

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми
навчання) з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(1 семестр, 3 частина)

2014

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (1 семестр, 3 частина) / Укл. : Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2014 - 46 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка: Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н.,доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої
математики ЗНТУ Протокол № 2 від
03.09.2014

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується

1.2 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Знайти інтеграл безпосереднім інтегруванням

- | | | |
|-----|--|---------------------------|
| 1. | a) $\int \frac{3 + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt{x}} dx$ | б) $\int \sin(2 - 3x) dx$ |
| 2. | a) $\int \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} - 1}{2x} dx$ | б) $\int \sin(5 - 3x) dx$ |
| 3. | a) $\int \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 5}{2x^2} dx$ | б) $\int \cos(3 + 2x) dx$ |
| 4. | a) $\int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}} dx$ | б) $\int \cos(5 - 2x) dx$ |
| 5. | a) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2} dx$ | б) $\int \sin(8x - 3) dx$ |
| 6. | a) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx$ | б) $\int \sin(3 - 4x) dx$ |
| 7. | a) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{x} + 3 \right) dx$ | б) $\int \cos(3x + 5) dx$ |
| 8. | a) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$ | б) $\int \cos(4x - 1) dx$ |
| 9. | a) $\int \frac{3x^2 - 5\sqrt{x} + 2}{x} dx$ | б) $\int \sin(3x + 4) dx$ |
| 10. | a) $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{x^2} dx$ | б) $\int \cos(2x + 5) dx$ |

$$11. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt[6]{x^5} + 5x^2 + 3}{x} dx$$

$$b) \quad \int \cos(4x-7) dx$$

$$12. \quad a) \quad \int \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 1 \right) dx$$

$$b) \quad \int \sin(2-5x) dx$$

$$13. \quad a) \quad \int (x^2 - \frac{\sqrt[6]{x}}{x} - 3) dx$$

$$b) \quad \int \cos(2-7x) dx$$

$$14. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2x^5 + 3}{x} dx$$

$$b) \quad \int \sin(8x+3) dx$$

$$15. \quad a) \quad \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} + 2x^3 - 4 \right) dx$$

$$b) \quad \int \cos(1-6x) dx$$

$$16. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt{x^3} - 3x^4 + 2}{x} dx$$

$$b) \quad \int \sin(13x+1) dx$$

$$17. \quad a) \quad \int \left(2x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$b) \quad \int \cos(4-9x) dx$$

$$18. \quad a) \quad \int \frac{2x^3 - \sqrt{x^3} + 5}{x^2} dx$$

$$b) \quad \int \sin(11x+4) dx$$

$$19. \quad a) \quad \int \frac{3x^2 - \sqrt{x^3} + 7}{x} dx$$

$$b) \quad \int \cos(10x+5) dx$$

$$20. \quad a) \quad \int \frac{3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2} dx$$

$$b) \quad \int \sin(3-11x) dx$$

$$21. \quad a) \quad \int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x^3} + 4 \right) dx$$

$$b) \quad \int \cos(5x-1) dx$$

$$22. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt{x} - 2x^3 + 6}{x} dx$$

$$b) \quad \int \cos(2-17x) dx$$

$$23. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt[5]{x} - 2x^3 + 4}{x^2} dx$$

$$б) \quad \int \sin\left(\frac{3}{2}x + 1\right) dx$$

$$24. \quad a) \quad \int \left(\sqrt{x} - \frac{3x}{\sqrt{x^3}} + 2 \right) dx$$

$$б) \quad \int \cos(1 - 0,5x) dx$$

$$25. \quad a) \quad \int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{4}{x^5} + 2 \right) dx$$

$$б) \quad \int \sin(3x + 1) dx$$

$$26. \quad a) \quad \int \frac{\sqrt[7]{x^6} - 2x^2 + 3}{x} dx$$

$$б) \quad \int \cos(0,5 + 2x) dx$$

$$27. \quad a) \quad \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2}{x^3} + 1 \right) dx$$

$$б) \quad \int \cos(18 - 4x) dx$$

$$28. \quad a) \quad \int \left(\frac{2x^2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} + 6 \right) dx$$

$$б) \quad \int \sin\left(\frac{x}{2} + 5\right) dx$$

$$29. \quad a) \quad \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} - \frac{7}{x^3} + 5 \right) dx$$

$$б) \quad \int \cos(9x - 1) dx$$

$$30. \quad a) \quad \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx$$

$$б) \quad \int \cos(7x - 1) dx$$

Завдання 2. Знайти невизначений інтеграл і перевірити правильність відповіді

$$1. \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{\cos^2 x} dx$$

$$2. \quad \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^6 x}}{1 + x^2} dx$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}$$

$$4. \quad \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$$

$$5. \quad \int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$6. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^4 x}$$

$$7. \quad \int \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$8. \quad \int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$9. \quad \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$10. \quad \int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^3 x}$$

$$12. \quad \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$$

$$13. \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$$

$$14. \quad \int \frac{\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x} dx$$

$$15. \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx$$

$$16. \quad \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$$

$$17. \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$$

$$18. \quad \int \frac{\operatorname{ctg}^7 x}{\sin^2 x} dx$$

$$19. \quad \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}{\sin^2 x} dx$$

$$20. \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$$

21. $\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$

22. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right) \sqrt{\operatorname{arctg} x}}$

23. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}}$

24. $\int \sqrt{\cos^3 x} \cdot \sin x \, dx$

25. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

26. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} \, dx$

27. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \, dx$

28. $\int \frac{\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2} \, dx$

29. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$

Завдання 3. Знайти інтеграл

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} \, dx$

2. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} \, dx$

3. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1} \, dx$

4. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5x+1}} \, dx$

5. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} \, dx$

6. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2+6x} \, dx$

7. $\int \frac{3x}{2x^2+x+5} \, dx$

8. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+2}} \, dx$

$$9. \int \frac{2x+5}{3x^2+9x-4} dx$$

$$10. \int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx$$

$$11. \int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}} dx$$

$$12. \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$$

$$13. \int \frac{x+14}{\sqrt{2x^2-6x+8}} dx$$

$$14. \int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx$$

$$15. \int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$$

$$16. \int \frac{2x+3}{2x^2-x+6} dx$$

$$17. \int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

$$18. \int \frac{3x+4}{2+3x-x^2} dx$$

$$19. \int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}} dx$$

$$20. \int \frac{2x-1}{2x^2-6x+8} dx$$

$$21. \int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$$

$$22. \int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$$

$$23. \int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x-5}} dx$$

$$24. \int \frac{3x+1}{\sqrt{1-4x-x^2}} dx$$

$$25. \int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$$

$$26. \int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx$$

$$27. \int \frac{x+1}{3x^2-2x-3} dx$$

$$28. \int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx$$

$$29. \int \frac{5x+1}{x^2-4x+1} dx$$

$$30. \int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$$

Завдання 4. Знайти інтеграли, застосувавши формулу інтегрування частинами

$$1. \quad \text{а)} \quad \int (2x-1)e^{3x+2} dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arctg 3x dx$$

