МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ТА РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТА ОЦІНКА ЇЇ АДЕКВАТНОСТІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичної роботи з дисципліни
«Математична статистика в експериментальних дослідженнях механічних систем»

для здобувачів освіти за третім (доктор філософії) рівнем вищої освіти спеціальності
133 Галузеве машинобудування

2025

Кореляційний та регресійний аналіз. Побудова математичної моделі та оцінка її адекватності. Методичні вказівки до виконання практичної роботи з дисципліни «Математична статистика в експериментальних дослідженнях механічних систем». Для здобувачів освіти за третім (доктор філософії) рівнем вищої освіти спеціальності 133 Галузеве машинобудування / Укл.: Фролов М.В., Танченко С.В. - Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. - 30с.

Укладачі: М.В. Фролов, к.т.н., С.В. Танченко

Рецензент: В.В. Циганов, професор, д.т.н.

Відповідальний за випуск: В.П. Загородній

Затверджено
на засіданні кафедри «Металорізальні верстати та інструмент»
Протокол № 1 від 26.08.24 р.

Рекомендовано до видання
НМК Машинобудівного факультету.
Протокол № 1
від 27.08.2024 р.

ЗМІСТ

Стор.

1. Мета роботи ……..... 4

2. Загальні теоретичні відомості про кореляційний зв'язок та метод найменших квадратів …..... 4

2.1. Кореляційний зв'язок та аналіз ……. 4

2.2. Побудова математичної моделі. Метод найменших квадратів. Адекватність моделі …… 8

3. Завдання на підготовку до лабораторної роботи ……... 12

4. Контрольні запитання для самоперевірки і контролю підготовленості студентів до роботи 12

5. Зміст роботи та звіту ……..... 13

6. Порядок виконання роботи ……..... 14

Рекомендована література ……..... 21

Додаток А. Значення критерію Фішера для α=0,95……... 22

Додаток Б. Співвідношення Чеддока ……..... 25

Додаток В. Значення коефіцієнту Стьюдента tα 26

Додаток Г. Форми розрахункових таблиць для визначення коефіцієнтів регресії ……..... 28

1. МЕТА РОБОТИ

1.1. Засвоїти поняття та показники оцінки тісноти зв’язку між факторами процесу різання та його результатами на основі елементів кореляційного аналізу.

1.2. Засвоїти методику знаходження рівняння регресії (математичної моделі) методом найменших квадратів за результатами експериментальних досліджень а також оцінки адекватності отриманої моделі.

2. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО КОРЕЛЯЦІЙНИЙ ЗВ'ЯЗОК ТА МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

2.1. Кореляційний зв'язок та аналіз

На будь який виробничий процес, в тому числі і на роботу металорізального інструменту, впливає багато незалежних факторів (вхід), які визначають кінцевий результат (результативний показник) - вихід або відгук. Спостерігаючи за ходом процесу у ході експериментальних досліджень можна записати з одного боку умови його протікання - вхід, а з другого – його результат - вихід. Так, для ріжучого інструменту входом можуть бути: режими різання, геометричні параметри, властивості інструментального та оброблюваного матеріалів та ін., а виходом: стійкість, сила та температура різання, якість обробленої поверхні та ін.

Між цими двома групами даних може існувати статистичний зв’язок. При цьому треба визначити перш за все чи такий зв’язок насправді існує, чи є він тісним та чи є він статистично значущим, і якщо так – у встановленні форми такого зв’язку з ціллю отримання математичної моделі процесу яка б дозволила або оптимізувати роботу інструменту по одному з результативних показників (наприклад по стійкості) або прогнозувати результати його роботи у різних умовах. За результатами експериментальних досліджень знаходять рівняння регресії, яке з тією або іншою точністю описує досліджуваний процес. Це рівняння і є математичною моделлю процесу.

Зв’язок при якому кожному значенню незалежного фактору (аргументу) відповідає одне значення результативного показника (функції або відгуку) називається *функціональний зв’язок*, який загально записується у вигляді функції - Y = F(X).

Аналіз процесу різання показує, що його показники відрізняються приблизністю та в деякій мірі невизначеністю оскільки на нього впливає також цілий ряд випадкових величин – неоднорідність інструментального та оброблюваного матеріалів, а також природній розбіг їх властивостей; стан обладнання; похибки вимірювальних пристроїв та ін. У цьому проявляється статистичний характер результатів вимірювання показників роботи металорізального інструменту - при виконанні повторних експериментів за одних і тих-же умов, одному значенню фактору будуть відповідати різні значення результативного показника. У цьому випадку можна казати тільки про імовірність виникнення того чи іншого значення результативного показника.

Такі зв’язки при яких одному значенню аргументу можуть відповідати декілька значень функції у результаті впливу випадкових факторів називаються стохастичними.

На Рисунку 2.1 у вигляді хрестиків показані середні значення результативного показника (функції) Y, отримані з результатів декількох експериментів при одному й тому ж значенні X. Крім того, розсіювання експериментальних точок (розмах позначено відрізками) при різних значеннях X характеризується своїми значеннями групової дисперсії Si (S_1, S_2 та S_3 на Рис.2.1), тобто функція розподілення результативного показника f(Y) буде різною при різних значеннях аргументу X. Таким чином, ***стохастичний зв’язок можна також визначити як такий при якому зі зміною аргументу змінюється закон розподілення функції.***

З вищесказаного можна зробити висновок, що стохастичний зв’язок включає в себе дві компоненти: функціональну та статистичну або випадкову. Якщо функціональна компонента відсутня, то аргумент X та функція Y незалежні один від одного. Якщо відсутня випадкова компонента, то маємо строго функціональний зв’язок.

