

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми
навчання) з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(1 семестр, 2 частина)

2014

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (1 семестр, 2 частина) / Укл. : Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2014 -82 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка: Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н.,доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої
математики ЗНТУ. Протокол № 2 від
03.09.2014

ЗМІСТ

	Правила оформлення та виконання контрольної роботи (РГР)	4
1	Контрольна робота (РГР) № 2. Невизначений та визначений інтеграли. Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли. Теорія поля	5
1.1	Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР)	5
1.1.1	Невизначений інтеграл	5
1.1.2	Визначений інтеграл	19
1.1.3	Подвійний інтеграл	37
1.1.4	Потрійний інтеграл	50
1.1.5	Криволінійні та поверхневі інтеграли	57
1.1.6	Елементи теорії поля	66
1.2	Індивідуальні завдання	86
	Література	118

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 2

Невизначений та визначений інтеграли. Подвійний інтеграл. Криволінійні інтеграли. Теорія поля.

1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР).

1.1.1 Невизначений інтеграл.

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і справджується рівність $F'(x) = f(x)$ для усіх $x \in (a;b)$. Існує множина первісних $F(x)$ для функції $f(x)$, які відрізняються тільки сталою C : $(F(x) + C)' = f(x)$. Цю множину первісних називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і записують $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $f(x)$ – підінтегральна функція.

Властивості невизначеного інтеграла

$$a) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$б) \int dF(x) = F(x) + C$$

$$в) d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

$$г) \int k f(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ де } k = \text{const}$$

$$д) \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$е) \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Таблиця невизначених інтегралів $\int f(u) du = F(u) + C$

$$1 \quad \int du = u + C$$

$$2 \quad \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1$$

$$2а \quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

$$2б \quad \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$$

$$3 \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4a \quad \int e^u du = e^u + C$$

$$6 \quad \int \cos u du = \sin u + C$$

$$8 \quad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

$$10 \quad \int ctg u du = \ln|\sin u| + C$$

$$12 \quad \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| tg \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \\ = \ln \left| \frac{1}{\cos u} - tg u \right| + C$$

$$14 \quad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$16 \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$18 \quad \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 - u^2} \right| + C$$

$$19 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$4 \quad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$5 \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$7 \quad \int \frac{du}{\cos^2 u} = tg u + C$$

$$9 \quad \int tg u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$11 \quad \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| tg \frac{u}{2} \right| + C = \\ = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - ctg u \right| + C$$

$$13 \quad \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C$$

$$15 \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$17 \quad \int \sqrt{a^2 - u^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} + \\ + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$20 \quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Зауваження: таблицю інтегралів можна користуватись у випадку, коли аргумент підінтегральної функції і вираз під знаком диференціала однакові.

Методи інтегрування

1) Метод безпосереднього інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою властивостей невизначеного інтеграла та таблиці невизначених інтегралів.

Треба пам'ятати, що $du = \frac{1}{a} d(au)$, $du = a d\left(\frac{1}{a}u\right)$, $du = d(u \pm a)$, де $a = \text{const}$.

Задача 1. Знайти інтеграли

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{3 \cdot \sqrt[4]{x} - 4x + 5x^3}{x^2} dx &= \int \left(3 \cdot \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2} - 4 \cdot \frac{x}{x^2} + 5 \cdot \frac{x^3}{x^2} \right) dx = \\ &= \int \left(3 \cdot x^{-\frac{7}{4}} - 4 \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot x \right) dx = 3 \int x^{-\frac{7}{4}} dx - 4 \int \frac{dx}{x} + 5 \int x dx = \\ &= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C = -4 \cdot x^{-\frac{3}{4}} - 4 \cdot \ln|x| + \frac{5}{2} \cdot x^2 + C. \end{aligned}$$

При знаходженні інтеграла чисельник почлено поділили на знаменник і отримали три доданки;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$. Можемо застосувати формулу 2б, де $u = 3x-2$, і врахуємо лінійність аргументу u . За властивістю е) коефіцієнт лінійності дорівнює 3. Матимемо: $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x-2} + C$;

в) $\int e^{7x-5} dx$. Аналогічно прикладу б), коефіцієнт лінійності дорівнює 7. Застосовуємо формулу 4а. Маємо: $\int e^{7x-5} dx = \frac{1}{7} \cdot e^{7x-5} + C$;

$$\begin{aligned} \text{г) } \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 dx &= \int (\cos^2 3x - 2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x + \sin^2 3x) dx = \\ &= \int (1 - \sin 6x) dx = \int dx - \int \sin 6x dx = x + \frac{1}{6} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

При знаходженні інтеграла врахували, що $\cos^2 3x + \sin^2 3x = 1$ і $2 \cdot \cos 3x \cdot \sin 3x = \sin 6x$;

2) Метод заміни змінної (метод підстановки). Згідно цього метода вводять нову змінну інтегрування. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$. Функція $x = \varphi(t)$ визначена та диференційована на проміжку $(\alpha; \beta)$ і $x \in (a; b)$: $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$. Тоді справедлива формула $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$. Зручним є і такий запис:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left[\begin{matrix} u = \varphi(x) \\ du = \varphi'(x) dx \end{matrix} \right] = \int f(u) du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$$

Підстановку $u = \varphi(x)$ підбирають так, щоб мати після перетворення табличний інтеграл.

Задача 2. Знайти інтеграли

$$\text{а) } \int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

Так як $d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx$, то зробимо заміну змінної $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. Матимемо:

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C. \quad \text{Перевіримо}$$

отриманий результат:

$$\left(\frac{\sin^5 x}{5} + C \right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x = \sin^4 x \cdot \cos x;$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot x dx &= \left\{ u = 3x^2 + 8 \right. \\
 &\quad \left. du = d(3x^2 + 8) = (3x^2 + 8)' dx = 6x dx \right\} = \\
 &= \frac{1}{6} \int \sqrt{3x^2 + 8} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C = \\
 &= \frac{1}{9} (3x^2 + 8)^{\frac{3}{2}} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \int \frac{dx}{e^x + 1} &= \left\{ u = e^x + 1 \Rightarrow x = \ln(u - 1) \right. \\
 &\quad \left. dx = \frac{du}{u - 1} \right\} = \int \frac{du}{u(u - 1)} = \\
 &= -\int \frac{u - 1 + u}{u(u - 1)} du = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{(u - 1)} = -\ln|u| + \ln|u - 1| + C = \\
 &= \ln \left| \frac{u - 1}{u} \right| + C = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C.
 \end{aligned}$$

3) Метод інтегрування частинами. Формула інтегрування частинами має вигляд: $\int u dv = uv - \int v du$. До інтегралів, які обчислюються методом інтегрування частинами відносяться:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int P_n(x) \sin(\alpha x + b) dx, \quad \int P_n(x) \cos(\alpha x + b) dx, \quad \int P_n(x) e^{\alpha x + b} dx, \\
 \int P_n(x) a^{\alpha x + b} dx, \quad \int \frac{ax + b}{\cos^2(cx + d)} dx, \quad \int \frac{ax + b}{\sin^2(cx + d)} dx, \quad \text{де } P_n(x) - \\
 \text{многочлен } n\text{-го степеню, } \alpha, b, c, d - \text{дійсні числа. В цих інтегралах} \\
 \text{через } u \text{ позначаємо } P_n(x) \text{ або } ax + b, \text{ а через } dv - \text{один з виразів} \\
 \cos(\alpha x + b) dx, \quad \sin(\alpha x + b) dx, \quad a^{\alpha x + b} dx, \quad e^{\alpha x + b} dx, \quad \frac{dx}{\cos^2(cx + d)}, \\
 \frac{dx}{\sin^2(cx + d)},
 \end{aligned}$$

б) $\int P_n(x) \arcsin f(x) dx$, $\int P_n(x) \arccos f(x) dx$,
 $\int P_n(x) \arctg f(x) dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctctg} f(x) dx$, $\int P_n(x) \ln f(x) dx$,
 $\int P_n(x) \log_a f(x) dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n -го степеню (n може дорівнювати нулю), $f(x)$ – відповідна функція. В цих інтегралах через u позначаємо один з виразів $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\arctg f(x)$, $\operatorname{arctctg} f(x)$, $\ln f(x)$, $\log_a f(x)$, а через $dv = P_n(x) dx$.

Існують інші типи інтегралів для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Зауваження. При застосуванні метода інтегрування частинами треба підінтегральний вираз розбити на два множники: u і dv , а саме:
 а) dx треба віднести до dv ; б) dv повинен бути таким, щоб інтегруванням легко знайти v ; в) інколи доводиться формулу інтегрування частинами застосовувати декілька разів.

Задача 3. Знайти інтеграли

$$\begin{aligned} \text{а) } \int x \cos 4x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 4x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \Bigg\} = \frac{x}{4} \sin 4x - \\ &- \frac{1}{4} \int \sin 4x dx = \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C; \\ \text{б) } \int x \ln(x+3) dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+3) \\ dv = x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x+3} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \Bigg\} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \\ &- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+3} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+3} dx = \left(\begin{array}{l} -\frac{x^2}{x+3} \Big| \frac{x+3}{x-3} \\ -\frac{3x}{-3x-9} \\ \frac{-3x-9}{9} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \int \left(x - 3 + \frac{9}{x+3} \right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+3) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x + 9 \ln(x+3) \right) + C;
\end{aligned}$$

$$\text{в) } \int \frac{3x-2}{\cos^2 4x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 3x-2 \quad \left| \quad du = 3dx \right. \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 4x} \quad \left| \quad v = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x \right. \end{array} \right\} = \frac{3x-2}{4} \operatorname{tg} 4x -$$

$$-\frac{1}{4} \int \operatorname{tg} 4x \cdot 3dx = \frac{3x-2}{4} \operatorname{tg} 4x + \frac{3}{16} \ln |\cos 4x| + C;$$

$$\text{г) } \int e^{2x} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad \left| \quad du = 2e^{2x} dx \right. \\ dv = \sin x dx \quad \left| \quad v = -\cos x \right. \end{array} \right\} = -e^{2x} \cos x +$$

$$+ 2 \int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \quad \left| \quad du = 2e^{2x} dx \right. \\ dv = \cos x dx \quad \left| \quad v = \sin x \right. \end{array} \right\} = -e^{2x} \cos x +$$

$$+ 2 \left(e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \right) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x.$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{5} \left(-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \right) + C.$$

3) Інтегрування квадратних тричленів. До цих інтегралів відносяться:

$$\text{а) } \int \frac{Adx}{ax^2 + bx + c}, \text{ б) } \int \frac{Bdx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \text{ в) } \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx,$$

$$\text{г) } \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Для інтегралів типів а), б) необхідно виділити повний квадрат у квадратному тричлені:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) =$$

$$= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \text{ Заміна } x + \frac{b}{2a} = u \text{ приводить інтеграл до}$$

табличного: для інтеграла типу а) маємо табличний інтеграл 13 або 14, для інтеграла типу б) маємо табличний інтеграл 15 або 16.

