

УДК 624.072.233

Штанько П.К.¹, Рягин С.Л.¹, Гелетий И.А.², Кононенко А.В.³

¹ канд. техн. наук, доц. ЗНТУ

² студ. гр. М-717 ЗНТУ

³ студ. гр. ІФ-317 ЗНТУ

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В строительстве опирание балки зачастую является распределенным. Расчет балки невозможен без учета упругих свойств основы, которые существенно влияют на напряженно-деформированное состояние балки.

В простой математической модели балки на упругом основании используют один коэффициент постели k [1]. Однако такая модель не учитывает сдвиговые взаимодействия основания (например, почвы), поэтому принимают во внимание второй коэффициент постели t [2].

Если балка имеет переменное сечение, то осевой момент инерции зависит от координаты x по длине балки.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки становится нелинейным:

$$E \cdot I(x) \cdot \frac{d^4 v}{dt^4} - 2 \cdot t \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + k \cdot v = q(x) \quad (1)$$

Объект расчета – клиновидная балка с квадратным начальным сечением на левом краю размерами: $b_0 = 0.6$ м, $h_0 = 0.6$ м. Длина балки составляет $L=6$ м. Осевой момент инерции сечения:

$$I(x) = \frac{b \cdot h_0^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{x}{2 \cdot L}\right)^3 \quad (2)$$

Модуль Юнга балки составляет: $E=2 \cdot 10^{10}$ Па. Первый коэффициент постели составляет: $k=145.8 \cdot 10^5$ Па, второй – $t=189.6 \cdot 10^5$ Н. Распределенная нагрузка с наибольшим значением $q_0=20 \cdot 10^3$ Н/м описывается законом, при котором она является симметричной и действует посередине балки:

$$q(x) = q_0 \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \quad (3)$$

Приближенное аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения (1) было получено методом, который разрабатывается на кафедре "Механика" ЗНТУ. Искомый прогиб v был аппроксимирован функцией:

$$U(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7 \quad (4)$$

Также были учтены граничные условия – изгибающий момент [2]:

$$M = -E \cdot I \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (5)$$

равен нулю на концах балки. При $x=0$ и $x=L$ было получено:

$$a_2 = 0 \quad (6)$$

$$6 \cdot L_0 \cdot a_3 + 12 \cdot a_4 \cdot L_0^2 + 20 \cdot a_5 \cdot L_0^3 + 30 \cdot a_6 \cdot L_0^4 + 42 \cdot a_7 \cdot L_0^5 = 0 \quad (7)$$

Коэффициенты аппроксимирующей функции (4) получили с помощью стандартного решателя в матричной форме для системы линейных алгебраических уравнений, составленной из уравнений (1), (4) при значениях $x=\{0; L/5; 2L/5; 3L/5; 4L/5; L\}$ и уравнений (6), (7).

Они равняются: $a_0=4.0317 \cdot 10^{-5}$, $a_1=-3.3570 \cdot 10^{-4}$, $a_2=0$, $a_3=1.4111 \cdot 10^{-5}$, $a_4=-1.1339 \cdot 10^{-7}$, $a_5=-9.1259 \cdot 10^{-8}$, $a_6=-1.1749 \cdot 10^{-8}$, $a_7=-1.2004 \cdot 10^{-9}$.

Нормальные напряжения в балке определялись по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2(x)} \quad (8)$$

Соответствующая упругая линия балки приведена на рис. 1. Распределение изгибающего момента (5) по длине балки приведено на рис. 2. Распределение нормальных напряжений (8) по длине балки приведено на рис. 3.

Для материала балки допускаемые напряжения при растяжении составляют $[\sigma] = 1 \text{ МПа}$ [3].

По результатам расчета напряжение в опасном сечении по модулю примерно равно $\sigma = 0.8 \text{ МПа}$. Таким образом, условие прочности выполняется, и балка является работоспособной. Приведенная погрешность приближенного аналитического решения уравнения (1) составила 0.06%, что подтверждает приемлемость примененного метода.

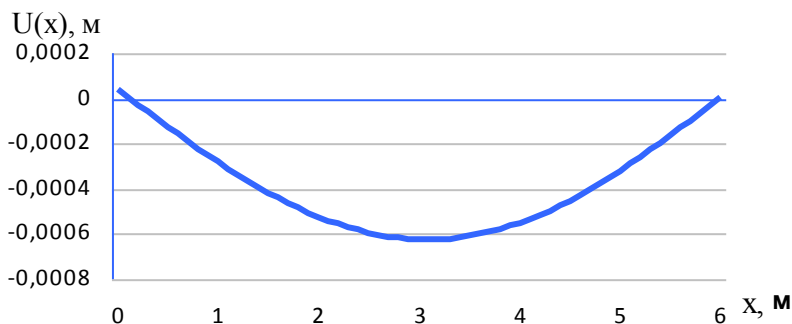


Рисунок 1 – Форма упругой линии балки переменного сечения

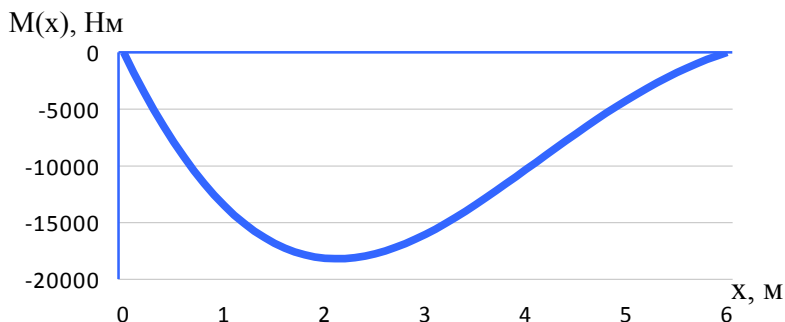


Рисунок 2 – Распределение изгибающего момента по длине балки

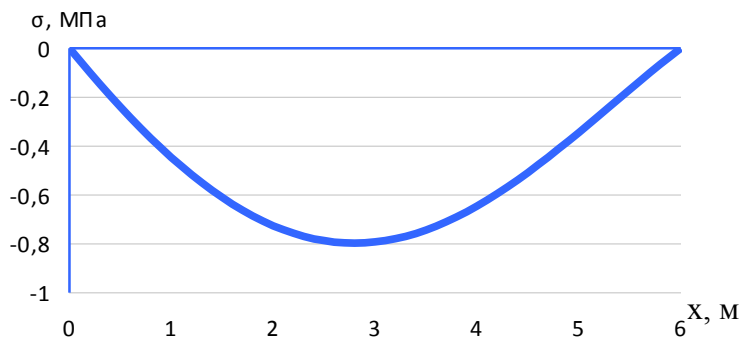


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений по длине балки

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микеладзе Ш.Е. Некоторые задачи строительной механики. – М., Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1948. – 267 с.
2. Власов В.З, Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматлит, 1960. – 491 с.
3. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
4. Штанько П.К., Рягин С.Л., Кононенко А.В., Гелетій І.А. Розрахунок балки змінного перерізу на пружній основі // Сучасні проблеми енергоресурсозбереження в будівництві, містобудуванні та житлово-комунальному господарстві: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів та молодих учених 6-8 грудня 2018 року. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – С. 277-279.