum_{i=1}^n m_y (\vec{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=0}^n F_{iz} &= 0; \quad \sum_{i=1}^n m_z (\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отже, для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил системи на три координатні осі та алгебраїчна сума їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю.

5.6 Аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Якщо лінії дій усіх сил системи розміщені в різних площинах і паралельні між собою, то таку систему сил називають просторовою системою паралельних сил.

Із умов рівноваги (5.8) для довільної просторової системи сил отримаємо умови рівноваги просторової системи паралельних сил.

Нехай на тверде тіло діє просторова система паралельних сил (Рис. 5.4). Оскільки вибір координатних осей довільний, то можна вибрати координатні осі так, щоб вісь Oz була паралельна до сил.

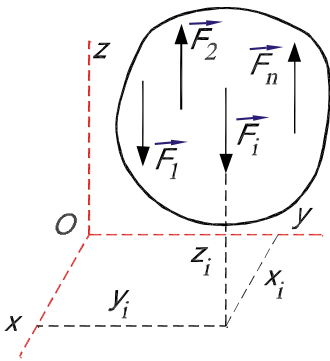


Рисунок 5.4

При такому виборі координатних осей проекції кожної сили на осі x і y та їх моменти відносно осі z будуть дорівнювати нулю, тобто рівності

$$\sum F_{ix} \equiv 0; \quad \sum F_{iy} \equiv 0; \\ \sum m_z(\vec{F}_i) \equiv 0$$

перетворюються в тотожності.

Тому для системи паралельних сил з (5.8) отримаємо тільки три рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=0}^n m_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=0}^n m_y(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.9)$$

Для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну цим силам, і алгебраїчні суми їх моментів відносно двох інших осей координат дорівнювали нулю.

5.7 Інваріанти зведення довільної просторової системи сил

Повернемося до аналізу основної теореми статки про зведення довільної просторової системи сил до заданого центра. З'ясуємо, як змінюється головний момент від зміни центра зведення та встановимо інваріанти зведення.

Залежність головного моменту від вибору центра зведення

Припустимо, що в результаті зведення довільної просторової системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ до центра O отримано головний вектор $\vec{R}$ і головний момент $\vec{M}_O$, а в результаті зведення до центра O_1 ,

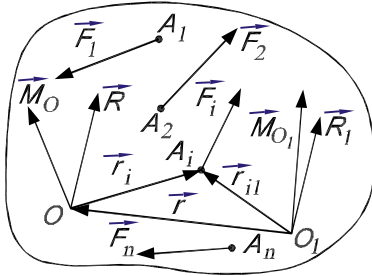


Рисунок 5.5

відповідно, $\vec{R}_1$ і $\vec{M}_{O1}$ (Рис. 5.5).

Головний вектор для будь-якого центра зведення дорівнює геометричній сумі заданих сил, отже, $\vec{R} = \vec{R}_1$. Головний момент, як видно з формули (5.2), залежить від вибору центра зведення.

Знайдемо вирази головних моментів відносно двох центрів і порівняємо. Радіуси-вектори точок A_i прикладання заданих сил системи

відносно цих центрів позначимо відповідно через $\vec{r}_i$ і $\vec{r}_{i1}$. Тоді

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i);$$

$$\vec{M}_{O1} = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{O1}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_{i1} \times \vec{F}_i),$$

або

$$\vec{M}_{O1} = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}_i + \vec{r}) \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{i=1}^n (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \vec{M}_O + \vec{r} \times \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{R}.$$

Отже

$$M_{O1} = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O + M_{O1}(\vec{R}). \quad (5.10)$$

Таким чином, головний момент системи сил відносно нового центра зведення O_1 дорівнює геометричній сумі головного моменту відносно попереднього центра зведення O і моменту головного вектора, прикладеного у попередньому центрі зведення, відносно нового.

Інваріанти системи сил

Інваріантом зведення системи сил називають величину, яка не змінюється при переході від одного центра зведення до іншого.

Перший інваріант. Головний вектор системи сил не залежить від центра зведення і є першим інваріантом (векторним):

$$\vec{R} = \text{invar}_1. \quad (5.11)$$

Другий інваріант. Скалярний добуток головного вектора та головного моменту системи сил для довільного центра зведення – величина стала і є другим інваріантом (скалярним).

Для доведення помножимо скалярно обидві частини рівності (5.10) на головний вектор. Тоді

$$\vec{M}_{O1} \cdot \vec{R}_1 = \vec{M}_O \cdot \vec{R}_1 + (\vec{r} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}_1.$$

Оскільки $\vec{R}_1 = \vec{R}$ (перший інваріант), то вектори $\vec{r} \times \vec{R}$ і $\vec{R}_1$ взаємно перпендикулярні, а тому змішаний добуток $(\vec{r} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}_1$ завжди дорівнює нулю й отримана рівність набуде вигляду

$$\vec{M}_{O1} \cdot \vec{R}_1 = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{const}.$$

$$\text{Тобто} \quad \vec{M}_O \cdot \vec{R} = \text{invar}_2. \quad (5.12)$$

Другий інваріант можна представити і в іншій формі: проекція головного моменту на напрям головного вектора для довільного центра зведення є величина незмінна. Дійсно,

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = M_O \cdot R \cdot \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{R}) = R \cdot n p_R \vec{M}_O = \text{const}$$

Згідно з (5.11) $|\vec{R}| = R = \text{const}$, а тому

$$n p_R \vec{M}_O = M_O \cdot \cos \angle(\vec{M}_O, \vec{R}) = \text{const} = \text{invar}. \quad (5.13)$$

5.8 Часткові випадки зведення довільної просторової системи сил

Залежно від значень головного вектора та головного моменту просторової системи сил можливі такі випадки зведення.

Випадок 1. Головний вектор не дорівнює нулю, а головний момент дорівнює нулю ($\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O = 0$). Систему сил зводять до рівнодійної, лінія дії якої проходить через центр зведення. Слід зазначити, що рівнодійна дорівнює і паралельна головному вектору сил. **Відмінність між рівнодійною системи сил та головним вектором системи сил полягає в тому, що рівнодійна має певне положення лінії дії, положення ж лінії дії головного вектора визначається вибором центра зведення.**

Випадок 2. Головний вектор дорівнює нулю, а головний момент не дорівнює нулю ($\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$). Систему сил зводять до пари сил, момент якої дорівнює $\vec{M}_O$ і може бути обчислений за (5.7).

Випадок 3. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю ($\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$) і $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. Систему сил також зводять до рівнодійної $\vec{R}$, яка не проходить через центр зведення O , а зміщена в точку C , що лежить на прямій, перпендикулярній до площині, в якій розташовані вектори $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$. Величина

відрізка OC : $OC = \frac{M_O}{R}$. Дійсно, якщо

$\vec{M}_O \perp \vec{R}$, то момент пари, яка зображена вектором $\vec{M}_O$, і сила $\vec{R}$ лежать в одній площині (Рис. 5.6).

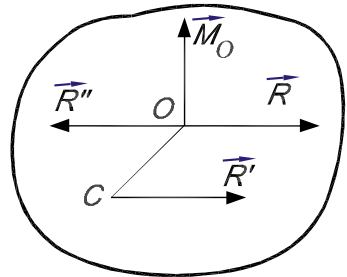


Рисунок 5.6

Тоді, вибравши сили пари $\vec{R}'$, $\vec{R}''$ рівними за модулем R і розмістивши їх так, як показано на Рис. 5.7, одержимо дві взаємно зрівноважені сили $\vec{R}'$ і $\vec{R}''$. Отже систему сил замінимо однією рівнодійною $\vec{R}' = \vec{R}$, лінія дії якої проходить через точку C .

Випадок 4. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю ($\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$) і при цьому вектор $\vec{M} \parallel \vec{R}$ (Рис. 5.7, а).

Систему сил зводять до сили $\vec{R}$ і пари $(\vec{F}', \vec{F}'')$ з моментом $\vec{M}_O$, яка лежить у площині, перпендикулярній силі $\vec{R}$ (Рис. 5.7, б). Таку сукупність сили та пари називають **динамічним гвинтом**, а пряму, вздовж якої напрямлений вектор $\vec{R}$ – **віссю гвинта**. Спрощення цієї системи надалі є неможливим.

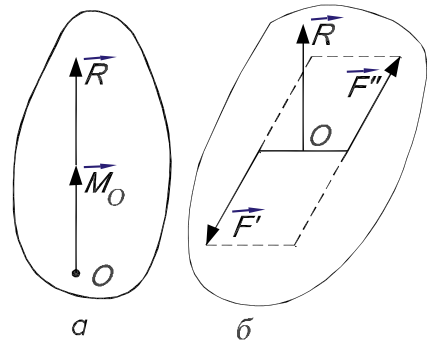


Рисунок 5.7

Випадок 5. Головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю ($\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$) і при цьому вектори $\vec{R}$ і $\vec{M}_O$ не перпендикулярні між собою та не паралельні (Рис. 5.8, а). Систему сил також зводять до **динамічного гвинта**, але вісь не буде проходити через центр зведення O .

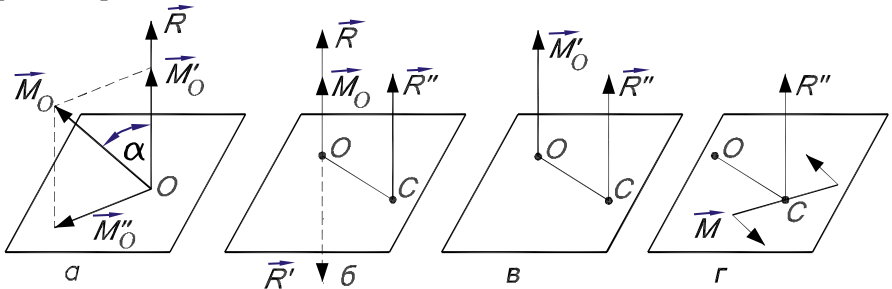


Рисунок 5.8

Щоб довести це, розкладемо вектор $\vec{M}_O$ на складові: $\vec{M}'$ вздовж $\vec{R}$ і $\vec{M}''$ перпендикулярно до $\vec{R}$. При цьому $M' = M_O \cos \alpha$, $M'' = M_O \sin \alpha$, де α – кут між векторами $\vec{M}_O$ і $\vec{R}$. Пару, зображену вектором $\vec{M}''$, і силу $\vec{R}$ можна, як у випадку 3

(Рис. 5.7), замінити однією силою $\vec{R}'' = \vec{R}$, що прикладена у точці C (Рис. 5.9, б). Таку систему сил замінюють силою $\vec{R}$ і парою з моментом $\vec{M}'$ ($\vec{M}' \parallel \vec{R}$) (Рис. 5.8, в). Причому вектор $\vec{M}'$, як вільний, можна також прикласти у точці C . У результаті дійсно одержимо динамічний гвинт, але його вісь (головна вісь) проходить через точку C (Рис. 5.9, г).

Контрольні запитання

1. Сформулюйте лему Пуансо.
2. Сформулюйте основну теорему статки.
3. Запишіть векторні умови рівноваги довільної системи сил.
4. Як визначають модуль і напрям головного вектора.
5. Як визначають модуль і напрям головного моменту.
6. Запишіть аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил.
7. Чим відрізняються рівнодійна системи сил і головний вектор системи сил?
8. Запишіть аналітичні умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
9. Інваріанти зведення довільної просторової системи сил.
10. Сформулюйте часткові випадки зведення довільної просторової системи сил.

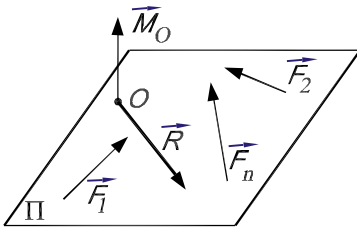
ГЛАВА 6. СИСТЕМА СИЛ, ДОВІЛЬНО РОЗМІЩЕНИХ ПО ПЛОЩИНІ (довільна плоска система сил)

Систему сил, лінії дії яких довільно розміщені в одній площині, називають довільною плоскою системою сил.

Така система сил є частковим випадком довільної просторової системи сил. Оскільки досить багато практичних задач зводиться до цього випадку, зупинимося далі на аналізі довільної плоскої системи сил.

6.1 Визначення головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил

Розглянемо довільну плоску систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, розміщених у площині Π (Рис. 6.1). Виберемо за центр зведення довільну точку O цієї площини. Згідно з основною теоремою статyki (див. 5.2), задана система сил зведеться



до однієї сили $\vec{R}$, яка є головним вектором і її визначають за залежністю (5.1), і до пари сил, момент $\vec{M}_O$ якої дорівнює головному моменту і його визначають за (5.2).

Рисунок 6.1

Оскільки всі сили заданої системи розміщені в одній площині Π , то сила $\vec{R}$ теж лежить у цій площині. Крім того, зводячи сили до центра O , дістанемо пари, які також розміщені в площині Π . Тоді й результуюча пара лежить у тій самій площині, а її вектор-момент $\vec{M}_O$ перпендикулярний до неї. Отже для довільної плоскої системи сил головний вектор і головний момент взаємно перпендикулярні (Рис. 6.1).

Головний вектор $\vec{R}$ довільної плоскої системи сил дорівнює геометричній сумі всіх сил системи та лежить у площині дії сил, а головний момент її відносно деякого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно цього ж центра:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i). \quad (6.1)$$

Для обчислення головного вектора довільної плоскої системи сил використаємо метод проєкцій (див. 5.4).

У цьому разі проєкції головного вектора на осі координат, його модуль і напрям визначають за формулами:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \quad (6.2)$$

$$\cos \angle(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \angle(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}. \quad (6.3)$$

6.2 Зведення довільної плоскої системи сил

Зупинимось на можливих випадках зведення довільної плоскої системи сил до заданого центра.

Зведення до рівнодійної

Доведемо, що коли головний вектор довільної плоскої системи сил не дорівнює нулю, то задана система сил еквівалентна одній силі, тобто має рівнодійну. При цьому можливі два випадки: а) коли головний момент дорівнює нулю $M_O = 0$; б) коли головний момент не дорівнює нулю $M_O \neq 0$.

а) Нехай головний момент дорівнює нулю, а головний вектор системи сил не дорівнює нулю, тобто $M_O = 0$, $\vec{R} \neq 0$. У цьому випадку систему сил зводять до рівнодійної, яка проходить через центр зведення.

б) Нехай для вибраного центра зведення головний момент системи сил і головний вектор не дорівнюють нулю, тобто $M_O \neq 0$, $\vec{R} \neq 0$ (Рис. 6.2, а).

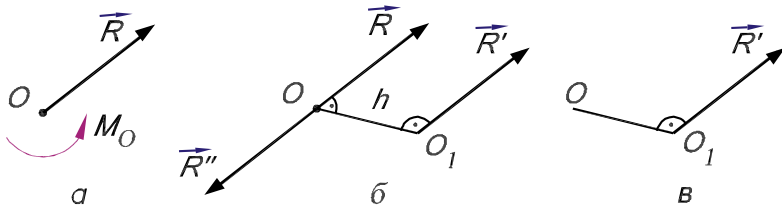


Рисунок 6.2

Покажемо, що в цьому випадку система сил має рівнодійну.

Для цього пару сил з моментом M_O покажемо у вигляді пари ($\vec{R}', \vec{R}''$), складові сили якої дорівнюють за модулем головному вектору $\vec{R}$, тобто $R' = R'' = R$ (Рис. 6.2, б). При цьому силу $\vec{R}''$ прикладемо в центрі зведення O і направимо протилежно силі $\vec{R}$. Сила $\vec{R}'$ буде прикладена в точці O_1 , яка розміщена на відстані $h = \frac{|M_O|}{R}$ від лінії дії сили $\vec{R}$ і відкладена в бік так, щоб момент пари ($\vec{R}', \vec{R}''$) збігався з моментом M_O . Тоді система сил ($\vec{R}, \vec{R}''$) є еквівалентна нулю і може бути вилучена. Таким чином, задана система сил еквівалентна одній силі $\vec{R}'$ прикладеній у точці O_1 . Ця сила і є рівнодійною, яку позначимо буквою $\vec{R}$ (Рис. 6.2, в).

Зведення до пари сил

Доведемо, що коли головний вектор $\vec{R} = 0$, а головний момент $M_O \neq 0$, довільну плоску систему сил зводять до пари сил.

Дійсно, це випливає з попереднього. Коли головний вектор системи $\vec{R} = 0$, система не має рівнодійної, і її зводять до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту системи. Оскільки система сил у даному випадку еквівалентна парі сил, а сума моментів складових сил пари відносно центра не залежить від вибору цього центра, то, очевидно, і головний момент не залежить від центра зведення.

Випадок рівноваги

Якщо головний вектор і головний момент дорівнюють нулю ($\vec{R} = 0, M_O = 0$), то система сил еквівалентна нулю, тобто сили, які складають систему, взаємно зрівноважені.

6.3 Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Основні умови рівноваги

Як було показано, необхідними й достатніми умовами рівноваги системи сил є рівність нулю головного вектора та головного моменту. Для плоскої системи сил ці умови мають вигляд:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; M_O = \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.4)$$

На основі формул (6.2) і (6.3) отримаємо аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0. \quad (6.5)$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві координатні осі, що лежать у площині дії сил, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки цієї площини, дорівнювали нулю.

Рівності (6.5) називають основними умовами рівноваги довільної плоскої системи сил.

Еквівалентні форми умов рівноваги

Можливі дві інші еквівалентні форми умов рівноваги довільної плоскої системи сил.

Друга форма умов рівноваги: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно довільних трьох точок, які не лежать на одній прямій в площині дії сил, дорівнювали нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0; \quad (6.6)$$

Точки A, B, C не лежать на одній прямій.

Необхідність цих умов очевидна, оскільки у випадку рівноваги сума моментів сил системи відносно довільного центра дорівнює нулю.

Доведемо достатність умов (6.6) від супротивного. Нехай при одночасному виконанні умов (6.6) дана система сил не перебуває у рівновазі. Тоді вона повинна зводитися до рівнодійної або до пари сил. Припустимо, що система сил зводиться до рівнодійної. Тоді, згідно з (6.6) і теоремою Варіньона, ця рівнодійна повинна пройти через точки A, B і C . Але це неможливо, бо вказані точки не лежать на одній прямій. Зведення до пари сил також неможливо, бо момент рівнодійної пари, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно довільного центра, не залежить від вибору центра зведення і якщо виконується хоча б одна з умов (6.6), перетворюється в нуль. Отже, у разі виконання умов (6.6) задана система сил перебуває у рівновазі, що суперечить зробленому припущенню.

Другу форму умов називають ще **теоремою про три моменти**.

Третя форма умов рівноваги: для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх сил системи відносно двох довільних точок площини дії сил та алгебраїчна сума проекцій усіх сил системи на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через вибрані точки, дорівнювали нулю, а саме

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (6.7)$$

де X не $\perp AB$.

Необхідність і достатність умов (6.7) для рівноваги системи сил випливає з умов (6.4).

6.4 Рівновага плоскої системи паралельних сил

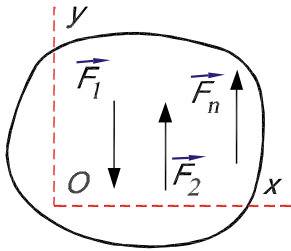


Рисунок 6.5

Як окремий випадок, отримаємо аналітичні умови рівноваги плоскої системи паралельних сил. Оскільки вибір осей координат довільний, направимо вісь Oy паралельно до ліній дії сил системи (Рис. 6.5).

Тоді

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} \equiv 0$$

і з умови рівноваги (6.5) отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = 0, \quad (6.8)$$

де сили $\vec{F}_i$ паралельні до осі Oy ($\vec{F}_i \parallel Oy$).

Отже, для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно й достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил системи на вісь, паралельну до ліній їх дій, а також алгебраїчна сума моментів усіх сил системи відносно довільної точки площини їх дії дорівнювали нулю.

Аналогічно до (6.5) умови (6.8) називають основними умовами рівноваги плоскої системи паралельних сил.

Відповідно до умов (6.6) можна записати другу форму умов рівноваги плоскої системи паралельних сил:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad (\vec{F}_i \parallel Oy), \quad (6.9)$$

де точки A і B не повинні лежати на прямій, паралельній до осі Oy .

6.5 Розподілені навантаження

У інженерних розрахунках часто є навантаження, розподілені по об'єму тіла, поверхні або вздовж деякої лінії. Такі навантаження називають розподіленими. Систему розподілених сил характеризують своєю інтенсивністю q , тобто величиною сили, що приходить на одиницю об'єму, площі чи довжини навантаженого тіла. Інтенсивність розподілених об'ємних сил вимірюють в $\left[\frac{H}{m^3} \right]$, поверхневих сил - в

$\left[\frac{H}{m^2} \right]$, розподілених вздовж лінії – в $\left[\frac{H}{m} \right]$.

Розглянемо деякі прості приклади розподілених сил, що лежать в одній площині.

1. Сили, рівномірно розподілені вздовж відрізка прямої (Рис. 6.6, а). Для такої системи сил інтенсивність q є величина постійна. Для статичних розрахунків цю систему можна замінити рівнодійною силою

$\vec{Q}$, модуль якої

$$Q = aq. \quad (6.10)$$

Сила $\vec{Q}$ прикладена посередині відрізка AB .

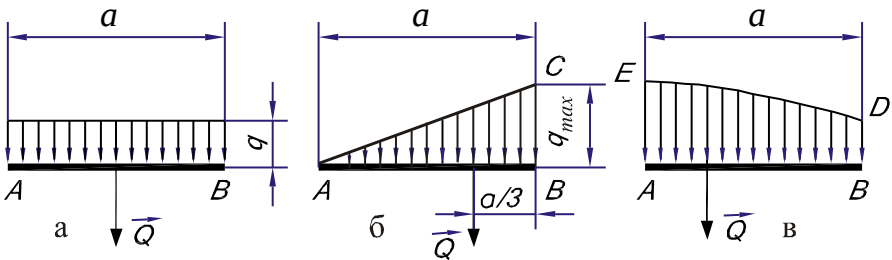


Рисунок 6.6

2. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за лінійним законом (Рис. 6.6, б). Прикладом такого навантаження можуть бути сили тиску води на греблю, що мають максимальну величину на дні і зменшуються до нуля на поверхні води.

Для таких сил інтенсивність q є змінною величиною, що зростає від нуля до максимальної величини q_{max} . Рівнодійну $\vec{Q}$ таких сил

визначають так само, як рівнодійну сил ваги, що діють на однорідну трикутну пластину ABC .

Вага однорідної пластини пропорційна до її площі, отже модуль сили $\vec{Q}$ буде дорівнювати

$$Q = \frac{1}{2} a q . \quad (6.11)$$

Прикладена сила $\vec{Q}$ на відстані $\frac{a}{3}$ від сторони BC трикутника

ABC .

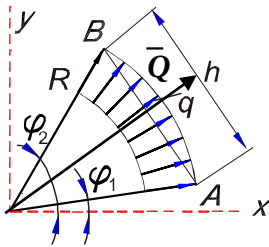


Рисунок 6.7

3. Сили, розподілені вздовж відрізка прямої за довільним законом (Рис. 6.6, в). За аналогією з силами ваги модуль рівнодійної $\vec{Q}$ таких сил дорівнюватиме площі фігури $ABDE$, виміряній у відповідному масштабі, а лінія дії рівнодійної буде проходити через центр ваги цієї площі.

4. Сили, рівномірно розподілені по дузі кола з радіусом R (Рис. 6.7). Прикладом таких сил можуть бути сили гідростатичного тиску на бічні стінки циліндричної посудини.

Рівнодійну таких сил знайдемо через її проекції на осі системи координат. Запишемо для елемента дуги кола завдовжки $Rd\varphi$ проекції рівнодійної так

$$dQ_x = qR \cos \varphi d\varphi; \quad dQ_y = qR \sin \varphi d\varphi .$$

Тоді проекції рівнодійної сил, що рівномірно розподілені по дузі AB кола,

$$Q_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \cos \varphi d\varphi = qR \sin \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = qR(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) ;$$

$$Q_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \sin \varphi d\varphi = -qR \cos \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = qR(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) .$$

Модуль сили $\vec{Q}$ буде дорівнювати

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}. \quad (6.12)$$

Направлена сила $\vec{Q}$ вздовж прямої, що нахилена до осі X під кутом

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Наприклад, якщо $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}; \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, то $Q_x = 2qR; Q_y = 0$.

Якщо $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}; \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, то $Q_x = \sqrt{2}qR; Q_y = 0$.

Довжина хорди, що стягує дугу AB , дорівнює $h = \sqrt{2}R$. Тоді $Q = Q_x = qh$.

6.6 Рівновага системи тіл

Розглянемо задачу на рівновагу не одного тіла, а системи тіл, які вільно обпираються одне на одне чи з'єднані між собою в'язями і перебувають під дією довільної плоскої системи сил або плоскої системи паралельних сил.

Розв'язуючи таку задачу необхідно враховувати, що у разі рівноваги системи тіл кожне тіло системи також перебуває у рівновазі й усі сили, прикладені до нього, зрівноважені. Тоді для плоскої системи сил можна скласти по три рівняння рівноваги для кожного з тіл окремо.

Отже для системи, яку складають n тіл, можна скласти всього $3n$ рівнянь рівноваги. Розв'язуючи задачі на рівновагу системи тіл, застосовують метод розчленування системи, який полягає в тому, що розглядають рівновагу кожного тіла системи окремо.

Контрольні запитання

1. Записати формули для головного вектора та головного моменту довільної плоскої системи сил.
2. Як обчислити модуль головного вектора довільної плоскої системи сил?
3. Записати основні умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

4. Записати еквівалентні форми умов рівноваги довільної плоскої системи сил.
5. Записати умови рівноваги для плоскої системи паралельних сил.
6. Як визначають рівнодійну розподілених за лінійним законом сил?
7. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для системи з n тіл?
8. Який метод застосовують для розв'язку задач на рівновагу системи тіл?

ГЛАВА 7. ТЕРТЯ

Тертя явно чи приховано завжди присутнє у практичній діяльності людини й відіграє при цьому як корисну, так і шкідливу роль. Основна властивість тертя – чинити опір будь-якому переміщенню тіла і це, як не парадоксально, з одного боку, допомагає тілу рухатися з певною швидкістю, а з другого – витратити певну кількість енергії.

Залежно від виду руху тіла по поверхні розрізняють **тертя ковзання, кочення та вертіння**.

7.1 Тертя ковзання. Закони Кулона

Розглянемо тіло вагою $\vec{G}$, що лежить на шорсткій горизонтальній поверхні (Рис. 7.1). Якщо до цього тіла прикласти горизонтальну силу $\vec{Q}$, то на тіло крім двох зрівноважених сил $\vec{N}$, $\vec{G}$ і сили $\vec{Q}$, буде діяти сила, що виникає між стичними поверхнями і яка буде напрямлена протилежно до сили $\vec{Q}$. Позначимо цю силу $\vec{F}_{тр}$. Ця сила буде чинити опір руху тіла по шорсткій поверхні і в межах модуля сили $\vec{Q}$ буде її зрівноважувати. Силу $\vec{F}_{тр}$ називають **силою тертя ковзання (тертя першого роду)**.