$$2. \quad \text{а)} \quad \int (2x+1)\sin(3x-2) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \ln(2x-1) dx$$

$$3. \quad \text{а)} \quad \int (3x-1)\cos(2x+1) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arcsin 2x dx$$

$$4. \quad \text{а)} \quad \int (2x+3) \cdot e^{3x-1} dx$$

$$\text{б)} \quad \int \ln(3x+4) dx$$

$$5. \quad \text{а)} \quad \int (3x+1) \cdot \cos(5x-2) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arctg 2x dx$$

$$6. \quad \text{а)} \quad \int (2x+3) \cdot \sin(4x-1) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arcsin 3x dx$$

$$7. \quad \text{а)} \quad \int (1-2x) \cdot e^{4x+5} dx$$

$$\text{б)} \quad \int \ln(2x+3) dx$$

$$8. \quad \text{а)} \quad \int (3-4x) \cdot \sin(3x+5) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arccos 2x dx$$

$$9. \quad \text{а)} \quad \int (4x+1) \cdot \cos(4x-3) dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arccos 2x dx$$

$$10. \quad \text{а)} \quad \int (2x-5) \cdot e^{3x+4} dx$$

$$\text{б)} \quad \int \arctg 5x dx$$

11. a) $\int (3x-5) \cdot \sin(2x+4) dx$

б) $\int \ln(3x-7) dx$

12. a) $\int (7-2x) \cdot \cos(3x-1) dx$

б) $\int x \arctg 2x dx$

13. a) $\int (1-4x) \cdot e^{5x+2} dx$

б) $\int \arcsin 5x dx$

14. a) $\int (3-2x) \cdot \sin(7x+4) dx$

б) $\int x \ln(2x+1) dx$

15. a) $\int (5x+3) \cdot e^{4x-5} dx$

б) $\int \arccos 4x dx$

16. a) $\int (3x+2) \cdot e^{2x-1} dx$

б) $\int \arccctg 3x dx$

17. a) $\int (3x-2) \cdot \sin(2x+1) dx$

б) $\int \ln(5x+7) dx$

18. a) $\int (2x+1) \cdot \cos(3x-5) dx$

б) $\int \arcsin 7x dx$

19. a) $\int (3x-1) e^{2x+3} dx$

б) $\int \arctg 4x dx$

20. a) $\int (5x-2) \cdot \cos(3x+1) dx$

б) $\int \ln(x^2+1) dx$

21. a) $\int (4x-1) \cdot \sin(2x+3) dx$

б) $\int \arccos 6x dx$

22. a) $\int (4x+5) \cdot e^{1-2x} dx$

б) $\int \arccctg 5x dx$

23. a) $\int (5-3x) \cdot \sin(4x-3) dx$

б) $\int x \ln(x^2+1) dx$

24. a) $\int (3-4x) \cdot \cos(4x+1) dx$

б) $\int \arcsin 9x dx$

25. а) $\int (3x+4) \cdot e^{5-2x} dx$

б) $\int \arctg 7x dx$

26. а) $\int (5-3x) \cdot \sin(7x+2) dx$

б) $\int \ln(5x-2) dx$

27. а) $\int (2-3x) \cdot \cos(8x+5) dx$

б) $\int \arccos 10x dx$

28. а) $\int (7x+6) \cdot e^{3-4x} dx$

б) $\int \arccctg 6x dx$

29. а) $\int (3-7x) \cdot \sin(2x+8) dx$

б) $\int \ln(7x+3) dx$

30. а) $\int (4x-5) \cdot \cos(5x+3) dx$

б) $\int \arctg 11x dx$

Завдання 5. Знайти інтеграл від ірраціональної функції

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x^3}+1} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$

4. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

6. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$

7. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x+3}} dx$

$$11. \quad \int \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}} dx$$

$$12. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$13. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$14. \quad \int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$15. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx$$

$$16. \quad \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1} dx$$

$$17. \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$$

$$18. \quad \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)} dx$$

$$19. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$20. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$21. \quad \int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x \cdot \left(1+\sqrt[6]{x}\right)} dx$$

$$22. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$$

$$23. \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}+1} dx$$

$$24. \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x \cdot \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)} dx$$

$$25. \quad \int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$$

$$26. \quad \int \frac{x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$27. \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$28. \quad \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$29. \quad \int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} dx$$

$$30. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

Завдання 6. Знайти інтеграл від дробово-раціональної функції

1. $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$

2. $\int \frac{3x^2 - 17x + 2}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} dx$

3. $\int \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2 - 1)} dx$

4. $\int \frac{x + 2}{x^3 - x^2} dx$

5. $\int \frac{4x^2 - 17x}{(x-2)(x^2 - 2x - 3)} dx$

6. $\int \frac{3x + 13}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$

7. $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$

8. $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

9. $\int \frac{3x^2 + 2}{x(x+1)^2} dx$

10. $\int \frac{7x - 2}{(x-1)(x^2 + 4)} dx$

11. $\int \frac{4x^2 - 2}{x^4 - x^2} dx$

12. $\int \frac{4x}{(x^2 - 1)(x+1)} dx$

13. $\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

14. $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

15. $\int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2 - 1)} dx$

16. $\int \frac{2x^2 + 4x + 20}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx$

17. $\int \frac{5x}{x^4 + 3x^2 - 4} dx$

18. $\int \frac{6 - 9x}{x^3 + 8} dx$

19. $\int \frac{3 - 9x}{x^3 - 1} dx$

20. $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$

$$21. \quad \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+3)} dx$$

$$22. \quad \int \frac{x^2 + x + 5}{x(x+3)(x+2)} dx$$

$$23. \quad \int \frac{x^3 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx$$

$$24. \quad \int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx$$

$$25. \quad \int \frac{x}{(x^2 + 1)(x-1)} dx$$

$$26. \quad \int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx$$

$$27. \quad \int \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x^4 - x^2} dx$$

$$28. \quad \int \frac{x^3 + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$29. \quad \int \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$30. \quad \int \frac{2x^5 - 2x^3 - x^2}{1 - x^4} dx$$

