

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та виконання РГЗ №4
з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки"
"Перехідні процеси у лінійних електричних колах" (IV модуль)
для студентів, які навчаються за спеціальністю
141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка",
всіх форм навчання

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання РГЗ №4 з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" " Перехідні процеси у лінійних електричних колах " (IV модуль) для студентів, які навчаються за спеціальністю 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка", всіх форм навчання / Укл.: В.В. Козлов, О.В. Набокова. - Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2020. - 38 с.

Укладачі: В.В. Козлов, доцент, к.т.н.
О.В. Набокова, доцент

Рецензент: С.М. Тиховод, доцент, д.т.н.

Відповідальний за випуск: В.В. Козлов, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри ТЗЕ
Протокол №6
від "04" березня 2020 року

Рекомендовано до видання
НМК Електротехнічного
факультету
Протокол №6
від "04" квітня 2020 року

ЗМІСТ

Загальні вказівки	5
1 Короткі теоретичні відомості	6
1.1 Виникнення перехідних процесів	6
1.2 Закони комутації. Початкові умови	8
1.3 Алгоритм визначення залежних початкових умов за допомогою законів Кірхгофа	9
1.4 Послідовність розрахунку перехідних процесів у електричних колах класичним методом	9
1.4.1 Розрахунок усталеного режиму електричного кола до комутації	9
1.4.2 Розрахунок усталеного режиму електричного кола після комутації	10
1.4.3 Визначення початкових умов	10
1.4.4 Розрахунок вільних складових струмів і напруг	11
1.5 Послідовність розрахунку перехідних процесів у електричних колах операторним методом	13
1.5.1 Вступ до операторного методу	13
1.5.2 Зображення напруги на індуктивному елементі	13
1.5.3 Зображення напруги на ємнісному елементі	14
1.5.4 Закон Ома в операторній формі	15
1.5.5 Закони Кірхгофа в операторній формі	16
1.5.6 Еквівалентні операторні схеми заміщення	18
1.5.7 Загальна схема розрахунку перехідних процесів операторним методом	19
1.5.8 Переваги й недоліки класичного й операторного методів розрахунку перехідних процесів	20
2 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ	21
3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ	22
4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ Й ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ	24
4.1 Приклад розрахунку перехідного процесу електричного кола постійного струму з двома накопичувачами класичним методом	24
4.1.1 Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом у випадку різних дійсних коренів	24

4.1.2 Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом у випадку комплексних спряжених коренів	28
4.2 Приклад розрахунку перехідного процесу електричного кола постійного струму з двома накопичувачами операторним методом	30
4.2.1 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом у випадку різних дійсних коренів	30
4.2.2 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом у випадку комплексних спряжених коренів	34
4.3 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів	
4.3.1 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів у випадку різних дійсних коренів	36
4.3.2 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів у випадку комплексних спряжених коренів	37
ЛІТЕРАТУРА	38

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Одним з найбільш важливих етапів самостійної роботи студентів при вивченні ТОЕ є виконання розрахунково-графічних робіт, які допомагають засвоєнню матеріалу курсу.

Перш ніж приступити до виконання даної розрахунково-графічної роботи, необхідно твердо засвоїти основні визначення електричних величин, а також поняття й закони, якими встановлюється зв'язок між ними.

Варто повторити необхідні розділи теоретичного курсу за конспектом лекцій, даними методичним вказівкам і рекомендованою літературою, і пригадати з курсу математики матричну форму запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь і прийоми її розрахунку.

При виконанні й оформленні розрахунково-графічної роботи необхідно дотримуватися наступних основних вимог:

- роботу оформляють на стандартних аркушах паперу формату А4, що скріплені між собою;
- обкладинкою служить титульний аркуш, на якому вказують навчальний заклад і кафедра, номер, назву й варіант розрахунково-графічної роботи, номер групи, прізвище студента й прізвище викладача;
- на першій сторінці вказують номер і назву завдання, викреслюється схема електричного кола заданого варіанта, наводять вихідні параметри й перераховують вимоги з розрахунку. Така сторінка передує кожній задачі розрахунково-графічної роботи;
- кожен етап розрахунку повинен мати свій заголовок, обчислення й алгебраїчні перетворення супроводжують короткими поясненнями, біля остаточного результату проставляють розмірність;
- у тексті розрахунково-графічної роботи не допускається скорочення слів, крім загальноприйнятих скорочень, таких як ЕРС, ККД і т.д.;
- графіки виконують з дотриманням загальноприйнятих інженерних вимог. По осях наносять рівномірні масштабні шкали. Наприкінці шкали вказується позначення змінної і її розмірність. Координатні системи для різних функцій, що побудовані від одної змінної, повинні розташовуватися на одній сторінці й бути сполучені по осях абсцис;
- при розв'язанні задач необхідно використовувати міжнародну систему одиниць;
- допускається застосовувати в розрахунках математичні пакети програм і наводити в роботі графіки, що побудовані на комп'ютері з дотриманням відповідних вимог.

1 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Виникнення перехідних процесів

В попередніх РГР розглядалися усталені режими лінійні кола постійного та синусоїдного струму. При цьому в колах постійного струму мали місце незмінні в часі постійні струми й напруги, а в колах синусоїдного струму - струми й напруги, що змінюються в часі за гармонійним (синусоїдним) законом. Самі електричні кола при цьому не змінювалися.

У реальних електричних колах можуть відбуватися вмикання й вимикання елементів, короткі замикання окремих ділянок, різні переключення та раптові зміни параметрів. У результаті таких змін, які називаються комутаційними або просто *комутаціями*, відбувається перехід з одного усталеного стану в інший усталений стан. Теоретично можна вважати, що комутації відбуваються миттєво, тобто на вмикання, вимикання або переключення кола часу не витрачається. Цей перехід супроводжується складними електромагнітними явищами, які поєднують терміном "*перехідний процес*". Якщо немає спеціальних вказівок, вважається, що початок відліку часу перехідного процесу починається з моменту комутації $t = 0$. Цей момент часу безпосередньо перед комутацією позначається 0_- , а відразу після комутації 0_+ .

Хоча комутації відбуваються миттєво, проте, перехід від вихідного стану до наступного відбувається не миттєво, а протягом деякого часу. Це обумовлені наявністю в електричних колах індуктивних й ємнісних елементів (накопичувачів енергії). Кожному стану кола відповідає певний запас енергії електричних і магнітних полів. Перехід від одного режиму до іншого пов'язаний зі зміною енергії цих полів.

Розглянемо індуктивний елемент. При протіканні по ньому струму i_{L1} , створюється магнітний потік і запасастся енергія магнітного поля

$$\Phi_1 = \frac{Li_{L1}}{w}; \quad W_{m1} = \frac{Li_{L1}^2}{2}. \quad (1.1)$$

Якщо струм в індуктивному елементі зміниться до значення i_{L2} , то новий стан кола буде характеризуватися новими значеннями магнітного потоку й енергії магнітного поля

$$\Phi_2 = \frac{Li_{L2}}{w}; \quad W_{m2} = \frac{Li_{L2}^2}{2}. \quad (1.2)$$

Якби зміна струму в індуктивному елементі здійснювалося миттєво (тобто стрибком), то це привело б до виникнення нескінченно великої ЕРС самоіндукції та джерело живлення кола повинно було б мати нескінченно велику потужність

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L \frac{di_L}{dt} \rightarrow \infty; \quad p = \frac{dW_M}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt} \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Оскільки ЕРС самоіндукції й потужність джерела в реальних колах мають кінцеві значення, то перехід від одного стану кола з індуктивним елементом до іншого потребує деякого часу.

Розглянемо ділянку кола, що містить ємнісний елемент. Якщо до затискачів цього елемента прикладена напруга u_{C1} , то на його електродях утримується заряд і запасається енергія електричного поля

$$q_1 = Cu_{C1}; \quad W_{e1} = \frac{Cu_{C1}^2}{2}. \quad (1.4)$$

Якщо напруга на його затискачах зміниться до значення u_{C2} , то новий стан буде характеризуватися новими значеннями заряду й енергії електричного поля

$$q_2 = Cu_{C2}; \quad W_{e2} = \frac{Cu_{C2}^2}{2}. \quad (1.5)$$

Якби перехід здійснювався миттєво, то це призвело б до виникнення нескінченно великого зарядного (або розрядного струму) та джерело живлення кола повинно було б мати нескінченно велику потужність

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow \infty; \quad p = \frac{dW_e}{dt} = Cu_C \frac{du_C}{dt} \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Оскільки струм й потужність джерела в реальних колах мають кінцеві значення, то перехід від одного стану кола з ємнісним елементом до іншого стану потребує деякого часу.

Розрахувати перехідний процес - це значить визначити характер зміни в часі відповідних електричних величин - струмів або напруг.