Для інтегралів типів в), г) необхідно у чисельнику виділити похідну квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику, і чисельник почлено поділити на знаменник. Отримаємо два інтеграли, перший з яких знаходимо по Таблиці інтегралів за формулою 19 (для інтеграла типу в)) або 20 (для інтеграла типу г)). Другий інтеграл є інтегралом типу а) або б).

Задача 4. Знайти інтеграл

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1) (4-2x-x^2)' = -2-2x \\ 2) 3x-4 = 3\left(x-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}\left(-2x+\frac{8}{3}\right) = \\ = -\frac{3}{2}\left(-2x-2+2+\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{2}(-2x-2)-7 \\ 3) 4-2x-x^2 = -(x^2+2x-4) = \\ = -(x^2+2x+1-1-4) = -(x+1)^2+5 \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x-2)-7}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{4-2x-x^2} - 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C = -3\sqrt{4-2x-x^2} -$$

$$- 7 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

4) Інтегрування дробово-раціональних функцій. До цих функцій

відносяться дробі $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Якщо $n \geq m$, то дріб є неправильний. Треба виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$, де $S(x)$ – частка (ціла частина), $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильний дріб (ступінь многочлена $R(x)$ менший за m). Якщо правильний дріб не є простий, то необхідно знаменник $Q_m(x)$ розкласти на множники (множниками можуть бути многочлени виду: $x \pm x_1$, $(x \pm x_2)^k$, $x^2 + a^2$, $(x^2 + a^2)^k$, $x^2 + px + q$, $(x^2 + px + q)^k$ з дискримінантом квадратного тричлена меншим нуля). Потім правильний дріб розкладають на прості дробі. Простих дробів буде стільки, скільки множників у знаменнику, враховуючи кратність кожного. У чисельниках простих дробів записують многочлени в загальному вигляді, не враховуючи кратність многочленів у знаменнику. Коефіцієнти чисельників знаходимо методом невизначених коефіцієнтів або комбінованим методом. При інтегруванні правильних простих дробів можемо мати такі інтеграли:

$$\int \frac{A}{x \pm x_1} dx = A \cdot \ln|x \pm x_1| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x \pm x_2)^k} dx = A \cdot \frac{(x \pm x_2)^{1-k}}{1-k} + C;$$

$$\int \frac{A}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + a^2| + \frac{B}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{A}{x^2 + px + q} dx, \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx \quad - \quad \text{розглянуті в інтегруванні}$$

квадратних тричленів;

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{A}{2(1-k)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k},$$

де $t = x + \frac{p}{2}$, $m^2 = q - \frac{p^2}{4}$. При цьому многочлен $x^2 + px + q$ немає дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$;

$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = I_k$ можна знайти використовуючи рекурентну формулу:

$$I_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_{k-1}$$

Задача 5. Знайти інтеграли

$$\text{a) } \int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} dx = \begin{cases} \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \\ = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \\ = \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C}{(x+2)(x^2+1)} \end{cases}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2) = x^2(A+B) + x(2B+C) + A+2C$$

$$x = -2 \mid -2+1 = A((-2)^2+1) + (B(-2)+C)(-2+2) \Rightarrow -1 = 5A; A = -1/5$$

$$x^2 \mid 0 = A+B; B = 1/5$$

$$x \mid 1 = 2B+C; C = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-1/5}{x+2} + \frac{1/5x+3/5}{x^2+1} \Bigg\} = \int \frac{-1/5}{x+2} dx + \int \frac{1/5x+3/5}{x^2+1} dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{10} \int \frac{2xdx}{x^2+1} +$$

$$+ \frac{3}{5} \arctg x + C = -\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{10} \ln|x^2+1| + \frac{3}{5} \arctg x + C;$$

$$\text{б) } \int \frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)} = \left\{ \frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \right.$$

$$= \frac{A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2(B+C) + x(A-2C) + 2A-B+C}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$3 = A(x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)^2$$

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3=4C \\ x=1 & 3=2A \\ x^2 & 0=B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} C=3/4 \\ A=3/2 \\ B=-3/4 \end{cases}$$

$$\text{або } 3 = x^2(B+C) + x(A-2C) + A-B+C$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0=B+C \\ x & 0=A-2C \\ x^0 & 3=A-B+C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A-2C=0 \\ A+2C=3 \end{cases} \Rightarrow 2A=3 \Rightarrow A=3/2 \Rightarrow \begin{cases} A=3/2 \\ C=3/4 \\ B=-3/4 \end{cases}$$

$$\frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{3/2}{(x-1)^2} + \frac{-3/4}{x-1} + \frac{3/4}{x+1} \Bigg\} = \int \frac{3/2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-3/4}{x-1} dx +$$

$$+ \int \frac{3/4}{x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+1| + C.$$

5) Інтегрування тригонометричних функцій. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ за допомогою універсальної підстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

приводяться до інтегралів від раціональних дробів. В деяких випадках застосовують інші підстановки, які спрощують знаходження інтегралів. Розглянемо ці випадки.

а) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$:
 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, робимо заміну $\sin x = t$,

$\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. а коли вона непарна відносно $\sin x$:

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну $\cos x = t$,

$\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

б) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$:

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то робимо заміну

$\operatorname{tg} x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$;

в) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ знаходиться підстановкою $\sin x = t$, якщо n – ціле додатне непарне число, а m – ціле додатне парне число, або підстановкою $\cos x = t$, якщо m – ціле додатне непарне число, а n – ціле додатне парне число. У випадку, коли n і m – цілі додатні парні числа, застосовують формули зниження степеня $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$,

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ та $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Якщо n і m – цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, або n і m – цілі непарні і від'ємні числа, то застосовують підстановку $\operatorname{tg} x = t$;

г) $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ зводяться до табличних за допомогою формул:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x);$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Задача 6. Знайти інтеграли.

$$\text{а) } \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x \cos x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos x d \cos x =$$

$$= -\int \cos x dx \cos x + \int \cos^3 x dx \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} + C$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \cos 3x \cdot \sin 2x dx &= \int \sin 2x \cdot \cos 3x dx = \int \frac{1}{2} (\sin(2x - 3x) + \\ &+ \sin(2x + 3x)) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 5x dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{2} (-\cos x) + C = \\ &= -0,1 \cos 5x + 0,5 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \frac{dx}{3 - \cos x} &= \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-1+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4t^2+2} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1/2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2} \right) + C. \end{aligned}$$

б) Інтегрування ірраціональних виразів. Розглянемо деякі з них.

$$\text{а) } \int R \left(x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, x^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, x^{\frac{n_k}{m_k}} \right) dx, \text{ де } n_i, m_i \ (i = \overline{1, k}) - \text{цілі додатні}$$

числа. Робимо заміну $x = t^s$, де s є спільним знаменником дробів

$\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

$$\text{б) } \int R \left(\left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^{\frac{n_k}{m_k}} \right) dx, \quad \text{де}$$

$n_i, m_i (i = \overline{1, k})$ – цілі додатні числа, a_1, b_1, a_2, b_2 – дійсні числа: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Заміна: $\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} = t^s$, де s є спільним знаменником дробів

$\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}$. Ця заміна приводить до інтегралу від раціональної функції аргументу t .

в) В інтегралах, що мають вирази: 3а) $\sqrt{x^2 - m^2}$, 3б) $\sqrt{m^2 - x^2}$,

3в) $\sqrt{m^2 + x^2}$, можна робити наступні заміни змінної:

$$3\text{а)} \quad x = \frac{m}{\cos t}, \quad dx = \frac{m \sin t}{\cos^2 t} dt, \quad \sqrt{x^2 - m^2} = \frac{m \sin t}{\cos t};$$

$$3\text{б)} \quad x = m \cos t, \quad dx = -m \sin t dt, \quad \sqrt{m^2 - x^2} = m \sin t;$$

$$3\text{в)} \quad x = m \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{m}{\cos^2 t} dt, \quad \sqrt{m^2 + x^2} = \frac{m}{\cos t}.$$

Задача 7. Знайти інтеграл.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6; t = \sqrt[6]{x}, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^8}{t^2(t+1)} dt = \\ &= 6 \int \frac{t^6}{t+1} dt = 6 \int \left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) + C = \end{aligned}$$

$$= 6 \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C$$

1.1.2 Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку інтегрування $[a; b]$, a – нижня межа інтегрування, b – верхня межа інтегрування, обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ є первісною для підінтегральної функції $f(x)$.

Властивості визначеного інтеграла

а) $\int_a^b dx = b - a$

б) $\int_a^a f(x)dx = 0$

в) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

г) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in (a; b)$

д) $\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, де $k = \text{const}$

е) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

є) якщо відрізок інтегрування симетричний: $[-a; a]$, то для парної підінтегральної функції $f(x) \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$, для непарної функції $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Для знаходження первісної $F(x)$ при обчисленні визначеного інтеграла можна застосувати табличні інтеграли та методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів. Розглянемо деякі з них:

а) заміна змінної під знаком визначеного інтеграла. Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ задовольняють умовам: функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, функція $\varphi(t)$ має неперервну похідну $\varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ і складена функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha; \beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

б) формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задача 8. Знайти інтеграли.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \\ & = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}; \\ \text{б)} \quad & \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \mid \alpha = 0, \beta = \pi/2 \\ a = 0, b = 2 \mid dx = 2 \cos t dt \end{array} \right\} = \\ & = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \end{aligned}$$

$$= 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right] = \pi ;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Невласні інтеграли першого та другого роду.

1) Невласні інтеграли I роду (інтеграли з нескінченними межами інтегрування). До них відносяться інтеграли виду:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^b f(x) dx, \text{ б) } \int_a^{\infty} f(x) dx, \text{ в) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Розглянемо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. За властивістю г) розіб'ємо його

на два інтеграли: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$, перший з яких відповідає інтегралу а), а другий – інтегралу б). Якщо існує скінченна границя $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx$, то $\int_{-\infty}^c f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx$. Аналогічно

$$\int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} F(x) \Big|_a^c + \\ &+ \lim_{b \rightarrow \infty} F(x) \Big|_c^b = F(c) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) + \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(c) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a). \end{aligned}$$

Невласний інтеграл є збіжним, якщо границі існують (скінченні числа), у противному випадку – розбіжним.

2) Невласні інтеграли II роду (інтеграли від розривних функцій).

До них відносяться інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$, для яких підінтегральна функція $f(x)$ невизначена або при $x=a$, або при $x=b$, або при $x=c$, $c \in (a; b)$.

Припустимо, що $f(x)$ невизначена при $x=c$, $c \in (a; b)$. Розглянемо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(x) \Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(x) \Big|_{c+\varepsilon_2}^b = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} F(c-\varepsilon_1) - F(a) + \\ &\quad + F(b) - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} F(c+\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Невласний інтеграл є збіжним, якщо границі існують (скінченні числа), у противному випадку – розбіжним.

Задача 9. Знайти невластні інтеграли.