Окремим випадком стохастичного зв’язку є зв'язок кореляційний або просто кореляція – при цьому зі зміною аргументу змінюється математичне очікування або середнє значення функції.

Співвідношення між функціональною та випадковою компонентами визначає тісноту (силу) зв'язку між аргументом та функцією. Оцінюється тіснота зв'язку за допомогою кореляційного аналізу, а показниками тісноти зв'язку є коефіцієнт кореляції *r* (використовується переважно для оцінки лінійної залежності Y від X) або вибіркове кореляційне відношення η (використовується для будь-якої залежності). Коефіцієнт кореляції r приймає значення від –1 до 1, а вибіркове кореляційне відношення η – від 0 до 1 і чим вони ближче по абсолютному значенню до 1, тим тісніше зв'язок. Якщо значення дорівнює 1 то маємо строго функціональний зв'язок, а якщо наближається до 0 - то функціональний зв'язок відсутній.

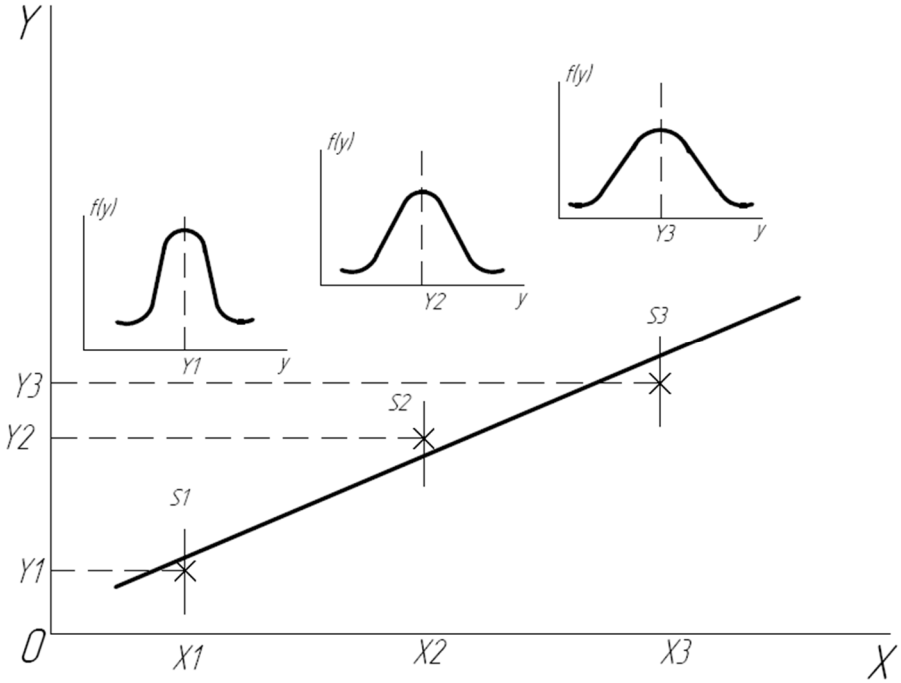


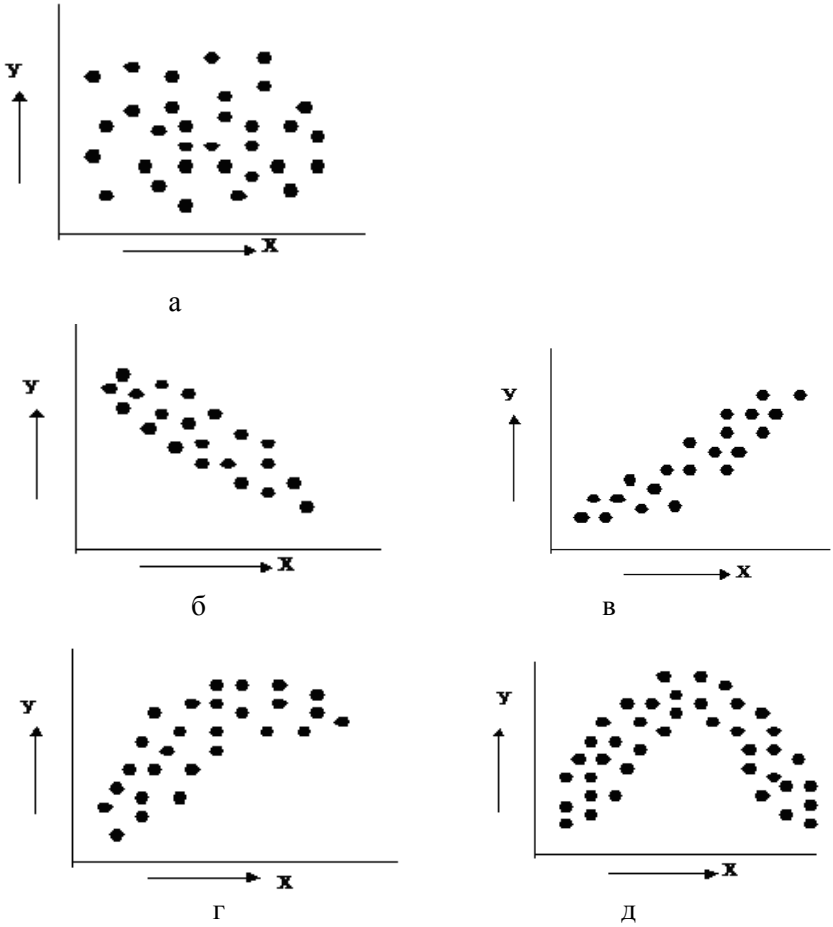
Рисунок 2.1 – Стохастичний зв'язок між аргументом та функцією