Розрахунок перехідних процесів у лінійних колах спрощується, якщо перехідний процес розглядати як результат накладення двох процесів: першого - нового усталеного режиму, вважаючи, що він на-

стає миттєво після комутації, і другого - вільного процесу, що забезпечує перехід кола від одного режиму до нового усталеного режиму.

Реальні струми та напруги у колі протягом перехідного процесу можна представити у вигляді суми двох складових: усталеної й вільної

$$\dot{i} = i_y + i_g; \quad u = u_y + u_g. \quad (1.7)$$

Для завершення перехідного й настання усталеного режиму теоретично потрібно нескінченно великий час. Практично час перехідного процесу визначається малим інтервалом, по завершенню якого струми й напруги настільки наближаються до усталених значень, що різниця виявляється практично невідчутною.

1.2 Закони комутації. Початкові умови

Висловлені раніше припущення про те, що запаси енергії магнітного й електричного поля можуть змінюватися тільки плавно, без стрибків, виражають принципи безперервності в часі потокозчеплення ψ індуктивного елемента й електричного заряду q ємнісного елемента.

Неможливість стрибкоподібної зміни потокозчеплення виражає перший закон комутації: струм у вітці, що містить індуктивний елемент незмінної індуктивності L , не може змінюватися стрибком

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad (1.8)$$

де $t = 0_-$ й $t = 0_+$ - момент часу, відповідно, до й після комутації.

Неможливість стрибкоподібної зміни електричного заряду виражає другий закон комутації: напруга на ємнісному елементі незмінної ємності C , не може змінюватися стрибком

$$u_C(0_-) = u_C(0_+). \quad (1.9)$$

Незалежними початковими умовами (або просто початковими умовами) називають значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруги на ємнісних елементах при $t = 0$, тобто ті значення, які відповідно до законів комутації, не можуть змінитися стрибкоподібно. Вони характеризують енергію магнітних й електричних полів, яка запасена в елементах кола до моменту комутації й для розрахунку перехідного процесу обов'язково потрібне знання цих початкових умов.

Значення усіх інших струмів і напруг та їх похідних при $t = 0+$ називають *залежними початковими умовами*. Залежні початкові умови визначаються з розгляду законів Кірхгофа, що складені для кола після комутації з обліком незалежних початкових умов.

1.3 Алгоритм визначення залежних початкових умов за допомогою законів Кірхгофа

1. Визначаємо незалежні початкові умови. Для цього для електричного кола до комутації, використовуючи відомі розрахункові методи, розраховують миттєві значення струмів в індуктивних елементах $i_L(0_-)$ і напруг на ємнісних елементах $u_C(0_-)$, а потім з використанням законів комутації $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ й $u_C(0_+) = u_C(0_-)$.

2. Визначаємо залежні початкові умови. Для цього:

- для електричного кола після комутації складають рівняння на підставі законів Кірхгофа, які потім розглядають для моменту часу $t = 0_+$, з обліком незалежних початкових умов;

- отриману систему рівнянь розв'язують щодо шуканих струмів і напруг;

- при необхідності визначення першої та другої похідних шуканих струмів і напруг для моменту часу $t = 0_+$ рівняння на підставі законів Кірхгофа спочатку диференціюють, а потім розглядають для моменту часу $t = 0_+$ й розв'язують щодо шуканих похідних цих величин.

1.4 Послідовність розрахунку перехідних процесів у електричних колах класичним методом

У класичному методі розв'язання для перехідного струму або напруги шукають окремо для усталеної та вільної складових (1.7).

Порядок розрахунку має наступний алгоритм.

1.4.1 Розрахунок усталеного режиму електричного кола до комутації

На цьому етапі визначають незалежних початкових умов, тобто миттєві значення струмів крізь індуктивні елементи та напруг на ємнісних елементах безпосередньо перед комутацією.

Розрахунки виконуються з розгляду схеми електричного кола до комутації за допомогою відомих методів розрахунків усталених режимів електричних кіл постійного та синусоїдного струму. В останньому випадку спочатку розраховують закони зміни $i_L(t)$, $U_C(t)$, а потім їх значення в момент часу $t(0_-)$.

1.4.2 Розрахунок усталеного режиму електричного кола після комутації

На цьому етапі визначають усі величини, які обумовлені умовою задачі.

Розрахунки виконуються з розгляду схеми електричного кола після комутації за допомогою відомих методів розрахунків усталених режимів електричних кіл постійного та синусоїдного струму.

Якщо електричне коло містить більш одного реактивного елемента, то крім законів зміни струмів і напруг потрібно визначити закони зміни похідних цих величин в усталеному режимі $i_y(t)$, $u_y(t)$,

$\frac{di_y}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$. Порядок похідних, закони зміни яких потрібно визначити,

на 1 менше кількості незалежних реактивних елементів.

У кінці цього етапу потрібно визначити значення цих величин безпосередньо після комутації $i_y(0_+)$, $u_y(0_+)$, $\frac{di_y}{dt}(0_+)$, $\frac{du_y}{dt}(0_+)$.

На цьому етапі також виконується порівняння значень $i_{L_y}(0_+)$ і $i_{L_y}(0_-)$ та $u_{C_y}(0_+)$ і $u_{C_y}(0_-)$. Якщо хоча б у одній парі значень є відмінності, то у електричному колі обов'язково виникає перехідний процес і потрібно виконати наступні етапи розрахунку перехідних струмів та напруг. Якщо для усіх пар значень відмінностей немає, тобто $i_{L_y}(0_-) = i_{L_y}(0_+)$, $u_{C_y}(0_-) = u_{C_y}(0_+)$, то новий режим установлюється без перехідного процесу і подальші розрахунки не потрібні.

1.4.3 Визначення початкових умов

Розрахунок незалежних початкових умов виконуємо на підставі законів комутації (1.8) та (1.9).

Для визначення залежних початкових умов складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень для електричного кола після комутації. В цих рівняннях незалежні початкові умови враховуються як відомі величини. Розв'язавши систему, визначаємо струми та напруги, які відносяться до залежних початкових умов.

Якщо електричне коло містить два незалежних реактивних елемента, то крім значень струмів і напруг безпосередньо після комутації потрібно визначити значення перших похідних цих величин. Для цьо-

го складаємо шляхом диференціювання попередніх рівнянь. При цьому використовуємо співвідношення

$$\frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{u_L(0_+)}{L}; \quad \frac{du_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C}. \quad (1.10)$$

Розв'язавши отриману систему визначаємо необхідні початкові умови.

1.4.4 Розрахунок вільних складових струмів і напруг

Розрахунок починаємо з складання характеристичного рівняння та знаходження його коренів використовуючи відомі методи:

- з системи диференціальних рівнянь, яка описує електричне коло після комутації, після їх алгебраїзації;
- за допомогою вхідного опору відносно двох довільних точок електричного кола після комутації.

Розв'язавши характеристичне рівняння, отримаємо корені характеристичного рівняння, які визначають вигляд вільної складової.

Якщо електричне коло має один реактивний елемент, то характеристичне рівняння буде першого порядку і матиме один дійсний від'ємний корінь p . Вид вільної складової

$$i_g = Ae^{pt}, \quad (1.11)$$

де A - постійна інтегрування.

Якщо електричне коло має два реактивних елемента, то характеристичне рівняння буде другого порядку і матиме два корені, вид яких залежить від параметрів кола. В залежності від виду коренів вільна складова має різний вигляд

- корені p_1, p_2 різні, дійсні, від'ємні

$$i_g = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (1.12)$$

- корені $p = p_1 = p_2$ рівні, дійсні, від'ємні

$$i_g = (A_1 + A_2 t) e^{pt}, \quad (1.13)$$

- корені $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_g$ комплексно спряжені, з від'ємною дійсною частиною

$$i_g = (A_1 \cos \omega_g t + A_2 \sin \omega_g t) e^{-\delta t} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_g t + \psi), \quad (1.14)$$

де A_1, A_2, A, ψ - постійні інтегрування.

Постійні інтегрування визначаємо за початкових умов. В залежності від виду вільної складової використовуємо наступні співвідношення:

для випадку (1.11)

$$A = i_e(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+), \quad (1.15)$$

для випадку (1.12)

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = i_e(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+) \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{di_e}{dt}(0_+) = \frac{di}{dt}(0_+) - \frac{di_y}{dt}(0_+) \end{cases}, \quad (1.16)$$

для випадку (1.13)

$$\begin{cases} A_1 = i_e(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+) \\ pA_1 + p_2 A_2 = \frac{di_e}{dt}(0_+) = \frac{di}{dt}(0_+) - \frac{di_y}{dt}(0_+) \end{cases}, \quad (1.17)$$

для випадку (1.14)

$$\begin{cases} A_1 = i_e(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+) \\ pA_1 + A_2 = \frac{di_e}{dt}(0_+) = \frac{di}{dt}(0_+) - \frac{di_y}{dt}(0_+) \end{cases} \quad (1.18)$$

для випадку (1.15)

$$\begin{cases} A_1 = i_e(0_+) = i(0_+) - i_y(0_+) \\ -\delta A_1 + \omega_e A_2 = \frac{di_e}{dt}(0_+) = \frac{di}{dt}(0_+) - \frac{di_y}{dt}(0_+) \end{cases} \quad (1.19)$$

Розв'язуємо рівняння (1.15-1.19) та визначивши постійні інтегрування, записуємо вільну складову струму. Розрахунок вільних складових напруг виконуємо за аналогічними рівняннями.