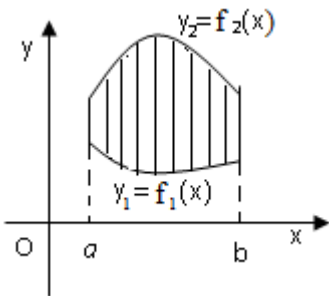
$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^\infty \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^b (4+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(4+x^2) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{4+x^2} \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{4+b^2} - 2) = \infty \quad - \text{ інтеграл розбіжний.} \\ \text{б) } \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \arcsin 2x \Big|_0^{1/2-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \right) - \arcsin 0 \right) = \frac{1}{2} \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} \quad - \text{ інтеграл} \\ &\text{збіжний.} \end{aligned}$$

Застосування визначених інтегралів.

Обчислення площі плоскої фігури.

а) плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox . Тоді площа фігури

обчислюється за формулою: $S = \int_a^b f(x) dx$.



Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 > y_1$). Тоді площа фігури обчислюється за формулою:

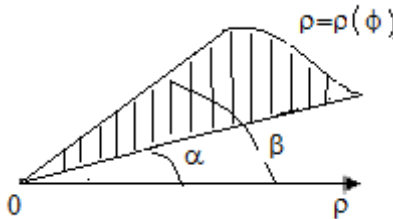
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx;$$

б) плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $t \in [t_1; t_2]$. Тоді площа фігури обчислюється за

формулою: $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$;

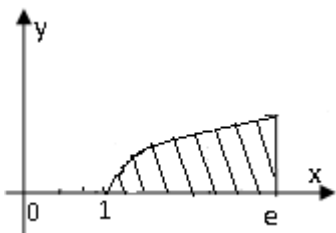
в) плоска фігура обмежена кривою, заданою в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$:



Тоді площа фігури обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$.

Задача 10. Знайти площу фігури.

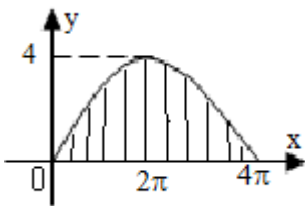
а) Фігура обмежена лініями: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Зробимо рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою $S = \int_a^b y(x) dx$. З умови задачі маємо: $f(x) = \ln x$, $a = 0$, $b = e$.

$$S = \int_1^e \ln x dx = \left[\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right] = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - e + 1 = 1;$$

б) Фігура обмежена лініями: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ та віссю Ox . Зробимо рисунок.

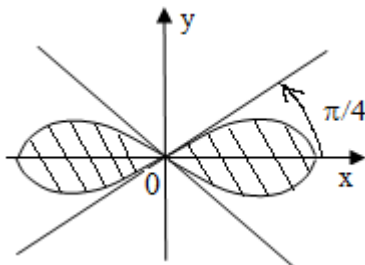


Площу заданої фігури знайдемо за формулою $S = \int_a^\beta y(t)x'(t)dt$.

Маємо $y = 2(1 - \cos t)$, $x' = 2(1 - \cos t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Тоді

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} 2^2 (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\
 &= 4 \left(t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi;
 \end{aligned}$$

в) Фігура обмежена лінією $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$. Зробимо рисунок фігури.



Площу заданої фігури знайдемо за формулою: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi$. Фігура симетрична відносно осей координат. Знайдемо площу її чверті і помножимо на 4. Маємо $\rho = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \cos 2\varphi d\varphi = 2 \sin 2\varphi \Bigg|_0^{\pi/4} = 2.$$

Обчислення довжини дуги гладкої кривої.

а) крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Тоді довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

б) крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$.

Тоді довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt ;$$

в) крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Тоді довжина кривої обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi .$$

Задача 11. Знайти довжину дуги гладкої кривої.

а) крива задана рівнянням $y^2 = x^3$, $x = 0$, $x = \frac{4}{3}$, $(y \geq 0)$.

Довжину її знайдемо за формулою $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Маємо $y = x^{3/2}$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$, $a = 0$, $b = 4/3$.

$$L = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{4/3} = \frac{8}{27} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot 7 = \frac{56}{27} ;$$

б) крива задана рівнянням $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої

знайдемо за формулою $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$.

Маємо $x' = -5\cos^4 t \sin t$, $y' = 5\sin^4 t \cos t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{(-5\cos^4 t \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cos t)^2} = \\ &= \sqrt{25\cos^8 t \sin^2 t + 25\sin^8 t \cos^2 t} = \sqrt{25\cos^2 t \sin^2 t (\cos^6 t + \sin^6 t)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} = \frac{5}{2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2t} = \\
&= \frac{5}{4} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} . \\
L &= \frac{5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} dt = -\frac{5}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} d(\cos 2t) = \\
&= -\frac{5}{8\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{3} \cos 2t + \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{5}{8} \left(1 + \frac{\ln |\sqrt{3} + 2|}{2\sqrt{3}} \right);
\end{aligned}$$

в) крива задана рівнянням $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Довжину кривої

знайдемо за формулою $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

Маємо $\rho' = 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} (2\pi - 3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy .

а) крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ і обертається навколо вісі Ox . Тоді площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx ;$$

б) крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$ і

обертається навколо вісі Ox . Тоді площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt ;$$

в) крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної вісі. Тоді площа поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$Q_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi .$$

Задача 12. Обчислити площу поверхні обертання.

а) крива задана рівнянням $y = \sin 2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ і обертається навколо Ox . Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$

Маємо $y' = 2 \cos 2x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx = \left[2 \cos 2x = t; t_H = 2; t_\theta = -2 \right] = \\ &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} \left(-\frac{1}{4} \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + t^2} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{\pi}{2} (2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2));$$

б) крива задана рівнянням $\rho = 1 - \cos \varphi$ - кардіоида обертається навколо полярної вісі. Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою: $Q_\varphi = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$. Маємо $\rho' = \sin \varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \pi$.

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^\pi 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 32\pi \int_0^\pi \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right) = 32\pi \frac{\sin^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \Big|_0^\pi = \frac{32\pi}{5}; \end{aligned}$$

в) крива задана рівнянням $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 1$ і обертається

навколо Ox . Площу поверхні обертання обчислюємо за формулою:

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad \text{Маємо} \quad x' = 1, \quad y' = -1,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_0^1 (2-t) \cdot \sqrt{1+1} dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (2-t) dt = 2\sqrt{2}\pi \left(2t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2\sqrt{2}\pi \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі Ox або Oy .

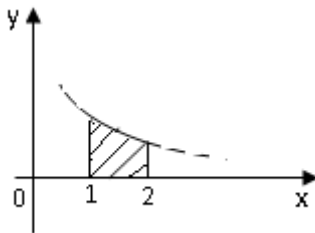
а) плоска фігура обмежена кривими: $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 > y_1$) і обертається навколо вісі Ox . Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:
$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx;$$

б) плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ і обертається навколо осі Ox . Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:
$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt;$$

в) плоска фігура обмежена кривою, заданою у полярних координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ і обертається навколо полярної вісі. Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюється за формулою:
$$V_\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Задача 13. Обчислити об'єм тіла обертання плоскої фігури обмеженої лініями

а) $xu = 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Фігура обертається навколо осі Ox . Зробимо рисунок

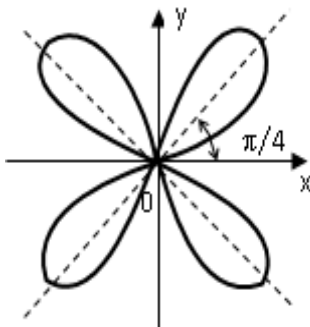


Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою: $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$, де $y = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$.

$$V_x = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^2 = \pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

б) $\rho = \sin 2\varphi$. Фігура обертається навколо полярної вісі. Зробимо рисунок:

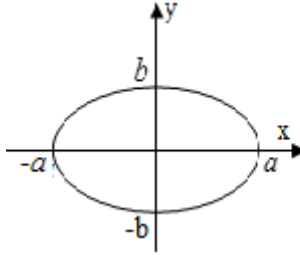


Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою: $V_\varphi = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin \varphi d\varphi$, де $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$V_\varphi = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \cdot \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} 8 \sin^4 \varphi \cdot \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{64\pi}{105}.$$

в) $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$. Фігура обертається навколо осі Ox . Це рівняння еліпса. Зробимо рисунок:



Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури, обчислюємо за

формулою: $V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt$, де $y = b \sin t$, $x' = -a \sin t$,

$t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$ (так як фігура симетрична відносно вісі Oy , подвоїмо результат)

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_{\pi/2}^0 b^2 \sin^2 t (-a \sin t) dt = -2\pi b^2 a \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t dt = \\ &= 2\pi b^2 a \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t) d \cos t = 2\pi b^2 a \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_{\pi/2}^0 = \frac{4}{3} \pi b^2 a. \end{aligned}$$

Координати (x_c, y_c) центра маси плоскої фігури

обчислюються за формулами: $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої фігури, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої фігури ($\gamma(x) = 1$ для однорідної фігури).

а) якщо плоска фігура обмежена лініями: $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$ і $y_2 \geq y_1$), то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \cdot (f_2(x) - f_1(x)) dx, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) \cdot (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx,$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot (f_2(x) - f_1(x)) dx;$$

б) якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \quad M_x = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \cdot x'(t) dt, \quad M_y = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x(t) \cdot x'(t) dt;$$

в) якщо однорідна плоска фігура обмежена кривою, заданою рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi, \quad M_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin \varphi d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \cos \varphi d\varphi.$$

Задача 14. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ та віссю Ox .

Знайдемо M_x , M_y , m за наведеними вище формулами.

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + \frac{3}{2} (1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t) \cos t) dt = \\
&= \frac{a^3}{2} \left(t - 3 \sin t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = \frac{5}{2} a^3 \pi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(t - \sin t) a(1 - \cos t) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (t - \sin t) dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 t dt + \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = a^3 \int_0^{2\pi} t \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt + \\
&+ a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d \cos t = \\
&= a^3 \int_0^{2\pi} t \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt - \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \left[\int t \cos t dt = t \sin t + \cos t; \int t \cos 2t dt = \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right] = \\
&= a^3 \left(\frac{3}{4} t^2 - 2t \sin t - 2 \cos t + \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{8} \cos 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3} a^3 \cdot 0 = \\
&= \frac{3}{4} a^3 \cdot 4\pi^2 = 3a^3 \pi^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\
&= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2 \pi.
\end{aligned}$$

$$x_c = \frac{3a^3\pi^2}{3a^2\pi} = a\pi; \quad y_c = \frac{5a^3\pi}{2 \cdot 3a^2\pi} = \frac{5}{6}a.$$

Координати (x_c, y_c) центра маси плоскої кривої

обчислюються за формулами $x_c = \frac{M_y}{m}$; $y_c = \frac{M_x}{m}$, де m – маса плоскої кривої, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$ – густина плоскої кривої ($\gamma(x) = 1$ – для однорідної кривої).

а) якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad M_x = \int_a^b \gamma(x) f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

б) якщо однорідна плоска крива задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt;$$

в) якщо однорідна плоска крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то m , M_x , M_y знаходимо за формулами:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \quad M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \rho \cos \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Задача 15. Знайти координати центра маси однорідної плоскої дуги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої над віссю Ox .