Графічно, кореляцію між X та Y може бути показано як зображено на Рисунку 2.2.:

а – кореляція відсутня. В цьому випадку $r \to 0$ та $\eta \to 0$;

б, в – лінійна кореляція: *б* – від'ємна кореляція для якої $r<0$ та *в* – позитивна кореляція з коефіцієнтом кореляції $r>0$;

г, д – нелінійна кореляція з вибірковим кореляційним відношенням $\eta>0$.



а – кореляція відсутня; *б, в* – лінійна кореляція; *г, д* – нелінійна кореляція.
Рисунок 2.2 – Різновиди кореляційного зв'язку.

Слід зазначити, що коефіцієнт кореляції на відміну від вибіркового кореляційного відношення показує не тільки силу

зв'язку, але й на скільки близько експериментальні точки розташовуються відносно лінії регресії. Розраховані для тих самих вихідних даних, коефіцієнт кореляції завжди буде мати менше значення ніж вибіркове кореляційне відношення, тому при значеннях, що наближаються до 1, коефіцієнт кореляції може бути використаний в усіх випадках.

2.2. Побудова математичної моделі. Метод найменших квадратів. Адекватність моделі

Наступним етапом за визначенням наявності та сили зв'язку між X та Y є побудова математичної моделі, тобто вибір виду рівняння регресії та встановлення його коефіцієнтів. Зв'язок між X та Y може виражатися у вигляді лінійної, гіперболічної, експоненціальної, статечної та ін. залежностей, а також у вигляді поліномів різних ступенів. ***Процес вибору виду рівняння регресії, а також визначення його коефіцієнтів називається апроксимацією***.

Одним із способів визначення коефіцієнтів, що входять в обрану модель є метод найменших квадратів, згідно з яким ***коефіцієнти рівняння регресії повинні мати такі значення, щоб сума квадратів різниць між значеннями, отриманими експериментально та вирахуваними за рівнянням регресії (незв'язності), була б найменшою***.

Як приклад, наведемо визначення коефіцієнтів рівняння регресії для деяких видів залежностей:

2.2.1 Лінійна залежність (Рисунок 2.3а)

Апроксимується рівнянням регресії виду:

$$Y = b_0 + b_1 \cdot X \qquad (2.1)$$

Коефіцієнти b_o та b_1 вираховуються виходячи зі зазначеної вище умови найменших квадратів, що записується:

$$\sum_{i=1}^{M} [\bar{Y}_i - (b_0 + b_1 X_i)]^2 \to \min \qquad (2.2)$$

Де $\bar{Y}_i$ - середнє значення Y.

M - Кількість експериментальних середніх значень

Взявши частинні похідні від лівої частини рівняння (2.2) по коефіцієнтах b_0 та b_1 та прирівнявши їх до 0, маємо систему з двох рівнянь, розв'язавши яку отримуємо коефіцієнти b_0 та b_1:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M} \bar{Y}_i = M \cdot b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{M} X_i \\ \sum_{i=1}^{M} (\bar{Y}_i \cdot X_i) = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} X_i + b_1 \sum_{i=1}^{M} X_i^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2.2 Гіперболічна залежність (Рисунок 3.3б)

Апроксимується рівнянням регресії виду:

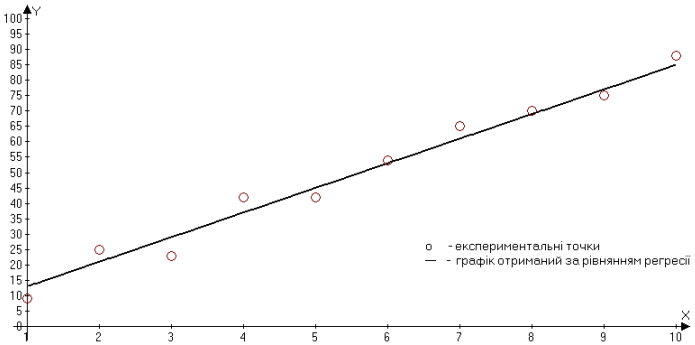
$$Y = b_0 + \frac{b_1}{X} \tag{2.4}$$

Коефіцієнти b_o та b_1 вираховуються виходячи зі зазначеної вище умови найменших квадратів, що записується:

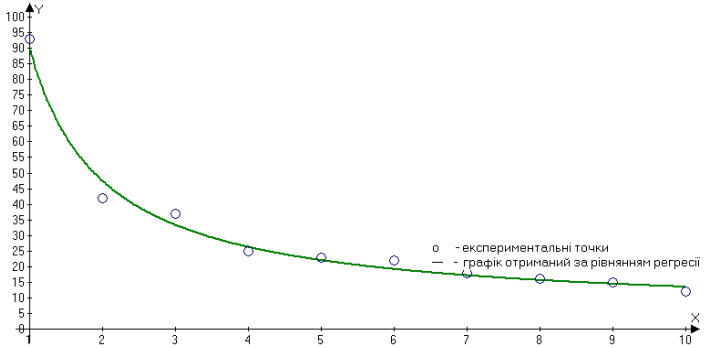
$$\sum_{i=1}^{M} \left[\bar{Y}_i - (b_0 + \frac{b_1}{X_i}) \right]^2 \to \min \tag{2.5}$$