Завдання 7. Знайти інтеграл від тригонометричної функції

$$1. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}$$

$$\text{б)} \quad \int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x \, dx$$

$$2. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x + \cos x}$$

$$\text{б)} \quad \int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$$

$$3. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{10 \sin x + 5 \cos x}$$

$$\text{б)} \quad \int \sqrt[5]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$4. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{3 + 2 \cos x - \sin x}$$

$$\text{б)} \quad \int \sin 7x \cdot \sin 11x \, dx$$

$$5. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$$

$$\text{б)} \quad \int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$6. \quad \text{a)} \quad \int \frac{dx}{5 \cos x + 3}$$

$$\text{б)} \quad \int \cos 5x \cdot \cos 7x \, dx$$

7. a) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$

8. a) $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x - 5\sin x}$

9. a) $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$

10. a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 5}$

11. a) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

12. a) $\int \frac{dx}{4\cos x - 8}$

13. a) $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$

14. a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 1}$

15. a) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

16. a) $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 5}$

17. a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

18. a) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$

19. a) $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

20. a) $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$

21. a) $\int \frac{dx}{\sin x - 3\cos x - 1}$

22. a) $\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x - 3}$

б) $\int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx$

б) $\int \sin 4x \cdot \cos 12x dx$

б) $\int \sin^3 x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} dx$

б) $\int \sin 6x \cdot \sin 8x dx$

б) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$

б) $\int \cos 4x \cdot \cos 8x dx$

б) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 2x dx$

б) $\int \cos^4 5x dx$

б) $\int \sin^4 2x dx$

б) $\int \sin 5x \cdot \sin 13x dx$

б) $\int \sin 5x \cdot \cos 13x dx$

б) $\int \cos 5x \cdot \cos 13x dx$

б) $\int \sqrt[7]{\sin^4 x} \cdot \cos^3 x dx$

б) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$

б) $\int \sin^4 5x \cdot \cos^2 5x dx$

б) $\int \sin^3 x \cdot \cos^6 x dx$

23. а) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x - 4}$

24. а) $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$

25. а) $\int \frac{dx}{2\sin x - 5\cos x - 5}$

26. а) $\int \frac{dx}{5\sin x - 2\cos x - 2}$

27. а) $\int \frac{dx}{4\sin x - 5\cos x + 3}$

28. а) $\int \frac{dx}{6\sin x + 5\cos x + 3}$

29. а) $\int \frac{dx}{\sin x - 7\cos x - 5}$

30. а) $\int \frac{dx}{2\sin x - 7\cos x - 7}$

б) $\int \sin 7x \cdot \sin 13x \, dx$

б) $\int \sin 7x \cdot \cos 13x \, dx$

б) $\int \cos 7x \cdot \cos 13x \, dx$

б) $\int \sin^2 6x \cdot \cos^2 6x \, dx$

б) $\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x \, dx$

б) $\int \sqrt[6]{\sin^7 x} \cdot \cos^3 x \, dx$

б) $\int \sin^2 5x \cdot \cos^4 5x \, dx$

б) $\int \sin^3 x \cdot \sqrt[7]{\cos^9 x} \, dx$

Завдання 8. Знайти визначений інтеграл

1. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)}$

3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x \, dx$

5. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

7. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$

2. $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x-1} \, dx$

4. $\int_{-1}^0 x e^{-x^2} \, dx$

6. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx$

$$9. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$11. \int_{-1/3}^{-2/3} \frac{dx}{e^{3x}}$$

$$13. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}$$

$$15. \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4x^2+16}$$

$$19. \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$21. \int_0^{\pi/9} \frac{dx}{\cos^2 3x}$$

$$23. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \arctg x dx$$

$$25. \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln 3x} dx}{x}$$

$$27. \int_{-1}^0 \sqrt[4]{1-2x^3} x^2 dx$$

$$10. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \cos x dx$$

$$12. \int_0^{\pi/2} e^{-\cos x} \sin x dx$$

$$14. \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$16. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}$$

$$18. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x dx$$

$$20. \int_0^1 x^2 e^{-x^3/3} dx$$

$$22. \int_{1/2}^1 \frac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$$

$$24. \int_0^1 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$26. \int_0^4 x \sqrt[3]{x^2+9} dx$$

$$28. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$29. \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$30. \int_{\pi/12}^{\pi/6} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\sin^2 3x} dx$$

Завдання 9. Знайти невласні інтеграли

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$$

$$2. \int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$$

$$5. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$6. \int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$7. \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$$

$$8. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$$

$$9. \int_0^{\infty} \frac{\arctg^2 x dx}{1 + x^2}$$

$$10. \int_1^{\infty} \frac{2x dx}{3 + x^4}$$

$$11. \int_4^{\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} dx$$

$$12. \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$13. \int_{-1}^{\infty} \frac{(x + 2) dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{1 + 4x^2} dx$$

$$15. \int_{1/2}^{\infty} \frac{16 dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$16. \int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx$$

$$17. \int_1^{\infty} \frac{4 dx}{x(1 + \ln^2 x)}$$

$$18. \int_0^{\infty} x 2^{-x^2} dx$$

$$19. \int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{\ln 5(x^2 - 4)}$$

$$21. \int_2^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{\arctg \frac{x}{2}}}$$

$$23. \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$25. \int_1^{\infty} \frac{dx}{6x^2 - 5x + 1}$$

$$27. \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$29. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

$$20. \int_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\arctg^2 3x}$$

$$22. \int_0^{\infty} e^{-3x} dx$$

$$24. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$$

$$26. \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$$

$$28. \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 3}$$

$$30. \int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 4x + 1)^2}}$$

Завдання 10. Обчислити площу фігури, обмежену лініями

$$1. \quad y = x^2, \quad y = 3 - 2x$$

$$2. \quad y = \sqrt{x}, \quad y = x^3$$

$$3. \quad x = y^2 - 1, \quad x = 9 - y^2$$

$$4. \quad xy = -1, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0$$

$$5. \quad y^2 = 9x, \quad y = 3x$$

$$6. \quad y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \\ x = \frac{\pi}{4}$$

$$16. \quad y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x$$

$$17. \quad y = x^2 + 2x + 2, \quad y = 6 - x^2$$

$$18. \quad x + y = 7, \quad y = x^2 - 8x + 7$$

$$19. \quad xy = 4, \quad y = 3x + 1, \quad x = 2$$

$$20. \quad y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad x = 3$$

$$21. \quad y \leq x + 1, \quad y = \cos x, \quad y = 0$$

7. $y = 8 - x^2, \quad y = 4$
8. $y = x^2 - 2x, \quad y = 0, x = 4$
9. $xy = 6, x + y = 7$
10. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$
11. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{3}x$
12. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = 2x + 3$
13. $y = \sqrt{x + 2}, \quad y = 0,5x + 1$
14. $xy = 7, x + y = 8$
15. $y = x^2 - 6x + 9, \quad y = 5 - x$
22. $y = \sqrt[3]{x}, \quad xy = 1, x = 8$
23. $y = \sqrt{3 - x}, \quad y = \sqrt{x + 5}, y = 0$
24. $y = e^x + 1, \quad y = 3 - e^x, x = 1$
25. $y = \sqrt{x + 4}, \quad x - 3y + 4 = 0$
26. $xy = 5, y = 4x + 1, x = 2$
27. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$
28. $y^2 = 4x, \quad x^2 = 4y$
29. $y = 2^x, \quad y = 2x - x^2, \\ x = 0, \quad x = 2$
30. $y = \sqrt{x + 1}, \quad y = \sqrt{7 - x}, y = 0$

Завдання 11. Знайти довжину дуги лінії

1. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$
3. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$
4. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$
5. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$
6. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; \\ 0 \leq t \leq \pi/2$
7. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/4$
8. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/4$
9. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}; 0 \leq t \leq 2$
10. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/4$

11. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$
12. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
13. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
14. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$
15. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
16. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}; 0 \leq t \leq 2$
17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
18. $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
19. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/2$
20. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}; \pi/4 \leq t \leq \pi/2$
21. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
22. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
23. $\begin{cases} x = 4\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
24. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2 - t \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$
25. $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi$
26. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}; \pi \leq t \leq 2\pi$
27. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/3$
28. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 5\sin^2 t \end{cases}; 0 \leq t \leq \pi/4$
29. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t + 2 \end{cases}; 0 \leq t \leq 1$
30. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$

Завдання 12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо вказаної вісі.

$$1. \begin{cases} y = x^3 \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$2. \begin{cases} y^2 = \frac{4x}{3} \\ x = 3 \end{cases}, (OX)$$

$$3. \begin{cases} y = e^x, y = 0 \\ x = 0, x = 1 \end{cases}, (OX)$$

$$4. \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 8x \end{cases}, (OY)$$

$$5. \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}, (OY)$$

$$6. \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases}, (OX)$$

$$7. \begin{cases} xy = 4, y = 0 \\ x = 1, x = 4 \end{cases}, (OX)$$

$$8. \begin{cases} y = \sin x, y = 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, (OX)$$

$$9. \begin{cases} y^2 = (x-1)^3 \\ x = 2 \end{cases}, (OX)$$

$$10. \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ x = 3 \end{cases}, (OX)$$

$$11. \begin{cases} y = 2^x, y = 2 \\ x = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$12. \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \end{cases}, (OX)$$

$$13. \begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, (OX)$$

$$14. \begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}, (OX)$$

$$15. \begin{cases} y = t g x, y = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \end{cases}, (OX)$$

$$16. \begin{cases} y^3 = x^2 \\ y = 1 \end{cases}, (OX)$$

$$17. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, (OY)$$

$$18. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2} \\ x = 0, y = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$19. \begin{cases} y^2 = 4 - x \\ x = 0 \end{cases}, (OY)$$

$$20. \begin{cases} y = 2 - \frac{x^2}{2} \\ x + y = 2 \end{cases}, (OY)$$

$$21. \begin{cases} y = x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$22. \begin{cases} 2y = x^2 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$23. \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, (OX)$$

$$24. \begin{cases} y = x^3 \\ y = 8, x = 0 \end{cases}, (OY)$$

$$25. \begin{cases} y^2 = (x + 4)^3 \\ x = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$26. \begin{cases} y = -x^2 + 8 \\ y = x^2 \end{cases}, (OX)$$

$$27. \begin{cases} xy = 4 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases}, (OX)$$

$$28. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1, (OX)$$

$$29. \begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}, (OX)$$

$$30. \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}, (OX)$$

Завдання 13. Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області інтегрування D .

$$1. \iint_D (2x + y) dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$$

$$2. \iint_D (x + 1)y dx dy \quad (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$$

$$3. \iint_D \frac{x+1}{1+y^2} dx dy \quad (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$$

$$4. \iint_D (x - 2y) dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$$

$$5. \iint_D (x^2 + 2y) dx dy \quad (0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2)$$

$$6. \iint_D e^{2x+y} dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$$

$$7. \iint_D (2x + y^2) dx dy \quad (0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3)$$

8. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$ $(0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1)$
9. $\iint_D (x+y^3) dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
10. $\iint_D (3x^2 - 2y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
11. $\iint_D (x+3y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
12. $\iint_D e^{x+2y} dx dy$ $(0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
13. $\iint_D (x+2y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
14. $\iint_D (x+1)y^2 dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3)$
15. $\iint_D (4x+y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
16. $\iint_D \frac{x^3}{1+y^2} dx dy$ $(1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
17. $\iint_D e^{2x-y} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
18. $\iint_D (\sqrt{x}-y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1)$
19. $\iint_D \frac{x}{2y+1} dx dy$ $(1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
20. $\iint_D (3x-y) dx dy$ $(0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
21. $\iint_D e^{x-2y} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
22. $\iint_D (x+4xy) dx dy$ $(0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1)$
23. $\iint_D (x+\sqrt{y}) dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4)$

24. $\iint_D \frac{y}{2x+1} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2)$
25. $\iint_D (\sqrt{x} + \sqrt{xy}) dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4)$
26. $\iint_D e^{3x+y} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2)$
27. $\iint_D \sin(x+y) dx dy$ $\left(0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$
28. $\iint_D \cos(x+y) dx dy$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \pi\right)$
29. $\iint_D \frac{y}{1+x^2} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2)$
30. $\iint_D \frac{y^2}{x+1} dx dy$ $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3)$

Завдання 14. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^3+1} f(x,y) dy$ | 2. $\int_0^{1,5} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x,y) dx$ |
| 3. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$ | 4. $\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x,y) dx$ |
| 5. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2+1} f(x,y) dy$ | 6. $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y) dx$ |
| 7. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+4} f(x,y) dx$ | 8. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy$ |

$$9. \int_0^1 dy \int_y^{e^y} f(x, y) dx$$

$$11. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$$

$$13. \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y^2} f(x, y) dx$$

$$15. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^4 f(x, y) dy$$

$$17. \int_1^2 dx \int_{3-x}^{2x} f(x, y) dy$$

$$19. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x^2} f(x, y) dy$$

$$21. \int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} f(x, y) dy$$

$$23. \int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

$$25. \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dy$$

$$27. \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} f(x, y) dx$$

$$29. \int_{-2}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y} f(x, y) dx$$

$$10. \int_0^3 dx \int_{x^2-x}^{2x} f(x, y) dy$$

$$12. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy$$

$$14. \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$$

$$16. \int_1^e dy \int_{\ln y}^y f(x, y) dx$$

$$18. \int_0^1 dy \int_y^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$20. \int_0^2 dy \int_{y^2-4}^{2-y} f(x, y) dx$$

$$22. \int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^x f(x, y) dy$$

$$24. \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^y f(x, y) dx$$

$$26. \int_{-1}^3 dy \int_{y^2}^{2y+3} f(x, y) dx$$

$$28. \int_{-1}^0 dx \int_{(x+1)^2}^{x+1} f(x, y) dy$$

$$30. \int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{3-x} f(x, y) dy$$

Завдання 15. Знайти подвійний інтеграл по області D .

1. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ $D:$ $y = x^2, x = y^2$
2. $\iint_D xy^2 dx dy$ $D:$ $y = x^2, y = 2x$
3. $\iint_D (x + y) dx dy$ $D:$ $x = y^2, x = y$
4. $\iint_D x^2 y dx dy$ $D:$ $y = 2 - x, y = x, x \geq 0$
5. $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$ $D:$ $y = x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 0$
6. $\iint_D (y - x) dx dy$ $D:$ $y = x, y = x^2$
7. $\iint_D x(1 + y) dx dy$ $D:$ $y^2 = x, 5y = x$
8. $\iint_D (x + y) dx dy$ $D:$ $y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$
9. $\iint_D x(y - 1) dx dy$ $D:$ $y = 5x, y = x, x = 3$
10. $\iint_D (x - 2)y dx dy$ $D:$ $y = \frac{1}{2}x, y = 0, x = 2$
11. $\iint_D (x - y^2) dx dy$ $D:$ $y = x^2, y = 1$
12. $\iint_D x^2 y dx dy$ $D:$ $y = 2x^3, y = 0; x = 1$
13. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ $D:$ $x = y^2, x = 1$
14. $\iint_D xy dx dy$ $D:$ $y = -x^3, y = 0, x \leq 2$

15. $\iint_D (x + y) dx dy$ $D:$ $y = x^3, y = 0, x = 2$
16. $\iint_D x(2x + y) dx dy$ $D:$ $y = 1 - x^2, y \geq 0$
17. $\iint_D y(1 - x) dx dy$ $D:$ $y^3 = x, y = x, x = 1$
18. $\iint_D xy^3 dx dy$ $D:$ $y^2 = 1 - x, x \geq 0$
19. $\iint_D x(y + 5) dx dy$ $D:$ $y = x + 5, x + y + 5 = 0, x \leq 0$
20. $\iint_D (x - y) dx dy$ $D:$ $y = x^2 - 1, y = 3$
21. $\iint_D (x + 1)y^2 dx dy$ $D:$ $y = 3x^2, y = 3$
22. $\iint_D xy^2 dx dy$ $D:$ $y = x, y = 0; x = 1$
23. $\iint_D (x^3 + y) dx dy$ $D:$ $x + y = 1, x + y = 2, x \leq 1, x \geq 0$
24. $\iint_D xy^3 dx dy$ $D:$ $y = x^3, y \geq 0, y = 4x$
25. $\iint_D (x^3 + 3y) dx dy$ $D:$ $x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0$
26. $\iint_D xy dx dy$ $D:$ $y = \sqrt{x}, y \geq 0, x + y = 2$
27. $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ $D:$ $y = x, xy = 1, y = 2$
28. $\iint_D y(1 + x^2) dx dy$ $D:$ $y = x^3, y \leq 4x$

29. $\iint_D y^2(1+2x)dx dy$ $D:$ $x=1-y^2, x=0$
30. $\iint_D x e^y dx dy$ $D:$ $y=\ln x, y=0; x=2$

Завдання 16. Перейшовши до полярних координат, обчислити подвійний інтеграл

1. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$ $D:$ $x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2 \leq 2$
2. $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$ $D:$ $x^2+y^2 \leq 4x$
3. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $D:$ $x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$
4. $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ $D:$ $y=\sqrt{4-x^2}, x \geq 0$
5. $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ $D:$ $x^2+y^2=4, x \geq 0, y \geq 0$
6. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2+y^2+4}$ $D:$ $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, y \geq \sqrt{3}x$
7. $\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy$ $D:$ $\begin{cases} x^2+y^2=e^2 \\ x^2+y^2=e^4 \end{cases}$
8. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ $D:$ $x^2+y^2 \leq 4,$
9. $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$ $D:$ $x^2+y^2 \leq 2x,$
10. $\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy$ $D:$ $x^2+y^2 \leq 2,$

11. $\iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = \pi^2 \\ y \geq x, \quad y \geq 0 \end{cases}$
12. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$
13. $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9} \\ x^2 + y^2 = \pi^2 \end{cases}$
14. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4 \\ y \leq \sqrt{3} \cdot x, \quad y \geq 0 \end{cases}$
15. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
16. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$
17. $\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$ $D: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$
18. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 4}$ $D: y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \geq 0, y \geq \sqrt{3} x$
19. $\iint_D \frac{2x}{x^2 + y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \leq \sqrt{3} x, y \geq 0 \end{cases}$
20. $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
21. $\iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4} \\ x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9} \end{cases}$

22. $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16 \\ y \geq -x, y \leq 0 \end{cases}$
23. $\iint_D \frac{dx dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq -x, x \geq 0 \end{cases}$
24. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$
25. $\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \leq \sqrt{3}x, y \geq x \end{cases}$
26. $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \\ y \leq \sqrt{3}x, x = \sqrt{3}y \end{cases}$
27. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = 0, y \leq x \end{cases}$
28. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 16 \\ y \leq x, y \geq -x \end{cases}$
29. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y \leq x, x \geq 0 \end{cases}$
30. $\iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$ $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \leq x, y \geq 0 \end{cases}$

Завдання 17. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 6 - x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} z = -x^2 - y^2 + 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = 5\sqrt{x}, \quad y = \frac{5}{3}x \\ z = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} z - 4x = 0, \quad z = 0 \\ x + y = 6 \\ x = \sqrt{3y}, \quad x = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4y \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} z = 2\sqrt{x} \\ y^2 = 4x \\ z = 0, \quad x = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2x \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = y \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} z + y = 4 \\ x = \sqrt{y}, \quad x = 2\sqrt{y} \\ z = 0, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} z = 9 - y^2, \quad z = 0 \\ 3x - 4y - 12 = 0 \\ x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x^2 \\ y = 1, z = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} z = x + 2y \\ x^2 + y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} z = 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2\sqrt{x}, y = x^2/4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} z^2 = 4 - y \\ x^2 + y^2 = 4y \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} z = y^2 \\ 2x + 3y = 6 \\ z = 0, x = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^2 + z^2 = 2x \\ y^2 = x \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} z = (x - 1)^2 \\ x = y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} z = 4 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} z = y^2 + 1 \\ x + y = 1, x = 0 \\ y = 0, z = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} z = 3x^2, z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} z = x^2 + 3y^2, & z = 0 \\ x + y = 1 \\ x = 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2 - z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 1 - z^2 = y \\ y = 2x, & y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = \sqrt{y} \\ z = 0, & y = 0 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y = 2, & y = x \\ z = 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 = 4x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} z = 3y \\ x + y = 8 \\ x \geq 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} z + y = 1 \\ y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Завдання 18. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L f(x, y) dl$, де

L – відрізок прямої від точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $A_2(x_2, y_2)$

- | | | | |
|----|-----------------------|--------------|--------------|
| 1. | $f(x, y) = x + 7y;$ | $A_1(-2; 5)$ | $A_2(-3; 7)$ |
| 2. | $f(x, y) = 3x + 5y;$ | $A_1(3; 4)$ | $A_2(5; 2)$ |
| 3. | $f(x, y) = -2x + 5y;$ | $A_1(-3; 2)$ | $A_2(0; 5)$ |
| 4. | $f(x, y) = 5x + 2y;$ | $A_1(-2; 7)$ | $A_2(3; -3)$ |
| 5. | $f(x, y) = -4x + y;$ | $A_1(3; 1)$ | $A_2(2; 3)$ |
| 6. | $f(x, y) = x + 4y;$ | $A_1(4; 0)$ | $A_2(2; -4)$ |