Враховуючи усталені та вільні складові струмів і напруг, які визначені згідно з методикою розділів 1.4.2 і 1.4.4, записуємо кінцеві розв'язання у вигляді суми цих складових (1.7).

Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом для електричного кола з двома реактивними елементами для випадків з дійними різними та комплексними спряженими коренями наведено у розділі 4.

1.5 Послідовність розрахунку перехідних процесів у електричних колах операторним методом

1.5.1 Вступ до операторного методу

Класичний метод розрахунку перехідних процесів вимагає в загальному випадку багаторазового розв'язання систем алгебраїчних рівнянь для знаходження значень функцій і її похідних. У міру ускладнення електричних кіл і зростання порядку диференціальних рівнянь труднощі, які пов'язані зі знаходженням постійні інтегрування, збільшуються.

Тому для інженерної практики більше зручним є метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, при якому задані початкові умови включаються у вихідні рівняння й для знаходження шуканих функцій не потрібно додатково визначати постійні інтегрування. Таким методом є операторний метод, який ґрунтується на перетворенні Лапласа.

Сутність операторного методу полягає в тім, що деякій заданій однозначній функції дійсної змінної (наприклад, часу), що називається оригіналом, ставиться у відповідність функція комплексної змінної, котра називається зображенням. Перехід від оригіналу до зображення дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування - до ділення.

У результаті замість вихідної системи диференціальних рівнянь щодо оригіналів одержують систему алгебраїчних рівнянь щодо їхніх зображень, у яких враховані незалежні початкові умови, тобто провадиться алгебраїзація вихідної системи диференціальних рівнянь. У результаті розв'язання цієї системи алгебраїчних рівнянь одержують зображення шуканої функції. Потім за допомогою спеціальних формул або таблиць здійснюють перехід до оригіналу вихідної функції.

1.5.2 Зображення напруги на індуктивному елементі

Функції струму $i(t)$ відповідає зображення $F(p)$. Значення струму при $t=0$ дорівнює $i(0)$.

Напруга на індуктивному елементі

$$u_L = L \frac{di}{dt} . \quad (1.20)$$

Щоб знайти зображення цієї функції використовуємо перетворення Лапласа (інтегруючи вроздріб)

$$\begin{aligned}
 U_L(p) &= \int_0^{\infty} L \frac{di}{dt} e^{-pt} dt = L \int_0^{\infty} e^{-pt} di = \left| \begin{array}{ll} w = e^{-pt} & dw = -p e^{-pt} dt \\ dv = di & v = i \end{array} \right| = \\
 &= i L e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} i L (-p) e^{-pt} dt = 0 - Li(0) + pL \int_0^{\infty} i e^{-pt} dt = -Li(0), \\
 u_L &= L \frac{di}{dt} = pLI(p) - Li(0).
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.5.3 Зображення напруги на ємнісному елементі

Напругу на ємнісному елементі часто записують у вигляді $u_C = \frac{1}{C} \int idt$, без вказівки меж інтегрування. Більш фізично вірною є формула

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt. \tag{1.22}$$

У цій формулі враховано, що до моменту часу t напруга на ємнісному елементі визначається не тільки струмом, що протікає через конденсатор в інтервалі часу від 0 до t , але й тією напругою $u_C(0)$, що була на його затискачах при $t=0$. Щоб знайти зображення цієї функції використаємо перетворення Лапласа

$$\begin{aligned}
 U_C(p) &= \int_0^{\infty} \left(u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt \right) e^{-pt} dt = u_C(0) \int_0^{\infty} e^{-pt} dt + \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \int_0^t idt e^{-pt} dt = \\
 &= \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \int_0^t idt e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} w = \frac{1}{C} \int_0^t idt & dw = \frac{1}{C} i \\ dv = e^{-pt} dt & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{u_C(0)}{p} - \frac{1}{pC} e^{-pt} \int_0^t idt \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{pC} \int_0^{\infty} i e^{-pt} dt = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{I(p)}{pC}, \\
 u_C &= \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

1.5.4 Закон Ома в операторній формі

Розглянемо частину складного розгалуженого електричного кола (рис. 1.1). До двох вузлів a і b підключена електрична вітка, що складається із джерела ЕРС $e(t)$ і резистивного, індуктивного і ємнісного елементів. Струм у вітці спрямований від вузла a до вузла b .

Комутація в іншій частині кола приводить до перехідного процесу. Незалежні початкові умови для розглянутої ділянки: струм через індуктивний елемент $i(0) = i(0-)$ і напругу на ємнісному елементі $u_C(0) = u_C(0-)$.

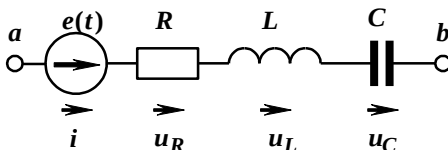


Рис. 1.1 Частина складного розгалуженого електричного кола

Напруга між вузлами a й b для післякомутаційного режиму:

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = u_R + u_L + u_C - e(t). \quad (1.24)$$

Врахуємо взаємозв'язок між струмом й напругами на елементах кола

$$u_R = Ri; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u(0). \quad (1.25)$$

Тоді

$$u_{ab} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt - e(t). \quad (1.26)$$

Скориставшись перетворенням Лапласа перейдемо до операторного зображення. Тому що перетворення Лапласа є лінійним, то зображення суми дорівнює сумі зображень. Тоді

$$U_{ab}(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} I(p) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p). \quad (1.27)$$

Звідси

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}}. \quad (1.28)$$

Отримане рівняння являє собою закон Ома в операторній формі для ділянки кола, що містить ЕРС.

За аналогією з комплексом опору даної ділянки кола змінному струму $Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ вираз $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$ називається операторним опором ділянки кола.

Доданок $Li(0)$ являє собою внутрішню ЕРС, що обумовлена запасом енергії в магнітному полі індуктивного елемента внаслідок протікання через нього безпосередньо перед комутацією струму $i(0)$.

Доданок $\frac{u_C(0)}{p}$ являє собою внутрішню ЕРС, що обумовлена запасом енергії в електростатичному полі ємнісного елемента внаслідок наявності на ньому безпосередньо перед комутацією напруги $u_C(0)$.

В окремому випадку, при відсутності на ділянці кола джерела ЕРС і нульових початкових умовах закон Ома для ділянки кола в операторній формі має вигляд

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p)}{Z(p)}. \quad (1.29)$$

1.5.5 Закони Кірхгофа в операторній формі

Відповідно до першого закону Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень струмів, що сходяться в будь-якому вузлі електричного кола дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.30)$$

Струм i_k за допомогою перетворення Лапласа можливо представити у вигляді операторного зображення. Перетворення Лапласа є лінійним, тому інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів від доданків цієї суми.

Перший закон Кірхгофа в операторній формі

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0, \quad (1.31)$$

де деякі з доданків можуть бути зображенням струмів джерел струмів.

У відповідності із другим законом Кірхгофа в будь-якому замкнутому контурі сума миттєвих напруг на всіх ділянках, які входять у цей контур, дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{C_k} \int_0^t i_k + u_{Ck}(0) \right) = \sum_{k=1}^n e_k. \quad (1.32)$$

Перейшовши до операторних зображень, одержимо другий закон Кірхгофа в операторній формі

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n R_k I_k(p) + \sum_{k=1}^n (p L_k I_k(p) - L_k i_{Lk}(0)) + \\ + \sum_{k=1}^n \left(\frac{I_k(p)}{pC} + \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \end{aligned} \quad (1.33)$$

або

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n \left(E_k(p) + L_k i_{Lk}(0) - \frac{u_{Ck}(p)}{p} \right). \quad (1.34)$$

де $i_{Lk}(0)$, $u_{Ck}(0)$ - початкові значення струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах у відповідних вітках.

У випадку нульових початкових умов другий закон Кірхгофа в операторній формі має вигляд

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (1.35)$$

При складанні рівнянь Кірхгофа в операторній формі необхідно попередньо задатися умовно позитивними напрямками всіх струмів і дотримувати всі правила знаків, які встановлені раніше при складанні рівнянь на основі законів Кірхгофа для миттєвих значень струмів.