Знайдемо m , M_x , M_y за наведеними вище формулами. Маємо

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \leq x \leq a. \quad \text{Тоді } y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ і}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$M_x = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_{-a}^a a dx = ax \Big|_{-a}^a = 2a^2,$$

$$M_y = \int_{-a}^a x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{a}{2} \int_{-a}^a \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{a}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \Big|_{-a}^a = 0,$$

$$m = \int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = a \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a\pi.$$

$$\text{Тоді } x_c = \frac{0}{a\pi} = 0, \quad y_c = \frac{2a^2}{a\pi} = \frac{2a}{\pi}.$$

Визначений інтеграл застосовують для знаходження:

а) роботи A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізок $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x) dx;$$

б) шляху S , пройденого точкою за проміжок часу від $t=a$ до $t=b$ зі швидкістю $v(t)$: $S = \int_a^b v(t) dt$;

в) маси m неоднорідного стержня з густиною $\gamma(x)$ на відрізку $[a, b]$: $m = \int_a^b \gamma(x) dx$.

1.1.3 Подвійний інтеграл.

Подвійний інтеграл у декартових координатах записується $\iint_D f(x, y) dx dy$, де $f(x, y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y , D – область інтегрування.

Основні властивості подвійного інтеграла

$$\text{а) } \iint_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dx dy = \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \iint_D f_2(x, y) dx dy ;$$

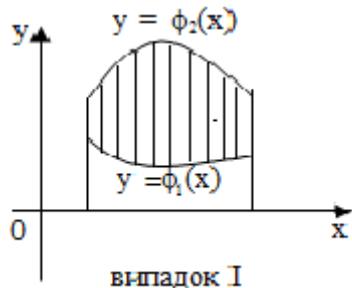
$$\text{б) } \iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ де } k = \text{const};$$

в) Якщо область D розбита на дві області D_1 і D_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів.

Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $x=a$ та $x=b$ ($a < b$) і двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній

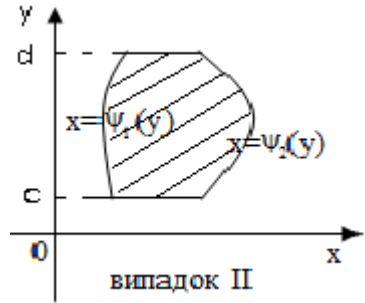


точці, причому $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, то область D називають правильною в напрямі осі Oy . В цьому випадку справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (\text{випадок I}).$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома прямими $y=c$ та $y=d$ ($c < d$) і двома неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою лише в одній точці, причому $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, то область D називають правильною в напрямі осі Ox . В цьому випадку справедлива формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (\text{випадку II}).$$



У випадку I інтеграл по y називають внутрішнім, а по x – зовнішнім; у випадку II – навпаки.

Спочатку знаходимо внутрішній інтеграл, враховуючи, що змінна інтегрування зовнішнього інтеграла є сталою, а потім знаходимо зовнішній інтеграл.

Зауваження: 1) межі інтегрування зовнішнього інтегралу завжди сталі, а межі інтегрування внутрішнього інтегралу у загальному випадку є функціями зовнішньої змінної інтегрування; 2) якщо область D є більш складною, ніж області у випадках I і II, то її необхідно розбити прямими, перпендикулярними до осі Ox (випадок I) або до осі Oy (випадок II) на такі частини, до яких можна застосувати формули наведені вище. Інтеграл по області D буде дорівнювати сумі інтегралів по кожній частині. 3) Якщо область D прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, то межі інтегрування внутрішнього інтегралу є сталими.

В деяких випадках подвійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши від декартової системи координат до полярної системи

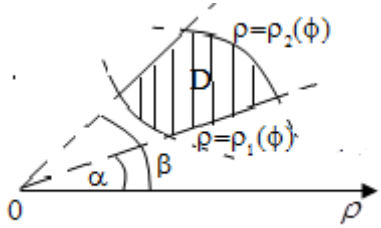
координат. Перехід здійснюється за формулами: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Якщо область інтегрування D обмежена двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) і двома кривими

$$\rho = \rho_1(\varphi) \text{ і } \rho = \rho_2(\varphi)$$

($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:



$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Задача 16. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy$ по прямокутній області інтегрування D : $0 \leq x \leq 1$; $1 \leq y \leq 4$.

Розв'язання.

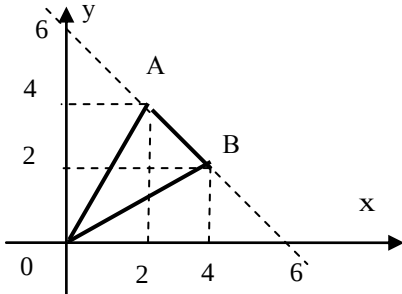
$$\begin{aligned} \iint_D (x^3 - \sqrt{y}) dx dy &= \int_0^1 dx \int_1^4 (x^3 - \sqrt{y}) dy = \int_0^1 \left(x^3 y - \frac{2}{3} y^{3/2} \right) \Big|_1^4 dx = \\ &= \int_0^1 \left(4x^3 - \frac{2}{8} \cdot 8 - x^3 + \frac{2}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(3x^3 - \frac{14}{3} \right) dx = \left(3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{14}{3} x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{14}{3} = \frac{9 - 56}{12} = -\frac{47}{12} \end{aligned}$$

Задача 17. Записати подвійний інтеграл через повторний, якщо область D обмежена лініями: $y = 2x$, $2y - x = 0$, $x + y - 6 = 0$.

Розв'язання. Побудуємо область D . Розв'яжемо системи рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases}. \text{ Дістанемо } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Розв'язками системи є координати точок $A(2;4)$ і $B(4;2)$.



Область D – це трикутник OAB . Розіб'ємо її на дві області: D_1 (трикутник OAC) і D_2 (трикутник CAB). Область D_1 обмежена лініями:

$$y = 2x; x = 2; y = x/2,$$

а область D_2 обмежена лініями:

$$x + y - 6 = 0; y = \frac{x}{2}; x = 2.$$

$$\text{Маємо } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

$$\text{Тоді } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} f(x, y) dy.$$

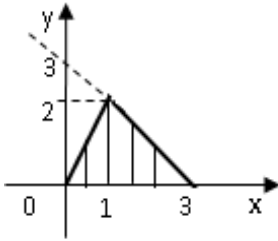
Можна записати подвійний інтеграл через повторний по випадку II.

Задача 18. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^{3-y} f(x, y) dx.$$

Розв'язання: Запишемо рівняння ліній, які обмежують область інтегрування D . Для цього прирівняємо кожен змінну інтегрування

$$\text{до її меж інтегрування: } D: \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = y/2 \\ x = 3 - y \end{cases}. \text{ Намалюємо ці лінії.}$$



Змінити порядок інтегрування – означає перейти від повторного інтегралу випадку I до повторного інтегралу випадку II і навпаки. Маємо повторний інтеграл випадку II. Область D знаходиться між двома прямими $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, перпендикулярними до осі Oy і двома неперервними лініями

$x_1 = y/2$, $x_2 = 3 - y$. Щоб перейти до випадку I, необхідно опустити перпендикуляри на вісь Ox з точок перетину ліній, що обмежують область D . Таких перпендикулярів буде три: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Вони розіб'ють область D на дві частини D_1 і D_2 , для кожної з яких запишемо повторні інтеграли:

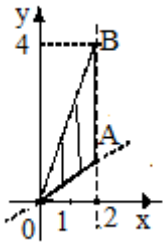
для D_1 маємо $0 \leq x \leq 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2x$;

для D_2 маємо $1 \leq x \leq 3$, $y_1 = 0$, $y_2 = 3 - x$.

$$\text{Тоді: } \int_0^2 dy \int_{y/2}^{3-y} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$\text{Задача 19. Знайти інтеграл } \iint_D (2x + y) dx dy, \text{ де } D: \begin{cases} y = 2x \\ y = x/2 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Розв'язання: Побудуємо область D . Область D – це трикутник OAB . Маємо випадок I, тому що область D знаходиться між двома прямими $x = 0$, $x = 2$, перпендикулярними до осі Ox . Зміну змінної x дивимось зліва направо (від лівого перпендикуляра до правого), а зміну змінної y – знизу вгору (для цього рівняння лінії, через яку “входимо” в область, розв'язуємо відносно змінної y – це нижня межа інтегрування, а рівняння лінії, через яку “виходимо” з області, розв'язуємо відносно змінної y – це верхня межа інтегрування). В нашому випадку $0 \leq x \leq 2$, $y_1 = x/2$, $y_2 = 2x$. Маємо

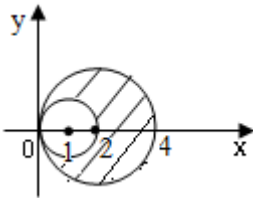


$$\begin{aligned}
 \iint_D (2x + y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} (2x + y) dy = \int_0^2 dx \cdot \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x/2}^{2x} = \\
 &= \int_0^2 \left(2x \cdot 2x + \frac{(2x)^2}{2} - 2x \cdot \frac{x}{2} + \frac{(x/2)^2}{2} \right) dx = \int_0^2 \left(4x^2 + 2x^2 - x^2 + \frac{x^2}{8} \right) dx = \\
 &= \int_0^2 5\frac{1}{8} x^2 dx = \frac{41}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{41}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{41}{3}.
 \end{aligned}$$

Задача 20. Перейшовши до полярних координат, обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, якщо область D обмежена колами: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

Розв'язання:

Побудуємо область D . Для цього запишемо рівняння кіл у канонічному вигляді: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Знайдемо центри і радіуси кіл. У заданому подвійному інтегралі перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді підінтегральна функція матиме вигляд:



$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \\
 &= \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{\rho^2} = \rho.
 \end{aligned}$$

Запишемо рівняння заданих кіл в полярних координатах:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi,$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi.$$

Якщо кут φ змінюватиметься на відрітку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то змінна ρ змінюватиметься від $2 \cos \varphi$ до $4 \cos \varphi$. Тоді подвійний інтеграл запишемо у полярних координатах і обчислимо його через повторний інтеграл:

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iiint_D \rho^2 d\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^3 \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \\
&= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (64 \cos^3 \varphi - 8 \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{56}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \\
&= \frac{112}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d \sin \varphi = \frac{112}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{112}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{224}{9}.
\end{aligned}$$

Застосування подвійних інтегралів

а) обчислення площі плоскої фігури. Площа плоскої області D дорівнює $S = \iint_D dx dy$.

Якщо область D визначена нерівностями $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $a \leq x \leq b$, то площа дорівнює

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Якщо область D визначена нерівностями $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, $c \leq y \leq d$, то площа дорівнює

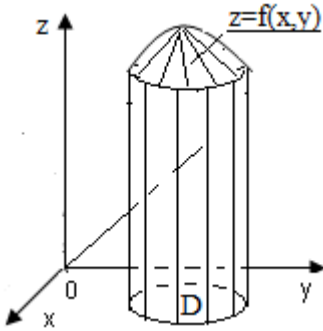
$$S = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx.$$

Якщо область D визначена нерівностями у полярних координатах $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, то площа дорівнює

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho.$$

б) обчислення об'ємів. Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D , що лежить на

площині xOy , а зверху поверхнею $z = f(x, y)$ ($f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$), яка неперервна в області D , знаходиться за формулою:



$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Якщо циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z_2 = f_2(x, y)$, а знизу поверхнею $z_1 = f_1(x, y)$ і проектується на площину xOy в область D , то об'єм обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy.$$

в) обчислення площі поверхні.

