

УДК 519.642

Пожуєва І.С.¹, Слонєв М.А.²

¹ доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. КНТ-519 НУ «Запорізька політехніка»

АНАЛІЗ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

На практиці досить велике число завдань зводиться до обчислення значення визначеного інтеграла деякої функції: для встановлення площ або обсягів різних фігур і тіл; шляху, пройденого точкою в умовах нерівномірного руху; визначення центрів тяжіння та інерції тіл; роботи виробленої деякими силами.

Досить часто первісну $F(x)$ неможливо виразити через елементарні функції. Крім цього, функція $f(x)$ може задаватися не у вигляді безперервної функції, а у вигляді таблиці її значень на фіксованому кінцевому безлічі точок. У цьому випадку поняття первісної втрачає сенс, тому для обчислення інтеграла застосовують чисельні методи. Завдання чисельного інтегрування полягає у знаходженні наближеного значення визначеного інтеграла за допомогою деякої наближеної формули через відомі значення підінтегральної функції $f(x)$ в заданих точках. Похибка обчислення інтеграла залежить від того, наскільки точно контур запропонованої фігури повторює контур вихідної криволінійної трапеції.

Метод середніх прямокутників – це найпростіший метод наближеного обчислення визначеного інтеграла. Функція $y=f(x)$ інтегрується на сегменті $[a,b]$, який розбивається на n рівних між собою частин за допомогою точок:

$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}$. За висоти прямокутників тут приймаються значення функції, обчислені в серединях відрізків (рис.1), і в загальному вигляді формула наближених обчислень запишеться наступним чином

$$\int_a^b f(x) dx \approx h * [f(x_0 + \frac{h}{2})) + f(x_1 + \frac{h}{2}) + f(x_2 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})], \quad (1)$$

де $h = \frac{b - a}{n}$ - крок розбиття.

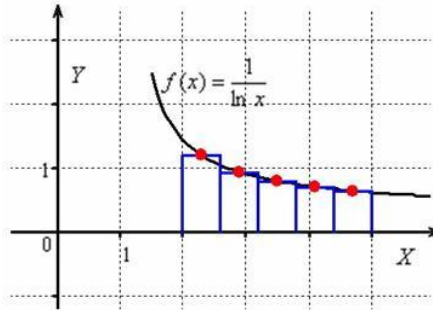


Рисунок 1 – Метод середніх прямокутників.

Метод трапецій – відрізок інтегрування розбивається на кілька відрізків, і графік підінтегральної функції наближається ламаною лінією (рис.2).

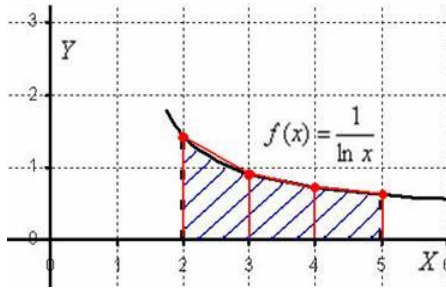


Рисунок 2 – Метод трапецій

Шуканий інтеграл, який дорівнює площі криволінійної фігури, замінюється на площу трапеції

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} * \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right], (2)$$

Метод Сімпсона – заснований на заміні фігури «під графіком функції» безліччю криволінійних трапецій. Верхні сторони трапецій є частинами парабол, які перетинають графік підінтегральної функції в точках x_i (рис. 3).

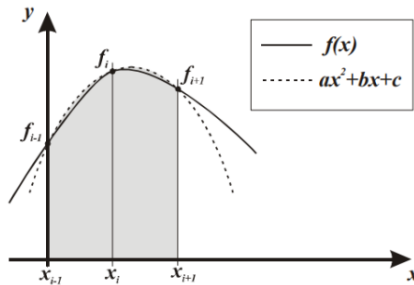


Рисунок 3 – Метод Сімпсона.

Іншими словами, метод заснований на використанні інтерполяції параболою функції $f(x)$, що задана у табличному вигляді і обчисленні інтегралів від функцій - парабол, що інтерполуються

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))], (3)$$

Для обчислення визначених інтегралів трьома методами була написана програма на C ++, в якій можна задавати межі інтегрування і кількість інтервалів розбиття. Для розрахунків взято функції $\sin(x)^2$, \sqrt{x} , $(1 - \cos x)^2$ з межею інтегрування $[0,1000]$, а також $\log_{10} x$, $\frac{1}{x^2}$ з межею $[1,1000]$. Кількість інтервалів - 1000. Для визначення точності методів були знайдені інтеграли даних функцій аналітично за формулою Ньютона-Лейбніца. Результати розрахунків зведені в таблицю 1.

Таблиця 1 – Порівняльний аналіз аналітичного і чисельних методів обчислення визначених інтегралів

	$\sin(x)^2$	$\log_{10} x$	\sqrt{x}	$\frac{1}{x^2}$	$(1 - \cos x)^2$
Аналітично	499,76749	2566,13981	21081,85107	0,999	1498,57875
Прямокутників	499.72369	2566.15701	21081.91129	0.934	1498.55158
Трапецій	499.85071	2566.10471	21081.64449	1.144	1498.63570
Сімпсона	499.76603	2566.13958	21081.82236	1.004	1498.57962

Аналіз отриманих даних свідчить про те, що найточнішого результату розв'язування визначених інтегралів можна досягти за допомогою методу Сімпсона. Однак, якщо немає необхідності у великій точності відповіді, слід скористатися методом середніх прямокутників, оскільки він, у порівнянні з іншими методами, має найпростіший алгоритм і потребує менше обчислювальних ресурсів. При цьому, у разі потреби, для підвищення точності можливо збільшити кількість інтервалів розбиття.