Таким чином, закон Ома, перший і другий закони Кірхгофа в операторній формі аналогічні за формою запису тим же законам у комплексній формі. У випадку ненульових початкових умов у кожній k -ої вітці діють не тільки зовнішня ЕРС $E_k(p)$, але й внутрішні ЕРС

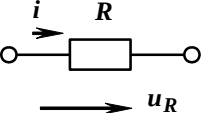
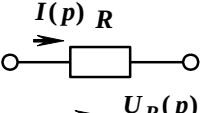
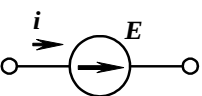
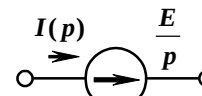
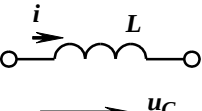
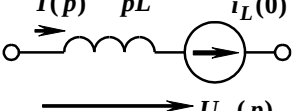
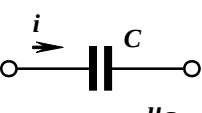
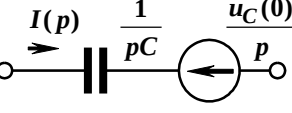
$$L_k i_{Lk}(0) \text{ й } \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

1.5.6 Еквівалентні операторні схеми заміщення

При розрахунку перехідних процесів операторним методом зручно відразу записувати рівняння Кірхгофа в операторній формі, а також рівняння із застосуванням методів розрахунку, які засновані на рівняннях Кірхгофа (методи контурних струмів, вузлових потенціалів, еквівалентного генератора й ін.). Кожну із цих систем рівнянь можна записати, склавши для розрахункового електричного кола еквівалентну операторну схему заміщення. Із цією метою кожен ідеалізований пасивний елемент, який зображено на еквівалентній схемі кола для миттєвих значень, повинен бути замінений операторною еквівалентною схемою, а напруги (струми) ідеалізованих джерел напруги (струму) - представлені операторними зображеннями відповідних функцій.

У таблиці 1.1 зазначені співвідношення між для миттєвих значень струмів і напруг й елементами операторної схеми. Для індуктивних й ємнісних елементів враховані внутрішні ЕРС, обумовлені запасом енергії в цих елементах у момент комутації. У випадку нульових початкових умов внутрішні ЕРС дорівнюють нулю й на операторних схемах заміщення не зображуються.

Таблиця 1.1 - Співвідношення між елементами кола для миттєвих значень струмів і напруг й елементами операторної схеми

1.5.7 Загальна схема розрахунку перехідних процесів операторним методом

Аналіз перехідних процесів операторним методом виконуємо в наступній послідовності:

- аналіз кола до комутації й визначення незалежних початкових умов. Виконуємо так само, як і при використанні класичного методу аналізу перехідних процесів;

- складання операторної еквівалентної схеми заміщення кола після комутації. Складання операторної еквівалентної схеми кола проводимо безпосередньо за еквівалентною схемою кола для миттєвих значень шляхом заміни кожного ідеалізованого пасивного елемента його операторною схемою заміщення й представлення ідеалізованих джерел ЕРС їхніми операторними зображеннями;

- складання рівнянь електричної рівноваги в колі в операторній формі. Систему рівнянь електричної рівноваги кола в операторній формі формуємо будь-яким з методів, що призначені для розрахунку ustalених режимів у лінійних колах, безпосередньо за операторною схемою заміщення електричного кола;

- розв'язання рівнянь електричної рівноваги кола щодо зображень шуканих струмів або напруг. Виконуємо будь-яким методом;

- визначення оригіналів шуканих струмів або напруг. Виконуємо шляхом застосування таблиць зворотного перетворення Лапласа й використання основних властивостей перетворення Лапласа. Якщо зображення шуканої функції являє собою відношення двох поліномів відносно p , то для виконання зворотного перетворення Лапласа можна скористатися теоремою розкладання.

Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом для електричного кола з двома реактивними елементами для випадків з дійними різними та комплексними спряженими коренями наведено у розділі 4.2.

1.5.8 Переваги й недоліки класичного й операторного методів розрахунку перехідних процесів

Класичний й операторний методи розрахунку можуть застосовуватися для розрахунку перехідних процесів тільки в лінійних електричних колах.

Класичний метод розрахунку перехідних процесів є загальноприйнятим не тільки в електротехніці, але й в інших галузях науки. Він наочний, тому що при перетвореннях видна відповідна фізична картина.

Перевагою методу є можливість визначення постійних інтегрування на підставі заданих значень не тільки в початковий, але й у будь-які інші моменти часу.

До недоліків варто віднести необхідність визначення постійних інтегрування, що особливо важко при великій кількості накопичувачів енергії й розв'язанні диференціальних рівнянь високих порядків. Крім того, при переході від одноконтурних схем, які описуються одним рівнянням, до багатоконтурних, які описуються системою рівнянь, збільшуються складності пов'язані з перетворенням системи до рівняння з одним невідомим. При збільшенні числа накопичувачів енергії виконання необхідних перетворень, пов'язане із проміжним диференціюванням рівнянь, ще більше утрудняє рішення.

Операторний метод має наступні переваги:

- завдяки застосуванню операторних зображень, алгебраїзації диференціальних рівнянь і використанню відомих з теорії усталених режимів методів розрахунку електричних кіл, одержання рівняння для зображення шуканої функції істотно спрощується;

- відпадає необхідність визначення з початкових умов постійні інтегрування, що властива класичному методу, тому що початкові умови враховуються безпосередньо в операторних зображеннях.

У той же час як операторний, так і класичний методи вимагають розв'язання характеристичного рівняння, що являє собою складність при високому ступені останнього.

2 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Пояснить причину виникнення перехідних процесів.
2. Сформулюйте й запишіть закони комутації.
3. Складіть диференційне рівняння електричного кола з послідовним з'єднання елементів **$R-L$** та запишіть вираз для постійної часу.
4. Дайте характеристику усталеної складової струму при вмиканні електричного кола з послідовним з'єднання елементів **$R-L$** на постійну напругу.
5. Порядок визначення вільної складової. Незалежні й залежні початкові умови для визначення постійних інтегрування.
6. Особливості перехідного процесу в електричному кола при вмиканні електричного кола з послідовним з'єднання елементів **$R-L$** на синусоїдну напругу.
7. Пояснить залежність характеру перехідного процесу в електричному кола з послідовним з'єднання елементів **$R-L$** від початкової фази синусоїдного струму (напруги джерела).
8. Складіть диференційне рівняння електричного кола з послідовним з'єднання елементів **$R-C$** та запишіть вираз для постійної часу.
9. Пояснить залежність характеру перехідного процесу в електричному кола з послідовним з'єднання елементів **$R-C$** від значення напруги на конденсаторі в момент початку комутації.
10. Пояснить залежність характеру перехідного процесу в електричному кола з послідовним з'єднання елементів **$R-C$** від початкової фази синусоїдного струму (напруги джерела).
11. Складіть диференційне рівняння для електричного кола при розряді конденсатора на послідовно з'єднанні елементи **$R-L$** . Укажіть, за яких значень коренів характеристичного рівняння перехідний процес буде аперіодичний і за яких коливальний.
12. Поясните суть перетворення Лапласа й переваги операторного методу перед класичним.
13. Сформулюйте й запишіть основні властивості й теореми перетворення Лапласа.
14. Сформулюйте закон Ома в операторній формі та приведіть приклад його застосування.
15. Запишіть закони Кірхгофа в операторній формі та приведіть приклади їх застосування.
16. Викладіть порядок розрахунків перехідних процесів операторним методом.
17. Перелічіть відомі методи переходу від зображення до оригіналу. Приведіть приклади їх застосування.

3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Номер варіанта відповідає для студентів денної форми навчання порядковому номеру студента у журналі групи **на початок семестру**, . для студентів заочної форми навчання – двом останнім цифрам номеру залікової книжки.

У відповідності з табл. 3.1 остання цифра варіанта задає номер схеми електричного кола (рис. 3.1.).

Таблиця 3.1 - Номер рисунка та параметри схеми електричного кола

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Рисунок	3.1, a	3.1, b	3.1, c	3.1, d	3.1, e	3.1, f	3.1, g	3.1, h	3.1, i	3.1, j

Перша цифра варіанта задає індекс струму, який потрібно визначити: для цифр 0, 3, 6, 9 - індекс 1; для цифр - 1, 4, 7 - 2, для цифр 2, 5, 8 - 3.

Параметри пасивних елементів кола визначають за номером групи:

$$C = 50 + 5 \cdot a \text{ мкФ}, \quad L = 100 + 20 \cdot b \text{ мГн}, \quad R = 20 + 10 \cdot c \text{ Ом},$$

де **a**, **b**, **c** - відповідно перша, друга та третя цифра номера група.

ЕРС джерела напруги для всіх варіантів $E = 100 \text{ В}$.