7.	$f(x, y) = 2x + 3y;$	$A_1(5; -7)$	$A_2(2; -1)$
8.	$f(x, y) = -5x + 2y;$	$A_1(3; 5)$	$A_2(7; 1)$
9.	$f(x, y) = x + 3y;$	$A_1(2; 5)$	$A_2(0; 3)$
10.	$f(x, y) = 2x - 4y;$	$A_1(7; -2)$	$A_2(5; -3)$
11.	$f(x, y) = 5x + y;$	$A_1(2; 5)$	$A_2(4; 3)$
12.	$f(x, y) = 3x + 5y;$	$A_1(2; -1)$	$A_2(3; -2)$
13.	$f(x, y) = 7x + 6y;$	$A_1(6; 5)$	$A_2(3; 6)$
14.	$f(x, y) = 6x + 2y;$	$A_1(3; 5)$	$A_2(5; 3)$
15.	$f(x, y) = 2x - 5y;$	$A_1(3; -7)$	$A_2(2; -6)$
16.	$f(x, y) = 2x - y;$	$A_1(1; 2)$	$A_2(3; -1)$
17.	$f(x, y) = x + y;$	$A_1(3; 1)$	$A_2(-2; 2)$
18.	$f(x, y) = -x - 2y;$	$A_1(1; -3)$	$A_2(4; -5)$
19.	$f(x, y) = 3x - y;$	$A_1(2; -1)$	$A_2(1; -3)$
20.	$f(x, y) = 5x + y;$	$A_1(-4; 2)$	$A_2(-3; 1)$
21.	$f(x, y) = -2x + 3y;$	$A_1(3; -1)$	$A_2(4; 1)$
22.	$f(x, y) = -x + 5y;$	$A_1(5; 2)$	$A_2(1; 4)$
23.	$f(x, y) = 3x + 2y;$	$A_1(4; -1)$	$A_2(2; 3)$
24.	$f(x, y) = -2x + 3y;$	$A_1(3; 2)$	$A_2(5; 1)$
25.	$f(x, y) = x + 3y;$	$A_1(1; -3)$	$A_2(3; -2)$
26.	$f(x, y) = x - 3y;$	$A_1(3; 2)$	$A_2(-1; 4)$
27.	$f(x, y) = 7x - 2y;$	$A_1(3; -5)$	$A_2(2; -3)$
28.	$f(x, y) = -3x + 2y;$	$A_1(2; -4)$	$A_2(3; -5)$
29.	$f(x, y) = -5x + 3y;$	$A_1(-2; 5)$	$A_2(-3; 2)$
30.	$f(x, y) = -2x + y;$	$A_1(1; -5)$	$A_2(2; -4)$

Завдання 19. Впевнитись, що заданий вираз du є повним диференціалом деякої функції та знайти цю функцію за допомогою криволінійного інтегралу

1. $du = (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$
2. $du = (2x^3 - 21x^2y + 2y)dx + (3 + 2x - 7x^3)dy$
3. $du = (3x^2 - 2xy + y)dx + (x - x^2 - 3y^2 - 4y)dy$
4. $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
5. $du = (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2)dy$
6. $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
7. $du = (12x^2y + 2x)dx + (4x^3 - 2y)dy$
8. $du = (2xy - x^2)dx + (x^2 - y^3)dy$
9. $du = (6xy + 5)dx + (3x^2 + 5y)dy$
10. $du = (10xy^2 + 12x^3 + 6)dx + (10x^2y - 5y)dy$
11. $du = (x^3 - xy^2)dx + (y^3 - x^2y)dy$
12. $du = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$
13. $du = (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$
14. $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (-x^2 + 2xy - 3y^2)dy$
15. $du = (6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + 3y^2)dy$
16. $du = (10x + 6xy)dx + 3x^2dy$
17. $du = (8y^2 + 8xy^2)dx + (16xy + 8x^2y)dy$
18. $du = (-3y^5 + 3x^2y)dx + (-15xy^4 + x^3)dy$

19. $du = (6y^3 - 4x + 2xy)dx + (18xy^2 + x^2 - 3y^2)dy$
20. $du = (-8xy^5 + 2y^7)dx + (-20x^2y^4 + 14y^6x)dy$
21. $du = (21x^2y^2 + 2xy - 2)dx + (14x^3y + x^2 + 2y)dy$
22. $du = (3y^3 + 10xy)dx + (9xy^2 + 5x^2)dy$
23. $du = (-5x^4y^3 + 2y^4)dx + (-3x^5y^2 + 8xy^3)dy$
24. $du = (2y^5 + 3y^2)dx + (10xy^4 + 6xy)dy$
25. $du = (6x^2y^5 + 2xy^2)dx + (10x^3y^4 + 2x^2y)dy$
26. $du = (8x^3y - 5x^4y^2 + 6)dx + (2x^4 - 2x^5y)dy$
27. $du = (y^4 - 6xy + 9x^2)dx + (4xy^3 - 3x^2 - 1)dy$
28. $du = (6y^7 - 2xy^5 + 3y^4)dx + (42xy^6 - 5x^2y^4 + 12xy^3)dy$
29. $du = (6y^2 - 4x + 6xy)dx + (12xy + 3x^2 - 3y^2)dy$
30. $du = (y^2 - 6xy)dx + (2xy - 3x^2 - 3y^2)dy$

Завдання 20. Знайти похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ в т. M_1 та $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_1)$.

- | | | | |
|----|----------------------------------|------------------|-----------------|
| 1. | $u = x^2y + y^2z + z^2x$ | $M_1(1, -1, 2)$ | $M_2(3, 4, -1)$ |
| 2. | $u = 5xy^3z^2$ | $M_1(2, 1, -1)$ | $M_2(4, -3, 0)$ |
| 3. | $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ | $M_1(-1, 2, 1)$ | $M_2(3, 1, -1)$ |
| 4. | $u = ze^{x^2 + y^2 + z^2}$ | $M_1(2, 1, -1)$ | $M_2(3, -4, 2)$ |
| 5. | $u = \ln(xy + yz + xz)$ | $M_1(-2, 3, -1)$ | $M_2(2, 1, -3)$ |
| 6. | $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ | $M_1(1, 1, 1)$ | $M_2(3, 2, 1)$ |
| 7. | $u = x^2y + xz^2 - 2$ | $M_1(1, 1, -1)$ | $M_2(2, -1, 3)$ |