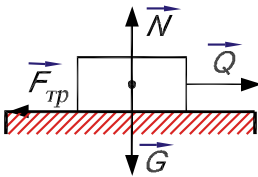


Рисунок 7.1

Тертя ковзання має механіко-молекулярну природу. Воно зумовлено як опором, що виникає при механічній деформації мікроступів шорстких поверхонь, так і подоланням міжмолекулярних зв'язків при достатньому зближенні поверхонь, що стикаються між собою.

Отже сила тертя ковзання – це сила опору, яка виникає при переміщенні або намаганні переміщення одного тіла по поверхні іншого.

Про перше дослідження явища тертя згадується в роботах Леонардо да Вінчі (1452-1519). Однак уперше властивості сил тертя сформулювали Г.Амонтон (1663-1705) та Ш.Кулон (1736-1806).

Розглянемо основні закони Кулона для сухого тертя ковзання.

1. Вектор сили тертя ковзання розміщений у спільній дотичній площині поверхонь, що контактують між собою, і напрямлений у бік, протилежний до напрямку руху тіла, залежить від активних сил. Модуль сили тертя перебуває в межах між нулем і максимальним значенням, яке досягається в момент порушення стану рівноваги, тобто

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр max}}. \quad (7.1)$$

2. Максимальна сила тертя ковзання не залежить від площі поверхонь контакту тіл.

3. Максимальна сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску (нормальній реакції):

$$F_{\text{тр.max}} = fN, \quad (7.2)$$

де f – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який називають **коефіцієнтом тертя ковзання (статичним коефіцієнтом тертя першого роду)**.

4. Коефіцієнт тертя ковзання f залежить від матеріалу та фізичного стану поверхонь контактуючих тіл (ступеня обробки поверхонь, температури, вологості тощо). Значення коефіцієнта тертя ковзання встановлюють експериментально й наводять у довідковій літературі. Значення f для деяких матеріалів подано в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнта тертя ковзання f
Сталь по сталі	0,15
Сталь по льоду	0,027
Дуб по дубу (поперек волокон)	0,54
Дуб по дубу (вздовж волокон)	0,62
Цегла по бетону	0,76
Метал по дереву	0,5-0,6

Експериментально коефіцієнти тертя ковзання можна дослідити на простому приладі, схему якого наведемо на рис. 7.2. Горизонтальну плиту AB та прямокутний брус D виготовляють з матеріалів, для яких визначають коефіцієнти тертя. На брус D будуть діяти сила ваги $\vec{G}$, нормальна реакція $\vec{N}$, рушійна сила $\vec{Q}$, яка в стані спокою зрівноважена силою тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (сила $\vec{Q}$ чисельно дорівнює силі ваги чашки E з тягарцями). Поступово змінюючи вагу чашки E , знаходимо те значення $\vec{Q}^*$, при якому брус D починає рухатись. Очевидно

гранична сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}} = \vec{Q}^*$. А оскільки в цьому випадку $N = G$, то

$$f_0 = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{Q^*}{G}.$$

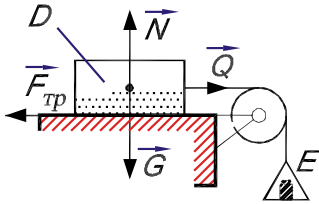


Рисунок 7.2

Зробивши ряд дослідів, можна перекоонатися, що у разі зміни в певних межах ваги бруса $\vec{G}$ величина $\vec{Q}^*$ зростає пропорційно $\vec{G}$, а значення f_0 залишається сталим.

Закон Кулона про граничне значення сили тертя справедливий і для руху одного тіла по поверхні другого з деякою відносною швидкістю. При ковзанні по шорсткій поверхні до тіла, крім інших сил, прикладена сила тертя, напрямлена в бік, протилежний напрямку швидкості тіла. Цю силу деколи називають **динамічною силою** тертя ковзання. Модуль цієї сили

$$F_{\text{тр}} = \tau N, \quad (7.3)$$

де τ – коефіцієнт тертя під час руху (динамічний коефіцієнт тертя).

Досліди показали, що для більшості матеріалів $\tau < f$ та τ зменшується зі збільшенням відносної швидкості ковзання. Однак для наближених технічних розрахунків вважають, що коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості й перебуває у межах, наведених у довідковій літературі.

7.2 Кут і конус тертя

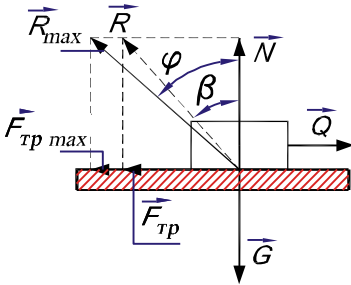


Рисунок 7.3

Нехай тверде тіло, на яке діють активні сили $\vec{G}$ та $\vec{Q}$, розміщене на шорсткій поверхні (Рис. 7.3). Повну реакцію шорсткої поверхні $\vec{R}$ визначають за довжиною і напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на нормальній реакції $\vec{N}$ і силі тертя $\vec{F}_{тр}$,

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}. \quad (7.4)$$

Повна реакція $\vec{R}$ відхилена від нормалі до опорної поверхні на кут β . Як відомо, зі збільшенням $\vec{Q}$ зростає і сила тертя $\vec{F}_{тр}$ і при цьому повна реакція відхиляється від нормалі на все більший кут. Це відхилення буде максимальним при $\vec{F}_{тр} = \vec{F}_{тр max}$.

Найбільше значення кута β відхилення повної реакції $\vec{R}$ від нормалі називають **кутом тертя** φ .

З Рис. 7.3 та залежності (7.2) випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{тр max}}{N} = \frac{fN}{N} = f. \quad (7.5)$$

Залежно від дії активних сил напрям максимальної повної реакції буде змінюватись. Геометричним місцем усіх можливих положень

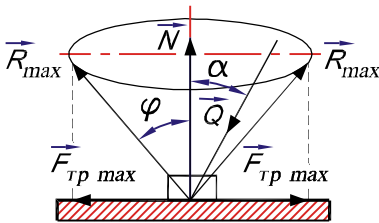


Рисунок 7.4

максимальної реакції $\vec{R}_{max}$ буде конічна поверхня – **конус тертя** (Рис. 7.4). Якщо коефіцієнт тертя f у всіх напрямках однаковий, то згідно з залежністю (7.5) конус тертя буде круговим. Простір усередині конуса тертя має таку властивість, що якою б великою за модулем не була активна сила $\vec{Q}$, лінія дії якої розміщена

всередині конуса тертя (Рис. 7.4), вона не виведе тіло зі стану спокою. Це явище називають **заклинюванням**.

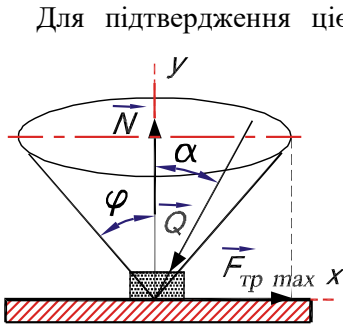


Рисунок 7.5

Для підтвердження цієї властивості конуса тертя запишемо рівняння рівноваги для тіла, зображеного на Рис. 7.5,

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F_{\text{тр}} - Q \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N - Q \cos \alpha = 0;$$

$$F_{\text{тр}} \leq fN.$$

З рівнянь знайдемо

$$F_{\text{тр}} = Q \sin \alpha, \quad N = Q \cos \alpha.$$

Підставляючи ці величини в нерівність, отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f$$

або, враховуючи (7.5),

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi.$$

Отже при **рівновазі тіла**

$$\alpha \leq \varphi.$$

Це означає, що для порушення стану рівноваги тіла необхідно, щоб лінія дії активної сили $\vec{Q}$ повинна проходити за межами конуса тертя.

Тертя ковзання в клинуватих напрямних

У багатьох машинобудівельних конструкціях використовують клинуваті чи циліндричні напрямні для поступального переміщення тіл.

Розглянемо тертя ковзання в клинуватій напрямній. Нехай сила $\vec{Q}$ притискає тіло 1 (Рис. 7.6, а) до напрямної 2, лінія дії якої перпендикулярна до осі напрямної.

Сила $\vec{F}$ діє горизонтально і пересуває тіло зі сталою швидкістю v . Між тілом 1 і напрямною 2 у площинах контакту виникають сили нормального тиску $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ і сили тертя $\vec{F}_{\text{тр}1}$ і $\vec{F}_{\text{тр}2}$ (Рис. 7.6, б).

Сумарна сила тертя

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = f(N_1 + N_2).$$

Якщо тіло і напрямна симетричні відносно вертикальної осі, то модулі сил нормального тиску однакові, тобто $N_1 = N_2$. Тоді

$$F_{\text{тр}} = 2fN_1. \quad (7.6)$$

У площині Oyz у стані рівноваги тіла 2

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{Q} = 0.$$

З побудованого за цією рівністю силового трикутника (Рис. 7.6, в) знаходимо

$$N_1 = \frac{Q}{2\sin \alpha}. \quad (7.7)$$

Після підстановки (7.7) в (7.6), отримаємо

$$F_{\text{тр}} = 2f \frac{Q}{2\sin \alpha} = \frac{f}{\sin \alpha} Q = f' \cdot Q,$$

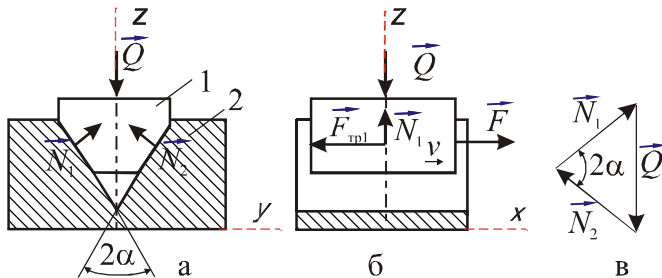


Рисунок 7.6

де $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$ - зведений коефіцієнт тертя для клинуватої напрямної.

Повна реакція, яка діє на тіло з боку напрямної, відхилена від вертикалі на кут $\rho' = \arctg f'$.

Тертя ковзання в циліндричних напрямних

Циліндрична напрямна зображена на Рис. 7.7. Нехай на циліндричне тіло 1 у вертикальній площині діє сила $\vec{Q}$, яка перпендикулярна до осі напрямної 2. Сила $\vec{F}$ діє паралельно до напрямної і пересуває тіло з певною швидкістю V . Дуга, по якій відбувається контакт, змінюється від $\alpha = 0^\circ$ до $\alpha = \varphi_1$ і від $\alpha = 0^\circ$ до $\alpha = \varphi_2$. Очевидно, що найбільша величина розподіленого навантаження, яке діє на тіло, є в його найнижчій точці коли $\alpha = 0^\circ$, а найменша – коли $\alpha = -\varphi_1$ і $\alpha = \varphi_2$. Закон зміни розподіленого навантаження в межах дуги контакту, запишемо у вигляді:

$$q = q_0 \cos \alpha,$$

де q_0 - максимальна величина навантаження при $\alpha = 0^\circ$.

Виділимо по дузі контакту елементарну дугу ds , що відповідає елементарному приросту кута $d\alpha$. Елементарна сила тертя, яка діятиме на смугу тіла довжиною ℓ , дорівнює: $dF_{\text{тр}} = f \cdot q \cdot \ell \cdot ds = f \cdot q_0 \cdot \cos \alpha \cdot \ell \cdot r \cdot d\alpha$, а сила тертя, що діє на тіло

$$\text{в цілому: } F_{\text{тр}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f q_0 \ell r \cos \alpha \cdot d\alpha = f q_0 \ell r (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$$

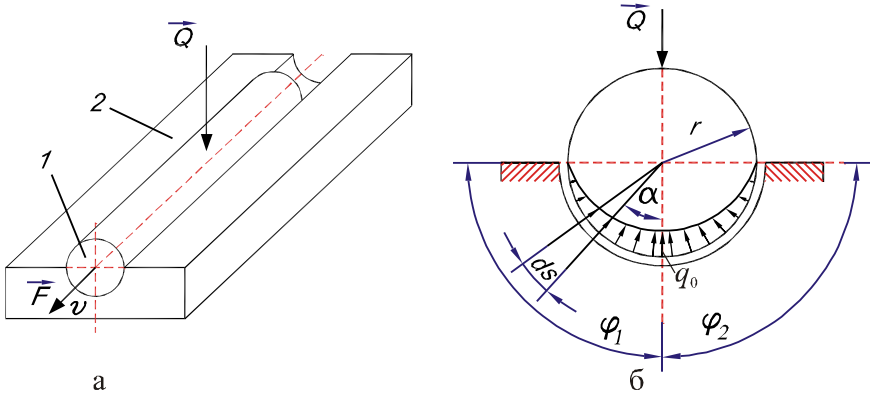


Рисунок 7.7

Спроектувавши всі сили, що діють на тіло, на напрям сили $\vec{Q}$, виразимо останню через параметри пари тертя:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q \cdot \cos \alpha \cdot \ell \cdot ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} q_0 \cdot \ell \cdot r \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \cdot r \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell \cdot r \left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.
 \end{aligned}$$

Зведений коефіцієнт тертя визначаємо як відношення сили тертя до сили нормального тиску:

$$f' = \frac{F_f}{Q} = \frac{2f(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{\left[\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}}.$$

Дуже часто зустрічаються циліндричні пари, в яких кути $\varphi_1 = -90^\circ$ і $\varphi_2 = 90^\circ$. Для такого випадку зведений коефіцієнт тертя дорівнює:

$$f' = \frac{4}{\pi} f.$$

7.3 Тертя кочення

Тертям кочення (тертя другого роду) називають опір, який виникає при коченні або намаганні кочення одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо круглий коток вагою $\vec{G}$ і радіусом $\vec{r}$, який розміщений на горизонтальній поверхні (Рис. 7.8). До центра котка

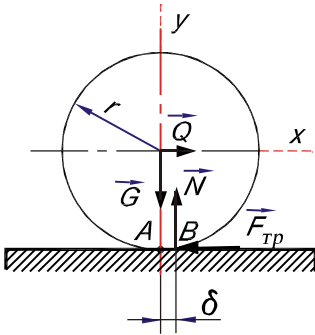


Рисунок 7.8

прикладена горизонтальна сила $\vec{Q}$. Під вагою котка опорна поверхня деформується і точка прикладання реакцій $\vec{N}$ і $\vec{F}_{\text{тр}}$ переміщується з точки A в точку B . При певному значенні модуля сили $\vec{Q}$ коток перебуватиме в рівновазі. Запишемо рівняння рівноваги сил, прикладених до котка,

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \quad Q - F_{\text{тр}} = 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \quad N - G = 0; \\ \sum m_A(\vec{F}_i) &= 0; \quad m_A(\vec{N}) - Qr = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

З перших двох рівнянь отримаємо

$$Q = F_{\text{тр}}, \quad N = G.$$

Це свідчить про те, що у разі рівноваги котка до нього прикладені дві пари сил $(\vec{Q}, \vec{F}_{\text{тр}})$ і $(\vec{G}, \vec{N})$. Перша пара прагне повернути тіло, тобто надати йому руху. Друга чинить опір повороту. Момент цієї пари будемо називати **моментом опору кочення** і позначимо його $M_{\text{он}}$.

Цей момент дорівнює моменту сили $\vec{N}$ відносно точки A :

$$M_{\text{он}} = m_A(\vec{N}). \quad (7.9)$$

У будь-який момент рівноваги котка обидві пари сил зрівноважені, що випливає з третього рівняння системи (7.8).

У момент початку кочення момент опору M_{on} досягне свого максимального значення M_{max} , яке за дослідями пропорційне нормальному тиску:

$$M_{max} = \delta N. \quad (7.10)$$

Коефіцієнт пропорційності δ називають **коефіцієнтом тертя кочення**, або **коефіцієнтом тертя другого роду**. Цей коефіцієнт дорівнює відстані від вертикальної прямої, яка проходить через центр котка, до точки прикладання нормальної реакції $\vec{N}$ і має розмірність довжини. Значення деяких коефіцієнтів тертя кочення подано в табл. 7.2.

У стані рівноваги котка момент опору M_{on} не перевищує свого максимального значення, тобто $M_{on} \leq M_{max}$.

Ураховуючи третє рівняння системи (7.8), а також (7.9) і (7.10), отримаємо

$$Qr \leq \delta N,$$

звідси

$$Q \leq \frac{\delta}{r} N. \quad (7.11)$$

Таблиця 7.2

Матеріали тіл, між якими виникає тертя	Значення коефіцієнта тертя кочення δ , мм
М'яка сталь по м'якій сталі	0,05
Куля по загартованій сталі	0,01
Дерево по дереву	0,5...0,6
Дерево по сталі	0,3...0,4

Нерівність (7.11) визначає умову, за якою не відбувається кочення котка. З другого боку, щоб коток не ковзав по поверхні, необхідно, щоб сила $\vec{Q}$ була менша від максимальної сили тертя

$\vec{F}_{тр\ max}$, тобто

$$Q \leq fN. \quad (7.12)$$

Оскільки значення $\frac{\delta}{r}$ значно менше від коефіцієнта тертя ковзання f (приблизно на порядок), то коли зростає сила $\bar{Q}$, завжди спочатку відбуватиметься кочення котка без проковзування. Тоді умова чистого кочення (без проковзування) має вигляд

$$f > \frac{\delta}{r}. \quad (7.13)$$

Примітка. Виходячи з фізики процесу кочення і використовуючи лему Пуансо про паралельне перенесення сили, розрахункову схему, що визначає момент опору кочення під час кочення тіла по поверхні, можна подати у вигляді, показаному на Рис. 7.9, де $M_{оп}$ визначають за формулою (7.10).

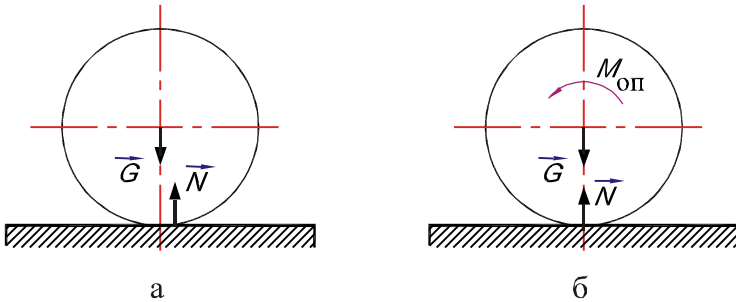


Рисунок 7.9

Переміщення тіл на котках

Тертя кочення виникає у разі ручного переміщення вантажів за допомогою труб або коліщатковими транспортерами. Визначимо, яку найменшу силу $\vec{F}$ необхідно прикласти до вантажу, щоб перемістити його на котках (Рис. 7.10).

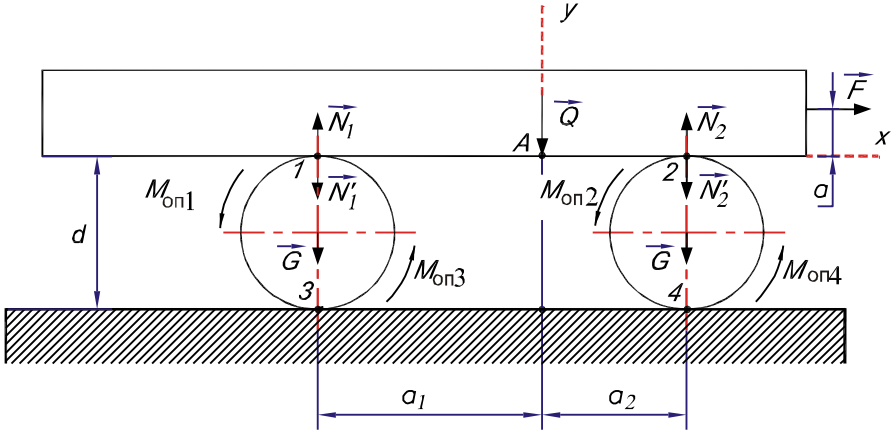


Рисунок 7.10

Нехай $\vec{Q}$ - сила, яка притискає вантаж до котків по нормалі. Як правило, це сила ваги вантажу. У центрах ваги котків прикладені сили ваги котків $\vec{G}$. Коефіцієнти тертя кочення: між вантажем і котками δ_1 , між котками і площиною δ_2 . Під час переміщення вантажу вправо в напрямку сили $\vec{F}$ на котки будуть діяти моменти тертя в зонах контакту вантаж-коток і коток-площина. Тоді активний момент від сили $\vec{F}$ у разі рівномірного переміщення вантажу буде зрівноважений чотирма моментами опору кочення

$$F(d + a) = M_{оп1} + M_{оп2} + M_{оп3} + M_{оп4}, \quad (7.14)$$

де d - діаметр котків, a - плече прикладання сили $\vec{F}$, моменти опору кочення: $M_{оп1} = N'_1 \cdot \delta_1$, $M_{оп2} = N'_2 \cdot \delta_1$, $M_{оп3} = (N'_1 + G)\delta_2$; $M_{оп4} = (N'_2 + G)\delta_2$.

Рівняння рівноваги вантажу мають вигляд

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_1 + N_2 - Q = 0;$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad -a \cdot F - a_1 \cdot N_1 + a_2 \cdot N_2 = 0.$$

З цих рівнянь визначаємо сили $\vec{N}_1$ та $\vec{N}_2$, що діють на вантаж з боку котків.

Підставляючи в (7.14) вирази для моментів опору кочення та сил $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, отримаємо вираз для визначення необхідної сили $\vec{F}$

$$F = \frac{Q(\delta_1 + \delta_2) + 2G\delta_2}{d + a}.$$

Якщо вагою котків знехтувати, тоді

$$F = \frac{Q(\delta_1 + \delta_2)}{d + a}.$$

З отриманих виразів для сили $\vec{F}$ можна зробити такі висновки:

- величина сила $\vec{F}$ не залежить від положення точки прикладання нормальної сили $\vec{Q}$;

- зі збільшенням діаметрів котків d і плеча a зменшується величина сили $\vec{F}$, яку необхідно прикласти до вантажу для його переміщення на котках.

7.4 Тертя вертіння

Якщо до кулі, що лежить на горизонтальній площині, прикласти пару сил з моментом M , розміщену також у горизонтальній площині, то пара сил буде намагатися повернути кулю навколо вертикальної осі. Досліди показують, що куля розпочинає свій рух лише тоді, коли величина M буде більша за певну граничну величину $M_{\text{тр}}$. Це пояснюють наявністю тертя вертіння, тобто опору вертіння, що виникає внаслідок тертя кулі та поверхні. Величину $M_{\text{тр}}$ визначають за залежністю

$$M_{\text{тр}} = \lambda N, \quad (7.15)$$

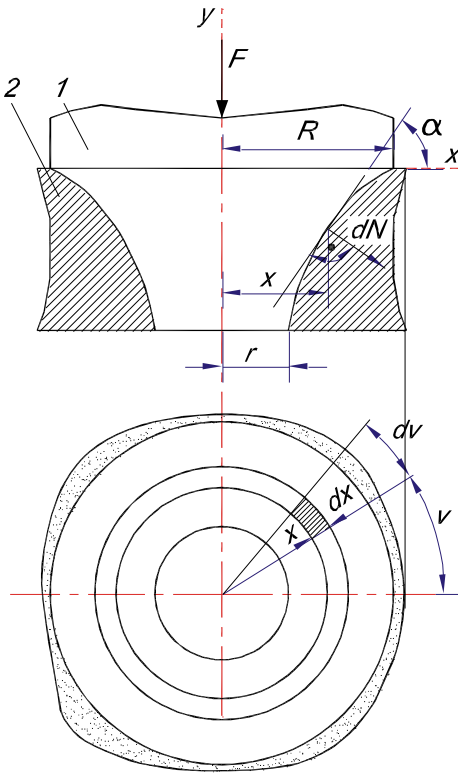


Рисунок 7.11

тертя, який виникає на поверхні контакту. Величина моменту залежить від закону розподілу навантаження. У разі сталого навантаження розглянемо елементарний сектор площини контакту, який обмежений з одного боку радіусами x і $x + dx$, а з другого боку кутами v і $v + dv$, причому $r \leq x \leq R$ і $0 \leq v \leq 2\pi$.

Площа цього сектора дорівнює $dA = x dv dx$. Цій елементарній площі кільця радіусом x і товщиною dx відповідатиме елементарна площа поверхні контакту, до якої прикладена елементарна нормальна сила dN :

$$dN = q x dv dx.$$

Елементарна сила тертя, яка діє на елементарну площу поверхні:

де $\vec{N}$ – сила нормального тиску кулі на площину, що дорівнює в даному випадку вазі кулі, λ – коефіцієнт тертя вертіння, який має розмірність довжини. За величиною цей коефіцієнт дуже малий (в 5-10 разів менший від коефіцієнта тертя кочення δ).

Тертя вертіння має місце тоді, коли зовнішня сила F діє вздовж осі тіла, що обертається. Нехай тіло 1 обертається навколо вертикальної осі ординат і своїм кінцем опирається на опору 2 (Рис. 7.11).

Поверхня, по якій відбувається тертя, є результатом обертання твірної $y = \rho(x)$ навколо осі тіла.

Щоби надати рух тілу 1, необхідно подолати момент

$$dF_{\text{тр}} = f dN,$$

а елементарний момент тертя:

$$dM_{\text{тр}} = x dF_{\text{тр}}.$$

Після відповідних підстановок отримуємо:

$$M_{\text{тр}} = \int_0^{2\pi} \int_r^R x f q x dv \cdot dx = f \int_0^{2\pi} \int_r^R q x^2 dv \cdot dx = 2\pi f q \int_r^R x^2 dx. \quad (7.16)$$

Навантаження q виразимо через параметри тіл контакту та зовнішню силу F . Для цього спроекуємо всі сили на вісь ординат:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_r^R q \frac{x dv dx}{\cos \alpha} = 0,$$

де α - кут нахилу дотичної до кривої $y = \rho(x)$. Його визначаємо як:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\rho}{dx} \equiv \rho'(x).$$

Зважаючи, що $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, отримуємо:

$$F = 2\pi q \int_r^R x dx \sqrt{1 + \rho'^2(x)} \Rightarrow q = \frac{F}{2\pi \int_r^R x \sqrt{1 + \rho'^2(x)} dx}. \quad (7.17)$$

Підставляючи вираз (7.17) у вираз (7.16), дістанемо аналітичну залежність для визначення моменту тертя в п'яті при $q = \text{const}$ для довільних контактуючих поверхонь:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x \sqrt{1 + \rho'^2(x)} dx}. \quad (7.18)$$

Знайдемо за залежністю (7.16) момент тертя для деяких випадків.