Взявши частинні похідні від лівої частини рівняння (3.16) по коефіцієнтах b_0 та b_1 та прирівнявши їх до 0, маємо систему з двох рівнянь, розв'язавши яку, отримуємо коефіцієнти b_0 та b_1:

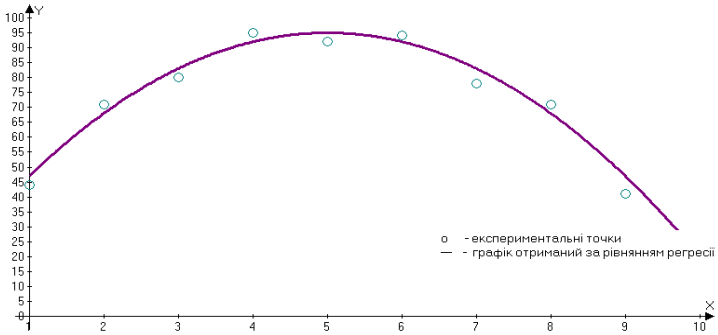
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M} \bar{Y}_i = M \cdot b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{X_i} \\ \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\bar{Y}_i}{X_i} \right) = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{X_i} + b_1 \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{X_i^2} \end{cases} \tag{2.6}$$



а



б



в

а – лінійна залежність; б – гіперболічна залежність; в – залежність з одним екстремумом.

Рисунок 2.3 – Апроксимація деяких видів залежностей.

2.2.3 Залежність з одним екстремумом у вигляді поліному другого ступеню (Рисунок 3.3в)

Апроксимується рівнянням регресії у вигляді поліному другого ступеню

$$Y = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 \qquad (2.7)$$

Коефіцієнти b_o , b_1 , та b_2 вираховуються виходячи зі зазначеної вище умови найменших квадратів, що записується:

$$\sum_{i=1}^{M} \left[\bar{Y}_i - (b_0 + b_1 X_i + b_2 X_i^2)\right]^2 \to \min \qquad (2.8)$$

Взявши частинні похідні від лівої частини рівняння (3.19) по коефіцієнтах b_0, b_1 та b_2 та прирівнявши їх до 0, маємо систему з трьох рівнянь, розв'язавши яку, отримуємо коефіцієнти b_0, b_1 та b_2:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M} \bar{Y}_i = M \cdot b_0 + b_1 \sum_{i=1}^{M} X_i + b_2 \sum_{i=1}^{M} X_i^2 \\ \sum_{i=1}^{M} (\bar{Y}_i \cdot X_i) = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} X_i + b_1 \sum_{i=1}^{M} X_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{M} X_i^3 \\ \sum_{i=1}^{M} \left(\bar{Y}_i \cdot X_i^2\right) = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{M} {X_i}^2 + b_1 \sum_{i=1}^{M} X_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{M} X_i^4 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Після визначення коефіцієнтів рівняння регресії – математичної моделі досліджуваного процесу, треба перевірити її ***адекватність, тобто можливість використовувати отриману модель для опису процесу***. Перевірка адекватності виконується за допомогою критерію Фішера (F- критерію) де порівнюється дисперсія адекватності S_Y^2, що оцінює розсіювання експериментальних точок відносно лінії регресії та дисперсія відтворення S_W^2, що оцінює розсіювання експериментальних точок відносно їх середнього значення. Послідовність розрахунків буде наведена нижче.

3. ЗАВДАННЯ НА ПІДГОТОВКУ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Для підготовки до лабораторної роботи рекомендується повторити та засвоїти теоретичний матеріал присвячений: статистичним показникам результатів досліджень; видам залежностей – функціональній, стохастичній та кореляційній; показникам сили зв'язку; методу найменших квадратів; оцінці однорідності дисперсій та адекватності математичної моделі.

Рекомендовані джерела: лекції з курсу; [1] – С.13 – 14, 83 – 102; [3] – С.204 – 207, [4] – С.16 – 25.

4.КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ І КОНТРОЛЮ ПІДГОТОВЛЕНОСТІ СТУДЕНТІВ ДО РОБОТИ

1. Що характеризує дисперсія випадкової величини?
2. Що характеризує середнє квадратичне або стандартне відхилення випадкової величини?
3. У чому полягає функціональна залежність?
4. У чому полягає стохастична залежність?
5. Які складові має стохастична залежність?
6. У чому полягає кореляційна залежність?
7. Як слід розуміти «тісноту зв'язку» між факторами?
8. Якими показниками вимірюється тіснота зв'язку між факторами?
9. У чому полягає різниця між коефіцієнтом кореляції та вибірковим кореляційним відношенням.
10. Де можуть застосовуватися коефіцієнт кореляції та вибіркове кореляційне відношення і при яких умовах?
11. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції? Про що вони свідчать?
12. Які значення може приймати вибіркове кореляційне відношення? Про що вони свідчать?
13. Як слід розуміти статистичну значущість показників кореляції?
14. За яким критерієм визначається статистична значущість показників кореляції?
15. Що таке довірча імовірність (рівень значущості)?