Якщо поверхня, яка задана рівнянням $z = f(x, y)$, проектується на площину xOy в область D і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q цієї поверхні знаходять за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy.$$

Якщо поверхня має рівняння виду $x = f(y, z)$, то

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_y(y, z) + f'^2_z(y, z)} dy dz,$$

де D – проекція поверхні на площину yOz .

Якщо поверхня має рівняння виду $y = f(x, z)$, то

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + f'^2_x(x, z) + f'^2_z(x, z)} dx dz,$$

де D – проекція поверхні на площину xOz ;

г) маса плоскої пластини. Нехай на площині xOy пластина має форму замкненої області D , в кожній точці якої відома густина $\gamma = \gamma(x, y)$. Маса такої пластини визначиться за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy ;$$

д) центр маси пластини, статичні моменти. Центр $(x_c; y_c)$ маси пластини обчислюється за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де $M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy$, $M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy$ – статичні моменти пластини відносно осей Ox та Oy відповідно. Якщо пластина однорідна, то густина $\gamma = \text{const}$.

е) моменти інерції пластини. Моменти інерції I_x та I_y пластини відносно координатних осей Ox і Oy обчислюється за формулами:

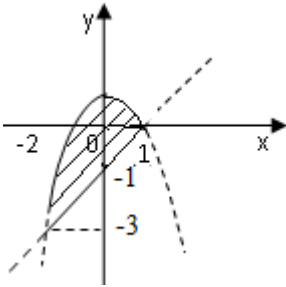
$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy.$$

Зауваження: якщо в формулах для обчислення моментів інерції покласти $\gamma(x, y) = 1$, то одержимо геометричні моменти інерції.

Задача 21. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену лініями: $y = 1 - x^2$; $x - y = 1$.



Розв'язання: Побудуємо плоску фігуру, обмежену заданими лініями. Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x - y = 1 \end{cases} . \text{ Дістанемо } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

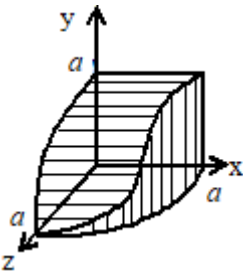
Фігура знаходиться між двома перпендикулярами: $x = -2$ та $x = 1$. В цей

час y змінюється від $y_1 = x - 1$ до $y_2 = 1 - x^2$. Запишемо подвійний інтеграл через повторний (випадок I):

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x-1}^{1-x^2} dy = \int_{-2}^1 dx \cdot y \Big|_{x-1}^{1-x^2} = \int_{-2}^1 (1 - x^2 - x + 1) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + 2 = 5 - \frac{1}{2} = \\ &= 4 \frac{1}{2} \text{ (кв.од.)} \end{aligned}$$

Задача 22. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ та } x^2 + z^2 = a^2 .$$



Розв'язання: Розглянемо восьму частину заданого тіла. Поверхня, яка обмежує її зверху проектується в площину xOy у чверть кола радіуса a з центром в точці O . Зробимо рисунок цієї частини тіла.

Для обчислення об'єму циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz , яке обмежене знизу поверхнею $z_1 = f_1(x, y)$, а зверху – поверхнею $z_2 = f_2(x, y)$ застосовують формулу:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy .$$

В нашому випадку $z_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$, а $z_1 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}V &= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} \, dx dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 \text{ (куб.од).} \end{aligned}$$

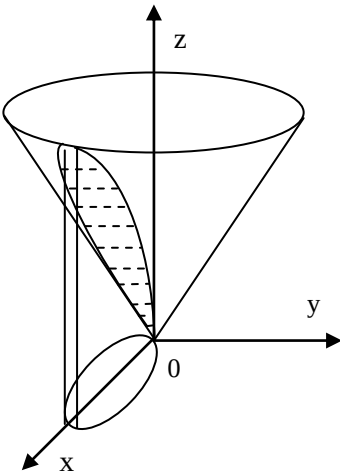
$$\text{Маємо } V = 8 \cdot \frac{2}{3} a^3 = \frac{16}{3} a^3 \text{ (куб.од).}$$

Задача 23. Знайти площу частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, що міститься в середині циліндру $x^2 + y^2 = 2x$.

Розв'язання: Зробимо рисунок поверхні. Площу поверхні обчислимо за формулою:

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx dy,$$

де D – проекція даної поверхні на площину xOy . Розв'яжемо рівняння конуса відносно z : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Знайдемо частинні похідні по x та y :

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Область D у площині xOy є круг, обмежений колом:

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

Знайдемо підінтегральну функцію:

$$\begin{aligned} 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 &= 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \\ &+ \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2, \end{aligned}$$

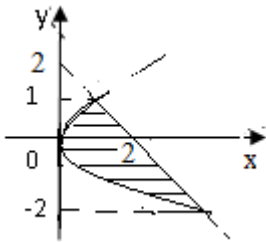
тому $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$.

Так як область інтегрування D є круг, то перейдемо у полярну систему координат: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Запишемо рівняння кола у полярних координатах:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi, \quad \rho = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D \rho d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \rho^2 \Big|_0^{2\cos\varphi} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \varphi d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2} \quad (\text{кв. од.}). \end{aligned}$$

Задача 24. Знайти масу матеріальної пластини, що має форму замкненої області D , обмеженої лініями: $x = y^2$, $x + y = 2$ а густина в кожній точці визначається функцією $\gamma(x, y) = x^2 + y^2$, неперервною в області D .



Розв'язання: Побудуємо область D .

Маса такої пластини визначається за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy.$$

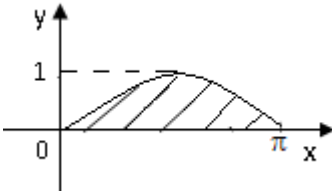
Маємо $-2 \leq y \leq 1$; $x_1 = y^2$; $x_2 = 2 - y$.

$$\begin{aligned} m &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^{2-y} (x^2 + y^2) dx = \\ &= \int_{-2}^1 dy \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{y^2}^{2-y} = \int_{-2}^1 \left(\frac{(2-y)^3}{3} + y^2(2-y) - \frac{y^6}{3} - y^4 \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^1 \left(-\frac{1}{3}(y-2)^3 + 2y^2 - y^3 - \frac{1}{3}y^6 - y^4 \right) dy = \\
&= \left(-\frac{1}{3} \frac{(y-2)^4}{4} + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-2}^1 = \\
&= \frac{-1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} - \frac{1}{5} + \frac{64}{3} + \frac{16}{3} + 4 - \frac{128}{21} - \frac{32}{5} = \frac{639}{35}.
\end{aligned}$$

Задача 25. Знайти центр маси однорідної пластини, обмеженої кривою $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$ та віссю Ox .

Розв'язання: Зробимо рисунок пластини.



Координати $(x_c; y_c)$ центра маси пластини обчислюється за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m},$$

$$\text{де } M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy,$$

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy, \quad m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad \text{Так як пластина однорідна,}$$

то $\gamma(x, y) = \text{const}$. В цьому випадку матимемо:

$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

Обчислимо інтеграли

$$\iint_D dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2,$$

$$\iint_D x dx dy = \int_0^\pi x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi x dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^\pi x \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x, dv = \sin x dx \\ du = dx, v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi,$$

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^{\pi} dx \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Тоді } x_c = \frac{\pi}{2}, y_c = \frac{\pi}{8}.$$

1.1.4 Потрійний інтеграл

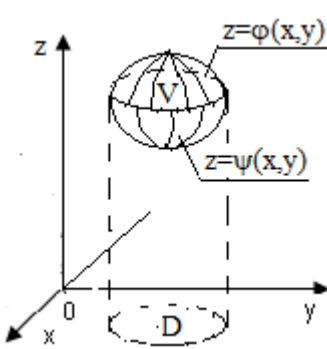
Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах зводиться до обчислення трикратного інтеграла. Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна в замкненій області $V \in \mathbb{R}^3$.

1) Область V є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат: $V: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq k \end{cases}$. Тоді потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^k f(x, y, z) dz$$

Порядок інтегрування в правій частині формули може бути будь-яким.

2) Область V така, що кожна «вертикальна» пряма, зустрічаючи границю області V , має з нею не більше двох спільних точок, а область D – її проекція V на площину xOy . Рівняння поверхонь, що обмежують область V зверху і знизу $z = \phi(x, y)$ та $z = \psi(x, y)$ відповідно. Тоді потрійний інтеграл записується за формулою



$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Якщо область D обмежена лініями:

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}, \text{ то}$$

$$\iint_D dx dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Якщо область D обмежена лініями: $D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$, то

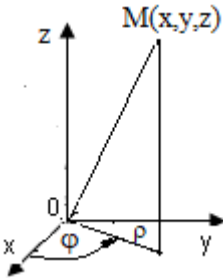
$$\iint_D dx dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

На практиці найбільш вживаними у просторі є циліндричні та сферичні координати.

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.

Якщо область D є сектор, то зручно перейти до циліндричних координат. Перехід здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \\ dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty \leq z \leq \infty \end{cases}.$$

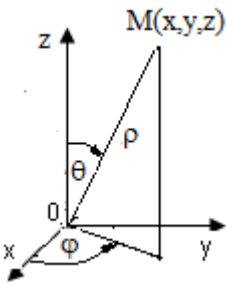


Добуток $\rho d\rho d\varphi dz$ визначає елемент об'єму в циліндричній системі координат.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Якщо область V є частиною сфери, то зручно перейти до сферичних координат. Перехід здійснюється за формулами:



$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \\ dx dy dz = \rho d\rho d\varphi d\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}.$$

Добуток $\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$ визначає елемент об'єму в сферичній системі координат.

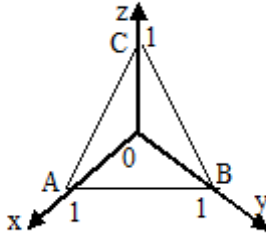
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_1} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$$

Зауваження:
$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \\ \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases}$$

Задача 26. Обчислити $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, якщо область V

обмежена площинами: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання: Область V – піраміда, область D в площині xOy – прямокутний трикутник AOB . Зробимо рисунок області V :



$$\begin{aligned}
 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \bigg|_0^{1-x-y} = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dy = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{(x + y)^2}{2} - \frac{(x + y)^3}{3} - \frac{(1 - x - y)^3}{6} \right] \bigg|_0^{1-x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1 - x)^3}{6} \right] dx = \left(\frac{1}{6}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{(1 - x)^4}{24} \right) \bigg|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

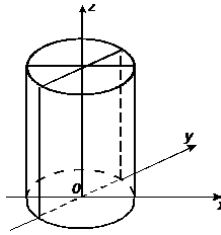
При розв'язуванні деяких задач необхідно використовувати поверхні другого порядку. До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, конічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний та

гіперболічний параболоїди. Розглянемо їх і наведемо канонічні рівняння та вигляд цих поверхонь.