Плоска кільцева п'ята

У плоскій п'яті (Рис. 7.12) рівнянням твірної поверхні контакту є пряма, яка збігається з віссю абсцис, тобто $\rho(x) = 0$. Підставляємо це значення у вираз (7.16) й отримуємо аналітичну залежність для моменту тертя:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x dx} = \frac{2f}{3} F \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \lambda F,$$

де

$$\lambda = \frac{2f}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

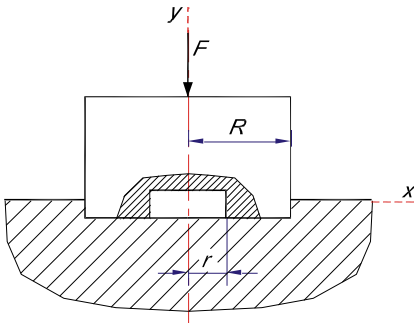


Рисунок 7.12

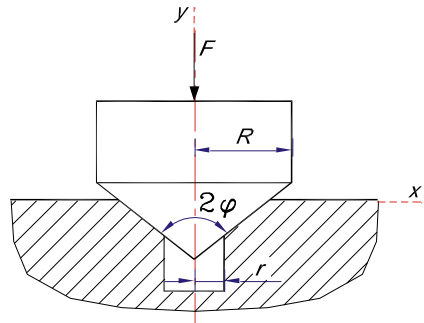


Рисунок 7.13

Конічна кільцева п'ята

Знаючи розміри конічної кільцевої п'яти (Рис. 7.13) R , r і φ , можемо записати рівняння твірної конуса у вигляді прямої:

$$y \equiv \rho(x) = kx + b,$$

де $b = R \operatorname{ctg} \varphi$, $k = \operatorname{ctg} \varphi$.

Враховуючи це, отримуємо:

$$M_{\text{тр}} = \frac{Ff \int_r^R x^2 dx}{\int_r^R x \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} dx} = \frac{2f}{3} F \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \sin \varphi = \lambda F,$$

де $\lambda = \frac{2f}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \sin \varphi$.

Отже, момент тертя в конічній п'яті при рівних інших умовах менший, ніж у плоскій, у $\sin \varphi$ разів.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під тертям?
2. Назвіть види тертя залежно від характеру відносного руху тіл.
3. Сформулюйте закони тертя ковзання.
4. Що таке коефіцієнт тертя спокою та руху?
5. Що називають кутом тертя і конусом тертя?
6. Чим відрізняється коефіцієнт тертя ковзання від коефіцієнта тертя кочення?
7. Які фактори впливають на коефіцієнти тертя ковзання і кочення?
8. Як визначають момент опору кочення?
9. Чому дорівнює максимальне значення статичної сили тертя ковзання?
10. Як визначають динамічну силу тертя ковзання?
11. Коли настає явище заклинювання?
12. Запишіть умову чистого кочення.
13. Коли виникає тертя вертіння?
14. Як визначають момент тертя вертіння для різних поверхонь контакту?

ГЛАВА 8. РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ ФЕРМ

8.1 Основні поняття про плоскі ферми

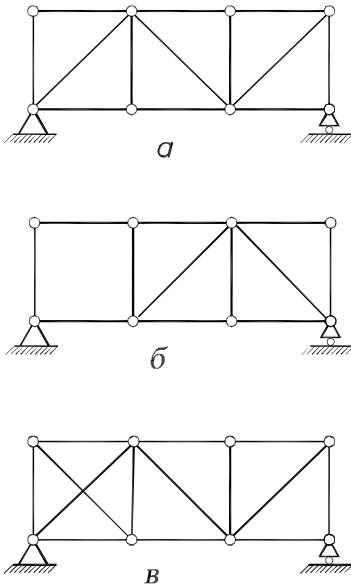


Рисунок 8.1

Фермою називають геометрично незмінну конструкцію, яка складається з прямолінійних стержнів, з'єднаних на кінцях шарнірами (Рис. 8.1).

Ферми використовують як несучі конструкції в різних спорудах, наприклад: у мостах, у перекриттях будинків, у підйомних кранах, каркасах літаків тощо. Основна задача при розрахунку ферм полягає у визначенні внутрішніх зусиль, які виникають у стержнях ферми під дією зовнішніх активних сил.

Місця з'єднання стержнів ферми називають **вузлами**. Стержні, розміщені по верхньому контуру ферми, утворюють верхній пояс, а по нижньому – нижній пояс.

Вертикальні стержні називають **стояками**, а нахилені – **розкосами**.

Ферми бувають просторові й плоскі. Якщо осі всіх стержнів ферми розміщені в одній площині, таку ферму називають **плоскою**. У цій главі обмежимося розглядом лише плоских ферм.

Розрахунок ферм істотно спрощується, якщо зробити такі **допущення**:

- 1) усі стержні ферми з'єднані шарнірно;
- 2) тертя в шарнірах відсутнє;
- 3) задані сили, що діють на ферму, розміщені у площині ферми і прикладені у вузлах;
- 4) власна вага стержнів мала порівняно з заданими силами і нею можна знехтувати або розподілити вагу стержнів по вузлах ферми.

У реальних фермах стержні з'єднані жорстко за допомогою електрозварювання, клепа́ння тощо. Проте зроблені допущення про спосіб з'єднання стержнів ферми дозволяють знайти наближене значення зусиль із достатньою точністю. Дійсно, за умов, що всі зусилля прикладені у вузлах ферми й що відсутнє тертя у шарнірах, кожен стержень перебуватиме під дією тільки двох сил, які прикладені до його кінців. Згідно з першою аксіомою статички у стані рівноваги лінія дії цих двох сил повинна проходити через точки їх прикладання. Тому сили, прикладені до стержня ферми, будуть обов'язково напрямлені вздовж стержня і спричинятимуть його стиск або розтяг.

Зроблені допущення виправдані тим, що, по-перше, тертя у шарнірах мале порівняно із заданими силами й ним можна знехтувати; по-друге, якщо сила не прикладена у вузлах ферми, то її можна розділити на складові, що будуть прикладені у вузлах.

Для того, щоб ферму можна було використовувати як несучу конструкцію в інженерних спорудах, необхідно забезпечити її жорсткість. Для забезпечення жорсткості ферми (тобто виключення відносних переміщень стержнів) необхідно, щоб число стержнів дорівнювало

$$N = 2n - 3 \quad (8.1)$$

де n число вузлів ферми.

Рівняння (8.1) називають **умовою жорсткості ферми**. Якщо число стержнів $N < 2n - 3$, то конструкція буде геометрично змінною (Рис. 8.1,б), а якщо $N > 2n - 3$, то ферма буде містити зайві стержні (Рис. 8.1, в).

Зауважимо, що умова жорсткості ферми (8.1) дійсна для плоскої ферми і є умовою статичної означеності ферми. Якщо ферма містить зайві стержні, то задача про визначення зусиль є статично неозначеною.

У курсі теоретичної механіки розглядають лише статично означені ферми.

Існує три основних методи визначення зусиль у стержнях статично означених ферм: метод вирізання вузлів, метод Ріттера й графічний метод побудови діаграми Максвелла-Кремони. Останній метод у цьому підручнику не наведений.

8.2 Метод вирізання вузлів

Суть методу вирізання вузлів полягає в тому, що розглядаємо рівновагу кожного вузла окремо, для чого умовно вирізаємо вузли ферми, прикладаємо до них відповідні зовнішні сили й реакції стержнів і складаємо рівняння рівноваги сил. Оскільки на початку розрахунку ферми невідомо, які стержні розтягнуті, а які стиснуті, то умовно допускаємо, що всі стержні розтягнуті. Тому реакції стержнів направляємо від вузлів. Якщо в результаті обчислень отримаємо відповідь зі знаком мінус, то відповідні стержні стиснуті. Знайдені реакції стержнів за модулем дорівнюють внутрішнім зусиллям у стержнях.

Послідовність розгляду вузлів визначають за такою умовою: число невідомих сил, прикладених до вузла, не повинно перевищувати кількості рівнянь рівноваги сил, тобто двох.

Зусилля в окремих стержнях можуть дорівнювати нулю. Такі стержні прийнято називати **нульовими**.

Сформулюємо леми, які дозволять знайти нульові стержні плоскої ферми, не проводячи її розрахунку.

Лема 1. Якщо в незавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться два стержні, то зусилля в цих стержнях дорівнюють нулю.

Лема 2. Якщо в незавантаженому вузлі плоскої ферми сходяться три стержні, два з яких розміщені на одній прямій, то зусилля в третьому стержні дорівнює нулю. Зусилля в перших двох однакові. Такий вузол називають Т-подібним.

Лема 3. Якщо у вузлі плоскої ферми сходяться два стержні й до вузла прикладена зовнішня сила, лінія дії якої збігається з віссю одного із стержнів, то зусилля в цьому стержні дорівнює за модулем прикладеній силі, а зусилля в другому стержні дорівнює нулю.

Методом вирізання вузлів вигідно користуватися тоді, коли потрібно знайти зусилля у всіх стержнях ферми. А для знаходження зусиль лише в одному або декількох стержнях пропонують використовувати метод Ріттера.

8.3 Метод Ріттера

Метод полягає в тому, що після знаходження реакцій опор ферму умовно розрізають на дві частини так, щоб у перерізі було не більше трьох стержнів з невідомими зусиллями. Потім розглядають рівновагу однієї з частин ферми, відкинувши іншу. Дію відкинутої частини замінюють відповідними силами, направляючи їх уздовж розрізаних стержнів від вузлів, тобто вважають, що стержні розтягнуті. Для одержаної плоскої довільної системи сил складають три рівняння рівноваги.

Рівняння доцільно записувати у вигляді рівності нулю суми моментів усіх сил відносно трьох різних точок, що є точками, в яких попарно перетинаються лінії дії розрізаних стержнів. Ці точки називають **точками Ріттера або моментними точками**. У кожне з рівнянь моментів відносно трьох точок Ріттера буде входити лише одна невідома.

Контрольні запитання

1. Що називають фермою?
2. Які допущення приймають при розрахунках ферм?
3. Записати умови жорсткості ферми.
4. Назвати всі елементи плоскої ферми.
5. Сформулювати суть методу вирізання вузлів.
6. Сформулювати суть методу Ріттера.

ГЛАВА 9. ЦЕНТР ВАГИ ТІЛА

9.1 Координати центра паралельних сил

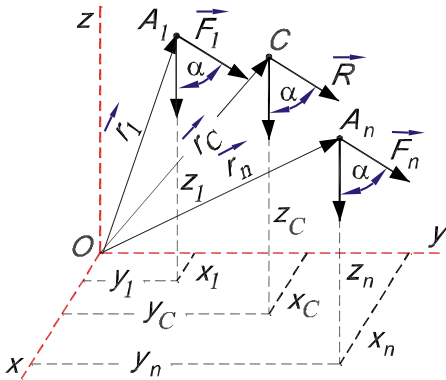


Рисунок 9.1

Поняття про центр паралельних сил є необхідним для розв'язку деяких задач механіки і для визначення центра ваги.

Розглянемо систему паралельних і однаконо направлених сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (Рис. 9.1).

Очевидно, що ця система сил має рівнодійну $\vec{R}$, яка направлена так, як і складові

сили. Модуль рівнодійної дорівнює

$$R = \sum_{s=1}^n F_i. \quad (9.1)$$

Лінія дії рівнодійної буде проходити через певну точку C . Якщо всі сили повернути на довільний кут α в один і той самий бік навколо точок їх прикладання, то рівнодійна повернеться навколо точки C на той самий кут і в той самий бік.

Точку C , через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання в один і той самий бік і на один і той самий кут, називають **центром паралельних сил**.

Координати точки C прикладання рівнодійної, тобто координати центра даної системи паралельних сил, позначимо x_C, y_C, z_C . Повернемо всі сили так, щоб вони стали паралельними осі Oz . Рівнодійна $\vec{R}$ також буде паралельна осі Oz . Використовуючи теорему Варіньона, визначимо момент рівнодійної відносно осі Oy (Рис. 9.1).

Згідно з цією теоремою момент рівнодійної відносно осі Oy дорівнюватиме алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї самої осі:

$$m_y(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n m_y(\vec{F}_i).$$

У нашому випадку

$$R_C x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^n F_i x_i,$$

звідси

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{R}.$$

Аналогічно повертаючи всі сили навколо точок прикладання так, щоб вони стали паралельні осям Ox і Oy відповідно, отримаємо координати y_C і z_C . Тоді координати центра системи паралельних сил визначають за залежностями:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i z_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (9.2)$$

Помноживши залежності (9.2) на одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і додавши їх, отримаємо формулу для радіус-вектора $\vec{r}_C = x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k}$ центра паралельних сил:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (9.3)$$

де $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{F}_i$.

9.2 Центр ваги твердого тіла

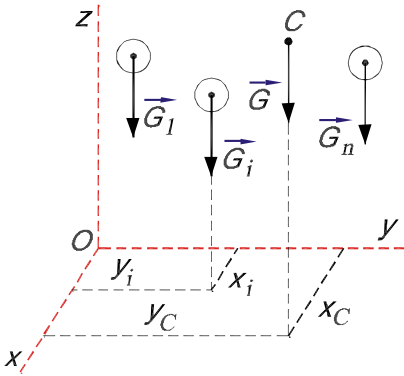


Рисунок 9.2

На всі тіла, що розміщені в межах поля земного тяжіння, діють сили притягання до Землі. Якщо тіло розбити на окремі елементарні частинки малих об'ємів, то на кожну частинку діють сили земного тяжіння, які будуть напрямлені до центра Землі. Але оскільки розміри тіл малі порівняно з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними між собою (Рис. 9.2). Виходячи з цих припущень, можна дати визначення ваги тіла й

центра ваги тіла. **Вага тіла** – це рівнодійна системи паралельних сил, з якими окремі частини тіла притягаються до Землі, а **центр ваги тіла** – центр цієї системи паралельних сил.

Розглянемо деяке тіло і розділимо його на n елементарних частин, сили притягання яких до Землі позначимо через $\vec{G}_i$. Тоді вага тіла

$$G = \sum_{i=1}^n G_i. \quad (9.4)$$

Координати центра ваги твердого тіла визначають як координати центра паралельних сил. Використовуючи залежності (9.2), координати центра ваги тіла визначимо за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad (9.5)$$

де x_i, y_i, z_i – координати i -ї частини тіла.

9.3 Центр ваги однорідного тіла

Центр ваги об'єму

Для однорідного тіла, яке займає об'єм V , можна визначити координати його центра ваги через відомі координати центрів ваги окремих частин тіла. Вагу однорідного тіла визначають за залежністю $G = \gamma \mathcal{V}$, де γ – густина матеріалу тіла; V – об'єм тіла. Аналогічно вага кожної частини $G_i = \gamma V_i$, де V_i – об'єм i -ї частини тіла. Підставимо ці значення в (9.5) і отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V}, \quad (9.6)$$

де x_i, y_i, z_i – координати точки прикладання сили G_i . Величини x_C, y_C, z_C називають **координатами центра ваги об'єму**.

Центр ваги площі

Центром ваги площі вважають центр ваги однорідної тонкої пластини однакової товщини, основа якої займає дану площу.

Розглянемо однорідну тонку пластину товщиною h , основа якої займає площу S (Рис. 9.3). Вага однорідної тонкої пластини $G = \gamma S h$. Розіб'ємо тонку пластину на елементарні частини. Вага кожної такої частини $G_i = \gamma S_i h_i$, де S_i – площа елементарної частини. Тоді координати центра ваги площі S на підставі залежностей (9.5) визначають за формулами

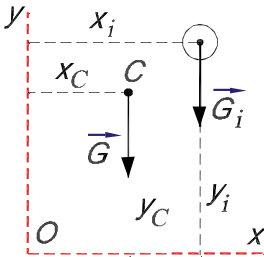


Рисунок 9.3

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n S_i x_i}{S}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n S_i y_i}{S}, \quad (9.7)$$

де x_i, y_i – координати центра ваги елементарних площ S_i .

Центр ваги лінії

Під центром ваги лінії розуміють центр ваги однорідного тонкого стержня однакового поперечного перерізу, вісь якого збігається з даною лінією.

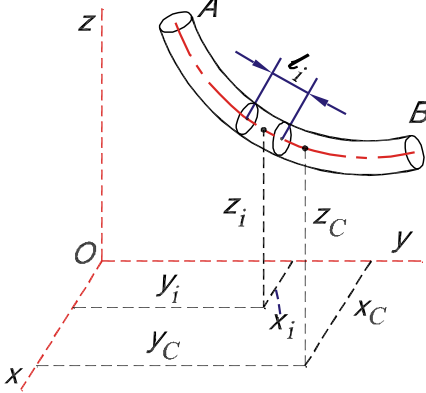


Рисунок 9.4

Розглянемо однорідний тонкий стержень, площа поперечного перерізу якого S . Вісь цього стержня збігається з лінією AB , центр ваги якої потрібно знайти (Рис. 9.4).

Вага стержня $G = \gamma LS$, де L – довжина лінії AB . Розділимо стержень на елементарні частини довжиною ℓ_i .

Вага кожної частини $G_i = \gamma S \ell_i$. Координати центра

ваги кожної виділеної частини x_i, y_i, z_i . Тоді координати центра ваги C лінії AB визначають із залежностей (9.5) після відповідних підстановок:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i x_i}{L}; y_C = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i y_i}{L}; z_C = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i z_i}{L}. \quad (9.8)$$

Необхідно відзначити, що формули (9.6)-(9.8) є наближеними. Граничним переходом їх можна звести до визначеного інтегралу: для однорідного тіла

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dV}{V};$$

для однорідної тонкої пластини

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dS}{S};$$

для лінії

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} d\ell}{L}.$$

Положення центрів ваги деяких однорідних тіл наведені в табл.

9.1.

9.4 Методи знаходження центра ваги

Експериментальні методи

Метод підвісу. Положення центра ваги тіла за цим методом визначають так: підвішують тіло на нитці у довільній точці тіла та продовжують напрям нитки в тілі (прорисовують лінію на поверхні тіла); підвішують тіло на нитці в іншій точці і знову відзначають на тілі продовження нитки. Точка перетину продовжених напрямів нитки на тілі й буде центром ваги тіла.

Цей метод дозволяє визначити центр ваги неоднорідного тіла складної конфігурації.

Метод зважування.

Використовують для знаходження центра ваги складних тіл значної ваги. Суть методу зважування пояснює рис. 9.5.

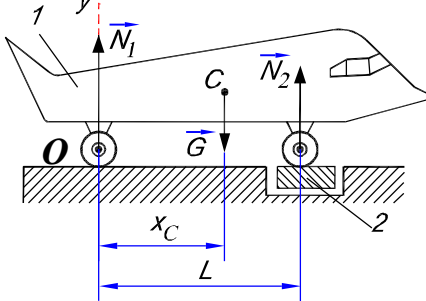
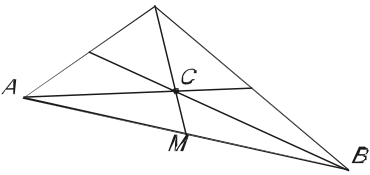
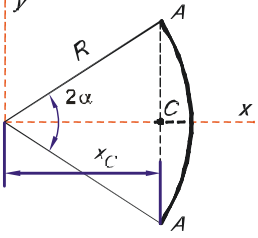
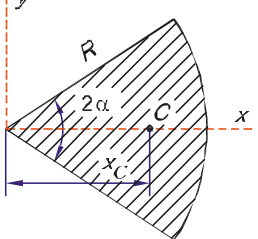
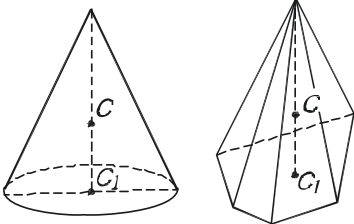


Рисунок 9.5

Таблиця 9.1

Вид тіла	Положення центра ваги
Трикутник 	Центр ваги C розміщений у точці перетину медіан: $CM = \frac{1}{3} DM$
Дуга кола 	Центр ваги C розміщений на осі симетрії Ox : $y_C = 0 ; x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$
Круговий сектор 	Центр ваги C розміщений на осі симетрії Ox : $y_C = 0 ; x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$
Піраміда або конус 	Центр ваги розміщений на лінії, яка з'єднує вершину A піраміди або конуса з центром ваги C_1 основи: $CC_1 = \frac{1}{4} AC_1$

Спочатку знаходять вагу тіла. Для цього тіло 1 почергово встановлюють точками опори на вагу 2 і визначають величини $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$.

Вимірюють відстань L між точками опори. Тоді координату центра ваги x_C тіла можна визначити з рівнянь рівноваги

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad N_1 + N_2 - G = 0; \quad G = N_1 + N_2;$$

$$\sum_{i=1}^n m_0(\vec{F}_{iy}) = 0; \quad N_2 L - G x_C = 0; \quad x_C = \frac{N_2 L}{G}.$$

Метод симетрії

Лема. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр геометричної симетрії, то центр ваги цього тіла лежить у площині, на осі або у центрі симетрії.

Доведення леми пропонуємо провести самостійно.

Метод розбиття

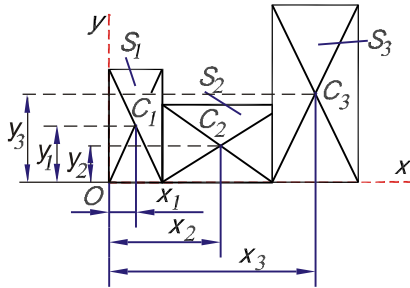


Рисунок 9.6

Положення центра ваги тіла можна визначити, якщо розбити його на такі частини, центри ваги яких відомі, або їх легко можна визначити. Нехай потрібно визначити координату x_C центра ваги деякої плоскої фігури (Рис. 9.6). Розділимо фігуру на три частини, для яких координати центрів ваги

$C_1(x_1, y_1), C_2(x_2, y_2), C_3(x_3, y_3)$ та площі S_1, S_2, S_3 легко визначити, коли відомі геометричні розміри. Тоді координати центра ваги обчислюють за формулами (9.7):

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

Метод доповнення (метод отворів або від'ємних площ)

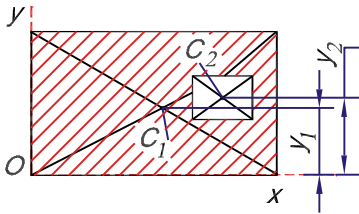


Рисунок 9.7

Цей метод є частковим випадком методу розбиття і його використовують для тіл, які мають отвори (Рис. 9.7). Знаючи площі S_1 (усієї фігури) і S_2 (вирізаної з фігури частини), а також координати y_1 і y_2 їх центрів ваги, можна вирахувати координати центра ваги плоскої фігури з отвором, приймаючи площу вирізаної частини від'ємною:

$$y_c = \frac{S_1 y_1 - S_2 y_2}{S_1 - S_2}.$$

Метод інтегрування

Якщо тіло не можна розділити на кілька частин, положення центрів ваги яких відомі, то тіло ділять на елементарні частини, число яких прямує до нескінченності, а розміри кожної частини прямують до нуля. Тоді суми у виразах (9.6), (9.7), (9.8) будуть інтегралами за об'ємом, площею або довжиною.

Отже, вирази для координат центра ваги об'єму наберуть вигляду:

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV, \quad (9.9)$$

де $V = \iiint_{(V)} dV$ – об'єм тіла.

Координати центра ваги плоскої фігури

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS, \quad (9.10)$$

де $S = \iint_{(S)} dS$ – площа плоскої фігури.

Координати центра ваги лінії

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x d\ell; \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y d\ell; \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z d\ell, \quad (9.11)$$

де $L = \int_{(L)} d\ell$ довжина лінії.

Контрольні запитання

1. Як визначити модуль і напрям рівнодійної системи паралельних сил?
2. Що називають центром системи паралельних сил і центром ваги тіла?
3. Де розміщений центр ваги фігур, які мають площину, вісь або центр симетрії?
4. Де розміщений центр ваги прямокутника, паралелограма, трикутника, круга, кулі, конуса, піраміди?
5. Як визначають центр ваги твердого тіла?
6. Як визначають центр ваги об'єму, площі, лінії?
7. Назвіть методи знаходження центра ваги тіл.
8. Чим відрізняються метод підвісу від методу зважування?
9. Напишіть інтегральні формули для визначення координат центра ваги.
10. Як визначають центр ваги трикутника, дуги кола та площі кругового сектора?

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

Кінематика – це наука про механічний рух матеріальних тіл з погляду геометрії без урахування сил, прикладених до цих тіл. Це означає, що основною задачею кінематики є встановлення законів механічного руху та визначення і обчислення кінематичних величин, які характеризують рух тіла загалом і рух кожної його точки зокрема.

Кінематика є тією частиною теоретичної механіки, яка класифікує різні види механічного руху матеріальних тіл і майже повністю розв'язує першу задачу теоретичної механіки, бо за встановленим законом руху визначають необхідні кінематичні величини, які в динаміці будуть безпосередньо зв'язані з силами, що діють на матеріальні тіла.

З іншого боку кінематика має і самостійне значення, як теоретична база для загально-інженерних та спеціальних дисциплін, в яких розв'язують задачі з кінематичного аналізу та синтезу різноманітних механізмів та машин.

ГЛАВА 10. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

10.1 Закон руху точки

Законом механічного руху будь-якого тіла і зокрема точки називають функціональну залежність положення тіла чи точки від часу. Закон руху точки можна задати у трьох формах: векторній, координатній та натуральній (Рис. 10.1).

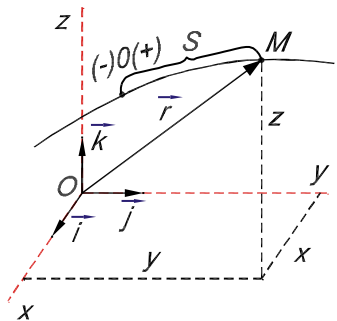


Рисунок 10.1

Векторна форма задання закону руху точки

Нехай у просторі задана інерційна система відліку та тіло відліку, з деякою точкою O якого зв'язана система координат $Oxyz$ та при-

лад для вимірювання часу t . Для визначеності прийнемо **ортонормовану декартову систему координат** з базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Проведемо з точки O у рухому точку M радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, який однозначно визначає положення точки M (Рис. 10.1).

Оскільки для будь-якого моменту часу t радіус-вектор $\vec{r}$ є однозначно визначеним, тому $\vec{r}$ є однозначною функцією часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (10.1)$$

Вираз (10.1) є **законом руху точки M у векторній формі**. Криву, яку описує точка M у просторі, називають **траєкторією руху точки або годографом радіуса-вектора $\vec{r}$** .