Для електричного кола, яке задано, необхідно:

- класичним методом розрахувати відповідний перехідний струм;
- операторним методом розрахувати відповідний перехідний струм;
- побудувати графік залежності $i(t)$ для проміжку часу від $t = 0$

до $t = \frac{3}{|P_1|_{\min}}$ (у випадку комплексних спряжених коренів до $t = \frac{3}{3\delta}$).

Розрахунково-графічне завдання виконують з одного боку листів паперу формату А4 у рукописному вигляді. Комп'ютерний друк допускається лише для виконання титульного листа та часових діаграм.

Розрахунково-графічне завдання повинне мати титульний лист та лист з вихідною схемою електричного кола та його параметрами.

Схеми та діаграми потрібно виконувати згідно з правилами технічного креслення. Параметри елементів електричного кола потрібно нанести на схему.

Всі розрахунки надавати у наступному порядку:

- формула (літерні позначення);
- підстановка значень вихідних величин;
- відповідь з позначенням одиниць виміру.

Усі розрахунки виконувати з точністю 3...4 значущі цифри.

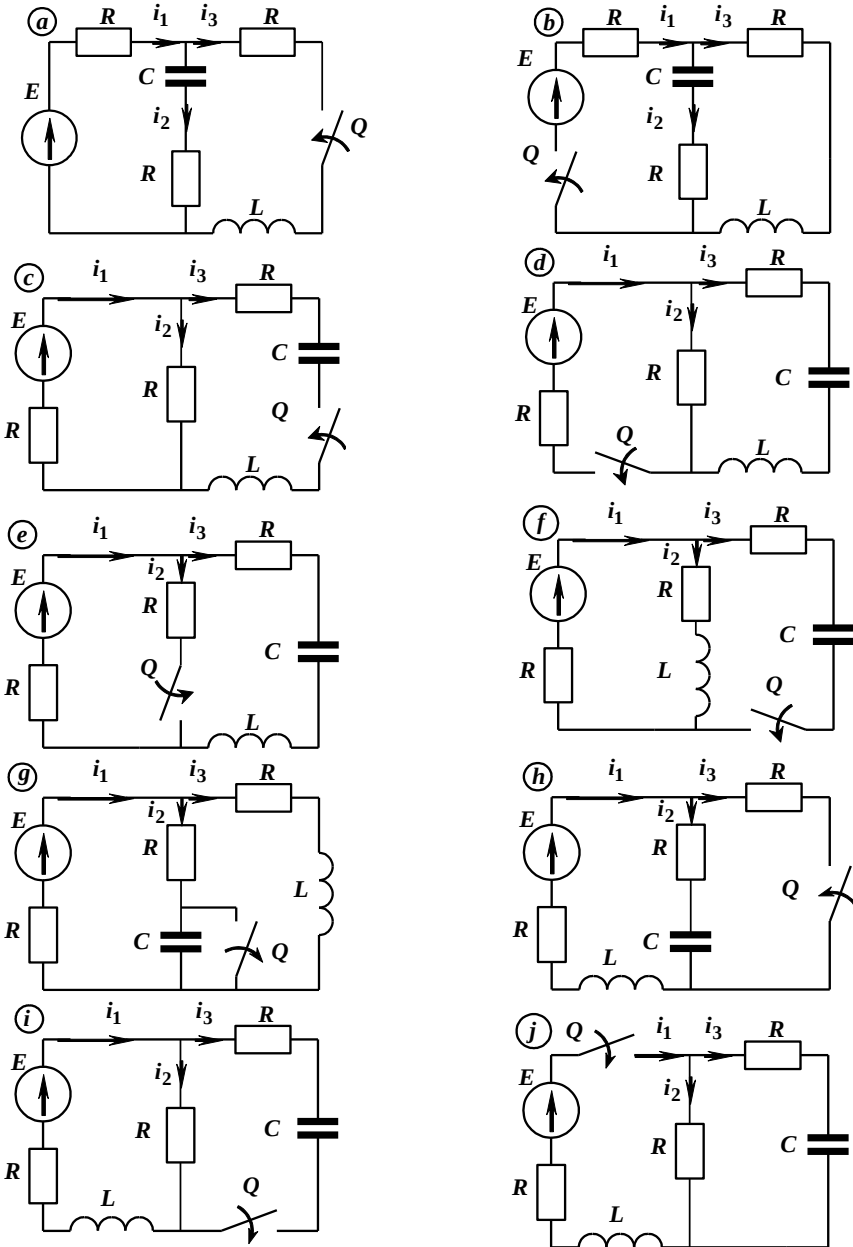


Рисунок 3.1 - Схеми електричних кіл постійного струму

4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ Й ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

4.1 Приклад розрахунку перехідного процесу електричного кола постійного струму з двома накопичувачами класичним методом

4.1.1 Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом у випадку різних дійсних коренів

Вихідні дані. Задано електричне коло постійного струму, схему якого представлено на рис. 4.1. Параметри елементів кола, у відповідності з варіантом: $E=60\text{ В}$, $R_1=10\text{ Ом}$, $R_2=20\text{ Ом}$, $R_3=30\text{ Ом}$, $L=0,1\text{ Гн}$, $C=0,002\text{ Ф}$.

Необхідно розрахувати струми через джерело ЕРС й ємнісний елемент після комутації.

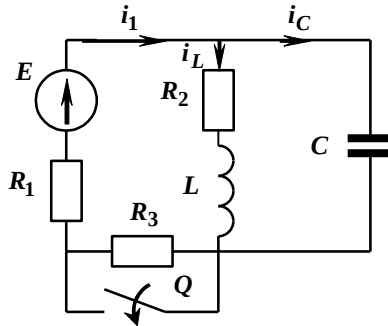


Рисунок 4.1 - Вихідна схема електричного кола

Припустимо, що до комутації в електричному колі мав місце усталений режим (рис. 4.2), тобто струми у всіх вітках і напруги на елементах були незмінні в часі.

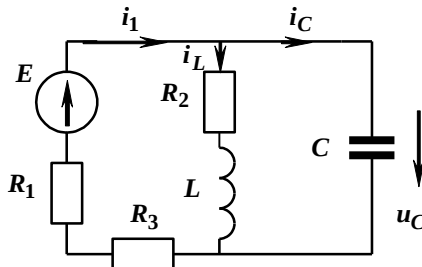


Рисунок 4.2 - Схема електричного кола до комутації

Визначимо незалежні початкові умови.

Струм через індуктивний елемент

$$i_L(0) = i_L(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{60}{10 + 20 + 30} = 1 \text{ A.} \quad (4.1)$$

Напруга на ємнісному елементі

$$u_C(0) = u_C(0-) = R_2 i_L(0-) = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \frac{60}{10 + 20 + 30} = 20 \text{ B.} \quad (4.2)$$

Переходимо до розгляду електричного кола після комутації (рис. 4.3). Внаслідок замикання ключа Q резистивний елемент R_3 шунтується.

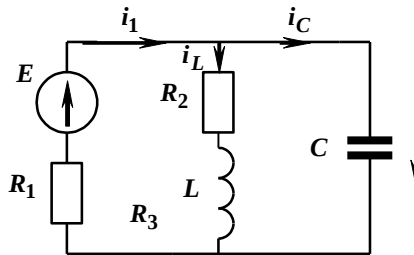


Рисунок 4.3 - Схема електричного кола після комутації

Розрахунок усталеного режиму електричного кола після комутації

$$\begin{aligned} i_{C_y} &= 0 \text{ A;} \\ i_{1_y} = i_{2_y} &= \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{60}{10 + 20} = 2 \text{ A.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Визначаємо початкові умови. Оскільки електричне коло має два незалежних накопичувача енергії, то потрібно обчислити як значення шуканих струмів для моменту часу $t = 0_+$, так і значення їх похідних першого порядку. Для цього складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа для миттєвих значень

$$\begin{cases} i_1 = i_L + i_C \\ R_1 i_1 + u_C = E \\ R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} - u_C = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Враховуючи незалежні початкові умови та закони комутації

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= i_L(0_+) = 1 \text{ A;} \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+) = 20 \text{ B.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

з системи рівнянь (4.4) маємо

$$\begin{cases} i_L(0) = 1 \text{ A} \\ i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{60 - 20}{10} = 4 \text{ A} \\ i_C(0) = i_1(0) - i_L(0) = 4 - 1 = 3 \text{ A} \\ \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{u_C(0) - R_2 i_L(0)}{L} = \frac{20 - 20 \cdot 1}{0,1} = 0 \text{ B / Гн} \end{cases} \quad (4.6)$$

Диференціюємо два перших рівняння системи (4.4) та врахуємо співвідношення (1.10)

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} \\ R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_C}{C} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Розв'язавши систему (4.7) та враховуючи (4.6) маємо