16. Що таке незв'язність?
17. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
18. Що таке апроксимація?
19. Виходячи з якої вимоги визначаються коефіцієнти рівняння регресії?
20. Що характеризують дисперсії адекватності та відтворення?
21. Що таке адекватність математичної моделі?
22. За яким критерієм визначається адекватність математичної моделі?
23. Як розуміти «перевизначеність» математичної моделі і з чим це пов'язано?

5. ЗМІСТ РОБОТИ ТА ЗВІТУ

У ході проведення експериментальних досліджень при обробці сталі 45 для партії з N спіральних свердел були отримані наступні дані (варіанти завдань та вихідні данні до них видаються викладачем кожному студенту індивідуально):

Таблиця 5.1 – Варіанти завдань

Варіант 1	**Варіант 2**	**Варіант 3**
Залежність стійкості свердла (Y) від товщини серцевини (X). Діаметр свердла 6 мм.	Залежність стійкості свердла (Y) від значення заднього кута (X). Діаметр свердла 28 мм.	Залежність стійкості свердла (Y) від його зворотної конусності (X). Діаметр свердла 8 мм.

На основі даних, отриманих для одного з вищенаведених варіантів:

1. Висунути гіпотезу про форму зв'язку між незалежним фактором (X) та стійкістю інструменту (Y);

2. Визначити тісноту зв'язку між незалежним фактором та стійкістю інструменту за допомогою коефіцієнту кореляції або вибіркового кореляційного відношення

3. Перевірити гіпотезу про статистичну значущість зв'язку.

4. Вибрати вид рівняння регресії (математичної моделі), що описує досліджуваний зв'язок та визначити його коефіцієнти за методом найменших квадратів.

5. Перевірити однорідність дисперсій експериментальних даних та оцінити адекватність обраної моделі

6. Зробити висновки та пояснити отримані результати.

Усі вищезазначені пункти у повному обсязі та з необхідними поясненнями повинні бути відображені у звіті.

6. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

6.1 На підставі вихідних даних заповнити таблицю 6.1. У таблиці:

X – незалежний фактор, що відповідає заданому варіанту;

M – Кількість груп[1];

i – Індекс групи;

Y – Стійкість інструменту, отримана експериментально;

j – Індекс інструменту в групі;

n_i – Кількість інструментів в групі i.

Таблиця 6.1 – Результати досліджень та деякі статистичні показники

№ групи i	X	Y	n_i	$\sum_{j=1}^{ni} Yij$	$\bar{Y}_i$	f_i	S_i^2
1	X_1	$Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1j}, \ldots$	n_1				
2	X_2	$Y_{21}, Y_{22}, \ldots, Y_{2j}, \ldots$	n_2				
…		…					
i	X_i	$Y_{i1}, Y_{i2}, \ldots, Y_{ij}, \ldots$	n_i				
…		…					
M	X_M	$Y_{M1}, Y_{M2}, \ldots, Y_{Mj}, \ldots$	n_M				
Умовне позначення			N	$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{ni} Yij$	$\bar{\bar{Y}}$	$\sum_{i=1}^{M} f_i$	
Значення							

[1] Група – інструменти що мають однакове значення незалежного фактору X.

Якщо значення незалежного фактору зазначено у вигляді інтервалу - в якості аргументу X прийняти середину цього інтервалу.

Розрахувати наступні показники та занести їх у таблицю 6.1:

6.1.1 Загальна кількість інструменту:

$$N = \sum_{i=1}^{M} n_i \tag{6.1}$$

6.1.2 Групові середні значення стійкості

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \tag{6.2}$$

6.1.3 Загальне середнє значення стійкості

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{M} n_i \cdot \bar{Y}_i \tag{6.3}$$

6.1.4 Групові кількості ступенів свободи f_i та загальна кількість ступенів свободи f

$$f_i = n_i - 1 \tag{6.4}$$

$$f_W = \sum_{i=1}^{M} f_i \tag{6.5}$$

6.1.5 Групові дисперсії стійкості:

$$S_i^2 = \frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{ni} \left(Y_j - \bar{Y}_i\right)^2 \tag{6.6}$$

6.2. Визначити міжгрупову дисперсію S_A^2

$$D_A^2 = \sum_{i=1}^{M} n_i \left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2 \tag{6.7}$$

$$f_A = M - 1$$

$$S_A^2 = \frac{D_A^2}{f_A}$$

6.3. Визначити загальну дисперсію S^2:

$$D^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{\bar{Y}}\right)^2 \tag{6.8}$$

$$f = N - 1$$

$$S^2 = \frac{D^2}{f}$$

6.4. Визначити середньозважену дисперсію відтворення або внутрішньогрупову дисперсію з f_W ступенями свободи:

$$S_W^2 = \frac{1}{f_W} \sum_{i=1}^{M} f_i S_i^2 \tag{6.9}$$

6.5. Визначити середнє значення незалежного фактору X:

$$\bar{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} X_i \tag{6.10}$$

6.6. Нанести експериментальні точки на координатну сітку з координатами $X_i \to Y_{ij}$ та висунути гіпотезу про форму зв'язку між незалежним фактором та стійкістю (лінійна – нелінійна, якщо нелінійна, то яка) – див. Рис. 2.3 та записати рівняння регресії у загальному вигляді (див. пп 2.2.1 – 2.2.3).

6.7. Визначити тісноту зв'язку.