Координатна форма закону руху точки

Під час руху точки M у просторі кожному моменту часу t відповідає визначена сукупність її координат X, Y, Z (Рис. 10.1). Отже ці координати є однозначними функціями часу t :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (10.2)$$

Залежності (10.2), які однозначно визначають положення точки M у просторі, називають **кінематичними рівняннями руху точки**. Водночас ці залежності є **законом руху точки у координатній формі**.

Рівняння руху (10.2) можна розглядати як задані у параметричній формі рівняння траєкторії точки M , в яких параметром є час t . Наприклад, виразивши час t з третього рівняння (10.2), отримаємо: $t = \varphi(z)$. Підставляючи тепер це співвідношення в перші два рівняння (10.2), матимемо:

$$x = x[\varphi(z)], \quad y = y[\varphi(z)]. \quad (10.3)$$

Рівняння (10.3) явно не залежать від часу t та визначають траєкторію точки M у тривимірному просторі.

Під час руху точки M на площині (наприклад, коли $z = C = \text{const}$), виконуючи таку ж послідовність дій, отримаємо $t = \varphi(y)$ та

$$x = x[\psi(y)], \quad (10.4)$$

тобто траєкторію руху точки на площині $z = C = \text{const}$.

Найпростіший випадок руху - рух точки M по прямій лінії. У цьому разі одну з координатних осей системи координат (наприклад, X) можна направити вздовж цієї прямої. Тоді: $y = C_1 = \text{const}$, $z = C_2 = \text{const}$ і

$$x = x(t). \quad (10.5)$$

На рис. 10.2 показані траєкторії руху точки, задані такими кінематичними рівняннями руху: $x = 3\sin t$, $y = 2\cos t$, $z = 0$ (Рис. 10.2, а); $x = 3\sin(2t)$, $y = 2\cos(3t)$, $z = 0$ (Рис. 10.2, б) та $x = e^{0.1t} \cos t$, $y = e^{0.05t} \sin t$, $z = t$ (Рис. 10.2, в).

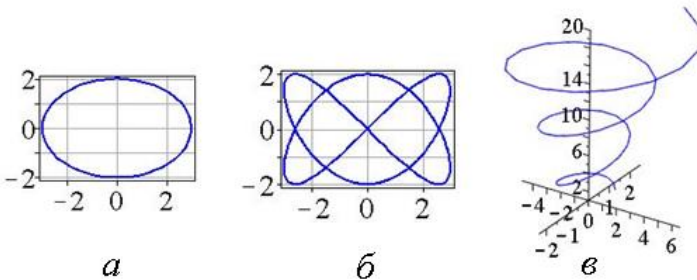


Рисунок 10.2

Закон руху точки у натуральній формі

Для того, щоб задати закон руху точки M у натуральній формі, необхідно визначити траєкторію точки і закон її руху по цій траєкторії. Рух точки у цьому разі розглядають відносно деякої **умовно нерухомої системи відліку**.

Нехай задана траєкторія точки, а також деяка точка O , що належить цій траєкторії. Точку O назвемо точкою відліку відстані S

Довільно виберемо додатній напрям відліку відстані вздовж траєкторії (Рис. 10.1). Очевидно, що від'ємний напрям буде протилежним до додатного.

Задамо також початок відліку часу. Найчастіше за $t = 0$ приймають момент часу початку руху точки M або момент часу, коли рухома точка M проходить через точку O . Прийmemo, що до того моменту часу, коли відбудеться ця подія, час вважати від'ємним, а після – додатним.

Отже, з урахуванням прийнятих положень **закон руху точки у натуральній формі** задають залежністю

$$s = s(t). \quad (10.6)$$

Слід зазначити, що відстань S , яку визначають відповідно до (10.6), не зв'язана з шляхом ℓ , пройденим точкою M за час t , оскільки за початок відліку відстаней можна прийняти довільну точку траєкторії, рух точки може бути коливним тощо.

Взаємозв'язок різних форм закону руху точки

Зауважимо, що траєкторія руху точки є годографом радіус-вектора точки M під час її руху у просторі. Тоді вираз (10.1) – це рівняння годографа у параметричній формі, де параметром є час t . Отже

$$r_x = r_x(t), r_y = r_y(t), r_z = r_z(t), \quad (10.7)$$

де r_x, r_y, r_z - проєкції радіуса-вектора точки M на осі системи координат $Oxyz$. Проте координати точки M дорівнюють проєкціям її радіуса-вектора, а значить рівняння (10.2) та (10.7) є еквівалентними. Тоді

$$x = r_x(t), y = r_y(t), z = r_z(t), \quad (10.8)$$

що дозволяє від закону руху точки у векторній формі перейти до закону руху у координатній формі.

Очевидно, є справедливим і зворотний перехід від закону руху, заданого у координатній формі, до закону руху у векторній формі. Дійсно, якщо система координат $Oxyz$ має базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, тоді

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (10.9)$$

Для того, щоб встановити взаємозв'язок закону руху точки, заданого у натуральній формі, з законами руху у векторній чи координатній формах, достатньо встановити такий зв'язок з одним з них.

З курсу диференціальної геометрії відомо, що диференціал дуги кривої ds в декартових координатах $Oxyz$ визначається співвідношенням

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (10.10)$$

Виберемо початковий момент часу $t = t_0$. Цьому моменту часу відповідає визначена точка траєкторії M_0 , координати якої

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0). \quad (10.11)$$

Тоді
$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (10.12)$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ - похідні координат від часу. Ви-

бір знаку перед інтегралом однозначно визначається вибором додатного напрямку відліку відстані вздовж траєкторії.

Перехід від закону руху, заданого у натуральній формі, до законів у координатній або векторній формах також визначений. Проте такий перехід достатньо складний, тому що необхідно інтегрувати рівняння Рікатті, і у цьому підручнику не наведений.

Задача 10.1. Закон руху точки у векторній формі має вигляд

$$\vec{r} = \vec{i} R \cos \pi t^2 + \vec{j} R \sin \pi t^2.$$

Проаналізувати рух і подати закон руху у координатній та натуральній формах (Рис. 10.3).

Розв'язок

Проекції радіус-вектора точки на координатні осі

$$r_x = R \cos \pi t^2, \quad r_y = R \sin \pi t^2.$$

Модуль радіус-вектора

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(R \cos \pi t^2)^2 + (R \sin \pi t^2)^2} = R.$$

Оскільки модуль вектора $\vec{r}$ величина постійна і дорівнює R , то

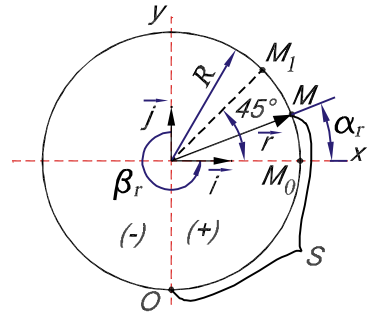


Рисунок 10.3

точка рухається по колу цього радіуса. На початку руху, при $t = 0$, $r_x = R$, $r_y = 0$, тобто точка розміщена у положенні $M_0(R,0)$, а при $t = 0,5$ с отримаємо

$$r_x = R \frac{\sqrt{2}}{2}, r_y = R \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha_t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \beta_t = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тобто, точка перебуває у положенні M_1 , де $\alpha_t = 45^\circ$.

Підставляючи інші моменти часу, будемо послідовно визначати положення точки в ці моменти часу.

На підставі формули (10.8), запишемо закон руху точки в координатній формі (10.2)

$$x = R \cos \pi t^2, y = R \sin \pi t^2.$$

Очевидно, при $t=0$ і при $t = 0,5$ с одержимо, що точка в ці моменти перебуває відповідно в положеннях $M_0(R,0)$ і $M_1\left(R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Щоб записати закон цього руху точки у натуральній формі, знайдемо рівняння траєкторії, виключаючи час з рівнянь руху в координатній формі. Отримаємо

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

тобто точка рухається по колу радіуса R .

Для дугової координати S візьмемо початок відліку, наприклад, у точці O , тоді при $t=0$ $s = s_0 = \frac{\pi R}{2}$ (четвертина кола), бо точка в цей час перебуває в положенні M_0 . Додатний знак для S приймемо у бік руху точки (проти годинникової стрілки по колу) і тоді за формулою (10.12) матимемо

$$s = \frac{\pi R}{2} + \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

$$\text{І, оскільки } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -2\pi R t \sin \pi t^2, \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2\pi R t \cos \pi t^2,$$

$$\text{то } s = \frac{\pi R}{2} + \int_0^t 2\pi R t dt = \frac{\pi R}{2} + \pi R t^2.$$

Очевидно, що при $t=0$ і при $t = 0,5$ с, точка перебуває, відповідно,

$\rho = 2 \cos(4t)$, $\varphi = t$ (полярна роза) (Рис. 10.5, б); $\frac{10}{1+0,6 \cos t}$, $\varphi = t$ (ко-нічний переріз) (Рис. 10.5, в).

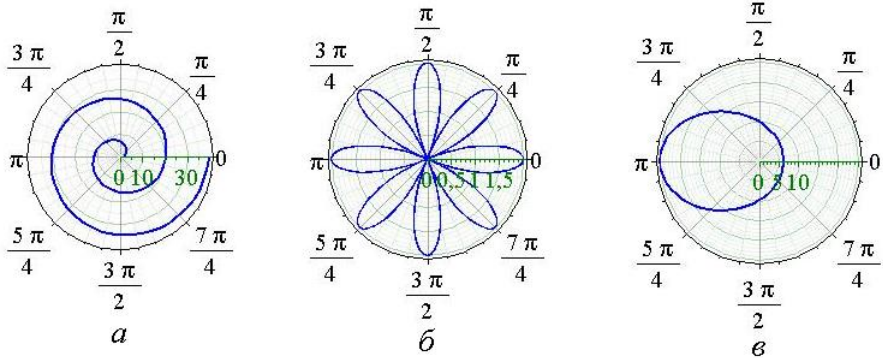


Рисунок 10.5

10.2 Швидкість точки

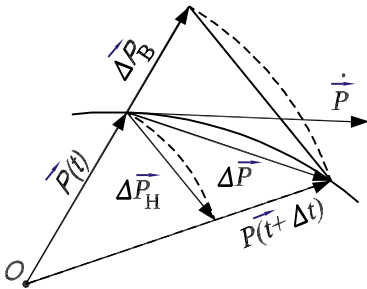
Векторна похідна вектора

Розглянемо змінний за часом вектор

$$\vec{P} = P_x \vec{i}_x + P_y \vec{j} + P_z \vec{k},$$

$$\text{де } P_x = P_x(t), \quad P_y = P_y(t),$$

$P_z = P_z(t)$. Відкладемо його від нерухомого центра O (Рис. 10.6).



Геометричне місце кінців вектора $\vec{P}$ називають його годографом.

Рисунок 10.6

Якщо розглянути значення вектора $\vec{P}$ у момент часу t і у момент часу $t + \Delta t$, то вектор $\Delta \vec{P}$ є векторною зміною вектора $\vec{P}$ за час Δt і, як видно з рис. 10.6, він є геометричною сумою зміни вектора $\vec{P}$ за напрямком $\Delta \vec{P}_H$ і зміни вектора $\vec{P}$ за величиною $\Delta \vec{P}_B$, тобто,

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{P}_H + \Delta \vec{P}_B. \quad (10.16)$$

Векторною похідною вектора $\vec{P}$ називають бистроту зміни цього вектора як за напрямком, так і за величиною, тобто

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} = \lim \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta \vec{P}_H}{\Delta t} + \lim \frac{\Delta \vec{P}_B}{\Delta t}, \text{ коли } \Delta t \rightarrow 0. \quad (10.17)$$

Геометрично векторна похідна вектора $\vec{P}$ – це вектор, направлений по дотичній до годографа вектора і, коли змінний вектор сталий лише за модулем, то годографом вектора буде крива на сфері радіуса, яка дорівнює довжині вектора $\vec{P}$, а тому похідна вектора напрямлена перпендикулярно до самого вектора.

Очевидно, що векторна похідна вектора дорівнює нулю, якщо вектор сталий, $\vec{P} = \text{const}$ за величиною і за напрямком. Аналітично векторну похідну вектора $\vec{P}$ обчислюють за формулою

$$\dot{\vec{P}} = \dot{P}_x \vec{i} + \dot{P}_y \vec{j} + \dot{P}_z \vec{k}, \quad (10.18)$$

а це означає, що її модуль і напрямні косинуси визначають за відомими формулами.

Неважко показати, що:

1) векторна похідна геометричної суми (різниці) двох векторів дорівнює геометричній сумі (різниці) похідних цих векторів

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2; \quad (10.19)$$

2) векторна похідна скалярного чи векторного добутку двох векторів дорівнює сумі відповідних добутків похідної першого вектора на другий вектор і першого вектора на похідну другого вектора:

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 \cdot \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \cdot \dot{\vec{P}}_2; \quad (10.20)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_1 \times \vec{P}_2) = \dot{\vec{P}}_1 \times \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \times \dot{\vec{P}}_2.$$

Поняття швидкості точки та її обчислення

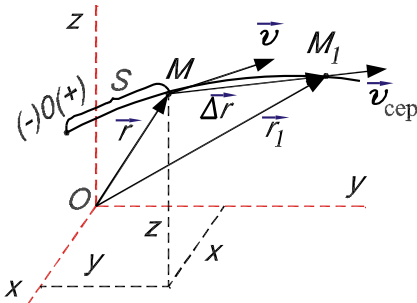


Рисунок 10.7

Якщо розглянемо рух матеріальної точки, то за деякий проміжок часу Δt з даного положення точка переміститься в інше положення M_1 (Рис. 10.7).

Вектор $\overrightarrow{MM_1}$ називають переміщенням точки за час Δt . Відношення $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ показує, як швидко

точка перемістилася з положення M у положення M_1 і його називають **середньою швидкістю точки** за час Δt :

$$\vec{v}_{\text{сер}} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (10.21)$$

Швидкістю точки в даний момент часу називають бистроту переміщення точки в цей момент часу, тобто, швидкість точки дорівнює

граничному значенню відношення $\frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$, коли $t \rightarrow 0$,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} \quad (10.22)$$

і напрямлена по дотичній до траєкторії точки в бік її руху.

Обчислення швидкості із закону руху у векторній і координатній формах майже однакове.

Відповідно до рис. 10.7 залежність (10.22) запишемо у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (10.23)$$

Отже, **швидкість точки дорівнює векторній похідній по часу від радіус-вектора точки**, а це означає, що

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{r}_x\vec{i} + \dot{r}_y\vec{j} + \dot{r}_z\vec{k},$$

оскільки для постійних векторів $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$ похідні по часу $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$. Отже,

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}, v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad (10.24)$$

$$\cos \alpha_v = \frac{\dot{x}}{v}, \cos \beta_v = \frac{\dot{y}}{v}, \cos \gamma_v = \frac{\dot{z}}{v}. \quad (10.25)$$

Формули (10.16) і (10.17) повністю визначають вектор швидкості точки, коли закон руху заданий у векторній (10.1) чи (10.9), або в координатній (10.2) формах.

Виходячи з формули (10.23) для швидкості точки та порівнюючи з нею формулу (10.18) для векторної похідної, слід зазначити, що векторна похідна по часу від будь-якого вектора є швидкістю переміщення кінця цього вектора по його годографу.

Обчислення швидкості точки із закону руху в натуральній формі (10.6) проводять у такій послідовності: напрям швидкості визначають за дотичною до траєкторії в бік руху точки; величину швидкості вважають алгебраїчною величиною, яка дорівнює

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (10.26)$$

оскільки величина вектора $\overrightarrow{MM_1}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ дорівнює величині елемента дугової координати $|\Delta s|$.

Отже **швидкість точки дорівнює похідній по часу від дугової координати s** і при $v > 0$ вказує на рух точки у бік збільшення, а при $v < 0$ – у бік зменшення дугової координати.

10.3 Прискорення руху точки

Геометрія траєкторії точки

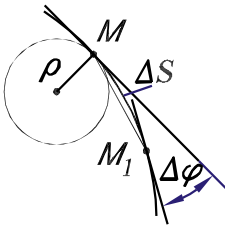


Рисунок 10.8

Для вивчення поняття прискорення точки та його обчислення необхідно розглянути деякі параметри геометричної будови траєкторії точки. До таких параметрів відносять кривизну, радіус кривизни та **натуральні осі координат** у кожній окремій точці траєкторії. Розглянемо будову кривої у точці M (Рис. 10.8).

Якщо візьмемо нескінченно близьку до точки M точку M_1 , то хорда MM_1 при необмеженому наближенні точки M_1 до точки M займе якесь граничне положення, яке буде дотичне до кривої в точці M .

Якщо тепер у точках M і M_1 провести дотичні, то кут $\Delta\varphi$ між ними називають кутом суміжності, а відношення кута суміжності до дуги $MM_1 = \Delta S$, коли $\Delta S \rightarrow 0$, називають кривизною k кривої в точці M , тобто

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (10.27)$$

Величину, обернену до кривизни k , називають **радіусом кривизни ρ кривої в точці M**

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (10.28)$$

Радіусом кривизни кривої в даній точці M є радіус кола, що проходить через точку M та дві сусідні з нею з обох боків точки, коли останні необмежено наближаються до точки M .

Якщо з точки M провести одиничний орт напрямку дотичної $\vec{\tau}$ та одиничний орт дотичної у точці M_1 , то вони утворюють трикутник Mab , площа якого при необмеженому наближенні точки M_1 до точки M займе у просторі площину I (пт) (Рис. 10.9), яка буде **дотичною** до кривої в точці M . Цю площину можна уявити як граничне положення площини, що проходить через точку M і дві сусідні з нею з обох боків точки, коли останні необмежено наближаються до точки M .

Площину Π (nb), перпендикулярну до дотичної в точці M , називають **нормальною**, а пряму її перетину з прилеглою площиною - **головною нормаллю** в точці M .

Площину Π (tb) у точці M , перпендикулярну до головної нормалі, називають **спрямною**, а пряму її перетину з нормальною площиною називають **бінормаллю** кривої в точці M .

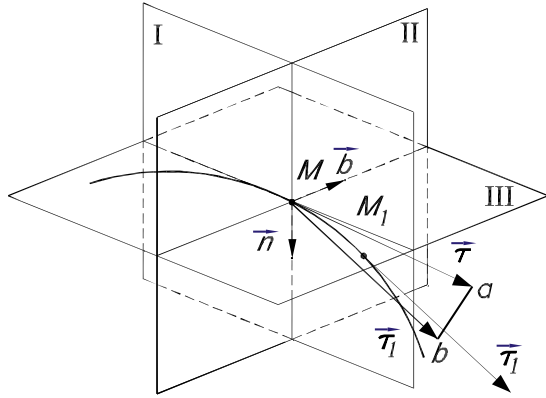


Рисунок 10.9

Одиничні орти дотичної $\vec{\tau}$, головної нормалі $\vec{n}$ і бінормалі $\vec{b}$ утворюють натуральні осі координат кривої в точці M .

Вивчаючи рух точки по даній траєкторії будемо вважати, що орт $\vec{\tau}$ напрямлений у бік зростання дугової координати точки, орт $\vec{n}$ напрямлений завжди у бік увігнутості траєкторії, а орт $\vec{b}$ напрямлений за правилом векторного добутку $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$.

Прискорення точки та його обчислення

Прискоренням точки називають швидкості зміни швидкості точки з часом. Якщо швидкість точки за проміжок часу Δt змінюється як вектор на величину $\Delta \vec{v}$ (Рис. 10.11), то відношення $\Delta \vec{v}$ до Δt називають **середнім прискоренням** точки за час Δt .

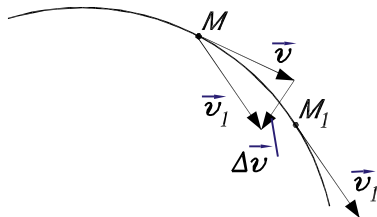


Рисунок 10.10

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Прискорення точки у даний момент часу t дорівнює граничному значенню відношення $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, коли $\Delta t \rightarrow 0$, тобто

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}. \quad (10.29)$$

Отже, **прискорення точки дорівнює векторній похідній по часу від швидкості точки**, тобто це теж вектор, напрямлений по дотичній до годографа вектора швидкості та **розташований у дотичній площині**, оскільки цю площину утворюють дотичні в точках M і M_1 коли $M_1 \rightarrow M$.

Обчислення прискорення точки із законів руху у векторній та у координатній формах

Якщо закон руху точки заданий у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$, або в координатній формі $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, то за формулами (10.24), (10.4) і (10.5) для вектора, проекцій, величини і напрямних косинусів прискорення, враховуючи, що $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k} = 0$ маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}_x \vec{i} + \ddot{r}_y \vec{j} + \ddot{r}_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \\ a_x &= \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}, a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \\ \cos \alpha_a &= \frac{a_x}{a}, \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}, \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Обчислення прискорення із закону руху в натуральній формі

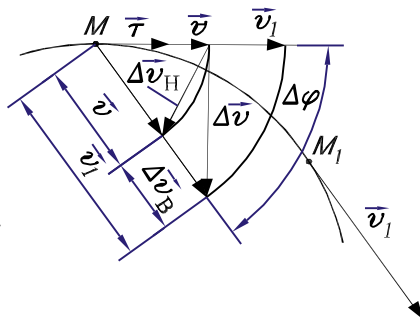


Рисунок 10.11

Нехай задана траєкторія точки та її дугова координата як функція часу $s = s(t)$. Зміну швидкості точки $\Delta \vec{v}$ за нескінченно малий проміжок часу подамо у вигляді геометричної суми двох векторів: зміни швидкості за напрямком $\Delta \vec{v}_H$ і зміни швидкості за величиною $\Delta \vec{v}_B$ (Рис. 10.11)

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_B + \Delta \vec{v}_H. \quad (10.31)$$

Оскільки вектор $\Delta \vec{v}_B$ напрямлений вздовж вектора $\vec{v}$, а вектор $\Delta \vec{v}_H$ напрямлений перпендикулярно до $\vec{v}$ (при $t \rightarrow 0$), то $\Delta \vec{v}$ можна представити у вигляді

$$\Delta \vec{v} = \vec{\tau} \cdot \Delta v_B + \vec{n} \cdot \Delta v_H, \quad (10.32)$$

де $\Delta v_H = v \cdot \Delta \varphi$ як хорда дуги кола радіуса v , яку можна ще задати формулою $\Delta v_H = v \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \Delta s$. Для прискорення $\vec{a}$ матимемо

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau} \cdot \Delta v_H}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{n} \cdot v \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right) \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (10.33)$$

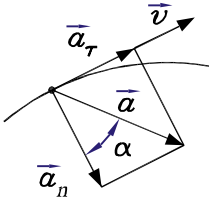
або, враховуючи, що тут $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, v постійні величини, запишемо

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_H}{\Delta t} + \vec{n} \cdot v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \vec{n} \frac{v^2}{\rho},$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

Отже, прискорення $\vec{a}$ має дві складові. Одна з цих складових характеризує швидкості зміни швидкості за величиною, напрямлена по дотичній до траєкторії точки та її називають **тангенціальним**, або **дотичним**, прискоренням

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{dv}{dt}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (10.34)$$



Друга складова характеризує швидкості зміни швидкості за напрямком, напрямлена по нормалі у бік увігнутості траєкторії та її називають **нормальним** прискоренням (Рис. 10.12)

$$\vec{a}_n = \vec{n} \frac{v^2}{\rho}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \quad (10.35)$$

Рисунок 10.12

Для прискорення та його напрямку маємо

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|\dot{a}_\tau|}{\dot{a}_n}. \quad (10.36)$$

Щодо тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ слід зауважити, що це прискорення може бути напрямленим у бік швидкості або в протилежний їй бік залежно від того, однакові чи різні в них знаки, бо

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot a_\tau \quad \text{і} \quad \vec{v} = \vec{\tau} \cdot v.$$

За однакових знаків тангенціального прискорення та швидкості точка рухається прискорено, а за різних знаків - уповільнено, що слідує з формули (10.33).

10.4 Рівномірний та рівнозмінний рухи точки

Рівномірним називають такий рух точки, в якому точка за однакові проміжки часу проходить однакові відстані на своїй траєкторії. Оскільки швидкість точки обчислюють за формулою (10.26)

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то в рівномірному русі вона є сталою величиною, і коли записати

$$ds = v dt,$$

то при $v = \text{const}$ матимемо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt, \quad s - s_0 = vt,$$

тобто, закон рівномірного руху точки має вигляд

$$s = s_0 + vt, \quad (10.37)$$

де s_0 - значення дугової координати при $t = 0$.

Рівнозмінним називають такий рух точки, в якому швидкість точки за однакові проміжки часу змінюється на однакові величини.

Оскільки тангенціальне прискорення точки обчислюють за формулою

$$a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

то в рівнозмітному русі це прискорення є сталою величиною, і коли запишемо $dv = a_\tau dt$, то при $a_\tau = \text{const}$ матимемо

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt, \quad v - v_0 = a_\tau t.$$

Отже для швидкості точки отримаємо таку формулу

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad (10.38)$$

де v_0 – значення швидкості при $t = 0$.

Ураховуючи, що $v = \frac{ds}{dt}$ і $ds = v dt = (v_0 + a_\tau t) dt$, одержимо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + a_\tau t) dt, \quad s - s_0 = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

тобто, закон рівнозмінного руху точки має вигляд:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \quad (10.39).$$

Контрольні запитання

1. Що називають законом механічного руху тіла та точки?
2. У яких формах можна подати закон руху точки?
3. Який є взаємозв'язок між різними формами закону руху точки?
4. Що називають годографом вектора?
5. Визначення швидкості точки та способи її обчислення, якщо закон руху точки заданий у векторній, координатній та натуральній формах.
6. Як визначити кривизну траєкторії точки?
7. Які осі утворюють натуральну систему координат і як направлені одиничні орти цих осей?
8. Визначення прискорення точки та способи його обчислення, якщо закон руху точки заданий у векторній, координатній та натуральній формах.
9. Записати закон рівномірного та рівнозмінного руху точки.
10. Як отримати рівняння траєкторії руху точки?

ГЛАВА 11. ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

11.1 Число степенів вільності і закон руху твердого тіла

Числом степенів вільності твердого тіла (або будь-якої механічної системи) називають число незалежних параметрів, що однозначно визначають положення тіла відносно даної системи відліку.

Отже, коли ці параметри задані, як функції часу, то можна вважати, що закон руху тіла відомий і складається із стількох рівнянь руху, скільки степенів вільності у тіла. Наприклад: вільна точка має три степені вільності, бо її положення і рух визначаються трьома незалежними координатами x , y , z ; точка на поверхні має вже дві степені вільності, бо її координати повинні задовольняти рівняння поверхні і, отже, тільки дві з них можуть бути незалежними. Вільне тіло в просторі має шість степенів вільності, бо його положення в декартовій системі визначається положенням будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій. Проте дев'ять координат трьох точок повинні задовольняти три рівняння, які вимагають незмінності відстаней між точками твердого тіла. Отже тільки шість координат є незалежними.