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt}(0) = -\frac{i_C(0)}{R_1 C} = -\frac{3}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -150 \text{ A / c} \\ \frac{di_C}{dt}(0) = \frac{di_1}{dt}(0) - \frac{di_L}{dt}(0) = -150 - 0 = -150 \text{ A / c} \end{cases} \quad (4.8)$$

Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені використовуючи метод вхідного опору відносно затискачів джерела ЕРС після комутації

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + \frac{(R_2 + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (4.9)$$

Виконуємо заміну множників $j\omega$ на p та дорівнюємо отриманий вираз нулю

$$R_1 + \frac{(R_2 + pL) \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0 \quad (4.10)$$

Виконавши еквівалентні перетворення отримаємо характеристичне рівняння

$$p^2 LCR_1 + p(CR_1 R_2 + L) + (R_1 + R_2) = 0. \quad (4.11)$$

Звідси маємо

$$p_{1,2} = \frac{-(CR_1 R_2 + L) \pm \sqrt{(CR_1 R_2 + L)^2 - 4LCR_1(R_1 + R_2)}}{2LCR_1}. \quad (4.12)$$

З урахуванням заданих параметрів електричного кола одержимо

$$p_{1,2} = \frac{-(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1) \pm \sqrt{(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1)^2 - 4 \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10 \cdot (10 + 20)}}{2 \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10} = \quad (4.13)$$

$$= -150; \quad -100 \text{ c}^{-1}.$$

З урахування отриманих коренів характеристичного рівняння вільні складові мають вигляд:

$$\begin{aligned} i_{1_g} &= A_{1_1} e^{-150t} + A_{1_2} e^{-100t}; \\ i_{C_g} &= A_{C_1} e^{-150t} + A_{C_2} e^{-100t}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Перехідні струми

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{1_y} + i_{1_g} = 2 + A_{1_1} e^{-150t} + A_{1_2} e^{-100t} \text{ A}; \\ i_{C_g} &= i_{C_y} + i_{C_g} = 0 + A_{C_1} e^{-150t} + A_{C_2} e^{-100t} \text{ A}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Похідні перехідних струмів

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{di_{1_y}}{dt} + \frac{di_{1_g}}{dt} = 0 - 150 \cdot A_{1_1} e^{-150t} - 100 \cdot A_{1_2} e^{-100t} \text{ A/c}; \\ \frac{di_{C_g}}{dt} &= \frac{di_{C_y}}{dt} + \frac{di_{C_g}}{dt} = 0 - 150 \cdot A_{C_1} e^{-150t} - 100 \cdot A_{C_2} e^{-100t} \text{ A/c}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для моменту часу $t = 0_+$ з урахуванням початкових умов маємо

$$\begin{cases} i_1(0) = 2 + A_{1_1} + A_{1_2} = 4 \\ \frac{di_1}{dt}(0) = -150A_{1_1} - 100A_{1_2} = -150; \\ i_C(0) = 0 + A_{L_1} + A_{L_2} = 3 \\ \frac{di_C}{dt}(0) = -150A_{L_1} - 100A_{L_2} = -150. \end{cases} \quad (4.17)$$

Розв'язавши систему рівнянь (4.17), визначимо значення постійних інтегрування та запишемо перехідні струми

$$\begin{aligned} i_1 &= 2 - 1 \cdot e^{-150t} + 3 \cdot e^{-100t} \text{ А}; \\ i_C &= -3 \cdot e^{-150t} + 6 \cdot e^{-100t} \text{ А}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.1.2 Приклад розрахунку перехідного процесу класичним методом у випадку комплексних спряжених коренів

Вихідні дані. Задано електричне коло постійного струму, схему якого представлено на рис. 4.1.

Припустимо, що в розглянутому колі, на відміну від розділу 4.1.1, один з параметрів змінився (наприклад, індуктивність збільшилася в чотири рази й дорівнює $L = 0,4 \text{ Гн}$). Інші параметри не змінилися.

Оскільки в розглянутому колі незалежні початкові умови не залежать від індуктивності, то вони також залишилися незмінними (4.1) і (4.2)

$$\begin{aligned} i_L(0) &= 1 \text{ А}; \\ u_C(0) &= 20 \text{ В}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Усталений режим електричного кола після комутації (рис. 4.2) також не залежить від індуктивності, тому усталені значення струмів визначаються виразом (4.3)

$$\begin{aligned} i_{C_y} &= 0 \text{ А}; \\ i_{1_y} &= i_{2_y} = 2 \text{ А}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Початкові умови визначаємо за співвідношеннями (4.4)-(4.8)

$$\begin{aligned} i_1(0+) &= 4 \text{ А}; & \frac{di_1}{dt}(0+) &= -150 \text{ А/с}; \\ i_C(0+) &= 3 \text{ А}; & \frac{di_C}{dt}(0+) &= -150 \text{ А/с}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені використовуючи метод вхідного опору відносно затискачів джерела ЕРС після комутації використовуючи співвідношення (4.9)-(4.12). З урахуванням заданих параметрів електричного кола одержимо

$$p_{1,2} = \frac{-(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,4) \pm \sqrt{(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,4)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 0,002 \cdot 10 \cdot (10 + 20)}}{2 \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10} = (4.22)$$

$$= -50 \pm j35,4 \text{ c}^{-1}.$$

З урахування отриманих коренів характеристичного рівняння вільні складові мають вигляд:

$$i_{1_g} = A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_e t + \psi_1) = A_1 e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_1);$$

$$i_{C_g} = A_C e^{-\delta t} \sin(\omega_e t + \psi_C) = A_C e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_C). \quad (4.23)$$

Перехідні струми

$$i_1 = i_{1_y} + i_{1_g} = 2 + A_1 e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_1) \text{ A};$$

$$i_{C_g} = i_{C_y} + i_{C_g} = 0 + A_C e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_C) \text{ A}. \quad (4.24)$$

Похідні перехідних струмів

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_{1_y}}{dt} + \frac{di_{1_g}}{dt} = 0 - 50 \cdot A_1 e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_1) -$$

$$- 35,4 \cdot A_1 e^{-50t} \cos(35,4t + \psi_1) \text{ A/c}; \quad (4.25)$$

$$\frac{di_{C_g}}{dt} = \frac{di_{C_y}}{dt} + \frac{di_{C_g}}{dt} = 0 - 50 \cdot A_C e^{-50t} \sin(35,4t + \psi_1) -$$

$$- 35,4 \cdot A_1 e^{-50t} \cos(35,4t + \psi_1) \text{ A/c}.$$

Для моменту часу $t = 0_+$ з урахуванням початкових умов маємо

$$\begin{cases} i_1(0) = 2 + A_1 \sin \psi_1 = 4 \\ \frac{di_1}{dt}(0) = -50 \cdot A_1 \sin \psi_1 - 35,4 \cdot A_1 \cos \psi_1 = -150; \\ i_C(0) = 0 + A_L \sin \psi_L = 3 \\ \frac{di_C}{dt}(0) = -50 \cdot A_L \sin \psi_L - 35,4 \cdot A_L \cos \psi_L = -150. \end{cases} \quad (4.26)$$

Розв'язавши систему рівнянь (4.17), визначимо значення постійних інтегрування та запишемо перехідні струми

$$i_1(t) = 2 + 2,448 e^{-50t} \sin(35,4t + 55^\circ) \text{ A};$$

$$i_C(t) = 3 e^{-50t} \sin(35,4t + 90^\circ) \text{ A}. \quad (4.27)$$

4.2 Приклад розрахунку перехідного процесу електричного кола постійного струму з двома накопичувачами операторним методом

4.2.1 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом у випадку різних дійсних коренів

Вихідні дані. Задано електричне коло постійного струму, схему якого представлено на рис. 4.1. Параметри елементів кола, у відповідності з варіантом: $E = 60 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 0,002 \text{ Ф}$.

Незалежні початкові умови визначаємо так само як у класичному методі (див. розділ 4.1.1), тобто їх значення розраховуємо за виразами (4.1) і (4.2)

Складаємо операторну схему заміщення для електричного кола після комутації (рис. 4.4).

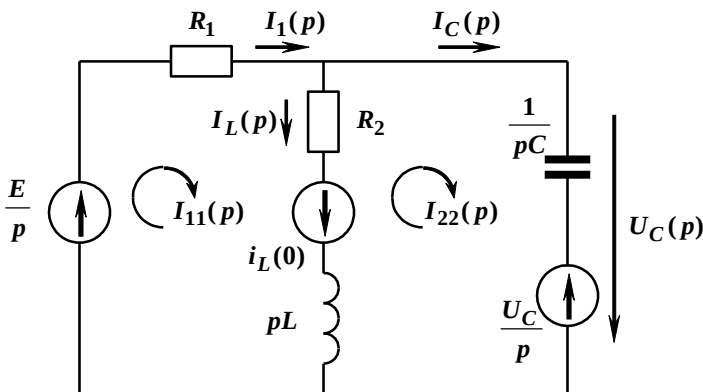


Рисунок 4.4 - Операторна схема заміщення електричного кола після комутації

Складаємо систему рівнянь використовуючи метод контурних струмів

$$\begin{cases} I_{11}(p)(R_1 + R_2 + pL) - I_{22}(p)(R_2 + pL) = \frac{E}{p} + Li_L(0) \\ -I_{11}(p)(R_2 + pL) + I_{22}(p)\left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right) = -Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p} \end{cases} \quad (4.28)$$

Розв'язання системи рівнянь виконуємо за методом Крамера.