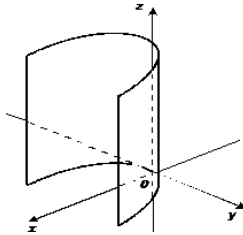
Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. Наприклад, рівняння $f(x, y) = 0$ описує циліндричну поверхню з напрямними в площині xOy і твірними, паралельними осі Oz . Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають **циліндричними поверхнями другого порядку**.

Циліндри поділяються на *еліптичний* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x^2 + y^2 = R^2$

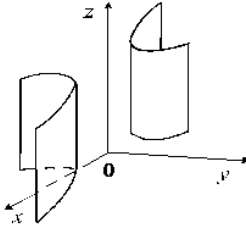
– *круговий* циліндр)



параболічний $y^2 = 2px$

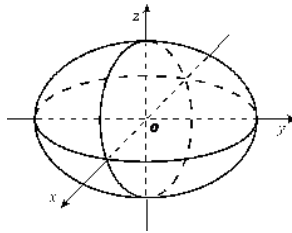


гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої L , називають **поверхнею обертання**. Розглянемо деякі з них.

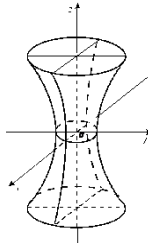
Канонічне рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Числа a, b, c називаються *півосями* еліпсоїда.



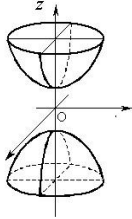
Якщо $a=b=c$ маємо *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з центром в початку координат.

Канонічне рівняння *однопорожнинного гіперболоїда*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

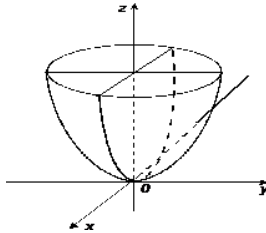


Канонічне рівняння двопорожнинного гіперboloїда

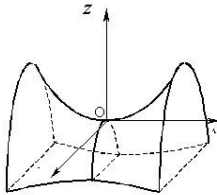
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$


Обидва гіперboloїди є симетричні відносно координатних площин, а початок координат точка O є їх *центром* симетрії. Числа a, b, c називаються *півосями* гіперboloїда.

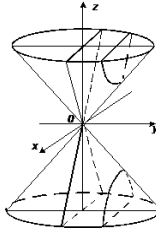
Канонічне рівняння еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$



Канонічне рівняння гіпербolicного параболоїда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$



Канонічне рівняння конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



1.1.5 Криволінійні та поверхневі інтеграли

Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл першого роду (по довжині дуги кривої) це $\int_L f(x, y) dl$, де функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L .

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

а) криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування: $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$;

$$\text{б) } \int_L (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl \pm \int_L f_2(x, y) dl ;$$

$$\text{в) } \int_L k f(x, y) dl = k \int_L f(x, y) dl , \text{ де } k - \text{const} ;$$

г) якщо крива $L = L_1 + L_2$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl .$$

Криволінійний інтеграл першого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу:

а) якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx ;$$

б) якщо крива L задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,
 $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt ;$$

в) у випадку просторової кривої, яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,
 $t \in [t_1, t_2]$, то матимемо

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt .$$

Криволінійний інтеграл першого роду застосовують для знаходження:

а) обчислення довжини кривої AB здійснюється за формулою:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl ;$$

б) якщо циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі Oz , опирається на криву L в площині xOy , а зверху обмежена поверхнею $z = f(x, y)$, то площа такої циліндричної поверхні обчислюється за формулою:

$$Q = \int_L f(x, y) dl ;$$

в) маса матеріальної кривої обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl ,$$

де $\gamma(x, y)$ – лінійна густина;

г) координати $(x_c; y_c)$ центра маси кривої L знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_l x\gamma(x, y)dl}{\int_l \gamma(x, y)dl} \quad \text{і} \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_l y\gamma(x, y)dl}{\int_l \gamma(x, y)dl},$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої відносно осей Ox і Oy . У випадку, коли розглядається однорідна матеріальна крива, слід покласти $\gamma(x, y) = 1$;

д) моменти інерції I_x, I_y, I_0 кривої L відносно осей Ox, Oy і початку координат обчислюються за формулами:

$$I_x = \int_l y^2 \gamma(x, y)dl, \quad I_y = \int_l x^2 \gamma(x, y)dl, \quad I_0 = \int_l (x^2 + y^2) \gamma(x, y)dl$$

Задача 27. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 y dl$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 4$, розміщена в першій чверті ($x \geq 0, y \geq 0$).

Розв'язання: Запишемо рівняння кола у вигляді $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$. Знайдемо $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$: $y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$,

$$dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

$$\text{Тоді } \int_L x^2 y dl = \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} \frac{2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду (по координатах) це $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, де функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ визначені і обмежені на кривій L .

Основні властивості криволінійного інтеграла другого роду:

а) криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ;$$

$$\text{б) } \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L P(x, y)dx + \int_L Q(x, y)dy ;$$

Інші властивості аналогічні властивостям інтеграла першого роду.

Криволінійний інтеграл другого роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу:

а) якщо крива L задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)]dx ;$$

б) якщо крива L задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt ;$$

в) криволінійний інтеграл другого роду залежить від шляху інтегрування:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Якщо в інтегралі $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

маємо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла не залежить від форми кривої

AB , яка сполучає точки A та B і $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, а вираз

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du$ – повний диференціал функції $u(x, y)$.

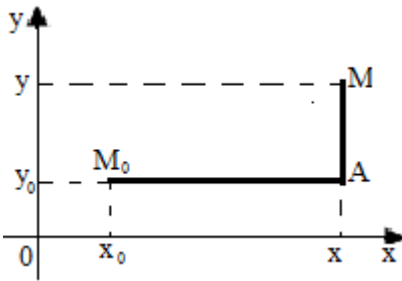
Якщо вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. В цьому випадку можна поновити функцію по її повному диференціалу $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Для цього інтегруємо вираз $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ до довільної точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

Точку M_0 вибираємо так, щоб функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ були визначені в ній.

Виберемо шлях інтегрування від точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$ у вигляді ламаної M_0AM . Координати точки $A(x, y_0)$. Матимемо

$$u(x, y) = \int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$



1) пряма M_0A має рівняння $y = y_0$, $dy = 0$, $x_0 \leq x \leq x$:

$$\int_{M_0A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx;$$

2) пряма AM має рівняння $x = \text{const}$, $dx = 0$, $y_0 \leq y \leq y$:

$$\int_{AM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

Остаточнo маємо

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C.$$

Аналогічно можна отримати, що

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C.$$

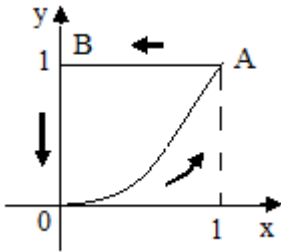
Якщо L – замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними 1-го порядку: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D включаючи межу L , то справедлива формула Гріна:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

де L – замкнений контур, який обмежує область D і обхід його вибирається таким, щоб область D залишалась зліва.

Криволінійний інтеграл другого роду застосовують для знаходження:

а) площі плоскої фігури D , обмеженої кривою L , за формулою:



$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx;$$

б) роботи сили $\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L :

$$A = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Задача 28. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\oint_L x y dx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями:

$$y = x^2, y = 1, x = 0.$$

Розв'язання: Для замкнутого контуру існує лише два напрями обходу: проти руху стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за рухом стрілки годинника (від'ємна орієнтація контуру). При

додатній орієнтації контуру він завжди залишається зліва при його обході.

$$\text{Маємо: } \oint_L xydx + dy = \int_{OA} xydx + dy + \int_{AB} xydx + dy + \int_{BO} xydx + dy.$$

1) рівняння OA : $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $0 \leq x \leq 1$. Тоді

$$\int_{OA} xydx + dy = \int_0^1 x^3 dx + 2xdx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4};$$

2) рівняння AB : $y = 1$, $dy = 0$, x змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int_{AB} xydx + dy = \int_1^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2};$$

3) рівняння BO : $x = 0$, $dx = 0$, y змінюється від 1 до 0. Тоді

$$\int_{BO} xydx + dy = \int_1^0 dy = y \Big|_1^0 = -1.$$

$$\text{Матимемо } \oint_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Задача 29. Впевнитись, що заданий вираз du є повним диференціалом деякої функції і знайти цю функцію за допомогою криволінійного інтегралу:

$$du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy.$$

Розв'язання: З даного виразу випливає, що $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ і $Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$

дійсно є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію за допомогою формули

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

В якості точки (x_0, y_0) можна взяти точку $(0, 0)$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } u(x, y) &= \int_0^x (x^2 + 2x \cdot 0 - 0) dx + \int_0^y (x^2 - 2xy + y^2) dy + C = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y + C = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C. \\ u(x, y) &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 + \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Поверхневі інтеграли.

Поверхневий інтеграл 1-го роду це $\iint_S F(x, y, z) dS$, де

функція $F(x, y, z)$ визначена і обмежені на кусково-гладкій поверхні S .

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і однозначно проектується на площину xOy в область D , то поверхневий інтеграл 1-го роду зводиться до подвійного інтегралу:

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Поверхню S можна проектувати на будь-яку координатну площину, залежно від умов. Подвійний інтеграл змінюється відповідно.

Поняття **поверхневого інтегралу 2-го роду** існує для двосторонньої поверхні.

Це поверхня σ , для якої виконується умова: якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру L , розміщеного на поверхні σ , який не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$. Двостороння

поверхня є орієнтована поверхня (вибрано сторону). Будемо вважати за додатний той напрям обходу контуру L , коли він залишається зліва.

На практиці найпоширенішим є поверхневий інтеграл 2-го роду

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz + \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

де функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені та обмежені в точках поверхні σ .

Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ & = \iint_{\sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma, \end{aligned}$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція поверхні σ на площину xOy . Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz . Якщо кут тупий, то беремо "-".

Аналогічно

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \\ & \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz. \end{aligned}$$

Поверхня σ задана рівняннями $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ відповідно.

D_{yz} , D_{xz} проекції поверхні σ відповідно на площини yOz та xOz

відповідно. Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox , Oy відповідно, а "-" – коли кут тупий.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то одиничний вектор нормалі до поверхні обчислюється за формулою

$$\vec{n} = \pm \frac{(F'_x, F'_y, F'_z)}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

Знак " $\pm$ " відповідає двом сторонам поверхні σ .

1.1.6 Елементи теорії поля

Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт скалярного поля

Скалярне поле задано, якщо кожній точці M поставлено у відповідність певне число $u(M)$. В прямокутній декартовій системі координат у просторі скалярне поле може бути задано функцією $u(M) = u(x, y, z)$.