Існує два основних види руху твердого тіла, з комбінації яких можна одержати інші більш складні його рухи. Такими рухами є поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі.

11.2 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом твердого тіла називають такий його рух, в якому будь-яка пряма, проведена в тілі, зостається весь час паралельною самій собі.

Оскільки в цьому разі положення тіла визначається однозначно положенням якогось відрізка AB , а положення відрізка, що увесь час паралельний сам собі, визначається положенням будь-якої його точки, наприклад A , то тіло в поступальному русі має три степені вільності та його законом руху буде закон руху однієї точки тіла

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t). \quad (11.1)$$

Властивості поступального руху тіла характеризує повністю **теорема: при поступальному русі твердого тіла всі точки описують однакові траєкторії** (Рис. 11.2) та в кожний момент часу мають **однакові швидкості та прискорення.**

Доведення. Якщо на твердому тілі (Рис. 11.2) взяти дві точки A і B , то

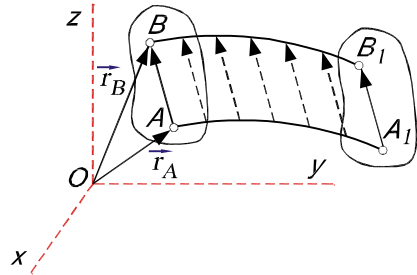


Рисунок 11.2

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}, \quad (11.2)$$

де $\overrightarrow{AB}$ – сталий за модулем і за напрямком вектор, а тому траєкторія точки B зсунута порівняно з траєкторією точки A на сталий вектор $\overrightarrow{AB}$ і однакова з нею. Візьмемо похідну по часу з рівності (11.2)

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + 0, \quad \text{або} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (11.3)$$

бо похідна сталого вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює нулю.

Після диференціювання рівності (11.3) одержимо

$$\dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A \quad \text{або} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (11.4)$$

що й треба було довести.

Отже, для вивчення поступального руху твердого тіла достатньо скористатися кінематикою однієї його точки.

Зауваження:

1) тільки при поступальному русі кутова швидкість твердого тіла дорівнює 0, $\omega=0$;

2) тільки при поступальному русі твердого тіла мають сенс наступні вираження : швидкість тіла, прискорення тіла, траєкторія тіла.

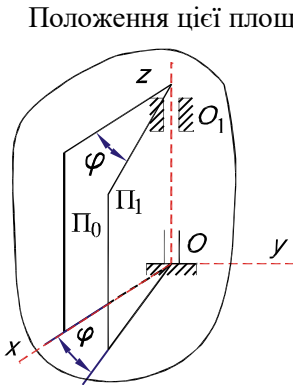
11.3 Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Обертанням навколо нерухомої осі називають такий рух тіла, в якому дві його точки залишаються весь час нерухомими.

У цьому русі маємо цілу вісь нерухомих точок, яку називають віссю обертання, а всі інші точки описують кола, розташовані в площинах, перпендикулярних до осі обертання, з центрами на цій осі.

Закон обертання тіла

Якщо проведемо через вісь обертання Oz нерухому площину Π_0 і площину Π_1 , жорстко зв'язану з тілом, то положення тіла буде визначеним положенням площини Π_1 .



Положення цієї площини в свою чергу визначається кутом φ повороту відносно нерухомої площини Π_0 (Рис. 11.3). Отже, положення тіла в обертальному русі визначається одним параметром φ , тобто тіло має одну ступінь вільності. Кут φ називають кутом повороту тіла. Якщо цей кут заданий як функція часу, то закон обертання тіла має вигляд

Рисунок 11.3

$$\varphi = \varphi(t). \quad (11.5)$$

Кутова швидкість та кутове прискорення

Загальними характеристиками обертального руху тіла є кутова швидкість та кутове прискорення.

Кутовою швидкістю ω називають бистроту зміни кута повороту тіла з часом, тобто

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (11.6)$$

Кутова швидкість обертального руху тіла дорівнює похідній по часу від кута повороту тіла та є величиною алгебраїчною.

Якщо $\omega > 0$, то тіло обертається у бік зростання кута φ ($\Delta \varphi > 0$), а коли $\omega < 0$ - у бік зменшення кута φ ($\Delta \varphi < 0$).

Коли кут вимірюють у радіанах, то розмірність кутової швидкості $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ або просто $\frac{1}{\tilde{n}} = \tilde{n}^{-1}$. У техніці кутову швидкість називають частотою обертання та виражають в обертах за хвилину n , $\frac{\text{об}}{\text{хв}}$. Оскільки один оберт це 2π радіан, тоді n обертів за хвилину буде дорівнювати $2\pi n$ радіан за хвилину або $\frac{2\pi n}{60}$ радіан за секунду. Ураховуючи це, маємо таку залежність між ω і n :

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad \frac{1}{\tilde{n}}, \quad (11.7)$$

де n – в обертах за хвилину.

Кутовим прискоренням ε в обертальному русі називають би-строту зміни кутової швидкості тіла з часом

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad \text{або} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (11.8)$$

Кутове прискорення дорівнює похідній по часу від кутової швидкості або другій похідній по часу від кута повороту тіла.

Обертання тіла буде прискореним: а) при $\omega > 0$, коли $\Delta \omega > 0$ і, отже, $\varepsilon > 0$, б) при $\omega < 0$, коли $\Delta \omega < 0$ і, отже, $\varepsilon < 0$.

Обертання тіла буде уповільненим: а) при $\omega > 0$ коли $\Delta \omega < 0$ і, отже, $\varepsilon < 0$, б) при $\omega < 0$, коли $\Delta \omega > 0$ і, отже, $\varepsilon > 0$.

Таким чином, рух тіла буде прискореним, якщо кутова швидкість і кутове прискорення мають однакові знаки, і уповільненим, якщо знаки кутової швидкості та кутового прискорення різні.

Рівномірне та рівнозмінне обертання тіла

Рівномірним називають таке обертання тіла, коли за рівні проміжки часу кут повороту тіла змінюється на однакові величини, а це означає, що кутова швидкість ω обертання є сталою величиною та згідно з (11.6) отримаємо

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad d\varphi = \omega dt.$$

Звідси після інтегрування при $\omega = \text{const}$ одержимо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega t.$$

Отже, закон рівномірного обертання при заданій кутовій швидкості буде мати вигляд

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (11.9)$$

де φ_0 - значення кута повороту φ при $t = 0$.

Рівнозмінним називають таке обертання тіла, коли за однакові проміжки часу кутова швидкість змінюється на однакові величини, а це означає, що кутове прискорення ε обертання є сталою величиною.

З формули (11.8) маємо

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \quad \text{і} \quad d\omega = \varepsilon dt.$$

Після інтегрування цих виразів при $\varepsilon = \text{const}$ одержимо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon t.$$

Отже закон зміни кутової швидкості рівнозмінного руху має вигляд

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (11.10)$$

де ω_0 - значення кутової швидкості при $t = 0$.

Ураховуючи, що $d\varphi = \omega dt = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$, і інтегруючи цей вираз при $\varepsilon = \text{const}$, отримаємо

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t)dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

звідси закон рівнозмінного обертання тіла

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (11.11)$$

Слід звернути увагу, що формули, які характеризують рівномірне й рівнозмінне обертання тіла (11.9), (11.10), (11.11) цілком аналогічні до формул (10.37), (10.38), (10.39), що характеризують рівномірний та

рівнозмінний рухи точки.

Кутова швидкість і кутове прискорення як вектори

Щоб охарактеризувати обертальний рух тіла навколо даної неру-

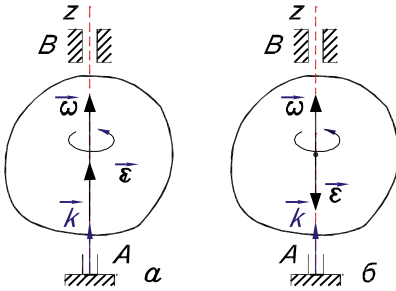


Рисунок 11.4

хомої осі, кутову швидкість обертання вважають вектором, напрямленим уздовж осі обертання в той бік, звідки обертання тіла видно проти ходу годинникової стрілки і якщо вісь обертання Oz (Рис. 11.4) має одиничний орт $\vec{k}$, то вектор кутової швидкості має вигляд

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}, \quad (11.12)$$

де ω - алгебраїчне значення

кутової швидкості.

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений вздовж $\vec{k}$ при $\omega > 0$ та в протилежний бік при $\omega < 0$, якщо вважати, що кут обертання φ відкладаємо проти годинникової стрілки, коли дивитися з вершини вектора $\vec{k}$ (Рис. 11.4). Бистрота зміни вектора $\vec{\omega}$ кутової швидкості з часом, як його векторна похідна, дорівнює

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{k} = \varepsilon \cdot \vec{k},$$

тобто це вектор, що за величиною дорівнює **кутовому прискоренню**. Отже кутове прискорення теж є вектором

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}, \quad (11.13)$$

направленим уздовж осі обертання тіла. За формулами (11.12) і (11.13) видно, що вектори кутової швидкості та кутового прискорення в прискореному обертанні напрямлені в один бік, а в уповільненому обертанні напрямлені в протилежні боки вздовж осі обертання.

Швидкості та прискорення точок тіла в обертальному русі

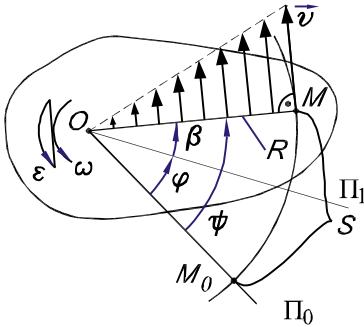


Рисунок 11.5

Розглянемо обертальний рух тіла за законом $\varphi = \varphi(t)$ і зобразимо тіло так, щоб вісь обертання була перпендикулярною до площини рисунка (Рис. 11.5) та проходила через точку O . Будь-яка точка M тіла описує коло радіуса $R = OM$ навколо точки O . Прямі OP_0 і OP_1 – сліди перетину площин Π_0 і Π_1 з площиною руху точки.

Оскільки траєкторія точки відома, то для дугової координати точки M маємо

$$s = \psi R = (\varphi + \beta)R, \quad (11.14)$$

де кут β – стала величина, що утворена прямими OM і OP_1 , жорстко зв'язаними з тілом.

Швидкість точки визначають за формулою

$$v = \dot{s} = \dot{\varphi}R = \omega R. \quad (11.15)$$

Отже, швидкості точок тіла в обертальному русі пропорційні відстаням до точок від осі обертання і напрямлені по дотичній до траєкторій, тобто перпендикулярно до радіусів обертання (Рис. 11.5).

Прискорення точки визначають за його складовими: **тангенціальним та нормальним прискореннями**

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (11.16)$$

які обчислюють за відомими формулами

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{s} = \dot{\omega}R = \dot{\varphi}R = \varepsilon R, \quad (11.17)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = \omega^2 R = \dot{\varphi}^2 R.$$

Отже

$$a_\tau = R\varepsilon, \quad a_n = R\omega^2, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (11.18)$$

Тангенціальне, нормальне й повне прискорення, як і швидкості точок, розподілені за лінійним законом, тобто пропорційні відстаням до точок від осі обертання. Напрямок тангенціального прискорення зумовлений напрямом кутового прискорення та в прискореному русі $\vec{a}_\tau$ напрямлене у той самий бік, що й швидкість точки, а в уповільненому русі – у протилежний бік. Нормальне прискорення завжди напрямлене до осі обертання. Напрямок повного прискорення визначають за кутом α , для якого (Рис. 11.6)

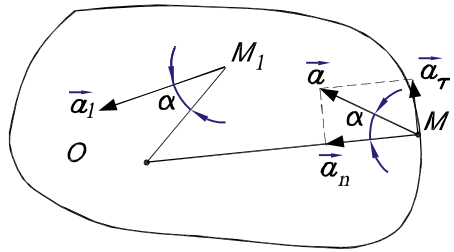


Рисунок 11.6

якого (Рис. 11.6)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

(11.19)

і який для всіх точок тіла однаковий.

Векторні формули для швидкостей та прискорень точок тіла

Розглянемо рух якоїсь точки M тіла в обертальному русі та зобразимо на рис. 11.7 усі вектори обертального руху: $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{v}$, $\vec{a}_\tau$

, $\vec{a}_n$ і $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M , проведений

з будь-якого центра O на осі обертання. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, тобто $\vec{\omega} \times \vec{r}$.

Цей вектор за правилами векторного добутку напрямлений перпендикулярно до площини трикутника OCM у бік швидкості $\vec{v}$ точки, а за модулем дорівнює

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \gamma = \omega R = v,$$

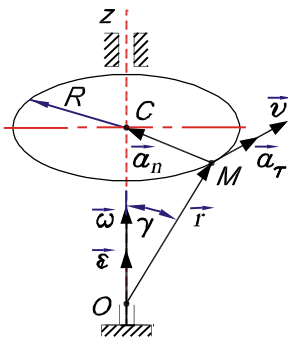


Рисунок 11.7

а тому отримуємо таку векторну рівність

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (11.20)$$

тобто, **швидкість точки М дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на радіус-вектор точки відносно будь-якого центра на осі обертання. Формула (11.20) носить ім'я Ейлера.**

Аналогічно до цього, розглядаючи векторний добуток кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на радіус-вектор $\vec{r}$ точки М,

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

приходимо до висновку, що цей добуток, як вектор, сумісний за напрямом з тангенціальним прискоренням $\vec{a}_\tau$ і за модулем дорівнює йому

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon r \sin \gamma = R\varepsilon = a_\tau,$$

а тому маємо другу векторну рівність

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (11.21)$$

тобто, **тангенціальне прискорення точки М дорівнює векторному добутку кутового прискорення тіла на радіус-вектор $\vec{r}$ точки.**

Векторний добуток кутової швидкості $\vec{\omega}$ та швидкості $\vec{v}$ точки М

$$\vec{\omega} \times \vec{v}$$

за напрямком сумісний з нормальним прискоренням $\vec{a}_n$ та дорівнює йому за модулем

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega \cdot v \cdot \sin 90^\circ = \omega \omega r = \omega^2 r,$$

а тому маємо

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (11.22)$$

11.4 Передавальні механізми

Систему твердих тіл, призначену для передачі руху від одного чи декількох твердих тіл до інших твердих тіл називають механізмом. Тверді тіла, які входять до складу механізму, називають ланками. Передавальні механізми, які призначені для передавання

обертального руху від одного тіла (вала) до іншого, називають механізмами передач. Ланку, з якої передають обертання, називають **ведучою**. Ланка, на яку передають обертання, називають **веденою**.

Обертальний рух можна передати за допомогою фрикційної, зубчастої або пасової передач (Рис. 11.8). У фрикційній передачі обертання передається за допомогою сил тертя між поверхнями ланок (котків), що дотикаються (Рис. 11.8, а); у зубчастій передачі – унаслідок зачеплення зубців коліс (Рис. 11.8, б); у пасовій – за допомогою сил тертя між нескінченним пасом і шківками (Рис. 11.8, в).

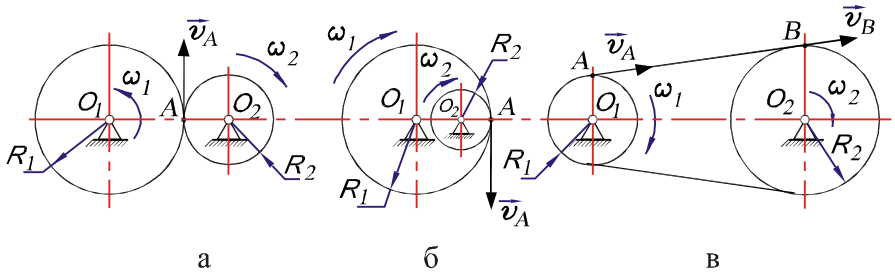


Рисунок 11.8

За відсутності проковзування між ланками, які дотикаються чи зачіпляються, швидкість в точці A дотику для обох ланок однакова. Швидкість точок на ободі шківів пасової передачі за відсутності ковзання паса по шківках також однакові між собою ($v_A = v_B$):

$$v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким чином, для цих видів передач кутові швидкості обернено пропорційні до радіусів коліс.

Відношення кутових швидкостей ланок називають передавальним відношенням

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad u_{12} = \frac{1}{u_{21}}.$$

Відношення кутової швидкості ведучої ланки до кутової швидкості веденої ланки називають передавальним числом

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \text{ або } u = \frac{R_2}{R_1}. \quad (11.24)$$

Передавальне відношення є тільки кінематичною характеристикою передачі і його завжди записують з нижніми індексами, порядок яких відповідає відношенню кутових швидкостей: перший індекс – це номер ланки, кутова швидкість якої записана у чисельнику, другий індекс – номер ланки у знаменнику. Передавальне число є динамічною характеристикою передачі, оскільки вказує на напрям передачі енергії – від тягової ланки до тягненої.

У разі зовнішнього дотикання котків фрикційної передачі чи зачеплення коліс зубчастої передачі (Рис. 11.8, а) передавальне відношення буде зі знаком мінус, оскільки кутові швидкості ланок направлені у протилежні боки. У випадку внутрішнього дотикання чи зачеплення ланок (Рис. 11.8, б) передавальне відношення матиме знак плюс, тому що кутові швидкості ланок направлені в один бік.

Оскільки число зубців колеса передачі пропорційне довжині певного кола на колесі, а, значить, і радіусу цього кола, то передавальне відношення та передавальне число можна визначити за співвідношенням чисел зубців

$$u_{12} = u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (11.25)$$

Багатоступеневі зубчасті передачі виконані так, що передавання обертового руху від ведучого колеса до веденого відбувається за допомогою декількох проміжних коліс, які обертаються відносно нерухомих осей. Такі передачі називаються **рядовими**.

На рис. 11.9 обертання передається від колеса 1 до колеса 4 через колеса 2 і 3. Передавальне відношення такої передачі

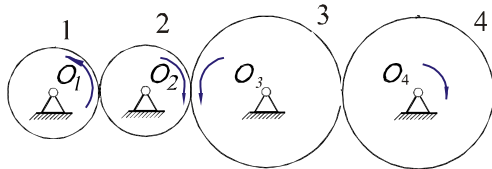


Рисунок 11.9

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34}.$$

Отже передавальне відношення багатоступеневої передачі дорівнює добутку передавальних відношень окремих одноступневих передач.

Контрольні запитання

1. Що називають числом степенів вільності твердого тіла?
2. Назвіть два основні види руху твердого тіла.
3. До чого можна звести кінематику поступального руху твердого тіла?
4. Що є траєкторією точки твердого тіла, яке обертається?
5. Дайте означення кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла.
6. Запишіть закон рівномірного та рівнозмінного обертання твердого тіла.
7. Як напрямлені вектори кутової швидкості і кутового прискорення при обертання твердого тіла?
8. Запишіть вирази для швидкості та прискорення точки твердого тіла, яке обертається рівноприскорено або рівносповільнено.
9. Запишіть та поясніть формулу Ейлера.
10. Дайте означення механізму та ланки.
11. Назвіть механізми для передачі обертального руху.
12. Що називають передавальним відношенням та передавальним числом?
13. Запишіть передавальне відношення для зубчастої передачі, яка складається з двох зубчастих коліс з внутрішнім зачепленням зубців.
14. Запишіть передавальне відношення для механізмів з рядним та ступеневим зачепленням зубців.

ГЛАВА 12. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ

Складний рух точки, або взагалі будь-якого тіла, відбувається тоді, коли точка чи тіло рухається в системі координат $Oxyz$, яка здійснює рух в нерухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$. На практиці рухома система координат пов'язана з матеріальним тілом, що здійснює той чи інший рух, а по цьому тілу рухається точка, яка таким чином перебуває в складному русі, бо крім руху по тілу рухається ще й разом з тілом.

12.1 Означення параметрів складного руху

Рух точки M відносно нерухомої системи координат називають **абсолютним рухом** (Рис. 12.1); рух точки M відносно рухомої системи координат $Oxyz$ називають **відносним рухом**; рух рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ називають **переносним рухом**.

Швидкості та прискорення точки M в абсолютному русі й у відносному русі називають відповідно **абсолютними і відносними** швидкостями та прискореннями, а швидкість та прискорення тієї точки M_1 рухомої системи координат $Oxyz$, з якою в даний момент часу збігається точка M , називають **переносними** швидкістю та прискоренням точки M .

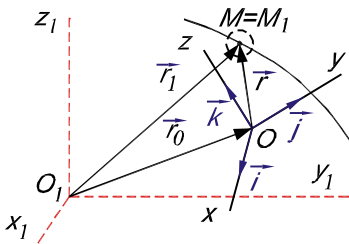


Рисунок 12.1

Відносну швидкість та відносне прискорення можна уявляти як швидкість та прискорення точки M , які обчислює спостерігач у рухомій системі координат, не звертаючи уваги на рух самої системи. **Переносна швидкість і переносне прискорення** – це швидкість та прискорення точки M , уявно жорстко зв'язаної з точкою M_1 рухомої системи координат, які обчислює спостерігач у нерухомій системі координат.

12.2 Обчислення швидкостей і прискорень у складному русі

Якщо подати радіус-вектор $\vec{r}$ точки M в рухомій системі координат у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (12.1)$$

і врахувати, що в будь-який момент часу має місце рівність

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}, \quad (12.2)$$

то для вектора $\vec{r}_1$, проведеного з початку нерухомої системи координат у точку M , матимемо

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (12.3)$$

Для обчислення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки M треба диференціювати вектор $\vec{r}_1$ за умови, що в формулі (12.3) для нерухомого спостерігача, який перебуває в точці O_1 , усі величини змінні, а тому

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\vec{i} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (12.4)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{x}\vec{i} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + 2(\dot{x}\dot{\vec{j}} + \dot{y}\dot{\vec{k}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}) \quad (12.5)$$

Відносну швидкість $\vec{v}_r$ та відносне прискорення $\vec{a}_r$ обчислимо, як спостерігач у рухомій системі координат, диференціюванням вектора $\vec{r}$ за умови, що в формулі (12.1) координатні орти незмінні. Отримаємо

$$\vec{v}_r = \left[\dot{\vec{r}} \right]_0 = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (12.6)$$

$$\vec{a}_r = \left[\ddot{\vec{r}} \right]_0 = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \quad (12.7)$$

де нижній індекс 0 означає, що диференціювання здійснене при сталих координатних ортах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Переносну швидкість $\vec{v}_e$ та переносне прискорення $\vec{a}_e$, як швид-

кість і прискорення точки M_1 рухомої системи, обчислимо диференціюванням вектора $\vec{r}_1$ як нерухомий спостерігач в точці O_1 , але за умови, що в формулі (12.3) x, y, z є сталими величинами як координати точки, які жорстко зв'язані з рухомою системою координат $Oxyz$. Отже,

$$\vec{v}_e = \left[\dot{\vec{r}}_1 \right]_k = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}, \quad (12.8)$$

$$\vec{a}_e = \left[\ddot{\vec{r}}_1 \right]_k = \ddot{\vec{r}}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}}, \quad (12.9)$$

де нижній індекс k означає, що диференціювання здійснене при сталих координатах x, y, z .

12.3 Теорема про додавання швидкостей і прискорень

Порівнюючи рівності (12.4), (12.6) і (12.8), сформулюємо теорему про додавання швидкостей у складному русі точки: **абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі переносної і відносної швидкостей:**

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (12.10)$$

Аналогічно, порівнюючи рівності (12.5), (12.7) і (12.9), сформулюємо теорему про додавання прискорень у складному русі точки: **абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного, відносного та прискорення Коріоліса:**

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad (12.11)$$

де $\vec{a}_c = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{j}} - \dot{y}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{k}} - \dot{z}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{i}} - \dot{x}\dot{\vec{k}} \right)$ – прискорення Коріоліса.

Розглянемо поступальний та обертальний випадки руху рухомої системи координат як руху твердого тіла.

Якщо переносний рух (рух рухомої системи координат) поступальний, то одиничні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ будуть незмінними і за модулем й за напрямком, а тому $\dot{\vec{i}} = 0, \dot{\vec{j}} = 0, \dot{\vec{k}} = 0$ і прискорення Коріоліса дорівнює нулю ($\vec{a}_c = 0$). У цьому випадку теорему про додавання прискорень сформулюємо так: **абсолютне прискорення при поступальному**

переносному русі дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r. \quad (12.12)$$

Якщо переносний рух обертальний, то похідні по часу від ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, будучи швидкостями кінців цих векторів в обертальному русі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$, за формулою (11.20) набудуть вигляду (формули Пуассона):

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \dot{\vec{k}} = \vec{\omega}_e \times \vec{k},$$

а тому для прискорення Коріоліса одержимо

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times (\dot{\vec{x}}\vec{i} + \dot{\vec{y}}\vec{j} + \dot{\vec{z}}\vec{k}) = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r, \quad (12.13)$$

де враховано (12.6).

Отже, прискорення Коріоліса виникає тоді, коли переносний рух є обертальним з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_e$.

Якщо провести аналіз походження прискорення Коріоліса, то можна дійти до висновку: **прискорення Коріоліса - це геометрична сума швидкості додаткової зміни відносної швидкості за рахунок переносного обертання і швидкості додаткової зміни переносної швидкості за рахунок відносного переміщення точки у системі координат, яка обертається.** Ці додаткові зміни відносної і переносної швидкостей не враховуються відносним і переносним прискоренням у тому означенні, яке було їм надане. Для більш детального пояснення походження прискорення Коріоліса розглянемо приклад. Тіло рухається рівномірно вздовж радіуса диска, який рівномірно обертається навколо осі, перпендикулярної до площини рисунка (Рис. 12.2). Відносною швидкістю тіла є швидкість його руху вздовж радіуса, а переносною – швидкість тієї точки диска, в якій у даний момент часу перебуває тіло.

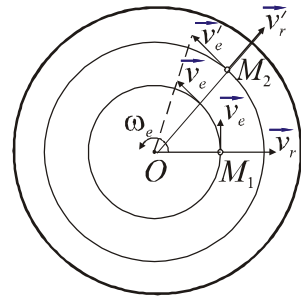


Рисунок 12.2

Нехай у момент часу t тіло перебуває в положенні M_1 , а в момент часу $t + \Delta t$ - у положенні M_2 . Оскільки відносний рух тіла є

рівномірним і прямолінійним, то відносне прискорення $\vec{a}_r = 0$.

Проте за час Δt відносна швидкість тіла зміниться за напрямом від $\vec{v}_r$ до $\vec{v}'_r$ унаслідок обертання диска. За той самий проміжок часу Δt зміниться і модуль переносної швидкості від $v_e = \omega_e \cdot OM_1$ до $v'_e = \omega_e \cdot OM_2$, тому що тіло перемістилося з положення M_1 у положення M_2 . Такі зміни швидкостей $\vec{v}_r$ і $\vec{v}_e$ викликають появу **прискорення Коріоліса**.