6.7.1 У випадку **лінійної функції** за допомогою **коефіцієнту кореляції**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{M} \left[(X_i - \bar{X}) \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{\bar{Y}}\right) \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M} n_i (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{\bar{Y}}\right)^2}} \tag{6.11}$$

Для визначення коефіцієнту кореляції можна скористатися вбудованою функцією *Microsoft Excel*:

=CORREL(масив 1; масив 2)

Для цього в електронну таблицю потрібно записати **<u>всі пари</u>** вихідних даних $X_i \rightarrow Y_{ij}$.

Якщо при одному й тому ж X експеримент проводився декілька разів, то відповідно значення X будуть повторюватися для всіх Y цього експерименту.

«Масив 1» у функції КОРРЕЛ це буде масив *X*, а «масив 2» - відповідно *Y*.

6.7.2 У випадку **нелінійної функції** за допомогою **вибіркового кореляційного відношення**:

$$\eta = \sqrt{\frac{D_A^2}{D^2}} \qquad (6.12)$$

6.8. Оцінити тісноту зв'язку за співвідношеннями Чеддока, наведеними у таблиці Додатку Б.

6.9. Визначити статистичну значущість коефіцієнта кореляції або вибіркового кореляційного відношення.

Для **коефіцієнта кореляції -** за критерієм Стьюдента:

$$t = \frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{N-2} \qquad (6.13)$$

Для **вибіркового кореляційного відношення -** за критерієм Фішера

$$F = \frac{\eta^2 f_w}{(1-\eta) f_A} \qquad (6.14)$$

Розраховане значення t треба співставити з критичним значенням критерію Стьюдента $t_{кр}$, що визначається в залежності від довірчої імовірності α та кількості ступенів свободи $v = N-2$ з Додатку

В. Якщо $t \geq t_{кр}$ – розраховане значення є статистично значущим, а якщо $t < t_{кр}$ – то ні.

Розраховане значення F треба співставити з критичним значеннями критерію Фішера $F_{кр}$, що визначається в залежності від довірчої імовірності α та кількості ступенів свободи $\nu_1 = f_A$ та $\nu_2 = f_W$ з Додатку А. Якщо $F \geq F_{кр}$ – розраховане значення є статистично значущим, а якщо $F < F_{кр}$ – то ні.

6.10. Визначити коефіцієнти рівняння регресії. Для цього, в залежності від висунутого припущення про форму зв'язку, заповнити відповідну розрахункову таблицю з наведених у додатку Г та вирішити одну з систем рівнянь відносно коефіцієнтів регресії.

- Для лінійної та гіперболічної залежностей (системи 2.3 або 2.6, таблиці Г.1 або Г.2 відповідно):

$$\begin{cases} W_1 = M \cdot b_o + V_1 \cdot b_1 \\ W_2 = V_1 \cdot b_o + V_2 \cdot b_1 \end{cases} \tag{6.15}$$

За правилом Крамера ця система рівнянь може бути вирішена відносно b_0 та b_1 наступним чином:

$$D = \begin{vmatrix} M & V_1 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \qquad D_0 = \begin{vmatrix} W_1 & V_1 \\ W_2 & V_2 \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} M & W_1 \\ V_1 & W_2 \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

$$b_0 = \frac{D_0}{D} \qquad b_1 = \frac{D_1}{D} \tag{6.17}$$

- Для залежності з одним екстремумом (система 2.9, таблиця Г.3):

$$\begin{cases} W_1 = M \cdot b_0 + V_1 \cdot b_1 + V_2 \cdot b_2 \\ W_2 = V_1 \cdot b_0 + V_2 \cdot b_1 + V_3 \cdot b_2 \\ W_3 = V_2 \cdot b_0 + V_3 \cdot b_1 + V_4 \cdot b_2 \end{cases} \tag{6.18}$$

За правилом Крамера ця система рівнянь може бути вирішена відносно b_0, b_1 та b_2 наступним чином:

$$D = \begin{vmatrix} M & V_1 & V_2 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} \quad D_0 = \begin{vmatrix} W_1 & V_1 & V_2 \\ W_2 & V_2 & V_3 \\ W_3 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} M & W_1 & V_2 \\ V_1 & W_2 & V_3 \\ V_2 & W_3 & V_4 \end{vmatrix} \quad (6.19)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} M & V_1 & W_1 \\ V_1 & V_2 & W_2 \\ V_2 & V_3 & W_3 \end{vmatrix}$$

$$b_0 = \frac{D_0}{D}$$

$$b_1 = \frac{D_1}{D} \quad (6.20)$$

$$b_2 = \frac{D_2}{D}$$

6.11. Записати рівняння регресії – математичну модель процесу з урахуванням визначених коефіцієнтів, та розрахувати за ним значення Y для відповідних X, які записати в графу $\hat{Y}i$ відповідної розрахункової таблиці Додатку Г.

6.12. У тій самій координатній сітці де нанесені експериментальні точки, за отриманим рівнянням регресії побудувати теоретичний графік залежності Y від X (Рис. 2.3).

6.13. Розрахувати дисперсію адекватності:

$$S_Y^2 = \frac{1}{f_Y} \sum_{i=1}^{M} n_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2 \quad (6.21)$$

Де f_Y – кількість ступенів свободи дисперсії адекватності:

$$f_Y = N - k \quad (6.22)$$

Де k – кількість коефіцієнтів в рівнянні регресії, включаючи вільний член.