Головний і допоміжні визначники

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + pL & -R_2 - pL \\ -R_2 - pL & R_2 + pL + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \\
 &= (R_1 + R_2 + pL) \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC} \right) - (-R_2 - pL)^2 = \\
 &= R_1 R_2 + R_2^2 + pLR_2 + pLR_1 + p^2 L^2 + \frac{R_1}{pC} + \frac{R_2}{pC} + \frac{L}{C} = \\
 &= R_2^2 - 2pLR_2 - p^2 L^2 = \frac{p^2 LCR_1 + p(CR_1 R_2 + L) + (R_1 + R_2)}{pC}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= \begin{vmatrix} \frac{E}{p} + Li_L(0) & -R_2 - pL \\ -Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p} & R_2 + pL + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \\
 &= \left(\frac{E}{p} + Li_L(0) \right) \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC} \right) - (-R_2 - pL) \left(-Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p} \right) = \\
 &= \frac{R_2 E}{p} + R_2 Li_L(0) + EL + pL^2 i_L(0) + \frac{E}{p^2 C} + \frac{Li_L(0)}{pC} - \\
 &= -R_2 Li_L(0) - pL^2 i_L(0) - \frac{R_2 u_C(0)}{p} - Lu_C(0) = \\
 &= \frac{E + EpC(R_2 + pL) + pLi_L(0) - u_C(0)pC(R_2 + pL)}{p^2 C}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{22} &= \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + pL & \frac{E}{p} + Li_L(0) \\ -R_2 - pL & -Li_L(0) - \frac{u_C(p)}{p} \end{vmatrix} = \\
 &= (R_1 + R_2 + pL) \left(-Li_L(0) - \frac{u_C(p)}{p} \right) - (-R_2 - pL) \left(\frac{E}{p} + Li_L(0) \right) = \\
 &= -R_1 Li_L(0) - R_2 Li_L(0) - pL^2 i_L(0) - \frac{R_1 u_C(0)}{p} - \frac{R_2 u_C(0)}{p} - \\
 &= -Lu_C(0) + \frac{R_2 E}{p} + \frac{pLE}{p} - pL^2 i_L(0) - \frac{R_1 u_C(0)}{p} = \\
 &= \frac{E(R_2 + pL) - R_1 pLi_L(0) - u_C(p)(R_1 + R_2 + pL)}{p}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Операторні зображення перехідних контурних струмів та струмів у вітках електричного кола

$$I_{11}(p) = I_1(p) = \frac{F_1(p)}{pZ(p)} = \frac{E + EpC(R_2 + pL) + pLi_L(0) - u_C(0)pC(R_2 + pL)}{p[p^2LCR_1 + p(CR_1R_2 + L) + (R_1 + R_2)]}; \quad (4.32)$$

$$I_{22}(p) = I_2(p) = \frac{F_2(p)}{Z(p)} = \frac{(E(R_2 + pL) - R_1pLi_L(0) - u_C(p)(R_1 + R_2 + pL))C}{[p^2LCR_1 + p(CR_1R_2 + L) + (R_1 + R_2)]}.$$

де $Z(p) = p^2LCR_1 + p(CR_1R_2 + L) + (R_1 + R_2) = 0$ характеристичне рівняння.

Корені характеристичного рівняння визначимо з наступного співвідношення

$$p_{1,2} = \frac{-(CR_1R_2 + L) \pm \sqrt{(CR_1R_2 + L)^2 - 4LCR_1(R_1 + R_2)}}{2LCR_1}. \quad (4.33)$$

З урахуванням заданих параметрів електричного кола одержимо

$$p_{1,2} = \frac{-(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1) \pm \sqrt{(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1)^2 - 4 \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10 \cdot (10 + 20)}}{2 \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10} = -150; \quad -100 \text{ c}^{-1}. \quad (4.34)$$

Отримані корені дійсні, від'ємні, різні за значенням.

Одержимо оригінал струму, що протікає в першій вітці. Тому що знаменник зображення містить співмножник p , то оригінал струму шукаємо у вигляді

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{Z(0)} + \sum_{k=1}^2 \frac{F_1(p_k)}{p_k Z'(p_k)} e^{p_k t}; \quad (4.35)$$

Усі складові виразу (4.35) для кожного з коренів обчислюємо окремо з урахуванням заданих параметрів електричного кола

$$F_1(0) = E = 60 \text{ В};$$

$$F_1(-150) = 60 + 60 \cdot (-150) \cdot 0,002 \cdot (20 + (-150) \cdot 0,1) + (-150) \cdot 0,1 \cdot 1 - 20 \cdot (-150) \cdot 0,002 \cdot (20 + (-150) \cdot 0,1) = -15 \text{ В};$$

$$F_1(-100) = 60 + 60 \cdot (-100) \cdot 0,002 \cdot (20 + (-100) \cdot 0,1) + (-100) \cdot 0,1 \cdot 1 - \\ - 20 \cdot (-100) \cdot 0,002 \cdot (20 + (-100) \cdot 0,1) = -30 \text{ В};$$

$$Z(0) = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом};$$

$$Z'(p) = 2pLCR_1 + (CR_1R_2 + L);$$

$$Z'(-150) = 2 \cdot (-150) \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10 + (0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1) = -0,1 \text{ Гн};$$

$$Z'(-100) = 2 \cdot (-100) \cdot 0,1 \cdot 0,002 \cdot 10 + (0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,1) = 0,1 \text{ Гн};$$

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{Z(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 Z'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 Z'(p_2)} e^{p_2 t} = \\ = \frac{60}{20} + \frac{(-15)}{(-150)(-0,1)} \cdot e^{-150t} + \frac{(-30)}{(-100)(0,1)} \cdot e^{-100t} = \\ = 2 - 1 \cdot e^{-150t} + 3 \cdot e^{-100t} \text{ А.}$$

Одержимо оригінал струму, що протікає в вітці з ємнісним елементом. Тому що знаменник зображення не містить співмножника p , то оригінал струму шукаємо у вигляді

$$i_C(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{F_2(p_k)}{Z'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.36)$$

Усі складові виразу (4.36) для кожного з коренів обчислюємо окремо з урахуванням заданих параметрів електричного кола

$$F_2(-150) = (60 \cdot (20 + (-150) \cdot 0,1) - 10 \cdot (-150) \cdot 0,1 \cdot 1) \cdot 0,002 - \\ - 20 \cdot (10 + 20 + (-150) \cdot 0,1) \cdot 0,002 = 0,3 \text{ В} \cdot \text{Ом};$$

$$F_2(-100) = (60 \cdot (20 + (-100) \cdot 0,1) - 10 \cdot (-100) \cdot 0,1 \cdot 1) \cdot 0,002 - \\ - 20 \cdot (10 + 20 + (-100) \cdot 0,1) \cdot 0,002 = 0,6 \text{ В} \cdot \text{Ом};$$

$$i_2(t) = \frac{F_2(p_1)}{Z'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_2(p_2)}{Z'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{0,3}{(-0,1)} \cdot e^{-150t} + \frac{0,6}{(0,1)} \cdot e^{-100t} = \\ = -3 \cdot e^{-150t} + 6 \cdot e^{-100t} \text{ А}$$

4.2.2 Приклад розрахунку перехідного процесу операторним методом у випадку комплексних спряжених коренів

Вихідні дані. Задано електричне коло постійного струму, схему якого представлено на рис. 4.1.

Припустимо, що в розглянутому колі, на відміну від розділу 4.1.1, один з параметрів змінився (наприклад, індуктивність збільшилася в чотири рази й дорівнює $L = 0,4 \text{ Гн}$). Інші параметри не змінилися.

Оскільки в розглянутому колі незалежні початкові умови не залежать від індуктивності, то вони також залишилися незмінними (4.1) і (4.2)

$$\begin{aligned} i_L(0) &= 1 \text{ А;} \\ u_C(0) &= 20 \text{ В.} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Складаємо операторну схему заміщення для електричного кола після комутації (рис. 4.4).

Подальші розрахунки виконуємо так само як у розділі 4.21 використовуючи вирази (4.28-4.33).