Модуль прискорення Коріоліса обчислюють як модуль векторного добутку (12.13)

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin \angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r). \quad (12.14)$$

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю у трьох випадках:

1) коли переносний рух є поступальним або в момент перетворення в нуль кутової швидкості не поступального переносного руху ($\vec{\omega}_e = 0$);

2) коли відсутній відносний рух точки або у момент перетворення в нуль відносної швидкості рухомої точки ($\vec{v}_r = 0$);

3) коли відносна швидкість точки є паралельною до осі переносного обертання ($\sin \angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$, $\angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$ або $\angle(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \pi$). Прикладом такого випадку є рух точки вздовж твірної циліндра, який обертається навколо своєї осі).

Напрямок прискорення Коріоліса визначають за правилом векторного добутку або за **правилом Жуковського**: для визначення напрямку прискорення $\vec{a}_c$ потрібно спроектувати відносну швидкість точки на площину, перпендикулярну до осі переносного обертання, і повернути отриману проекцію на цій площині у бік переносного обертання на кут 90° (Рис. 12.3).

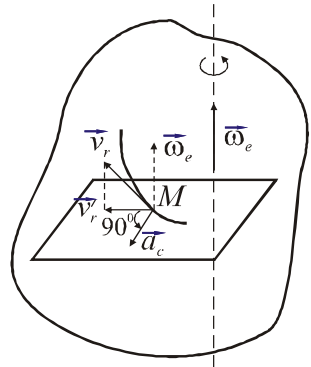


Рисунок 12.3

Контрольні запитання

1. Який рух точки називають абсолютним, відносним та переносним?
2. Сформулюйте теореми про додавання швидкостей та прискорень точки в абсолютному русі.
3. Назвіть причини появи прискорення Коріоліса.
4. Запишіть формулу для визначення прискорення Коріоліса.
5. Як визначити напрям прискорення Коріоліса?
6. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?

ГЛАВА 13 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ (ПЛОСКИЙ) РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Раніше були розглянуті основні рухи твердого тіла – поступальний та обертальний. Основними, а також і найпростішими, рухами їх називають тому, що всі інші рухи твердого тіла можуть бути складені з цих двох рухів. Перейдемо до вивчення одного з таких складних рухів – плоскопаралельного.

Плоскопаралельним або плоским рухом твердого тіла називають такий його рух, коли всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині.

Плоский рух є досить розповсюдженим у техніці, бо приблизно 98% всіх механізмів є плоскими і багато з них мають ланки, які рухаються плоскопаралельно. Таким, наприклад, є рух шатуна AB у кривошипно-повзунному механізмі (Рис. 13.1).

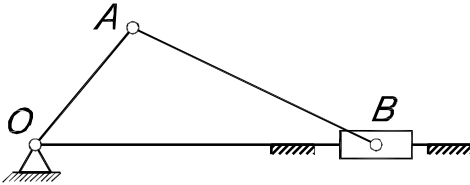


Рисунок 13.1

13.1 Плоский рух тіла та рух плоскої фігури

Рівняння руху плоскої фігури

Розглянемо тіло, яке рухається паралельно нерухомій площині H (Рис. 13.2). Розглянемо також площину Q , паралельну площині H , та переріз S тіла, розміщений у площині Q . Точки тіла, що лежать на прямій A_1A_2 , перпендикулярній до площин H і Q , рухаються так само, як точка A , яка розміщена в перерізі S . Якщо взяти інші точки тіла, то кожна з них рухається так само, як відповідна точка в перерізі S цього тіла. Отже, вивчаючи плоскопаралельний рух тіла, достатньо розглядати рух його плоского перерізу S , тобто рух плоскої фігури в її площині. Для цього введемо систему координат Ox , у якій розглянемо рух плоского перерізу S (Рис. 13.3).

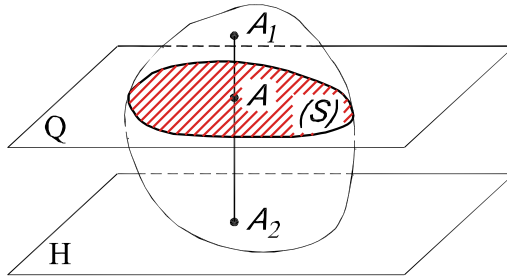


Рисунок 13.2

Положення плоскої фігури в площині Oxy повністю визначається положенням якої-небудь прямої AB цієї фігури, а положення прямої AB можна визначити, задавши координати x_A та y_A точки A і кут φ між прямою AB та віссю x .

Під час руху тіла величини x_A , y_A , φ будуть змінюватися, вони є функціями часу t :

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t). \quad (13.1)$$

Якщо ці функції задані, то в кожний момент часу можна знайти положення плоскої фігури. Тобто рівняння (13.1) визначають **закон руху** цієї фігури. Точку A , за допомогою якої визначають положення плоскої фігури, називають **полюсом**.

Покажемо, що **плоский рух можна розглядати як складний рух, що складається з поступального та обертального рухів**. Для цього розглянемо переміщення плоскої фігури із заданого положення I в інше положення II (Рис. 13.4). Оскільки положення фігури повністю визначається положенням прямої AB , надалі положення фігури будемо зображати на рисунку тільки цією прямою.

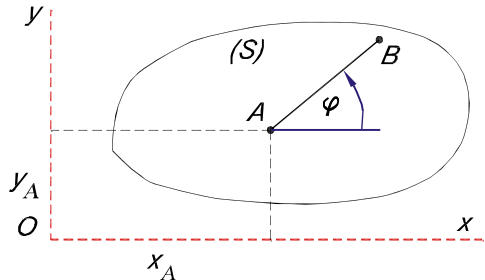


Рисунок 13.3

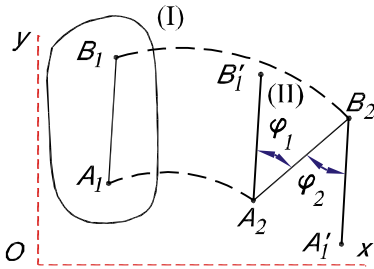


Рисунок 13.4

Переміщення фігури з положення I в положення II може бути здійснене наступним чином. Спочатку фігуру перемістимо поступально так, щоб точка A , рухаючись по своїй траєкторії, перейшла з положення A_1 у положення A_2 , а пряма зайняла положення A_2B_1' . Потім повернемо фі-

гуру навколо точки A_2 на кут φ_1 так, щоб фігура зайняла положення

II. Слід пам'ятати, що в реальному русі обидва ці переміщення здійснюються разом за один і той же час.

З'ясуємо, як зміняться складові частини переміщення фігури при зміні полюса. Візьмемо за полюс точку B прямої AB . Поступальна частина загального переміщення при цьому зміниться (точка B рухається інакше, ніж точка A). Але обертальна частина переміщення залишається незмінною за величиною та напрямом обертання:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (13.2)$$

Сказане вище про розкладання плоского руху стосувалось кінцевих переміщень. Проте все залишається справедливим і для елементарних переміщень у кожний момент руху фігури. Отже, можна зробити висновок, що **рух плоскої фігури в її площині завжди можна розкласти на два рухи: 1) поступальний рух, в якому всі точки цієї фігури рухаються так, як будь-яка точка цієї фігури, вибрана за полюс, і 2) обертальний рух фігури навколо полюса.**

Основними кінематичними характеристиками плоского

руху є швидкість та прискорення поступального руху, які дорівнюють швидкості і

прискоренню полюса ($\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{v}_A$,

$\vec{a}_{\text{пост}} = \vec{a}_A$), а також кутова швидкість ω

і кутове прискорення ε обертального руху навколо полюса. Значення цих характеристик у будь-який момент

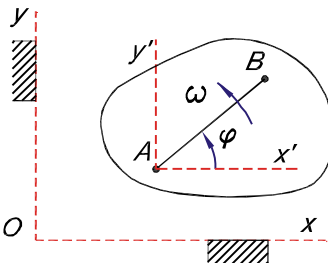


Рисунок 13.5

часу можна знайти за рівняннями (13.1). При цьому, щоб визначити параметри обертального руху, зв'яжемо з точкою A , вибраною за полюс, рухому систему координат $Ax'y'$, осі якої під час руху залишаються паралельними нерухомим осям Oxy (Рис. 13.5). Розглянемо в рухомій системі координат обертальний рух фігури навколо точки A . Кутові швидкість та прискорення визначають, як відомо, за формулами:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (13.3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}. \quad (13.4)$$

Диференціюючи рівняння (13.2) за часом, знаходимо що $\omega_1 = \omega_2$ і $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, тобто кутова швидкість та кутове прискорення тіла не залежать від вибору полюса.

13.2 Теорема про швидкість точки плоскої фігури

Теорема. Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса та швидкості цієї точки в її обертальному русі разом з площею фігурою навколо цього полюса.

Доведення. Розглянемо рух плоскої фігури в площині рисунку. Точку A , швидкість якої відома й дорівнює $\vec{v}_A$, виберемо за полюс.

Визначимо швидкість будь-якої іншої точки плоскої фігури, наприклад, точки M (Рис. 13.6). Рух точок A і M визначимо радіусами-векторами $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_M$, проведеними з деякої нерухомої точки O площини. Тоді в довільний момент часу між векторами $\vec{r}_A, \vec{r}_M$ і $\vec{r} = \overline{AM}$ має місце співвідношення

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}.$$

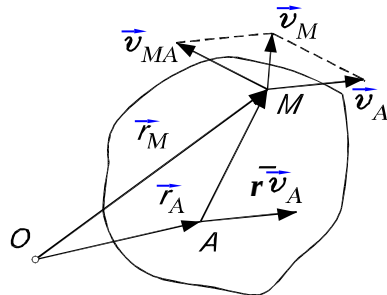


Рисунок 13.6

Диференціюючи обидві частини рівності за часом, одержуємо

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ або } \vec{v}_M = \vec{v}_A + \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Оскільки для твердого тіла віддаль $AM = \text{const}$, то вектор $\vec{r}$ під час руху фігури змінюється лише за напрямком і похідна $\frac{d\vec{r}}{dt}$ є швидкістю точки M в її обертальному русі навколо полюса A , яку позначимо $\vec{v}_{MA}$.

Обертальну швидкість $\vec{v}_{MA}$ можна записати у вигляді векторного добутку вектора кутової швидкості плоскої фігури $\vec{\omega}$ на радіус-вектор $\vec{r}$ точки M відносно полюса A

$$\vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (13.5)$$

Вектор $\vec{v}_{MA}$ направлений перпендикулярно до відрізка AM у бік обертання плоскої фігури і має модуль

$$v_{MA} = \omega \cdot AM. \quad (13.6)$$

Отже швидкість точки M фігури визначають за формулою

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (13.7)$$

або

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad (\vec{v}_{MA} \perp MA) \quad (13.8)$$

і теорема доведена.

Швидкість точки M зображають діагоналлю паралелограму, побудованого в точці M на векторах $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_{MA}$ (Рис. 13.6).

13.3 Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла

Із формули (13.8) легко одержати рівність, що зв'язує величини швидкостей двох точок плоскої фігури. Для цього спроектуємо векторне рівняння (13.8) на лінію AM (вісь Ax на рис. 13.7):

$$v_{Mx} = v_{Ax} + v_{MAx}.$$

Але швидкість $\vec{v}_{MA}$ перпендикулярна до AM , тому $v_{MAx} = 0$. Отже,

$$v_{Mx} = v_{Ax} \quad (13.9)$$

або
$$v_M \cdot \cos \beta = v_A \cdot \cos \alpha. \quad (13.10)$$

Останні формули виражають таку **теорему: проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній.**

Якщо напрям векторів відомий, то ця теорема дозволяє знайти одну з невідомих швидкостей. Але у випадку, коли вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_M$ перпендикулярні до прямої AM , ця теорема не дає результату і слід застосовувати інші методи.

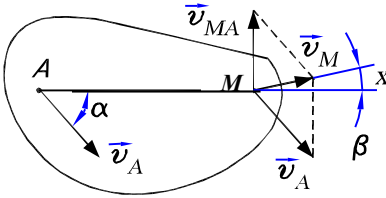


Рисунок 13.7

13.4 Миттєвий центр швидкостей. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей

У плоскому русі, якщо $\omega \neq 0$, завжди існує точка, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Цю точку називають **миттєвим центром швидкостей**.

Нехай у даний момент часу відома швидкість $\vec{v}_A$ деякої точки A плоскої фігури і $\omega \neq 0$. Доведемо, що миттєвий центр швидкостей розміщений на прямій, перпендикулярній до $\vec{v}_A$. Для цього візьмемо точку M на цій прямій (Рис. 13.8) і визначимо її швидкість за допомогою формули розподілу швидкостей (13.8):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

Вектор швидкості $\vec{v}_{MA}$ для заданого напрямку кутової швидкості ω буде напрямлений протилежно $\vec{v}_A$ і за величиною дорівнювати $v_A = \omega \cdot AM$. Якщо змінювати положення точки M , завжди можна

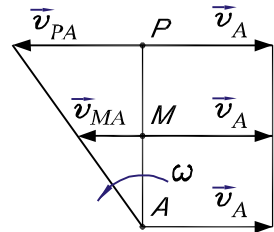


Рисунок 13.8

знайти таку точку, позначимо її буквою P , для якої $v_{PA} = \omega \cdot AP = v_A$ (на рис. 13.8 показано розподіл швидкостей точок на прямій AP). Для цього потрібно взяти відстань $AP = \frac{v_A}{\omega}$. Отже положення точки P є однозначно визначеним і швидкість цієї точки

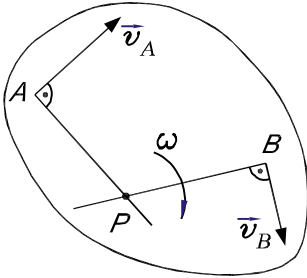


Рисунок 13.9

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = 0.$$

Припустимо тепер, що ми знаємо положення миттєвого центра швидкостей – точки P (Рис 13.9). Взявши цю точку за полюс, визначимо за допомогою формули (13.8) швидкості точок плоскої фігури, враховуючи, що $\vec{v}_P = 0$,

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_{AP}; \quad (13.11)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP} = \vec{v}_{BP}. \quad (13.12)$$

Тобто швидкості точок A і B визначаємо як швидкості в обертальному русі навколо точки P . Вони напрямлені перпендикулярно до відрізків AP і BP у бік обертання фігури, а їх величини можна обчислити за формулами:

$$v_A = v_{AP} = \omega \cdot AP, \quad (13.13)$$

$$v_B = v_{BP} = \omega \cdot BP. \quad (13.14)$$

На рис. 13.9 показано розподіл швидкостей точок плоскої фігури відносно миттєвого центра швидкостей.

З останніх формул отримаємо, що

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP} \quad \text{і} \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \quad (13.15)$$

Отже, формули (13.11) і (13.12), а також формули, що з них випливають, показують, що швидкості точок у кожний момент руху плоскої фігури можна визначити так, як при обертанні цієї фігури навколо миттєвого центра швидкостей.

Наведені формули дозволяють обчислювати швидкості точок плоскої фігури та визначати її кутову швидкість. Але для цього спочатку потрібно знайти положення миттєвого центра швидкостей. Зазначимо,

що це положення весь час змінюється, цим пояснюється назва цієї точки.

З рис. 13.9 видно, що в загальному випадку **миттєвий центр швидкостей є точкою перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей точок фігури.**

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей.

1. Якщо плоска фігура рухається так, що її контур котиться без ковзання по деякій нерухомій поверхні (як, наприклад, при коченні колеса, (Рис. 13.10)), то для точки P рухомого контуру, в якій він стикається з нерухомою поверхнею, $v_P = 0$. Ця швидкість дорівнює нулю тому, що через відсутність відносного руху точок стикання їх швидкості повинні бути однаковими, а одна з цих точок належить нерухомій поверхні. Отже, точка P є миттєвим центром швидкостей.

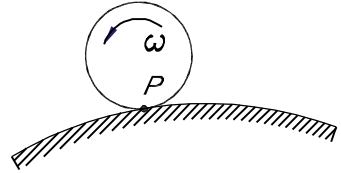


Рисунок 13.10

2. Швидкості двох точок плоскої фігури паралельні та ці точки розміщені на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей (Рис. 13.11). Застосовуючи рівняння (13.15), точку P можна знайти графічним способом, якщо провести через кінці $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ пряму до перетину з лінією AB . Тут можливі два випадки, коли точка P розміщена за межами (Рис. 13.11, а) або посередині відрізка AB (Рис. 13.11, б).

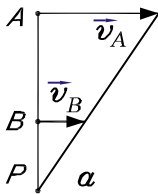
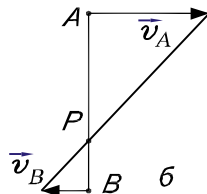


Рисунок 13.11



б

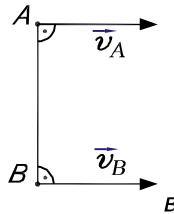


Рисунок 13.12

3. Швидкості точок A і B у даний момент паралельні між собою та не перпендикулярні до лінії AB (Рис. 13.12). Перпендикуляри до векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ не перетинаються. Кажуть, що в цьому разі миттєвий центр швидкостей розміщений у нескінченності. Характеристики руху можна

знайти, якщо в формулах (13.15) відстані до точки P нескінченно збільшувати. Отримаємо, що швидкості точок A і B та всіх інших точок у даний момент однакові, а кутова швидкість фігури дорівнює нулю.

Рух плоскої фігури в даний момент називають **миттєво поступальним**.

Розглянуті випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей дозволяють за допомогою формул (13.13 – 13.15) обчислювати швидкості точок плоскої фігури та її кутову швидкість.

Зауважимо, що для дослідження руху механізмів, тобто систем, які складаються з декількох тіл (ланок), миттєві центри швидкостей та кутові швидкості треба визначати окремо для кожного тіла, яке рухається плоскопаралельно.

13.5 План швидкостей

У інженерній практиці при визначенні швидкостей точок плоскої фігури часто використовують плани швидкостей.

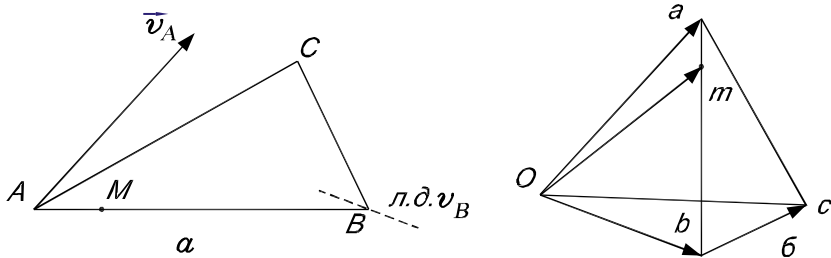


Рисунок 13.13

Планом швидкостей називають графічне зображення векторів швидкостей точок плоскої фігури у фіксований момент її руху.

Для побудови плану швидкостей потрібно знати величину та напрям швидкості однієї точки плоскої фігури, напрям швидкості будь-якої іншої її точки і взаємне розміщення точок фігури. Нехай для даного моменту часу відомі швидкість $\vec{V}_A$ точки A і напрям швидкості точки B (Рис. 13.13, а).

Потрібно визначити для цього моменту часу швидкість точки B ,

а також швидкість деякої точки C цієї фігури. Для визначення швидкості точки B виберемо за полюс точку A . Тоді, згідно з формулою (13.8), швидкість точки B визначаємо так:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (13.16)$$

де швидкість $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярна до AB .

Для побудови плану швидкостей відкладемо від довільної точки O у вибраному масштабі вектор $\vec{Oa} = \vec{v}_A$ (Рис. 13.13, б) і проведемо пряму Ob , паралельну лінії Bb , на якій від точки O будемо відкладати вектор швидкості $\vec{v}_B$. Отже, пряма Ob – це геометричне місце кінців вектора $\vec{v}_B$.

З іншого боку згідно з формулою (13.16) цей вектор дорівнює $\vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, тобто кінець вектора $\vec{v}_B$ збігається з кінцем швидкості $\vec{v}_{BA}$, яка напрямлена вздовж прямої ab , перпендикулярної до AB . Таким чином, точка b перетину ліній Ob і ab , паралельних швидкостям $\vec{v}_B$ і $\vec{v}_{BA}$, визначає у вибраному масштабі ці швидкості:

$$\vec{v}_B = \vec{Ob} \quad \text{і} \quad \vec{v}_{AB} = \vec{ab}.$$

Щоб знайти швидкість довільної точки C , яка не розміщена на відрізку AB , приймаючи послідовно за полюси точки A і B , запишемо для цієї швидкості два векторні рівняння

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}, \quad (13.17)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}. \quad (13.18)$$

Беручи до уваги рівняння (13.17), проведемо з точки a – кінця вектора $\vec{v}_A$ – пряму ac , перпендикулярну до відрізка AC або паралельну швидкості $\vec{v}_{CA}$. На цій прямій розміщений кінець вектора $\vec{v}_{CA}$ і $\vec{v}_C$, що дорівнює сумі $\vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$.

Ураховуючи тепер рівняння (13.18) та проводячи з точки b пряму bc , перпендикулярну до відрізка BC , з'ясуємо, що кінець

швидкості $\vec{v}_C$ повинен лежати і на цій прямій. Отже, знаходячи точку c перетину прямих ac і bc , визначимо швидкості

$$\vec{v}_C = \vec{Oc}, \quad \vec{v}_{CA} = \vec{ac}, \quad \vec{v}_{CB} = \vec{bc}.$$

Як відомо (див. формулу (13.7)), $v_{BA} = ab = \omega \cdot AB$;
 $v_{CA} = ac = \omega \cdot AC$; $v_{CB} = bc = \omega \cdot BC$, тобто

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \omega. \quad (13.19)$$

Таким чином, відрізки, які з'єднують кінці векторів швидкостей на плані швидкостей, за напрямком перпендикулярні до відрізків, що з'єднують відповідні точки фігури, а за модулем пропорційні до цих відрізків.

Звідси випливає, що швидкість довільної точки M , яка розміщена на відрізку AB , знайдемо, якщо поділимо відрізок ab у тому ж відношенні, в якому точка M ділить відрізок AB $\left(\frac{am}{mb} = \frac{AM}{MB} \right)$.

Тоді вектор $\vec{Om}$ у вибраному масштабі виражає швидкість $\vec{v}_M$. Модуль кутової швидкості фігури, якщо побудований план швидкостей, визначають за залежністю (13.19).

13.6 Прискорення точки плоскої фігури

Теорема. Прискорення довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса та прискорення точки в її обертальному русі разом з фігурою навколо полюса.

Доведення. Швидкість довільної точки M плоскої фігури, згідно з формулою (13.7), дорівнює

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість фігури; $\vec{r} = \vec{AM}$ - радіус-вектор, проведений з полюса A у точку M (Рис. 13.6).

Продиференціювавши обидві частини цієї векторної рівності, одержимо:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (13.20)$$

$$\text{Тут } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_M, \quad \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A. \text{ Розкриємо зміст остан-}$$

нього доданку в формулі (13.20). Ураховуючи, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 \cdot \vec{r}, \text{ рівність (13.20) запишемо у вигляді}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Уведемо позначення

$$\vec{a}_{MA}^\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_{MA}^n = \omega^2 \cdot \vec{r}. \quad (13.21)$$

Прискорення $\vec{a}_{MA}^\tau$ і $\vec{a}_{MA}^n$ є відповідно обертальним і доцентровим прискорення точки M при обертальному русі фігури навколо полюса A . Отже,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n, \quad (13.22)$$

де векторна сума останніх двох доданків є повним прискоренням точки M при обертанні фігури навколо полюса A

$$\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n. \quad (13.23)$$

Таким чином,

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (13.24)$$

Теорему доведено.

Вектор $\vec{a}_{MA}^\tau$ напрямлений перпендикулярно до відрізка AM у бік дугової стрілки кутового прискорення ε , а вектор $\vec{a}_{MA}^n$ завжди напрямлений від точки M до полюса. Очевидно, що вектори $\vec{a}_{MA}^\tau$ і $\vec{a}_{MA}^n$ перпендикулярні, тому модуль повного прискорення обертального руху

$$a_{MA} = \sqrt{(a_{MA}^\tau)^2 + (a_{MA}^n)^2} = MA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (13.25)$$

$$\text{бо } a_{MA}^\tau = \varepsilon \cdot MA; \quad (\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}), \quad a_{MA}^n = \omega^2 \cdot MA \quad (13.26)$$

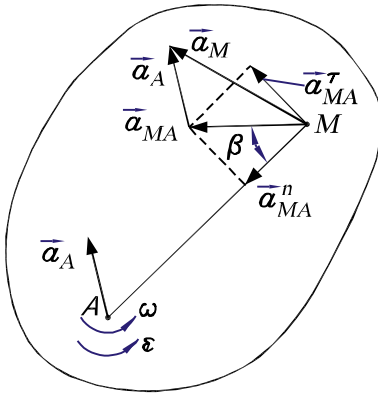


Рисунок 13.14

Кут β , який утворює вектор $\vec{a}_{MA}$ з відрізком AM (Рис. 13.14), визначають із співвідношення

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{MA}^{\tau}}{a_{MA}^n} = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}. \quad (13.27)$$

З формули (13.27) випливає, що кут β не залежить від вибору полюса та в даний момент часу має однакове значення для всіх точок плоскої фігури.

13.7. Миттєвий центр прискорень. Визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою миттєвого центра прискорень

Теорема. При непоступальному русі плоскої фігури у своїй площині в кожний момент часу існує точка, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, прискорення якої дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром прискорень.