Похідна скалярного поля $u(M)$ в напрямі l , заданому вектором $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Якщо в просторі вибрана декартова система координат і задано скалярне поле функцією $u(M)$, то градієнт скалярного поля обчислюється за формулою

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Між похідною поля $u(M)$ за напрямом l і градієнтом існує наступний зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{a}^o \cdot \overrightarrow{grad} u = |\overrightarrow{grad} u| \cdot \cos \theta = \text{пр}_{\vec{a}^o} \overrightarrow{grad} u,$$

де $\vec{a}^o = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ – одиничний вектор напрямку l , а θ – кут між градієнтом $\overrightarrow{grad} u$ та вектором $\vec{a}^o$. З попередньої формули випливає, що максимальне значення похідної за напрямом досягається в напрямі градієнта і її значення дорівнює модулю градієнта

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Якщо у тривимірному просторі поверхня задана рівнянням $\varphi(x, y, z) = c$, то градієнт буде перпендикулярний до цієї поверхні в довільній її точці. Тобто нормальний вектор $\vec{n}$ до поверхні може бути записаний у вигляді $\vec{n} = \overrightarrow{grad} \varphi$, а нормальний одиничний вектор буде

$$\vec{n}^o = \frac{\overrightarrow{grad} \varphi}{|\overrightarrow{grad} \varphi|}.$$

Векторне поле. Дивергенція, ротор, циркуляція векторного поля

Якщо кожній точці M деякої області V поставлено у відповідність векторну функцію $\vec{F}(M)$, то кажуть, що в області V задано векторне поле. У прямокутній декартовій системі координат у просторі векторне поле визначається векторною функцією точки:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(\vec{r}) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

де $M(x, y, z)$ – точка простору, а $\vec{r} = (x, y, z)$ – її радіус-вектор.

Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля $\vec{F}(M)$ в точці M називається об'ємна густина потоку векторного поля:

$$\text{div } \vec{F}(M) = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^o d\sigma,$$

де v – об'єм, обмежений замкненою поверхнею σ , яка містить точку M .

В декартовій системі координат дивергенція обчислюється за формулою:

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}.$$

Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається соленоїдальним, якщо $\operatorname{div} \vec{F}(M) = 0$.

Векторному полю $\vec{F}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ можна поставити у відповідність інше векторне поле, яке називається ротором поля $\vec{F}(M)$ і визначається рівністю:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot} F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається потенціальним в однозв'язній області тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{\operatorname{rot} F}(M) = 0$.

Гradient скалярного поля, дивергенція і ротор векторного поля можуть бути записані за допомогою *оператора набла (оператора Гамільтона)*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

$$\text{Тоді } \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = \nabla u, \operatorname{div} \vec{F}(M) = \nabla \cdot \vec{F}(M), \overrightarrow{\operatorname{rot} F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Лінійним інтегралом векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж лінії l називається криволінійний інтеграл $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_l F_s \cdot ds$, де F_s – проекція вектора $\vec{F}$ на дотичну до l . Лінійний інтеграл це робота

векторного поля $\vec{F}(M)$ вздовж лінії l . Враховуючи, що $d\vec{r} = d(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ лінійний інтеграл можна записати: $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

Циркуляцією векторного поля $\vec{F}(M)$ називається лінійний інтеграл вздовж замкнутого контуру l : $\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Формула Остроградського – Гауса

Задано векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку в замкненій області V простору, яка обмежена замкнутою гладкою поверхнею S , то справедлива формула Остроградського – Гауса

$$\oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S . Ліва частина формули може бути записана інакше. Тоді

$$\oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Формулі Остроградського – Гауса можна надати векторний зміст $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^o \cdot ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$, де $\vec{n}^o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – зовнішній нормальний одиничний вектор до поверхні S . За допомогою формули Остроградського – Гауса зручно обчислювати потік векторного поля через замкнену поверхню.

Формула Стокса

Задано векторне поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними 1-го порядку на поверхні S і l – замкнений контур, який обмежує поверхню S , то справедлива формула Стокса

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } a} \cdot \vec{n}^0 dS =$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS$$

Цій формулі можна надати векторний зміст:

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^0 dS.$$

Маємо, що циркуляція по замкненому контуру l дорівнює потоку ротора через поверхню S , яка натягнута на контур l .

Задача 30. Знайти похідну функції $u(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}}{z} - \frac{\sqrt{y}}{x} + 2xyz$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ в т. M_1 та $\overrightarrow{\text{grad } u}(M_1)$, якщо $M_1(1, 1, -1)$, $M_2(-2, -1, 1)$.

Розв'язання: Похідну функції $u = u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ в точці M_1 обчислюємо за формулою:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \cos \gamma,$$

де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-3, -2, 2)$, довжина якого $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17}$. Направні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$: $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{17}}$, $\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}$, $\cos \gamma = \frac{2}{17}$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $u = u(x, y, z)$ в

$$\text{точці } M_1: \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\sqrt{x}}{z^2} + 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} = 1.$$

Маємо:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial M_1 M_2} = -\frac{3}{2} \left(-\frac{3}{\sqrt{17}} \right) - \frac{5}{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{17}} \right) + 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}.$$

Градiєнт функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_1 знайдемо за

$$\text{формулою: } \overrightarrow{\text{grad}} u(M_1) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_1} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_1} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_1} \vec{k}.$$

$$\text{Маємо } \overrightarrow{\text{grad}} u(M_1) = -\frac{3}{2} \vec{i} - \frac{5}{2} \vec{j} + \vec{k}.$$

Задача 31. Знайти похідну скалярного поля $u = y^2 z - 2xyz + z^2$ в точці $M_1(3; 1; 1)$ в напрямі, який йде до точки $M_2(4; 2; 3)$.

Розв'язання: Для знаходження похідної за напрямом скористаємось формулою $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$.

Знайдемо одиничний вектор заданого напрямку: $\vec{a}^o = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (4 - 3; 2 - 1; 3 - 1) = (1; 1; 2), \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

$$\vec{a}^o = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right). \text{ Маємо } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Знайдемо значення частинних похідних в точці M_1 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2yz, \quad \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yz - 2xz, \quad \frac{\partial u(M_1)}{\partial y} = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 = -4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y^2 - 2xy + 2z, \quad \frac{\partial u(M_1)}{\partial z} = 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -3$$

$$\text{Отже маємо } \frac{\partial u(M_1)}{\partial l} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{-12}{\sqrt{6}} = -2\sqrt{6}.$$

Задача 32. Знайти $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)$, $|\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M_0)|$ та $\text{div } \vec{a}(M_0)$ для векторного поля $\vec{a} = x y^2 z^2 \vec{i} + x^2 y z^2 \vec{j} + x y z \vec{k}$, де точка $M_0(2, -1, 1)$.

Розв'язання: За означенням ротор векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходиться за формулою:

$$\overrightarrow{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z} \right) - \\ &- \vec{j} \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} \right) = \\ &= (xz - 2x^2yz) \vec{i} - (yz - 2xy^2z) \vec{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2) \vec{k}. \end{aligned}$$

Знайдемо ротор в точці M_0 і його модуль: $\overrightarrow{rot} \vec{a}(M_0) = 10\vec{i} + 5\vec{j}$,
 $|\overrightarrow{rot} \vec{a}(M_0)| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$.

За означенням, дивергенція векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в довільній точці $M(x, y, z)$ знаходиться за формулою:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \text{ В нашому випадку}$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = y^2z^2 + x^2z^2 + xy.$$

Дивергенція в точці M_0 : $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 4$.

Задача 33. Знайти в точці $M_0(1; 2; -1)$ дивергенцію і ротор векторного поля $\vec{F} = x y^2 \vec{i} + y z^2 \vec{j} + z x^2 \vec{k}$.

Розв'язання: Для заданого векторного поля $P = xy^2$, $Q = yz^2$, $R = zx^2$. Тоді $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2$,

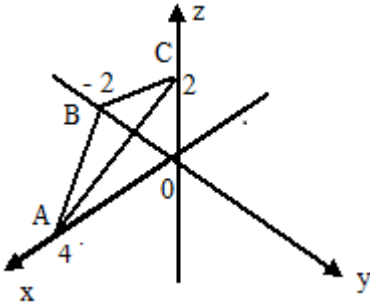
$$\operatorname{div} \vec{F}(M_0) = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (0 - 2yz) \vec{i} + (0 - 2zx) \vec{j} + (0 - 2xy) \vec{k} = -2yz \vec{i} - 2zx \vec{j} - 2xy \vec{k}. \\ \operatorname{rot} \vec{F}(M_0) &= 4 \vec{i} + 2 \vec{j} - 4 \vec{k}. \end{aligned}$$

Задача 34. Обчислити потік векторного поля

$\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x-2y+2z=4$ та координатними площинами, двома способами: а) за означенням; б) за допомогою формули Остроградського - Гауса.

Розв'язання: а) Запишемо рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$ і побудуємо її. Маємо піраміду $OABC$. Обчислимо



потік за допомогою поверхневого інтеграла $\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}^o dS$, де S -

зовнішня поверхня піраміди $OABC$. Обчислимо потік через кожну грань піраміди:

1) $\triangle AOC$ лежить у площині xOz і має рівняння $y=0$. Нормальний

вектор $\vec{n} = (0; 1; 0)$, $\vec{n}^o = \vec{j}$,

$$dS = dx dz. AC: x + 2z = 4; 0 \leq x \leq 4.$$

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^o = 2y - x, \left. \vec{a} \cdot \vec{n}^o \right|_{y=0} = -x$$

Потік через $\triangle AOC$:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_{\Delta AOC} x dS = - \iint_{\Delta AOC} x dx dz = - \int_0^4 x dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dz = - \int_0^4 x \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \\ &= - \left(x^2 - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^4 = - \frac{16}{3}; \end{aligned}$$

2) ΔAOB лежить у площині xOy і має рівняння $z=0$. Нормальний вектор $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Так як мається на увазі зовнішня сторона, то $\vec{n} = (0; 0; -1)$. $\vec{n}^o = -k$, $dS = dxdy$. $AB: x-2y=0$, $0 \leq x \leq 4$.

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^o = -z, \left. \vec{a} \cdot \vec{n}^o \right|_{z=0} = 0.$$

$$\text{Потік через } \Delta AOB : \Pi_2 = \iint_{\Delta AOB} 0 \cdot dxdy = 0;$$

3) ΔBOC лежить у площині yOz і має рівняння $x=0$. Нормальний вектор $\vec{n} = (1; 0; 0)$. Так як мається на увазі зовнішня сторона, то $\vec{n} = (-1; 0; 0)$, $\vec{n}^o = -i$, $dS = dydz$. $BC: -2y+2z=4$, $0 \leq z \leq 2$.

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \cdot \vec{n}^o = -(x+z), \left. \vec{a} \cdot \vec{n}^o \right|_{x=0} = -z.$$

Потік через ΔBOC :

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= - \iint_{\Delta BOC} z dy dz = - \int_0^2 z dz \int_{z-2}^0 dy = - \int_0^2 z (-z+2) dz = \\ &= - \left(-\frac{z^3}{3} + z^2 \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}; \end{aligned}$$

4) ΔABC належить площині $x-2y+2z-4=0$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Знайдемо орт нормального вектора:

$\vec{n}^o = \frac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}}{3}$. Диференціал поверхні визначається

формулою: $dS = \sqrt{1+z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$. Маємо $z = -\frac{1}{2}x + y + 2$ і $z'_x = -\frac{1}{2}$, $z'_y = 1$. Тоді $dS = \sqrt{1+\frac{1}{4}+1} dx dy = \frac{3}{2} dx dy$.

Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{3}[x + z - 2(2y - x) + 2z] = \frac{1}{3}(3x - 4y + 3z)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{n}^o \Big|_{z=-\frac{1}{2}x+y+2} = \frac{1}{3} \left(3x - 4y - \frac{3}{2}x + 3y + 6 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right).$$

Слід площини ABC в площині xOy – це пряма $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow x = 2y + 4$, $-2 \leq y \leq 0$. Потік через ΔABC :

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \iint_{\Delta ABC} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) \cdot \frac{3}{2} dx dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \int_0^{2y+4} \left(\frac{3}{2}x - y + 6 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 dy \left(\frac{3}{4}x^2 + (6-y)x \right) \Big|_0^{2y+4} = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (y^2 + 20y + 36) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} + 10y^2 + 36y \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{52}{3}. \end{aligned}$$

Потік через повну поверхню піраміди $OABC$:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{32}{3}.$$

б) за формулою Остроградського – Гауса: $\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$, де

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}, \quad \operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+z)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2y-x)}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

$\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 2 + 1 = 4$. Інтеграл $\iiint_V dx dy dz$ дорівнює об'єму піраміди

$OABC$. Маємо:

$$V = \frac{1}{3} S_{AOB} \cdot CO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot CO = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

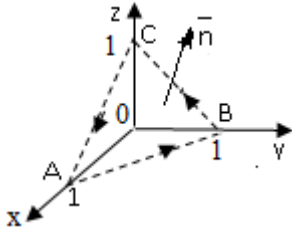
$$\text{Тоді } \Pi = 4 \iiint_V dx dy dz = 4 \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Задача 35. Обчислити циркуляцію векторного поля

$\vec{a}(M) = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ по контуру трикутника, який з'являється внаслідок перетину площини $x + y + z = 1$ з координатними площинами, при додатному напрямку обходу відносно нормального вектора $\vec{n} = (1, 1, 1)$ цієї площини двома способами: а) за означенням; б) за формулою Стокса.

Розв'язання: Побудуємо площину $x + y + z = 1$, маємо $\triangle ABC$.

а) за означенням циркуляція



$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_{ABCA} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \\ &+ \int_{CA} \vec{a} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

1) на відрізку AB маємо: $z = 0$, $x + y = 1$,
 $y = 1 - x$, $dy = -dx \Rightarrow$

$$\vec{a} = x\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}, \quad d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy,$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = x dx + (x + 3y) dy.$$

$$\Pi_1 = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} x dx + (x + 3y) dy = \int_0^1 (x - x - 3(1 - x)) dx =$$

$$= \int_1^0 (3x - 3) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - 3x \right) \Big|_1^0 = \frac{3}{2};$$

2) на відрізку BC маємо: $x = 0$, $y + z = 1$, $z = 1 - y$, $dz = -dy \Rightarrow$

$$\vec{a} = -2z \vec{i} + (3y + z) \vec{j} + y \vec{k}, \quad \vec{dr} = \vec{j} dy + \vec{k} dz,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{dr} = (3y + z) dy + y dz.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_{BC} (3y + z) dy + y dz = \int_1^0 (3y + 1 - y - y) dy = \\ &= \int_0^1 (y + 1) dy = \frac{(y + 1)^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{3}{2}; \end{aligned}$$

3) на відрізку CA маємо: $y = 0, x + z = 1, dz = -dx \Rightarrow$

$$\vec{a} = (x - 2z) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + 5x \vec{k}, \quad \vec{dr} = \vec{i} dx + \vec{k} dz,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{dr} = (x - 2z) dx + 5x dz$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &= \int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \int_{CA} (x - 2z) dx + 5x dz = \int_0^2 (x - 2 + 2x - 5x) dx = \\ &= \int_0^1 (-2x - 2) dx = \left(-x^2 - 2x \right) \Big|_0^1 = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Маємо } \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса:

$$\mathcal{I} = \oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot \vec{dr} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} \cdot \vec{n}^o dS,$$

$$\text{де } \vec{a} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Ротор векторного поля обчислюємо за формулою:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Якщо поверхня S проектується у площину xOy , то

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Знайдемо ротор заданого векторного поля

$$\overrightarrow{rot} \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2z & x+3y+z & 5x+y \end{vmatrix} = -7\vec{j} + \vec{k}$$

В нашому випадку поверхня S – частина площини, обмеженої $\triangle ABC$, який лежить у площині $x + y + z = 1$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (1; 1; 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні. Орт

$$\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1; 1; 1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; 1).$$

$$\text{Знайдемо } \overrightarrow{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{3}}(-7 + 1) = -\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

З рівняння площини маємо:

$$z = 1 - x - y, \quad z'_x = -1, \quad z'_y = -1, \quad dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ = \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

$$I = \iint_S \frac{-6}{\sqrt{3}} dS = \iint_{\triangle AOB} \frac{-6}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dx dy = -6 \iint_{\triangle AOB} dx dy.$$

Інтеграл $\iint_{\triangle AOB} dx dy$ дорівнює площі $\triangle AOB$:

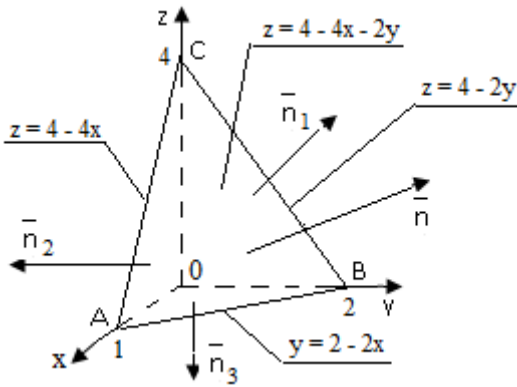
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тоді } I = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3.$$

Задача 36. а) Обчислити за формулою Остроградського – Гауса потік векторного поля $\vec{F} = (x^2 - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через повну зовнішню поверхню трикутної піраміди, яка обмежена поверхнями $4x + 2y + z - 4 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. б) Обчислити за формулою Стокса циркуляцію векторного поля по сторонах трикутника ABC в додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця нормального вектора).

Розв'язання: Запишемо рівняння площини $4x + 2y + z - 4 = 0$ у

відрізках $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ і побудуємо її. Маємо піраміду $OABC$ з



вершинами у точках $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 4)$.

а) Обчислимо потік через повну поверхню користуючись формулою Остроградського – Гауса. Для цього знайдемо для векторного поля дивергенцію:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 0 + 0 = 2x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 2x \, dx \, dy \, dz = 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{4-4x-2y} dz = \\ &= 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} z \Big|_0^{4-4x-2y} dy = 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{2-2x} (4-4x-2y) dy = \\ &= 2 \int_0^1 x \cdot \left((4-4x)y - y^2 \right) \Big|_0^{2-2x} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 x \cdot \left((4-4x) \cdot (2-2x) - (2-2x)^2 \right) dx = 2 \int_0^1 x \cdot (4x^2 - 8x + 4) dx = \\
&= 2 \int_0^1 (4x^3 - 8x^2 + 4x) dx = 2 \cdot \left(x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 \right) \Big|_0^1 = 2 \cdot \left(1 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

б) Знайдемо циркуляцію користуючись формулою Стокса

$$\Pi = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^o dS,$$

де поверхня S натягнута на контур l . За поверхню S візьмемо поверхню, яка складається з трикутників ABO, BOC, AOC . Напрям нормалей на цих трикутниках буде співпадати з напрямом осей координат. Знайдемо вектор $\overrightarrow{\text{rot } F}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot } F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2z & 3z - 4x & 5x + y \end{vmatrix} = \\
&= \vec{i} \left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(3z-4x)}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial(5x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-2z)}{\partial z} \right) + \\
&+ \vec{k} \left(\frac{\partial(3z-4x)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2-2z)}{\partial y} \right) = \vec{i} (1-3) - \vec{j} (5+2) + \vec{k} (-4) = \\
&= -2\vec{i} - 7\vec{j} - 4\vec{k}.
\end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \Pi = \iint_S \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^o dS = \iint_{BOC+AOC+AOB} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}^o dS = \iint_{BOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n}_1^o dS +$$

$$+ \iint_{AOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \overrightarrow{n_2}^o dS + \iint_{AOB} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \overrightarrow{n_3}^o dS$$

На поверхні BOC нормальний одиничний вектор $\overrightarrow{n_1}^o = \vec{i}$, елемент поверхні $dS = dy dz$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \iint_{BOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \overrightarrow{n_1}^o dS = -2 \iint_{D_{yz}} dy dz = -2 \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dz = -2 \int_0^2 z \Big|_0^{4-2y} dy = \\ &= -2 \int_0^2 (4-2y) dy = \frac{1}{2} (4-2y)^2 \Big|_0^2 = -8. \end{aligned}$$

На поверхні AOC нормальний одиничний вектор $\overrightarrow{n_2}^o = \vec{j}$, елемент поверхні $dS = dx dz$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \iint_{AOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \overrightarrow{n_2}^o dS = -7 \iint_{D_{xz}} dx dz = -7 \int_0^1 dx \int_0^{4-4x} dz = -7 \int_0^1 z \Big|_0^{4-4x} dx = \\ &= -7 \int_0^1 (4-4x) dx = \frac{7}{8} (4-4x)^2 \Big|_0^1 = -14. \end{aligned}$$

На поверхні AOB нормальний одиничний вектор $\overrightarrow{n_3}^o = \vec{k}$, елемент поверхні $dS = dx dy$. Тому

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &= \iint_{BOC} \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \overrightarrow{n_3}^o dS = -4 \iint_{D_{yz}} dx dy = -4 \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy = -4 \int_0^1 y \Big|_0^{2-2x} dx = \\ &= -4 \int_0^1 (2-2x) dx = (2-2x)^2 \Big|_0^1 = -4. \end{aligned}$$

Таким чином маємо: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 = -8 - 14 - 4 = -26$.

Можна спростити обчислення циркуляції, якщо врахувати $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$ і контур l – це трикутник ABC , який належить площині $4x + 2y + z - 4 = 0$. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (4; 2; 1)$ забезпечує потрібний напрям орієнтації поверхні.

Орт цього вектора $\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(4; 2; 1)}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(4; 2; 1)$.

$$\text{Знайдемо } \vec{rot} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{21}}(-8 - 14 - 4) = -\frac{26}{\sqrt{21}}.$$

З рівняння площини матимемо: $z = 4 - 4x - 2y$. Тоді $z'_x = -4$, $z'_y = -2$.

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 16 + 4} dx dy = \sqrt{21} dx dy.$$

$$I = \iint_S \frac{-26}{\sqrt{21}} dS = \iint_{\Delta AOB} \frac{-26}{\sqrt{21}} \sqrt{21} dx dy = -26 \iint_{\Delta AOB} dx dy.$$

Інтеграл $\iint_{\Delta AOB} dx dy$ дорівнює площі ΔAOB :

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Тоді $I = -26 \cdot 1 = -26$.