- | | | | |
|-----|---|------------------|------------------|
| 8. | $u = xe^y + ye^x - z^2$ | $M_1(3, 0, 2)$ | $M_2(4, 1, 3)$ |
| 9. | $u = 3xy^2 + z^2 - xyz$ | $M_1(1, 1, 2)$ | $M_2(3, -1, 4)$ |
| 10. | $u = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$ | $M_1(1, 1, 1)$ | $M_2(2, -3, 2)$ |
| 11. | $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ | $M_1(1, 2, 2)$ | $M_2(-3, 2, -1)$ |
| 12. | $u = y^2z - 2xyz + z^2$ | $M_1(3, 1, -1)$ | $M_2(-2, 1, 4)$ |
| 13. | $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ | $M_1(1, -1, 2)$ | $M_2(5, -1, 4)$ |
| 14. | $u = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$ | $M_1(1, 1, 1)$ | $M_2(3, -5, 1)$ |
| 15. | $u = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 5$ | $M_1(1, 2, 1)$ | $M_2(-3, -2, 6)$ |
| 16. | $u = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$ | $M_1(1, 3, 0)$ | $M_2(-4, 1, 3)$ |
| 17. | $u = x^2 - 2yz + e^z$ | $M_1(-2, -3, 0)$ | $M_2(2, 3, 4)$ |
| 18. | $u = x^y - 3xyz$ | $M_1(2, 2, -4)$ | $M_2(1, 0, -3)$ |
| 19. | $u = 3x^2yz^3 + yz$ | $M_1(-2, -3, 1)$ | $M_2(3, -2, 0)$ |
| 20. | $u = e^{xy+z^2}$ | $M_1(-3, 0, 2)$ | $M_2(2, 4, -3)$ |
| 21. | $u = x^{yz} + xy^2$ | $M_1(3, 1, 4)$ | $M_2(1, -1, -1)$ |
| 22. | $u = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ | $M_1(1, 2, -1)$ | $M_2(0, -1, 3)$ |
| 23. | $u = (x - y)^z + yz^2$ | $M_1(5, 1, 1)$ | $M_2(3, 7, -2)$ |
| 24. | $u = x^2y + y^2z - 3z$ | $M_1(0, -2, -1)$ | $M_2(2, -5, 0)$ |
| 25. | $u = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ | $M_1(-1, 2, -2)$ | $M_2(2, 0, 1)$ |
| 26. | $u = \ln(1 + x^2 - y^2 + z^2)$ | $M_1(1, 1, 1)$ | $M_2(5, -4, 8)$ |
| 27. | $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$ | $M_1(-1, 1, 1)$ | $M_2(2, 3, 4)$ |

28. $u = x^3 + xy^2 - 6xyz$ $M_1(1,3,-5)$ $M_2(4,2,-2)$
29. $u = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$ $M_1(2,2,2)$ $M_2(-3,4,1)$
30. $u = e^{x-yz} + xy^2$ $M_1(1,0,3)$ $M_2(2,-4,5)$

Завдання 21. Знайти $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)$, $|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)|$, $\text{div} \vec{a}(M_0)$ для векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$.

1. $\vec{a} = x^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ $M_0(0,1,-2)$
2. $\vec{a} = xy \vec{i} + (yz + xz) \vec{j} + xz \vec{k}$ $M_0(2,0,3)$
3. $\vec{a} = xy^2 \vec{i} + yz^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}$ $M_0(1,-2,0)$
4. $\vec{a} = xz \vec{i} + z \vec{j} + yz \vec{k}$ $M_0(3,0,1)$
5. $\vec{a} = yzi - z^2 \vec{j} + xyz \vec{k}$ $M_0(2,1,-1)$
6. $\vec{a} = xy \vec{i} + xyz \vec{j} - x \vec{k}$ $M_0(-1,0,3)$
7. $\vec{a} = y^2 \vec{i} - xy \vec{j} + z^2 \vec{k}$ $M_0(-2,1,1)$
8. $\vec{a} = xzi - xyz \vec{j} + x^2 z \vec{k}$ $M_0(0,1,1)$
9. $\vec{a} = xy \vec{i} - y^2 z \vec{j} - xz \vec{k}$ $M_0(0,-2,1)$
10. $\vec{a} = xzi - y \vec{j} - zy \vec{k}$ $M_0(0,1,2)$
11. $\vec{a} = y^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ $M_0(-1,2,1)$
12. $\vec{a} = xy \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ $M_0(1,-1,1)$
13. $\vec{a} = (x + y) \vec{i} + yz \vec{j} + xz \vec{k}$ $M_0(2,1,0)$
14. $\vec{a} = xy \vec{i} - (y + z) \vec{j} + xz \vec{k}$ $M_0(4,0,1)$
15. $\vec{a} = xi - zy \vec{j} + x^2 z \vec{k}$ $M_0(-3,0,2)$
16. $\vec{a} = (x + y^2) \vec{i} + yz \vec{j} - x^2 \vec{k}$ $M_0(1,0,4)$
17. $\vec{a} = xzi - y \vec{j} + yz \vec{k}$ $M_0(0,-1,4)$

- | | | |
|-----|---|---------------|
| 18. | $\bar{a} = xy\bar{i} - x\bar{j} + yz\bar{k}$ | $M_0(2,2,2)$ |
| 19. | $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + xyz\bar{j} - x\bar{k}$ | $M_0(4,1,-3)$ |
| 20. | $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + yz\bar{j} - y\bar{k}$ | $M_0(-4,1,0)$ |
| 21. | $\bar{a} = (y-z)\bar{i} - z^2\bar{j} + xyz\bar{k}$ | $M_0(3,0,1)$ |
| 22. | $\bar{a} = yzi - z^2\bar{j} + (x+y)z\bar{k}$ | $M_0(1,3,0)$ |
| 23. | $\bar{a} = z^2\bar{i} - xz\bar{j} + z^2\bar{k}$ | $M_0(1,-2,1)$ |
| 24. | $\bar{a} = xy\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}$ | $M_0(0,0,1)$ |
| 25. | $\bar{a} = xzi + (x-y)\bar{j} + x^2z\bar{k}$ | $M_0(1,1,-2)$ |
| 26. | $\bar{a} = (x-z)\bar{i} + xy\bar{j} + y^2z\bar{k}$ | $M_0(2,2,1)$ |
| 27. | $\bar{a} = (x-z)\bar{i} + xyz\bar{j} + x\bar{k}$ | $M_0(-2,2,1)$ |
| 28. | $\bar{a} = (y-z)\bar{i} + y\bar{j} - z^2\bar{k}$ | $M_0(-1,2,1)$ |
| 29. | $\bar{a} = (x-y)\bar{i} - x\bar{j} + xz\bar{k}$ | $M_0(0,2,-2)$ |
| 30. | $\bar{a} = (x-z)\bar{i} - y\bar{j} + xy\bar{k}$ | $M_0(1,-1,0)$ |

Завдання 22. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною (P) та координатними площинами, а) за означенням; б) за формулою Остроградського – Гауса

- | | | |
|----|---|------------------|
| 1. | $\bar{a} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$ | $(P): x+3y+z=3$ |
| 2. | $\bar{a} = (3x-1)\bar{i} + (y-x+z)\bar{j} + 4z\bar{k}$ | $(P): 2x-y-2z=2$ |
| 3. | $\bar{a} = x\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (y+z)\bar{k}$ | $(P): 3x+3y+z=3$ |
| 4. | $\bar{a} = (x+z)\bar{i} + (z-x)\bar{j} + (x+2y+z)\bar{k}$ | $(P): x+y+z=2$ |