Доведення. Припустимо, що нам відомо прискорення $\vec{a}_A$ точки A , а також кутова швидкість ω і кутове прискорення ϵ фігури (Рис. 13.15). Обчислимо величину кута β за формулою (13.27) і проведемо під цим кутом до вектора $\vec{a}_A$ промінь, який відкладемо у бік дугової стрілки кутового прискорення ϵ . На цьому промені відкладемо відрізок AQ , довжина якого дорівнює

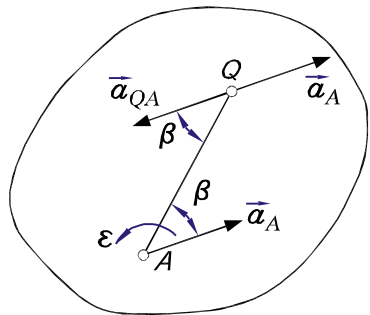


Рисунок 13.15

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (13.28)$$

Покажемо, що $\vec{a}_Q = 0$, тобто, що точка Q є миттєвим центром прискорень. Дійсно, згідно з формулами (13.22), (13.23), (13.26), (13.28)

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA},$$

$$\text{де } a_{QA} = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A.$$

Крім цього, вектор $\vec{a}_{QA}$ утворює з відрізком AQ такий самий кут β , який утворює з AQ і вектор $\vec{a}_A$. Це означає, що вектор $\vec{a}_{QA}$ паралельний вектору $\vec{a}_A$ і в силу прийнятого правила відліку кута β вектори $\vec{a}_A$ і $\vec{a}_{QA}$ будуть завжди протилежно напрямлені, тобто $\vec{a}_A = -\vec{a}_{QA}$ (Рис. 13.15). Звідси випливає, що

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA} = 0$$

і точка Q є миттєвим центром прискорень. Теорема доведена. Зауважимо, що це доведення одночасно дає правило побудови миттєвого центра прискорень. Якщо положення миттєвого центра прискорень Q відома, то, вибравши його за полюс, для прискорення довільної точки M плоскої фігури за формулою (13.24) одержуємо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{MQ} = \vec{a}_{MQ}, \quad \text{бо} \quad \vec{a}_Q = 0,$$

$$\text{і} \quad a_M = a_{MA} = MQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (13.29)$$

Отже прискорення всіх точок фігури в даний момент часу пропорційні їх відстаням до миттєвого центра прискорень Q :

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (13.30)$$

Крім цього кути, які утворюють вектори прискорень з відрізками, що з'єднують відповідні точки з центром Q , однакові та дорівнюють β (Рис. 13.16).

Це означає, що **прискорення всіх точок плоскої фігури розподілені в даний момент так, ніби вона обертається навколо центра Q , як нерухомого.**

Зауважимо, що миттєвий центр швидкостей P і миттєвий центр прискорень Q – різні точки. Вони збігаються лише в тому випадку, коли фігура здійснює обертальний рух навколо нерухомого центра обертання.

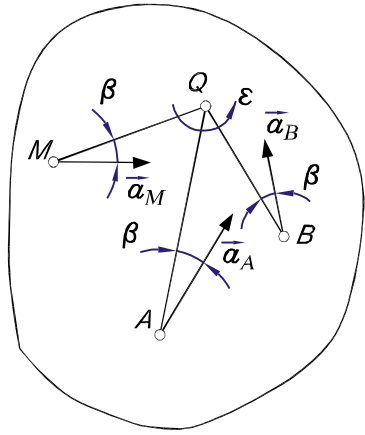


Рисунок 13.16

Контрольні запитання

1. Дайте визначення плоского руху.
2. Яку точку називають полюсом плоского руху ?
3. Назвіть кінематичні характеристики плоского руху.
4. Сформулюйте теореми про швидкість та прискорення точки плоскої фігури.
5. Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок тіла.
6. Які точки називають миттєвими центрами швидкостей та прискорень ?
7. У якому випадку миттєвий центр швидкостей та прискорень є сумісними точками ?
9. Що називають планом швидкостей ?

ГЛАВА 14 СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Поняття складного руху тіла аналогічне до поняття складного руху точки. Так само як і для точки, для тіла розглядають переносний, відносний та абсолютний рухи. Означення цих рухів можна отримати з відповідних означень для точки, якщо замінити слово "точка" на слово "тіло".

Наприклад, переносним рухом тіла називають рух рухомої системи координат відносно нерухомої системи або рух тіла разом з рухомою системою координат відносно нерухомої. Задачею кінематики складного руху тіла є визначення залежностей між характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів.

Плоскопаралельний рух тіла, який розглянуто в попередній главі, є одним із випадків складного руху тіла. Розглянемо також інші випадки такого руху.

14.1 Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей

Розглянемо тіло (диск на рис. 14.1), який обертається навколо своєї осі A_1A . Ця вісь закріплена на кривошипі OA_1 , який, в свою чергу, обертається навколо осі OB , паралельної A_1A .

Припустимо, що диск і кривошип обертаються в один бік з кутовими швидкостями відповідно ω_1 і ω_2 . На рис. 14.1 показано дугові стрілки, а також вектори кутових швидкостей. Диск бере участь одночасно у двох обертальних рухах: 1) навколо осі A_1A , з кутовою швидкістю ω_1 (відносний рух); 2) навколо осі OB з кутовою швидкістю ω_2 (переносний рух).

Отже, рух диска – складний.

Визначимо характер абсолютного руху диска та параметри цього руху. Для цього розглянемо швидкості його точок A і B . Для точки A

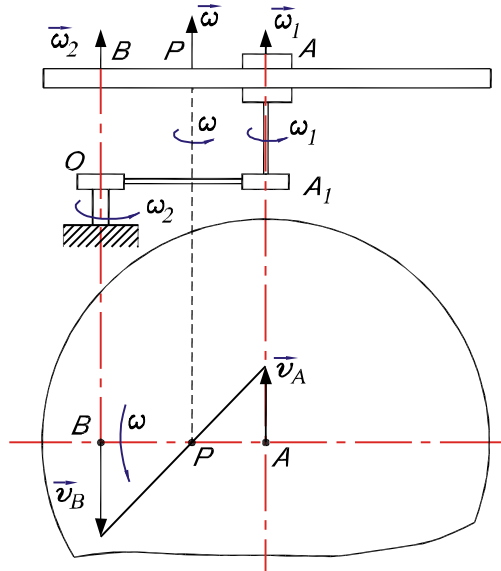


Рисунок 14.1

$$v_A = \omega_2 \cdot OA_1 = \omega_2 \cdot AB.$$

Щоб визначити v_B , розглянемо рух точки B як складний з переносним обертальним рухом навколо осі OB . Оскільки переносна швидкість у такому русі дорівнює нулю, маємо

$$v_B = v_{Br} = \omega_1 \cdot AB.$$

Вектори $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ паралельні між собою (обидва перпендикулярні до AB) і напрямлені у протилежні боки.

Швидкості точок A і B також можна визначити іншим способом. Приймаючи до уваги, що абсолютний рух диска – плоскопаралельний, знайдемо положення миттєвого центра швидкостей – точки P (Рис. 14.1). Вважаючи, що навколо миттєвого центра швидкостей диск (точніше, плоский переріз диска) обертається з кутовою швидкістю ω , запишемо

$$v_A = \omega \cdot AP, \quad v_B = \omega \cdot BP.$$

Поєднуючи вказані формули, отримаємо

$$v_A = \omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AP; \quad (14.1)$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BP. \quad (14.2)$$

Додавши ці рівності, визначимо ω :

$$(\omega_1 + \omega_2) \cdot AB = \omega(AP + BP),$$

$$\text{або} \quad \omega = \omega_1 + \omega_2 \quad (14.3)$$

Ця рівність визначає кутову швидкість обертання плоского перерізу диска навколо точки P . Як відомо, швидкість точки P дорівнює нулю. Такі ж швидкості мають у даний момент точки диска, які лежать на прямій, що проходить через точку P перпендикулярно до диска. Цю пряму називають миттєвою віссю обертання диска. Таким чином, абсолютним рухом диска є обертальний рух навколо миттєвої осі, паралельної до осей переносного і відносного обертань, з кутовою швидкістю ω .

З рівностей (14.1) і (14.2) також випливає, що

$$\frac{\omega}{AB} = \frac{\omega_1}{BP} = \frac{\omega_2}{AP}. \quad (14.4)$$

Формули (14.3) і (14.4) визначають кутову швидкість абсолютного обертального руху та положення миттєвої осі обертання.

Отже, при додаванні двох напрямлених в один бік обертальних рухів тіла навколо паралельних осей абсолютним рухом тіла є миттєво обертальний рух навколо осі, паралельної заданим, з кутовою швидкістю, що дорівнює сумі кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє відстань між осями складових обертань на відрізки, обернено пропорційні величинам заданих кутових швидкостей.

Якщо зобразити вектор $\vec{\omega}$ кутової швидкості тіла в абсолютному русі, то побачимо, що вектори кутових швидкостей при обертанні навколо паралельних осей додають як вектори паралельних сил у статиці.

Розглянемо випадок додавання обертальних рухів тіла, коли напрямки переносного та відносного обертань протилежні, причому $\omega_1 \neq \omega_2$, наприклад, $\omega_1 > \omega_2$ (Рис. 14.2). Тоді, замість рівностей (14.1) і (14.2) отримаємо

$$v_A = \omega_2 \cdot AB = \omega \cdot AP; \quad (14.5)$$

$$v_B = \omega_1 \cdot AB = \omega \cdot BP, \quad (14.6)$$

звідси

$$(\omega_1 - \omega_2) \cdot AB = (BP - AP)$$

або

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (14.7)$$

Миттєва вісь у даному випадку розташована за межами відрізка AB за більшою кутовою швидкістю, а її положення, що впливає з рівностей (14.5) і (14.6), визначається рівністю (14.4).

Таким чином, при додаванні двох протилежно напрямлених обертальних рухів з нерівними за модулем кутовими швидкостями навколо паралельних осей абсолютним рухом тіла є миттєво обертальний рух навколо осі, паралельної заданим осям, з кутовою швидкістю, що дорівнює арифметичній різниці кутових швидкостей складових обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання зовні розділяє відстань між осями складових обертань на відрізки, обернено пропорційні до величин заданих кутових швидкостей.

Вектори кутових швидкостей у цьому випадку, як і в попередньому, додають як вектори паралельних сил в статиці.

Розглянемо випадок, коли обертання навколо паралельних осей протилежні за напрямом і їх кутові швидкості однакові за величиною ($\omega_1 = \omega_2$). Таку сукупність обертальних рухів називають парою обертань, а вектори $\bar{\omega}_1$ і $\bar{\omega}_2$ утворюють пару кутових швидкостей (Рис. 14.3). У цьому разі отримуємо, що

$$v_A = \omega_2 \cdot AB, \quad v_B = \omega_1 \cdot AB$$

і

$$v_A = v_B.$$

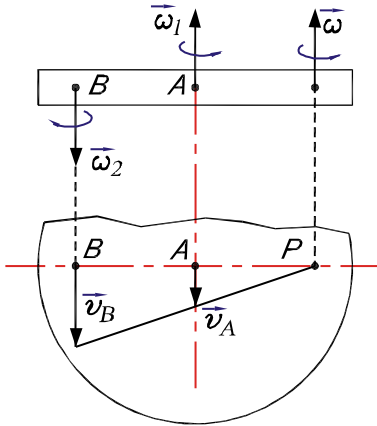


Рисунок 14.2

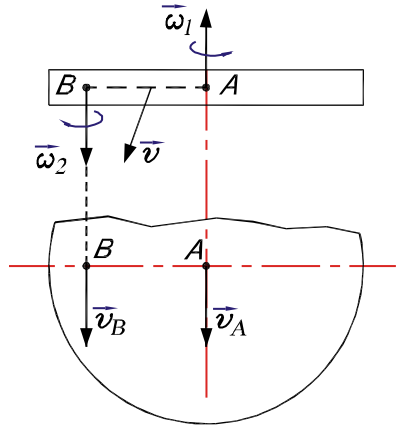


Рисунок 14.3

Тоді миттєвий центр швидкостей розміститься у нескінченності, $\omega = 0$, а всі точки тіла в даний момент матимуть однакові швидкості $v = \omega_1 \cdot AB$. Таким чином, абсолютний рух тіла буде поступальним (або миттєво поступальним) зі швидкістю $\vec{V}$, що дорівнює чисельно $\omega_1 \cdot AB$ і напрямлена перпендикулярно до площини, яка проходить через вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$. Тобто величину та напрям вектора $\vec{V}$ визначають як момент пари обертання $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$:

$$\vec{v} = \vec{m}(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2). \quad (14.8)$$

Інакше кажучи, пара обертань еквівалентна поступальному (або миттєво поступальному) руху зі швидкістю $\vec{V}$, яка дорівнює моменту пари кутових швидкостей цих обертань.

Прикладом такого руху є поступальний рух педалі DE відносно рами велосипеда (Рис. 14.4), що є результатом переносного обертання навколо осі B і відносного обертання педалі навколо своєї осі A з рівними та протилежно напрямленими кутовими швидкостями.

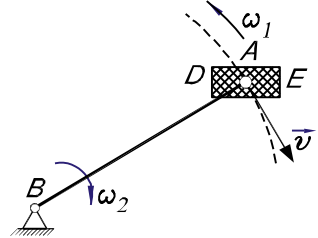


Рисунок 14.4

Швидкість поступального руху педалі $v = \omega_2 \cdot AB$.

Отже, в усіх випадках додавання обертань навколо паралельних осей можна провести таку аналогію з статикою: **вектори кутових швидкостей таких обертань додають як вектори паралельних сил у статичі**. Величину ж абсолютної кутової швидкості можна обчислювати за формулою

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

якщо кутові швидкості вважати алгебраїчними величинами.

14.2 Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формули Вілліса

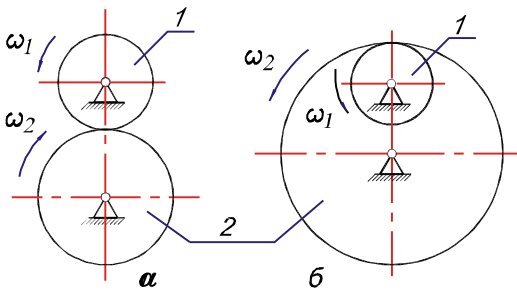


Рисунок 14.5

Для проведення розрахунку використовують формули, які зв'язують між собою кутові швидкості двох коліс зубчастої передачі з нерухомими осями (Рис. 14.5). Нагадаємо ці формули, беручи до уваги не тільки абсолютні величини, а й напрямки обертання, тобто розглядаючи кутові швидкості як алгебраїчні величини. Якщо врахувати, що у передачі з **зовнішнім зачепленням** (Рис. 14.5, а) колеса обертаються у різні боки і їх **кутові швидкості мають протилежні знаки**, а для передачі з **внутрішнім зачепленням** (Рис. 14.5, б) напрям обертання і знак кутових швидкостей обох коліс однаковий, можна записати

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (14.9)$$

У цій формулі ω_i - це кутова швидкість i -го колеса (виражена у рад/с), n_i - його частота обертання (число обертів за хвилину), r_i та z_i

- радіус та число зубців колеса. Для передач з зовнішнім зачепленням беруть знак "мінус", а з внутрішнім зачепленням - "плюс".

Перейдемо тепер до розгляду **планетарних і диференціальних механізмів (передач)**. Такими називають механізми, які мають у своєму складі зубчасті колеса з рухомими осями. Будь-який планетарний або диференціальний механізм складається з трьох груп елементів (ланок): центральних коліс, сателітів і кривошипа (води́ла).

На рис. 14.6 показана найпростіша планетарна передача, в якій **центральне колесо 1 закріплене нерухомо, а сателіт 2 обертається кривошипом OA навколо осі центрального колеса**. На відміну від планетарного механізму у диференціальному механізмі центральне колесо теж обертається, одержуючи рух від незалежного двигуна. Планетарні і диференціальні передачі набули поширення в техніці, наприклад, завдяки тому, що вони можуть невеликою кількістю зубчастих коліс забезпечувати великі передавальні відношення.

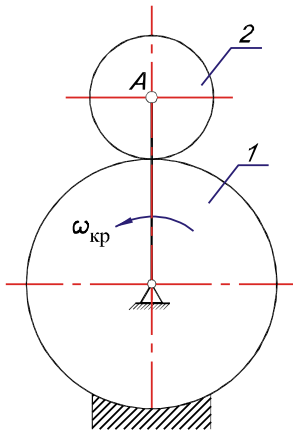


Рисунок 14.6

Кінематичний розрахунок таких передач можна здійснити, наприклад, за допомогою миттєвих центрів швидкостей, або способом уявної зупинки кривошипа **(способом Вілліса)**. Розглянемо застосування способу зупинки на прикладі планетарного механізму (Рис. 14.7).

Цей спосіб полягає у тому, що умовно зупиняють рух кривошипа OA .

Для цього всім ланкам механізму

(всьому механізму) надамо додаткового обертального руху навколо осі

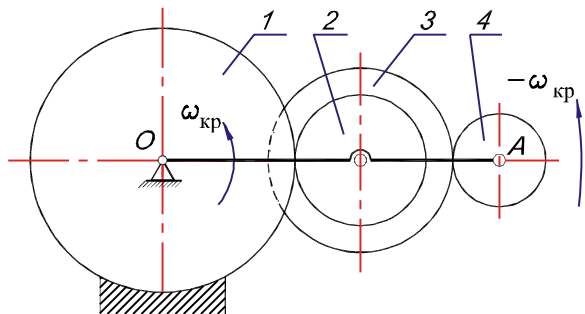


Рисунок 14.7

О з кутовою швидкістю, що дорівнює за модулем і протилежна за напрямом кутовій швидкості $\omega_{\text{кр}}$ кривошипа.

Тоді кривошип і осі закріплених на ньому коліс стануть нерухомими ($\omega_{\text{кр}} - \omega_{\text{кр}} = 0$), а весь механізм стане звичайним зубчатим механізмом з нерухомими осями (Рис. 14.8), який називають оберненим механізмом.

Кутові швидкості всіх коліс $\tilde{\omega}_i$ в оберненому механізмі відповідно до (14.7) дорівнюватимуть різниці своїх фактичних кутових швидкостей і кутової швидкості кривошипа $\omega_{\text{кр}}$, тобто

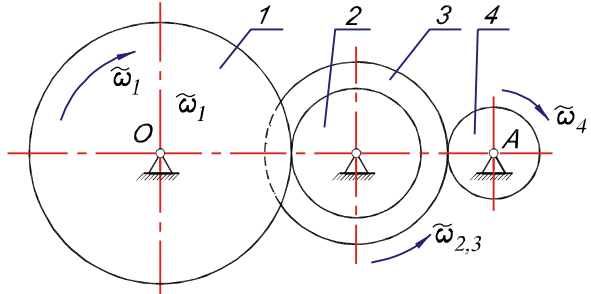


Рисунок 14.8

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega_{\text{кр}} . \quad (14.10)$$

Знаючи кутові швидкості коліс, ураховуючи рівність (14.9), для звичайної зубчастої передачі (Рис. 14.8) запишемо:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{r_4}{r_3}, \quad (14.11)$$

$$\text{де} \quad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3, \quad (14.12)$$

оскільки колеса 2 і 3 рухаються разом. Підставимо у формули (14.11) та (14.12) вирази (14.10) та отримаємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_{\text{кр}}}{\omega_2 - \omega_{\text{кр}}} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad (14.13)$$

$$\frac{\omega_3 - \omega_{\text{кр}}}{\omega_4 - \omega_{\text{кр}}} = -\frac{r_4}{r_3}; \quad (14.14)$$

$$\omega_2 - \omega_{\text{кр}} = \omega_3 - \omega_{\text{кр}} . \quad (14.15)$$

Перемножимо ліві та праві частини рівностей (14.13) і (14.14) з урахуванням (14.15). Одержимо

$$\frac{\omega_1 - \omega_{кр}}{\omega_4 - \omega_{кр}} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}. \quad (14.16)$$

Для заданого механізму в ці формули треба підставити $\omega_1 = 0$ (шестерня 1 нерухома).

Формули (14.13), (14.14) і (14.16) називають **формулами Вілліса**. За їх допомогою можна знайти невідомі кутові швидкості. Звичайно, замість величин, які записані в формулах (14.11) – (14.15), можна, з урахуванням рівностей (14.9), використовувати інші параметри. Додамо також, що для диференціальної передачі розрахунок проводять аналогічно.

Наприклад, якщо б у заданому механізмі (Рис. 14.7) колесо 1 не було закріплене та могло обертатися з кутовою швидкістю ω_1 , то всі формули залишилися б такими самими, тільки, звичайно, у формулі (14.13) $\omega_1 \neq 0$.

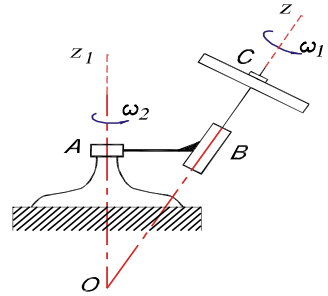


Рисунок 14.9

14.3 Додавання обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються

Розглянемо приклад руху диска D (Рис. 14.9), який обертається навколо своєї осі BC з кутовою швидкістю ω_1 і навколо осі AZ_1 разом з кривошипом AB з кутовою швидкістю ω_2 . Отже, рух диска складний, оскільки він бере участь у двох обертальних рухах навколо осей, що перетинаються в точці O .

Візьмемо тепер довільний випадок такого складного руху та в точці O перетину осей Z_1 і Z (Рис. 14.10) зобразимо вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ кутових швидкостей складових рухів. Точка O тіла, що належить обом осям, залишається нерухомою під час руху тіла. Знайдемо швидкість точки M тіла, положення якої відносно точки O (відносно нерухомих осей

координат, що зв'язані з точкою O) визначається радіусом-вектором $\vec{r}$. Зважаючи, що рух точки M складний, запишемо

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \quad (14.17)$$

Застосовуючи формулу Ейлера для швидкостей у переносному та відносному обертальних рухах точки M навколо осей Oz_1 і Oz , матимемо

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \quad (14.18)$$

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad (14.19)$$

$$\vec{v}_M = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \quad (14.20)$$

У площині Oz_1z обов'язково знайдеться точка K тіла, швидкість якої в дану мить дорівнює нулю. Дійсно, для точки K , що перебуває, як і точка M , у складному русі, швидкості $\vec{v}_e$ і $\vec{v}_r$ напрямлені в протилежні боки і їх сума дорівнює нулю, якщо вибрати відстані h_1 і h_2 так, щоб $\omega_1 h_1 = \omega_2 h_2$.

Отже, пряма OK , що проходить через нерухомі в даний момент точки O та K , є миттєвою віссю обертання тіла й абсолютний рух тіла в даний момент можна розглядати як миттєвий обертальний рух з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо миттєвої осі. Направимо вектор $\vec{\omega}$ уздовж цієї осі та застосуємо знову формулу Ейлера:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (14.21)$$

Прирівнюючи праві частини формул (14.20) і (14.21), отримаємо формулу

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \quad (14.22)$$

згідно з якою побудований паралелограм кутових швидкостей (Рис. 14.10).

Таким чином, у разі додавання двох обертальних рухів тіла навколо осей, що перетинаються в деякій точці O , абсолютним рухом тіла буде обертальний рух навколо миттєвої осі, що

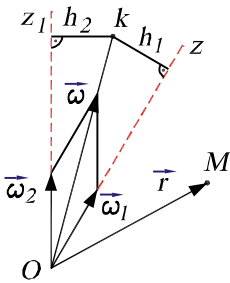


Рисунок 14.10

проходить через точку O , з кутовою швидкістю, що дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей складових рухів.

14.4 Рівняння сферичного руху твердого тіла. Кути Ейлера

Якщо тверде тіло рухається так, що одна його точка залишається весь час нерухомою, то такий рух називається обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки або сферичним рухом.

Назва «сферичний рух» випливає з того, що траєкторії всіх точок тіла при такому русі розміщені на поверхнях сфер, із центром в нерухомій точці.

Прикладом сферичного руху тіла може бути рух гіроскопа в карданному підвісі або рух дзиги, загострений кінець якої опирається на підставку і залишається нерухомим.

При вивченні кінематики сферичного руху тіла потрібно встановити основні характеристики цього руху, тобто рівняння руху, кутові швидкість і прискорення тіла і вивести формули для обчислення швидкостей і прискорень точок тіла. Нижче розглянемо два основних методи дослідження кінематики сферичного руху: метод кутів Ейлера та метод миттєвих осей.

Як відомо, положення вільного тіла в просторі визначається трьома точками, які не лежать на одній прямій, тобто дев'ятьма координатами цих точок. Положення всіх інших точок тіла можна знайти через задані три точки. У випадку твердого тіла відстань між окремими точками тіла не змінюється, а тому координати цих трьох заданих точок повинні задовольняти трьом рівнянням, які виражають незмінність відстаней між окремими точками тіла. Тому у випадку вільного твердого тіла залишається шість незалежних координат, тобто вільне тіло має шість ступенів вільності.

У випадку сферичного руху тіла одна точка закріплена, а отже, кількість незалежних величин зменшується до трьох, тобто тіло при такому русі має три ступені вільності.

Три ступені вільності, які має тіло при сферичному русі, вимагають для визначення положення тіла відносно довільної системи координат трьох незалежних величин. Ці величини можна задати різними

способами. В теоретичній механіці найбільше застосування одержали **кути Ейлера**.

Через нерухому точку твердого тіла проведено нерухому декартову систему координат $Ox_1y_1z_1$, відносно якої будемо розглядати рух тіла (Рис. 14.11).

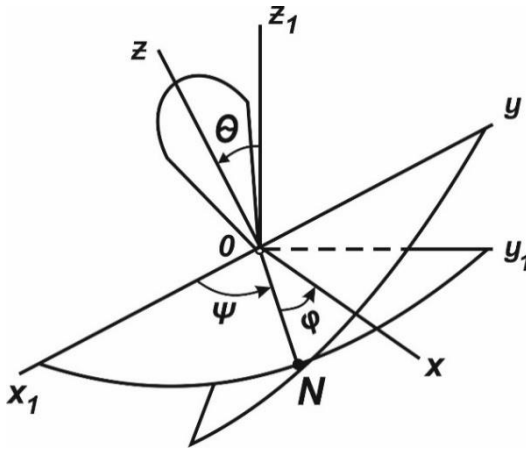


Рисунок 14.11

Рухому декартову систему координат $Oxyz$ незмінно зв'яжемо з тілом, яке обертається навколо нерухомої точки O . Положення тіла по відношенню до нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, визначається положенням рухомої системи координат $Oxyz$ по відношенню до нерухомої. Взаємне положення цих систем визначається кутами Ейлера. Лінія перетину ON нерухомої площини Ox_1y_1 з рухомою Oxy **називається лінією вузлів**. Кут ψ між нерухомою віссю Ox_1 і лінією вузлів ON називається **кутом прецесії**. Для зміни цього кута тіло повинно обертатися навколо осі Oz_1 , яка називається **віссю прецесії**.

Кут між координатними площинами Ox_1y_1 і Oxy , який вимірюється лінійним кутом θ між осями Oz_1 і Oz , називається **кутом нутації**. Лінія вузлів ON , навколо якої обертається тіло при зміні кута θ , називається **віссю нутації**.

Кут φ між лінією вузлів ON і віссю Ox називається **кутом власного обертання**. Для зміни кута φ тіло повинно обертатися навколо осі Oz , яка носить назву **осі власного обертання**.

Кути Ейлера додатні, коли вони відкладені від осей Ox_1 , Oz_1 , і ON проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з кінців відповідно вісей Oz_1 , ON , Oz (див. рис. 14.12). При русі тіла кути ψ , θ , φ безперервно змінюються, тобто є функціями часу:

$$\psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t). \quad (14.25)$$

Ці рівняння називаються **рівняннями сферичного руху тіла**.