З урахуванням заданих параметрів електричного кола корені характеристичного рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{-(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,4) \pm \sqrt{(0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,4)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 0,002 \cdot 10 \cdot (10 + 20)}}{2 \cdot 0,4 \cdot 0,002 \cdot 10} = \\ &= -50 + j35,4; \quad -50 - j35,4 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Отримані корені комплексні сполучені.

Розглянемо одержання оригіналу струму, що протікає в першій вітці. Тому що знаменник зображення містить співмножник p , то оригінал струму шукаємо у вигляді

$$i_1(t) = \frac{F_1(0)}{Z(0)} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_1)}{p_1 Z'(p_1)} e^{p_1 t} \right). \quad (4.39)$$

Усі складові виразу (4.39) для кожного з коренів обчислюємо окремо з урахуванням заданих параметрів електричного кола

$$F_1(0) = E = 60 \text{ В};$$

$$\begin{aligned} F_1(-50 + j35,4) &= 60 + 60 \cdot (-50 + j35,4) \cdot 0,002 \cdot (20 + (-50 + j35,4) \cdot 0,4) + \\ &+ (-50 + j35,4) \cdot 0,4 \cdot 1 - 20 \cdot (-50 + j35,4) \cdot 0,002 \times \\ &\times (20 + (-50 + j35,4) \cdot 0,4) = -0,10 + j42,48 \text{ В;} \end{aligned}$$

$$Z(0) = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом};$$

$$Z'(p) = 2pLCR_1 + (CR_1R_2 + L);$$

$$Z'(-50 + j35,4) = 2 \cdot (-50 + j35,4) \cdot 0,4 \cdot 0,002 \cdot 10 + (0,002 \cdot 10 \cdot 20 + 0,4) = -j0,566 \text{ Гн};$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{60}{30} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{-0,10 + j42,48}{(-50 + j35,4)(-j0,566)} e^{-(50 + j35,4)t} \right) = \\ &= 2 + 2 \operatorname{Re} \left(1,224 e^{-j35^\circ} e^{-(50 + j35,4)t} \right) = \\ &= 2 + 2 \cdot 1,224 e^{-50t} \cos(35,4t - 35^\circ) = \\ &= 2 + 2,448 e^{-50t} \sin(35,4t + 55^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

Розглянемо одержання оригіналу струму, що протікає в другій вітці. Тому що знаменник зображення не містить співмножник p , то оригінал струму шукаємо у вигляді

$$i_2(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_2(p_1)}{Z'(p_1)} e^{p_1 t} \right). \quad (4.40)$$

Усі складові виразу (4.40) для кореня $p_1 = -50 + j35,4 \text{ с}^{-1}$ обчислюємо окремо з урахуванням заданих параметрів електричного кола

$$\begin{aligned} F_2(-50 + j35,4) &= [60 \cdot (20 + (-50 + j35,4) \cdot 0,4) - 10 \cdot (-50 + j35,4) \cdot 0,4 \cdot 1] - \\ &\quad - 20 \cdot (10 + 20 + (-50 + j35,4) \cdot 0,4)] \cdot 0,002 = -j0,850 \text{ В} \cdot \text{Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{-j0,850}{-j0,566} e^{(-50 + j35,4)t} \right) = 2 \operatorname{Re} \left(1,5 e^{j0^\circ} e^{(-50 + j35,4)t} \right) = \\ &= 3 e^{-50t} \cos(35,4t) = 3 e^{-50t} \sin(35,4t + 90^\circ) \text{ А.} \end{aligned}$$

4.3 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів

4.3.1 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів у випадку різних дійсних коренів

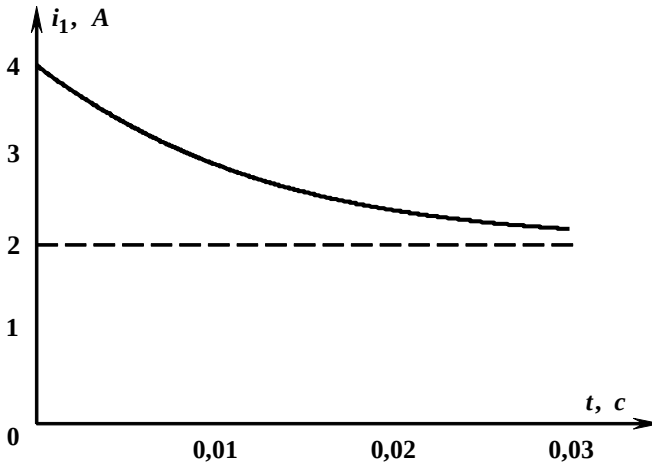


Рисунок 4.5 - Часова діаграма перехідного струму $i_1(t)$ у випадку різних дійсних коренів

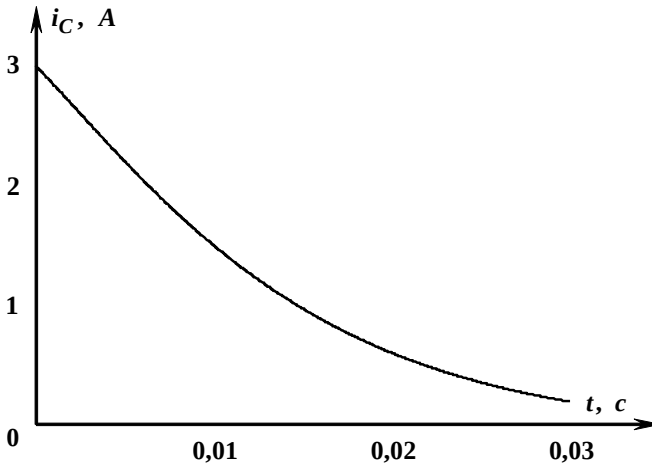


Рисунок 4.6 - Часова діаграма перехідного струму $i_C(t)$ у випадку різних дійсних коренів

4.3.2 Приклад побудови часових діаграм перехідних струмів у випадку комплексних спряжених коренів

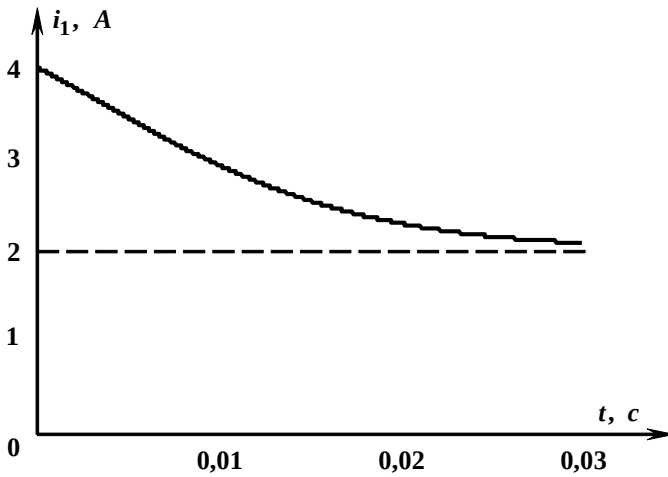


Рисунок 4.7 - Часова діаграма перехідного струму $i_1(t)$ у випадку комплексних спряжених коренів

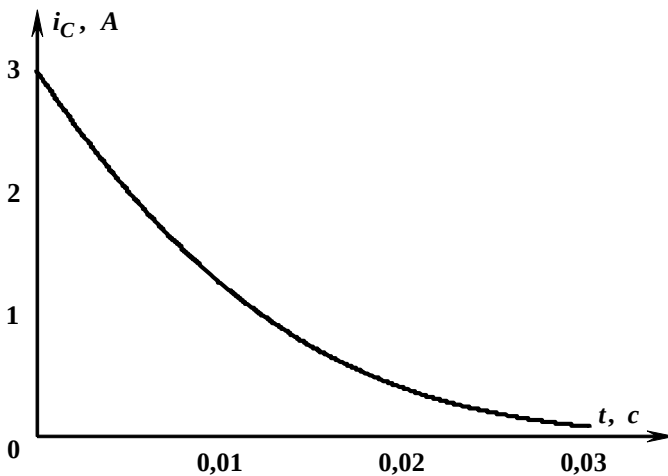


Рисунок 4.8 - Часова діаграма перехідного струму $i_C(t)$ у випадку комплексних спряжених коренів

ЛІТЕРАТУРА

1. Козлов В.В. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл [Текст] : навчальний посібник / В. В. Козлов, О. В. Набокова. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2016. – 428 с.
2. Качан Ю.Г. Линейная электротехника (теоретические основы) [Текст] : Учеб. пособие для вузов. - Запорожье : ЗГИА, 1995. - 213 с.
3. Паначевский Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка: теорія і практикум [Текст] : - К.: Каравела, 2003. – 440 с
4. Мілих В.І. Електротехніка та електромеханіка [Текст] : навч. посіб. для студ. вищ. закладів освіти. – К.: Караван, 2005.– 375 с.