6.14. Перевірити адекватність отриманої моделі за F-критерієм Фішера:

$$F_1 = \frac{S_Y^2}{S_W^2} \tag{2.23}$$

З Додатку А визначити критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$ в залежності від довірчої імовірності α, та кількості ступенів свободи чисельника та знаменника – $\nu_1 = f_Y$ (Див. рівняння 6.22) та $\nu_2 = f_W$ (Див. рівняння 6.5)

Якщо виконується умова $\mathbf{F_1 \leq Fкр}$, то модель адекватна, а якщо ні – то не адекватна.

6.15 Якщо з рівняння (2.23) $F_1<1$, тобто дисперсія адекватності менше за дисперсію відтворення – розрахувати додатково ще F_2:

$$F_2 = \frac{S_W^2}{S_Y^2} \tag{2.24}$$

Аналогічно п.6.14 з Додатку А визначити критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$ для F_2 тепер за умови $\nu_1 = f_W$ та $\nu_2 = f_Y$.

Якщо $\mathbf{F_2 > Fкр}$ то в цьому випадку кажуть, що модель «перевизначена» – вона описує результати експериментів зі значно вищою точністю ніж вони визначені. Така модель хоч і адекватна, але її якість вважається низькою бо швидше за все вона включає надмірну кількість членів, які відображають випадкові коливання, а не дійсне змінення відгуку.

6.16. Зробити висновки та пояснити отримані результати.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бідюк, П.І. Математична статистика: навч. посіб. / П. І. Бідюк, Б. П. Ткач, Т. Харрінгтон. — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2018. — 348 с.
2. Руденко, В. М. Математична статистика. Навч. Посіб / В.М. Руденко – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 304 с.

Додаток А

Значення Критерію Фішера для α=0.95

ν_2	ν_1												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.9	8.8	8.8	8.8	8.7	8.7	8.7
4	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	6.0	6.0	5.9	5.9	5.9	5.8
5	5.8	5.4	5.2	5.1	5.0	4.9	4.8	4.8	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6
6	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1	4.1	4.0	4.0	4.0	3.9
7	4.7	4.4	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.6	3.6	3.6	3.5
8	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.4	3.3	3.3	3.3	3.2
9	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	3.1	3.1	3.1	3.0
10	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	3.1	3.1	3.0	3.0	2.9	2.9	2.9	2.9
11	4.0	3.6	3.4	3.2	3.1	3.0	3.0	2.9	2.9	2.8	2.8	2.8	2.7
12	3.9	3.5	3.3	3.1	3.0	2.9	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.6
13	3.8	3.4	3.2	3.0	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6	2.6
14	3.7	3.3	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5
15	3.7	3.3	3.1	2.9	2.8	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.4
16	3.6	3.2	3.0	2.9	2.7	2.7	2.6	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4
17	3.6	3.2	3.0	2.8	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.4	2.3
18	3.6	3.2	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3
19	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3
20	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2
21	3.5	3.1	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2
22	3.4	3.1	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2
23	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.2
24	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1

25	3.4	3.0	2.8	2.6	2.5	2.4	2.3	2.3	2.2	2.2	2.2	2.1	2.1

Продовження Додатку А

ν_2	ν_1										
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
15	2.40	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.32	2.31	2.30	2.29	2.28
16	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.26	2.25	2.24	2.24	2.23
17	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.22	2.21	2.2	2.19	2.18
18	2.27	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.18	2.17	2.16	2.15	2.14
19	2.23	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.14	2.13	2.12	2.11	2.11
20	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.11	2.10	2.09	2.08	2.07
21	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	2.06	2.05	2.05
22	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.06	2.05	2.04	2.03	2.02
23	2.13	2.11	2.09	2.08	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01	2.01	2.00
24	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	2.01	2.00	1.99	1.98	1.97
25	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	2.00	1.98	1.97	1.96	1.96
26	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94
27	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.95	1.94	1.93	1.92
28	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91
29	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89
30	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.91	1.90	1.89	1.88
31	2.00	1.98	1.96	1.95	1.93	1.92	1.91	1.90	1.88	1.88	1.87
32	1.99	1.97	1.95	1.94	1.92	1.91	1.90	1.88	1.87	1.86	1.85
33	1.98	1.96	1.94	1.93	1.91	1.90	1.89	1.87	1.86	1.85	1.84
34	1.97	1.95	1.93	1.92	1.90	1.89	1.88	1.86	1.85	1.84	1.83
35	1.96	1.94	1.92	1.91	1.89	1.88	1.87	1.85	1.84	1.83	1.82
36	1.95	1.93	1.92	1.90	1.88	1.87	1.86	1.85	1.83	1.82	1.81
37	1.95	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.84	1.83	1.82	1.81
38	1.94	1.92	1.9	1.88	1.87	1.85	1.84	1.83	1.82	1.81	1.80
39	1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.85	1.83	1.82	1.81	1.80	1.79