Зауваження. Описаний варіант вибору кутів ψ , θ , φ не єдиний. Так при дослідженні динаміки кораблів і літаків використовують кути Ейлера-Крилова [14]. Корабельні кути: ψ - диферента (прецесії); θ - рискання (нутації); φ - власного обертання (крену).

14.5 Визначення кутової швидкості і кутового прискорення тіла за рівняннями його руху

Нехай сферичний рух тіла описується рівняннями (14.25). Обчислимо величину і напрям кутової швидкості тіла в довільний момент часу, як функцію кутів Ейлера та їх похідних.

При зміні кута ψ тіло обертається навколо вісі Oz_1 (прецесія) з кутовою швидкістю $\omega_1 = \dot{\psi}$; при зміні кута θ – навколо лінії вузлів ON (нутація) з кутовою швидкістю $\omega_2 = \dot{\theta}$ і при зміні кута φ – навколо осі Oz (власне обертання) з кутовою швидкістю $\omega_3 = \dot{\varphi}$. Напрями векторів $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ показані на рисунку 14.12.

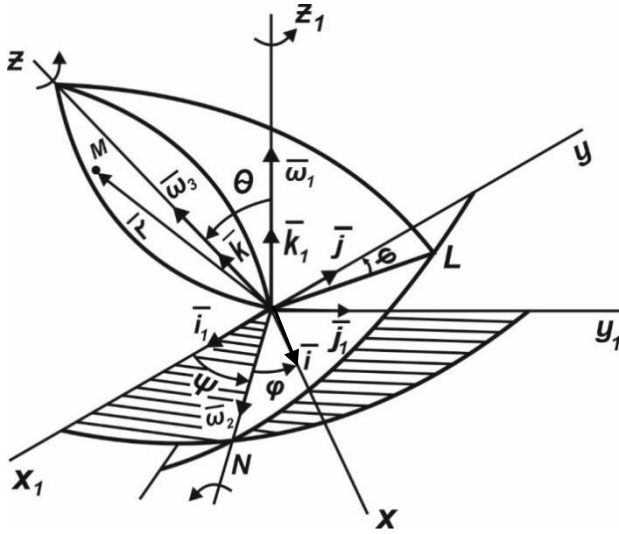


Рисунок 14.12

Як було показано в главі 14.3, при обертанні тіла навколо осей, що перетинаються, результуючий рух буде миттєво-обертальним з кутовою швидкістю, що дорівнює геометричній сумі складових кутових швидкостей. У випадку сферичного руху тіла вектор результуючої миттєвої кутової швидкості буде дорівнювати:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \quad (14.26)$$

Проекції вектора $\bar{\omega}$ на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ мають вид:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi + \dot{\theta} \cdot \cos\varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + \dot{\theta} \cdot \sin\varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos\theta. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Аналогічно, проектуючи рівність (14.26) на осі нерухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, знайдемо проекції вектора $\bar{\omega}$ на ці осі:

$$\omega_{x1} = \dot{\varphi} \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi + \dot{\theta} \cdot \cos\psi;$$

$$\begin{aligned}\omega_{y1} &= \dot{\phi} \cdot \sin\theta \cdot \cos\psi + \dot{\theta} \cdot \sin\psi; \\ \omega_{z1} &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \cdot\end{aligned}\quad (14.28)$$

Рівності (14.27) і (14.28) називаються **кінематичними рівняннями Ейлера**. Ці рівняння дають можливість знайти модуль миттєвої кутової швидкості і напрямні косинуси вектора $\bar{\omega}$ з відповідними осями координат:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_{x1}^2 + \omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2 \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\theta}; \\ \cos\angle(\bar{\omega}, x) &= \frac{\omega_x}{\omega}; \quad \cos\angle(\bar{\omega}, y) = \frac{\omega_y}{\omega}; \quad \cos\angle(\bar{\omega}, z) = \frac{\omega_z}{\omega}; \\ \cos\angle(\bar{\omega}, x_1) &= \frac{\omega_{x1}}{\omega}; \quad \cos\angle(\bar{\omega}, y_1) = \frac{\omega_{y1}}{\omega}; \quad \cos\angle(\bar{\omega}, z_1) = \frac{\omega_{z1}}{\omega}.\end{aligned}\quad (14.29)$$

Визначимо проекції вектора кутового прискорення на нерухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$. Розклавши вектори швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ по осях нерухомої системи координат, отримаємо:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \bar{i}_1\omega_{x1} + \bar{j}_1\omega_{y1} + \bar{k}_1\omega_{z1}; \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{i}_1\bar{\varepsilon}_{x1} + \bar{j}_1\bar{\varepsilon}_{y1} + \bar{k}_1\bar{\varepsilon}_{z1}.\end{aligned}\quad (14.30)$$

Деференціюючи першу рівність (14.30) з урахуванням, що вектори $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ постійні за величиною і напрямом, знайдемо:

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{i}_1 \frac{d\omega_{x1}}{dt} + \bar{j}_1 \frac{d\omega_{y1}}{dt} + \bar{k}_1 \frac{d\omega_{z1}}{dt}.\quad (14.31)$$

Порівнюючи (14.31) з другою рівністю (14.30), знаходимо:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{d\omega_{x1}}{dt}; \quad \varepsilon_{y1} = \frac{d\omega_{y1}}{dt}; \quad \varepsilon_{z1} = \frac{d\omega_{z1}}{dt}.\quad (14.32)$$

Тобто проекція кутового прискорення на нерухому вісь координат дорівнює похідній по часу від проекції кутової швидкості на відповідну вісь.

Визначимо проекції кутового прискорення на рухомі вісі координат Оху_z, зв'язані з твердим тілом. Одиничні вектори рухомої системи координат позначимо через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (Рис. 14.13). Ці орти змінюються за напрямком, тобто обертаються разом з тілом навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю $\bar{\omega}$. Тому похідні по часу від цих ортів є швидкості кінців цих ортів, які визначаються за формулами (див. главу 12.3):

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \quad (14.33)$$

Розкладемо вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ по ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z; \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{i} \varepsilon_x + \bar{j} \varepsilon_y + \bar{k} \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (14.34)$$

Беремо похідну по часу від вектора $\bar{\omega}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left(\bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt} \right) + \left(\frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z \right);$$

Другий доданок одержаної залежності з врахуванням (14.33) перетвориться:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} \omega_x + \frac{d\bar{j}}{dt} \omega_y + \frac{d\bar{k}}{dt} \omega_z = \bar{\omega} \times (\bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z) = \bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0.$$

Кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ в рухомій системі координат буде виражатися рівністю:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{i} \frac{d\omega_x}{dt} + \bar{j} \frac{d\omega_y}{dt} + \bar{k} \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (14.35)$$

Порівнюючи (14.34) і (14.35), знаходимо проекції вектора кутового прискорення на осі рухомої системи координат:

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt}; \quad \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt}; \quad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (14.36)$$

Тобто проєкції $\bar{\varepsilon}$ на рухомі осі координат (як і на нерухомі) до-
рівнюють похідним по часу від проєкції кутової швидкості на відпові-
дну рухому вісь.

Модуль і напрямні косинуси вектора миттєвого кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{y_1}^2 + \varepsilon_{z_1}^2} ; \\ \cos \angle(\bar{\varepsilon}, x) &= \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon} ; \cos \angle(\bar{\varepsilon}, y) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon} ; \cos \angle(\bar{\varepsilon}, z) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} ; \\ \cos \angle(\bar{\varepsilon}, x) &= \frac{\varepsilon_{x_1}}{\varepsilon} ; \cos \angle(\bar{\varepsilon}, y_1) = \frac{\varepsilon_{y_1}}{\varepsilon} ; \cos \angle(\bar{\varepsilon}, z_1) = \frac{\varepsilon_{z_1}}{\varepsilon} .\end{aligned}\quad (14.37)$$

14.6 Аналітичне знаходження швидкостей точок тіла при сферичному русі. Рівняння миттєвої вісі обертання

Нехай рух тіла, що має одну нерухому точку, задано рівняннями (14.25). Знайдемо швидкість довільної точки M (Рис.14.13). Якщо координати точки $M(x_1, y_1, z_1)$ і проєкції вектора кутової швидкості $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ задані в нерухомій системі координат, то швидкість точки M , яка виражається відомою формулою Ейлера (11.20), може також бути представлена визначником векторного добутку:

$$\begin{aligned}\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \bar{i}_1(\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1) + \bar{j}_1(\omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1) + \\ &+ \bar{k}_1(\omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1).\end{aligned}$$

З іншого боку, вектор швидкості точки можна визначити через його проєкції на нерухомі вісі координат:

$$\bar{v} = \bar{i}_1 v_{x_1} + \bar{j}_1 v_{y_1} + \bar{k}_1 v_{z_1} .$$

Прирівнюючи відповідні компоненти в різних представленнях вектора $\vec{V}$, одержимо **проекції вектора швидкості** точки тіла при сферичному русі **на осі нерухомої системи координат**:

$$\begin{aligned}v_{x_1} &= \omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1; \\v_{y_1} &= \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1; \\v_{z_1} &= \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1.\end{aligned}\tag{14.38}$$

Формули (14.38) носять назву **формул Ейлера**.

Якщо координати точки М і проекції вектора $\vec{\omega}$, задані в рухомої системі координат Оху_z, то **проекції вектора швидкості на осі рухомої системи координат** будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}v_x &= \omega_y z - \omega_z y; \\v_y &= \omega_z x - \omega_x z; \\v_z &= \omega_x y - \omega_y x.\end{aligned}\tag{14.39}$$

Модуль і напрямні косинуси вектора швидкості довільної точки тіла при сферичному русі знайдемо за формулами:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2}; \\ \cos \angle(\vec{v}, x) &= \frac{v_x}{v}; \cos \angle(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v}; \cos \angle(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v}; \\ \cos \angle(\vec{v}, x_1) &= \frac{v_{x_1}}{v}; \cos \angle(\vec{v}, y_1) = \frac{v_{y_1}}{v}; \cos \angle(\vec{v}, z_1) = \frac{v_{z_1}}{v}.\end{aligned}\tag{14.40}$$

За знайденими проекціями швидкостей точок тіла при сферичному русі можна знайти **рівняння миттєвій вісі обертання**.

Швидкість кожної точки на миттєвій вісі обертання в даний момент часу дорівнює нулю, тобто

$$v_{x_1} = v_{y_1} = v_{z_1} = 0$$

Враховуючи це, з формул (14.38) отримаємо:

$$\omega_{y_1} z_1 - \omega_{z_1} y_1 = 0; \quad \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 = 0; \quad \omega_{x_1} y_1 - \omega_{y_1} x_1 = 0$$

Звідки:

$$\frac{\omega_{y_1}}{y_1} = \frac{\omega_{z_1}}{z_1}; \quad \frac{\omega_{x_1}}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{y_1}, \quad \text{або} \quad \frac{\omega_{x_1}}{x_1} = \frac{\omega_{y_1}}{y_1} = \frac{\omega_{z_1}}{z_1}. \quad (14.41)$$

Рівняння (14.41) є **рівнянням миттєвої вісі обертання тіла**, що має одну нерухому точку, в **нерухомій системі координат**. Аналогічним методом виводяться рівняння миттєвої вісі обертання в рухомій системі координат:

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z} \quad (14.42)$$

14.7 Знаходження швидкостей і прискорень точок тіла при сферичному русі методом миттєвих вісей. Теорема Ейлера – Д’Аламбера

Будь-яке елементарне переміщення тіла, що має одну нерухому точку, представляє собою елементарний поворот навколо миттєвої вісі обертання, яка проходить через цю точку.

Вісь, навколо якої потрібно обертати тіло, що має одну нерухому точку, при переміщенні його із одного положення в друге, безмежно близьке до першого, називається **миттєвою віссю обертання** для даного моменту часу.

Миттєва вісь обертання представляє собою геометричне місце точок тіла, швидкість яких в даний момент дорівнюють нулю. Положення миттєвої вісі обертання не залишається незмінним при сферичному русі тіла, а з часом змінює своє положення в просторі. Геометричне місце миттєвих вісей відносно нерухомої системи відліку, по відношенню до якої розглядається рух тіла називається **нерухомим аксоїдом**. Геометричне місце миттєвих осей в самому рухомому тілі називається **рухомим аксоїдом**.

При сферичному русі тіла рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому.

Оскільки в кожний момент часу тіло при сферичному русі має миттєву вісь обертання OP , навколо якої проходить елементарний поворот з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$ (Рис.14.13), то вектор швидкості будь-

якої точки M тіла буде визначатися в цей момент відомою формулою Ейлера, тобто

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (14.43)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений в точку M із нерухомої точки O (Рис.14.14).

Напрямок вектора $\vec{v}$ швидкості точки M буде перпендикулярний площині POM і направлений в сторону миттєвого обертання тіла. Модуль вектора швидкості дорівнює

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega \cdot h_{\omega}. \quad (14.44)$$

Величина h_{ω} – це найменша відстань від точки M до миттєвої вісі обертання OP .

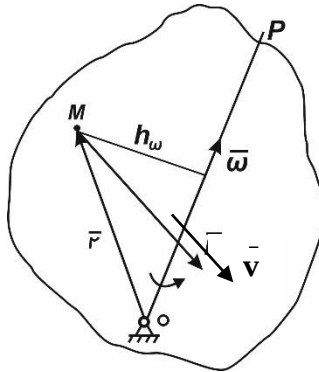


Рисунок 14.13

Для визначення прискорення довільної точки тіла при його сферичному русі вважатимемо відомими в даний момент часу кутову швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ (Рис.14.14). Прискорення точки дорівнює першій похідній по часу від вектора швидкості:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

або із врахуванням, що

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \text{ і } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

отримаємо вираз для знаходження прискорення точок тіла при сферичному русі:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (14.45)$$

Тут: $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}^{\text{об}}$ – обертальне прискорення точки ($\vec{a}^{\text{об}}$);

$\vec{a}^{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ – доосьове прискорення точки ($\vec{a}^{\text{до}}$).

Таким чином

$$\vec{a} = \vec{a}^{\varepsilon} + \vec{a}^{\omega} \quad (\vec{a} = \vec{a}^{\text{об}} + \vec{a}^{\text{до}}). \quad (14.46)$$

Ця рівність виражає **теорему Рівальса**.

Прискорення будь-якої точки тіла при сферичному русі дорівнює геометричній сумі обертального і доосьового прискорень.

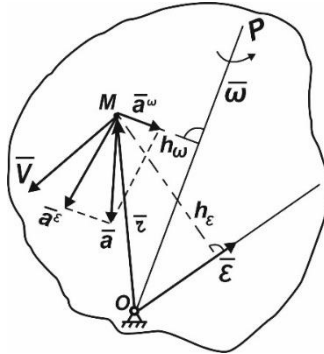


Рисунок 14.14

Вектор обертального прискорення $\vec{a}^e$ направляється згідно векторного добутку, тобто перпендикулярно до площини $\vec{r}O\vec{\varepsilon}$ в ту сторону, звідки найкоротший поворот вектора $\vec{\varepsilon}$ до вектора $\vec{r}$ видно проти ходу годинникової стрілки. Модуль обертального прискорення:

$$a^e = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon \cdot h_{\varepsilon}, \quad (14.47)$$

де h_ϵ – відстань від точки M до прямої, вздовж якої спрямований вектор $\bar{\epsilon}$. Вектор доосьового прискорення $\bar{a}^\omega$ направляється перпендикулярно до векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{v}$, тобто вздовж перпендикуляра, опущеного з точки M на миттєву вісь OP (Рис. 14.15). Модуль доосьового прискорення:

$$a^\omega = \omega \cdot v \cdot \sin \angle(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_\omega. \quad (14.48)$$

Модуль повного прискорення $\bar{a}$ обчислюється як діагональ паралелограма за формулою:

$$a = \sqrt{(a^e)^2 + (a^\omega)^2 + 2a^e \cdot a^\omega \cdot \cos \angle(\bar{a}^e, \bar{a}^\omega)}. \quad (14.49)$$

14.8 Рух вільного твердого тіла. Рівняння руху.

Як було показано в розділі 14.4, вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, тобто рух вільного тіла описується шістьма незалежними параметрами (координатами) по відношенню до нерухомої системи відліку.

В загальному випадку для визначення положення вільного тіла відносно нерухомої системи координат $\tilde{O}x_1 y_1 z_1$ достатньо задати відносно цієї системи координат положення другої системи координат $Ox'_1 y'_1 z'_1$, яка рухається поступально відносно неї разом з довільною точкою O тіла, і кути Ейлера, що визначають положення системи координат $Ox_2 y_2 z_2$ жорстко зв'язаної з рухомим тілом, відносно системи координат $Ox'_1 y'_1 z'_1$ (Рис.14.15).

Таким чином, положення вільного твердого тіла в просторі буде відомо, якщо будуть задані шість узагальнених координат $x_0, y_0, z_0, \psi, \theta, \varphi$. При русі тіла всі ці координати неперервно змінюються, тобто є функціями часу:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1(t); & y_0 &= y_1(t); & z_0 &= z_1(t); \\ \psi &= \psi(t); & \theta &= \theta(t); & \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (14.50)$$

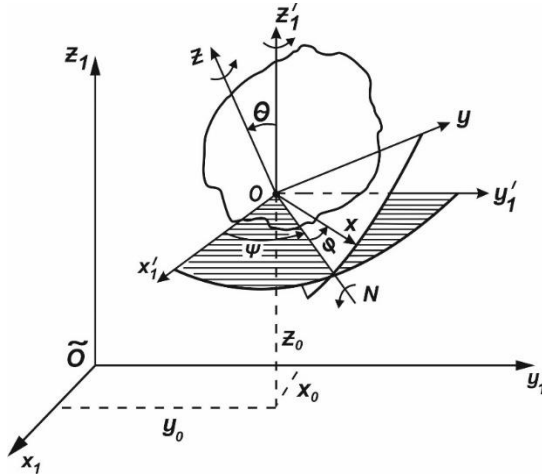


Рисунок 14.15

Рівняння (14.50) є **кінематичними рівняннями руху вільного твердого тіла**. Перші три рівняння системи (14.50) описують поступальну складову руху тіла, а три наступні – сферичну складову руху тіла.

Зауважимо, що перші три рівняння, які описують поступальну складову руху, залежать від вибору полюса (точка O в тілі), а рівняння, які описують сферичну складову руху, не залежать від вибору полюса O .

14.9 Швидкості точок вільного твердого тіла

Теорема. Швидкість довільної точки вільного твердого тіла дорівнює векторній сумі швидкості полюса і обертальній швидкості цієї точки в сферичному русі тіла навколо полюса.

Доведення. Для доведення теореми визначимо швидкість довільної точки M . За полюс прийнемо точку O , швидкість якої $\bar{v}_O$ відома (Рис.14.16).

Позначимо радіуси-вектори точок O і M відносно нерухомої точки $\tilde{O}$ відповідно через $\bar{\rho}_O$ і $\bar{\rho}_M$, а через $\bar{r}$ – вектор $\overline{OM}$. Під час руху тіла між цими радіусами-векторами зберігається залежність:

$$\bar{\rho}_M = \bar{\rho}_O + \bar{r},$$

де $\bar{r} = \text{const}$, як віддаль між точками одного твердого тіла.

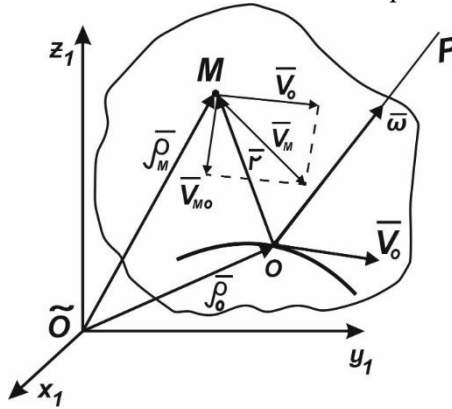


Рисунок 14.16

Вектор швидкості точки М $\bar{v}_M = \frac{d\bar{\rho}_M}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Похідна $\frac{d\bar{\rho}_O}{dt} = \bar{v}_O$ – це швидкість точки O , яку ми вибрали за полюс.

Оскільки при русі тіла модуль радіуса-вектора $\bar{r}$ залишається незмінним, а напрям його змінюється при обертанні тіла навколо полюса O , то похідна $\frac{d\bar{r}}{dt}$ представляє собою обертальну швидкість точки M в сферичному русі тіла навколо полюса O , тобто

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Тому

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{v}_{MO} \quad (14.51)$$

або

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (14.52)$$

Теорема доведена.

14.10 Прискорення точок вільного твердого тіла

Теорема. Прискорення довільної точки вільного твердого тіла дорівнює векторній сумі прискорення полюса, обертального і доосьового прискорень цієї точки в сферичному русі тіла навколо полюса.

Доведення. Нехай відомі прискорення $\bar{a}_O$ точки O , яку прийmemo за полюс, кутова швидкість $\bar{\omega}$ тіла навколо миттєвої осі і його кутове прискорення $\bar{\varepsilon}$ (Рис.14.17).

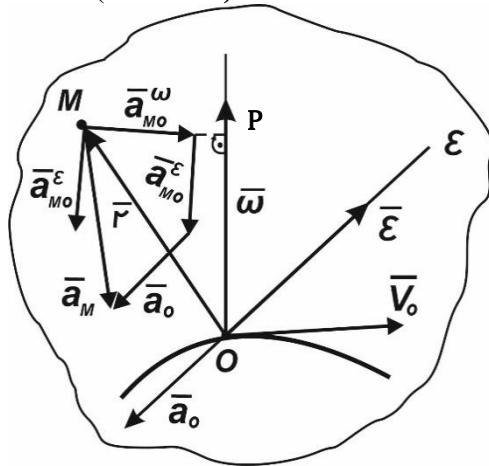


Рисунок 14.17

Для доведення теореми визначимо прискорення довільної точки M , швидкість якої згідно з формулою (14.52) дорівнює

$$\bar{v}_M = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Прискорення точки M знайдемо як похідну по часу від вектора $\bar{v}_M$.

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Тут: $\frac{d\bar{v}_O}{dt} = \bar{a}_O$ прискорення полюса O ; $\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{MO}^\varepsilon$ –

обертальне прискорення точки M відносно осі кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$, що проходять через полюс O ;

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{a}_{MO}^\omega.$$

– доосьове прискорення точки M відносно миттєвої осі обертання ОР, що проходить через полюс O .

Тому

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO}^\varepsilon + \bar{a}_{MO}^\omega. \quad (14.53)$$

Теорема доведена.

У формулі (14.53) складові прискорень $\bar{a}_{MO}^\varepsilon$ і $\bar{a}_{MO}^\omega$ обумовлені сферичним рухом вільного тіла навколо полюса O . Характеристики цих складових прискорень, їх величини і напрям описані в параграфі 14.7. На рис 14.17 показані всі складові прискорення точки M при вільному русі тіла.

Контрольні запитання

1. Який рух тіла називають складним рухом?
2. Що називають миттєвою віссю обертання?
3. Де проходить миттєва вісь обертання при додаванні двох обертальних рухів навколо паралельних осей?
4. Як проходить миттєва вісь обертання твердого тіла, при додаванні двох обертальних рухів навколо осей, які перетинаються?
5. Як визначається кутова швидкість обертання тіла навколо миттєвої осі?
6. Що таке пара обертань?
7. Який механізм називають оберненим?
8. Записати формули Вілліса.

9. В якому зачепленні зубчастих коліс (внутрішньому або зовнішньому) змінюється напрямок обертання веденої ланки на протилежний?

10. Дайте визначення планетарного і диференціального механізмів. Яка у них відмінність?

11. З яких елементів (ланок) складається планетарний та диференціальний механізми?

12. Що таке передаточне число?

13. Дайте означення сферичного руху твердого тіла.

14. Які основні кінематичні характеристики руху твердого тіла з нерухомою точкою?

15. Як визначити вісь миттєвого обертання тіла з нерухомою точкою в рухомій і нерухомій системах координат?

16. Що таке рухомий та нерухомий аксоїд?

17. Як визначити швидкості точок тіла при сферичному русі?

18. Як визначити прискорення точок тіла при сферичному русі?

19. Теорема Ейлера – Д'Аламбера.

20. Скільки ступенів вільності має тіло при сферичному русі?

21. Скільки ступенів вільності має вільне тверде тіло?

22. Кінематичні рівняння сферичного руху тіла.

23. Кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла.

24. Теорема про швидкості точок вільного твердого тіла.

25. Теорема про прискорення точок вільного твердого тіла.

26. Чи дорівнюють нулю прискорення точок миттєвої осі обертання тіла?

27. Як залежать кінематичні рівняння руху вільного твердого тіла від вибору полюса?

28. Яка послідовність і назва кутів Ейлера?

29. Чому дорівнюють швидкості точок тіла на миттєвій осі обертання

ЛІТЕРАТУРА

1. **Павловський, М.А.** Теоретична механіка [Текст]: підручник / М.А. Павловський // Видавництво «Техніка», Київ.-2002.-512 с.
2. **Яскілка, М.Б.** Збірник завдань для розрахунковографічних робіт з теоретичної механіки [Текст]: посібник / М.Б. Яскілка – К.: Вища шк.: Веселка, 1999. – 351 с.
3. **Штанько, П.К.** Теоретична механіка [Текст]: навчальний посібник / П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, Л.Ф. Дзюба, В.Р. Пасіка, О.М. Поляков; за ред. Штанько П.К. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013.-376 с.
4. **Бутенин, Н.В.** Курс теоретической механики [Текст]: В 2-х Т.: Учеб. пособие для студ. вузов / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
5. **Бухгольц, Н.Н.** Основной курс теоретической механики [Текст] / Н.Н. Бухгольц; перераб. и с доп. С.М. Тарга. Ч. 1–2. – М., «Наука», 1972. – 467с.
6. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учеб. /С.М. Тарг; 13–е изд. Стереотип. – М. Высш. Школа, 2001. – 416 с.
7. **Мещерский, И.В.** Задачи по теоретической механике [Текст]: учеб. пособие для вузов. / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 38–е изд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
8. **Яблонский, А.А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: учебное пособие для вузов / А.А. Яблонский; 7–е изд. испр. – М.: Интеграл–Пресс, 2002. – 384 с.
9. **Бать, М.И.** Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9–е изд., перераб. – М.: Наука, 1990. – Том 1: Статика и кинематика. – 1990. – 670 с.- Том 2: Динамика. – 1966. – 664 с.
10. **Смерека, І.П.** Короткий довідник з теоретичної механіки [Текст]: навчальний посібник / І.П. Смерека, А.Ф. Барвінський, Б.Д. Білоус, І.В. Кузьо, Я.А. Зінько - Львів: «Інтелект-Захід», 2001.-240 с.