5. $\bar{a} = (2x + y)\bar{i} + (x + 2z)\bar{j} + (2y - z)\bar{k}$ $(P): 2x + y + 2z = 2$
6. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + 2y\bar{j} + (x + y - z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
7. $\bar{a} = (3x - y)\bar{i} + (2y + z)\bar{j} + (2z - x)\bar{k}$ $(P): 2x - 3y + z = 6$
8. $\bar{a} = (2y + z)\bar{i} + (x - y)\bar{j} - 2z\bar{k}$ $(P): x - y + z = 2$
9. $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + 3y\bar{j} + (y - z)\bar{k}$ $(P): 2x - y - 2z = -2$
10. $\bar{a} = (x + y - z)\bar{i} - 2y\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
11. $\bar{a} = (y - z)\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + z\bar{k}$ $(P): 2x + y + z = 2$
12. $\bar{a} = x\bar{i} + (y - 2z)\bar{j} + (2x - y + 2z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 2$
13. $\bar{a} = (x + 2z)\bar{i} + (y - 3z)\bar{j} + z\bar{k}$ $(P): 3x + 2y + 2z = 6$
14. $\bar{a} = 4x\bar{i} + (x - y - z)\bar{j} + (3y + 2z)\bar{k}$ $(P): 2x + y + z = 4$
15. $\bar{a} = (2z - x)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + 3z\bar{k}$ $(P): x + 4y + 2z = 8$
16. $\bar{a} = 4z\bar{i} + (x - 3y - z)\bar{j} + (3y + z)\bar{k}$ $(P): x - 2y + 2z = 2$
17. $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + 2(x + z)\bar{k}$ $(P): 3x - 2y + 2z = 6$
18. $\bar{a} = (x + y + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y - 7z)\bar{k}$ $(P): 2x + 3y + z = 6$
19. $\bar{a} = (2x - z)\bar{i} + (y - x)\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$ $(P): x - y + z = 2$
20. $\bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + x\bar{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 4$

21. $\vec{a} = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (3x + z)\vec{k}$ $(P): x + y + 2z = 2$
22. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): x + y + 2z = 2$
23. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ $(P): 2x + 2y + z = 4$
24. $\vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
25. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$ $(P): 2x + y + 3z = 6$
26. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + 6y)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 2$
27. $\vec{a} = (2y - z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): x + 3y + 2z = 6$
28. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$ $(P): 2x + 2y + z = 2$
29. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ $(P): 3x + 2y + z = 6$
30. $\vec{a} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): 2x + y + 2z = 2$

Завдання 23. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру трикутника, який з'являється внаслідок перетину площини (P) з координатними площинами: а) за означенням; б) за формулою Стокса

1. $\vec{a} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ $(P): 2x + y + 2z = 2$
2. $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x - y)\vec{k}$ $(P): 3x + 2y + z = 6$
3. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + x\vec{j} + (y - 2z)\vec{k}$ $(P): 2x + 2y + z = 2$

4. $\bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + y\bar{k}$ $(P): x + 3y + 2z = 6$
5. $\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x + 6y)\bar{j} + y\bar{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 2$
6. $\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (2x - z)\bar{j} + (y + 3z)\bar{k}$ $(P): 2x + y + 3z = 6$
7. $\bar{a} = (3x + y)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + y\bar{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
8. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + z\bar{j} + (2x - y)\bar{k}$ $(P): 2x + 2y + z = 4$
9. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (x + 3y)\bar{j} + y\bar{k}$ $(P): x + y + 2z = 2$
10. $\bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + x\bar{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 4$
11. $\bar{a} = (2z - x)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + (3x + z)\bar{k}$ $(P): x + y + 2z = 2$
12. $\bar{a} = (2x - z)\bar{i} + (y - x)\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$ $(P): x - y + z = 2$
13. $\bar{a} = (x + y + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y - 7z)\bar{k}$ $(P): 2x + 3y + z = 6$
14. $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + 2(x + z)\bar{k}$ $(P): 3x - 2y + 2z = 6$
15. $\bar{a} = 4z\bar{i} + (x - y - z)\bar{j} + (3y + z)\bar{k}$ $(P): x - 2y + 2z = 2$
16. $\bar{a} = (2z - x)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + 3z\bar{k}$ $(P): x + 4y + 2z = 8$
17. $\bar{a} = 4x\bar{i} + (x - y - z)\bar{j} + (3y + 2z)\bar{k}$ $(P): 2x + y + z = 4$
18. $\bar{a} = (x + 2z)\bar{i} + (y - 3z)\bar{j} + z\bar{k}$ $(P): 3x + 2y + 2z = 6$
19. $\bar{a} = x\bar{i} + (y - 2z)\bar{j} + (2x - y + 2z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + 2z = 2$

20. $\bar{a} = (y - z)\bar{i} + (2x + y)\bar{j} + z\bar{k}$ $(P): 2x + y + z = 2$
21. $\bar{a} = (x + y - z)\bar{i} - 2y\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
22. $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + 3y\bar{j} + (y - z)\bar{k}$ $(P): 2x - y - 2z = -2$
23. $\bar{a} = (2y + z)\bar{i} + (x - y)\bar{j} - 2z\bar{k}$ $(P): x - y + z = 2$
24. $\bar{a} = (3x - y)\bar{i} + (2y + z)\bar{j} + (2z - x)\bar{k}$ $(P): 2x - 3y + z = 6$
25. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + 2y\bar{j} + (x + y - z)\bar{k}$ $(P): x + 2y + z = 2$
26. $\bar{a} = (y + 2z)\bar{i} + (x + 2z)\bar{j} + (x - 2y)\bar{k}$ $(P): 2x + y + 2z = 2$
27. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (z - x)\bar{j} + (x + 2y + z)\bar{k}$ $(P): x + y + z = 2$
28. $\bar{a} = x\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (y + z)\bar{k}$ $(P): 3x + 3y + z = 3$
29. $\bar{a} = (3x - 1)\bar{i} + (y - x + z)\bar{j} + 4z\bar{k}$ $(P): 2x - y - 2z = -2$
30. $\bar{a} = 3x\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (x - z)\bar{k}$ $(P): x + 3y + z = 3$

ЛІТЕРАТУРА

1. Высшая математика: Учеб. пособие / Под общ. ред. П.Ф.Овчинникова. – К.: Вища шк., 1989. – 679 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. Посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1: Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Высш. шк., 1980. – 320 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2. Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Высш. шк., 1980. – 365 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. школа, 1964. – 480 с.
6. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Ч.1, Ч.2, Ч.3. – Харьков, Изд. ХГУ, 1972. – 946 с.
7. Каплан А.И. Практические занятия по высшей математике. Ч.3, Ч.4. – Харьков, Изд. ХГУ, 1972. – 498 с.
8. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие для вузов. Под ред. В.Ф.Бутузова. – М.: Высш.шк., 1984. – 200 с.
9. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення //П.П. Овчинников, Ф.Я.Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
10. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; за заг. Ред. П.П.Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Для втузов. Т.1. – М.:”Наука”, 1985. – 456 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления Для втузов. Т.2. – М.:”Наука”, 1985. – 576 с.