40	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.83	1.81	1.8	1.79	1.78

Продовження Додатку А

ν_2	ν_1												
	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
15	2.27	2.27	2.26	2.25	2.25	2.24	2.24	2.23	2.23	2.22	2.22	2.21	2.2
16	2.22	2.21	2.21	2.2	2.19	2.19	2.18	2.18	2.17	2.17	2.17	2.16	2.15
17	2.17	2.17	2.16	2.15	2.15	2.14	2.14	2.13	2.13	2.12	2.12	2.11	2.10
18	2.13	2.13	2.12	2.11	2.11	2.1	2.1	2.09	2.09	2.08	2.08	2.07	2.06
19	2.10	2.09	2.08	2.08	2.07	2.07	2.06	2.06	2.05	2.05	2.04	2.04	2.03
20	2.07	2.06	2.05	2.05	2.04	2.03	2.03	2.02	2.02	2.01	2.01	2.01	1.99
21	2.04	2.03	2.02	2.02	2.01	2,00	2,00	1.99	1.99	1.98	1.98	1.98	1.96
22	2.01	2.00	2.00	1.99	1.98	1.98	1.97	1.97	1.96	1.96	1.95	1.95	1.94
23	1.99	1.98	1.97	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94	1.94	1.93	1.93	1.93	1.91
24	1.97	1.96	1.95	1.95	1.94	1.93	1.93	1.92	1.92	1.91	1.91	1.90	1.89
25	1.95	1.94	1.93	1.93	1.92	1.91	1.91	1.90	1.90	1.89	1.89	1.88	1.87
26	1.93	1.92	1.91	1.91	1.9	1.89	1.89	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.85
27	1.91	1.90	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.87	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84
28	1.90	1.89	1.88	1.88	1.87	1.86	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.83	1.82
29	1.88	1.88	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81
30	1.87	1.86	1.85	1.85	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.80	1.79
31	1.86	1.85	1.84	1.83	1.83	1.82	1.82	1.81	1.81	1.8	1.8	1.79	1.78
32	1.85	1.84	1.83	1.82	1.82	1.81	1.80	1.80	1.79	1.79	1.78	1.78	1.77
33	1.83	1.83	1.82	1.81	1.81	1.80	1.79	1.79	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76
34	1.82	1.82	1.81	1.80	1.80	1.79	1.78	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75
35	1.82	1.81	1.8	1.79	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74
36	1.81	1.8	1.79	1.78	1.78	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.74	1.74	1.73
37	1.8	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.74	1.74	1.73	1.73	1.72
38	1.79	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.74	1.73	1.73	1.72	1.71
39	1.78	1.77	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.72	1.72	1.71	1.70

40	1.77	1.77	1.76	1.75	1.74	1.74	1.73	1.73	1.72	1.72	1.71	1.71	1.69

Додаток Б

Співвідношення Чеддока

Значення r або η	Сила зв'язку
0,1 – 0,3	Слаба
0,3 – 0,5	Помірна
0,5 – 0,7	Помітна
0,7 – 0,9	Тісна
0,9 – 0,99	Дуже тісна

Додаток В

Значення коефіцієнту Стьюдента tα

ν	Довірча імовірність α				
	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1.	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2.	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3.	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4.	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5.	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6.	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7.	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8.	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9.	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10.	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11.	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12.	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13.	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14.	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15.	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16.	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17.	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18.	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19.	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20.	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21.	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22.	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23.	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24.	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25.	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874

Продовження додатку В

ν	Довірча імовірність α				
	0,80	0.9	0,95	0,98	0,99
26.	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27.	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28.	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29.	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30.	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31.	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32.	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33.	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34.	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35.	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36.	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37.	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38.	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39.	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40.	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41.	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42.	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43.	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44.	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45.	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46.	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47.	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48.	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49.	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50.	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778

Додаток Г

Форми розрахункових таблиць для визначення коефіцієнтів регресії

Таблиця Г.1 - Лінійна залежність

i	X_i	n_i	X_i^2	$\bar{Y}_i$	$X_i \cdot \bar{Y}_i$	$\hat{Y}_i$
1						
...	*З табл. 3.1*	*З табл. 3.1*		*З табл. 3.1*		
M						
Умовне познач.	V_1	N	V_2	W_1	W_2	
Формула	$\sum X_i$	$\sum n_i$	$\sum X_i^2$	$\sum \bar{Y}_i$	$\sum X_i \bar{Y}_i$	
Значення		*З табл. 3.1*				

Продовження додатку Г

Таблиця Г.2 – Гіперболічна залежність

i	X_i	$1/X_i$	n_i	$1/X_i^2$	$\bar{Y}_i$	$\bar{Y}_i / X_i$	$\hat{Y}_i$
1							
…	*З табл. 3.1*		*З табл. 3.1*		*З табл. 3.1*		
M							
Умовне позначення		V_1	N	V_2	W_1	W_2	
Формула		$\sum \frac{1}{X_i}$	$\sum n_i$	$\sum \frac{1}{X_i^2}$	$\sum \bar{Y}_i$	$\sum \frac{\bar{Y}_i}{X_i}$	
Значення			*З табл. 3.1*				

Продовження додатку Г

Таблиця Г.3 – Поліном другого ступеню

i	X_i	n_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	$\bar{Y}_i$	$\bar{Y}_i X_i$	$\bar{Y}_i X_i^2$	$\hat{Y}_i$
1									
...	*З табл. 3.1*	*З табл. 3.1*				*З табл. 3.1*			
M									
Умовне познач.	V_1	N	V_2	V_3	V_4	W_1	W_2	W_3	
Формула	$\sum X_i$	$\sum n_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_i^3$	$\sum X_i^3$	$\sum \bar{Y}_i$	$\sum \bar{Y}_i X_i$	$\sum \bar{Y}_i X_i^2$	
Значення		*З табл. 3.1*							