

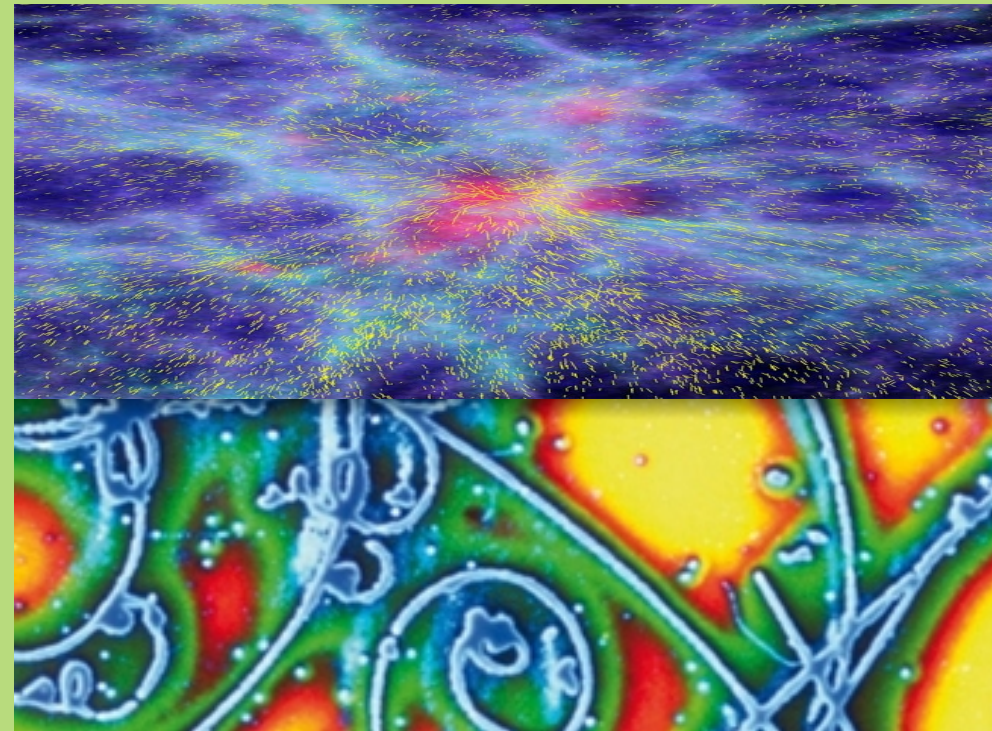
1. СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ

А. В. КОРОТУН, І. М. ТІТОВ,
Ю. А. КУНИЦЬКИЙ, В. В. ПОГОСОВ © ЗБІРНИК ЗАДАЧ. КОНДЕНСОВАНИЙ СТАН

А. В. КОРОТУН, І. М. ТІТОВ,
Ю. А. КУНИЦЬКИЙ, В. В. ПОГОСОВ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНОГО СТАНУ

2. ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет
Запорізький національний університет
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

**А. В. Коротун, І. М. Тітов,
Ю. А. Куницький, В. В. Погосов**

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНОГО СТАНУ

В двох томах

Том 2

ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Запоріжжя
ЗНТУ
2011

УДК 538.9 (076.1)
ББК 22.37я73
3 41

*Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
(лист № 1/11-100 від 06.01.2011 р.)*

Рецензенти:

С. П. Репецький, доктор фізико-математичних наук, професор;
В. А. Татаренко, доктор фізико-математичних наук, професор;
С. В. Лоскутов, доктор фізико-математичних наук, професор

3 41 **Збірник** задач з фізики конденсованого стану : навчальний посібник. В 2 т. Т. 2 / А. В. Коротун, І. М. Тітов, Ю. А. Куницький, В. В. Погосов. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2011. – 470 с.
ISBN 978-617-529-033-0
ISBN 978-617-529-035-4 (Т. 2)

Посібник призначений для студентів технічних і класичних вузів. Метою посібника є сприяння ефективній роботі студентів на практичних заняттях і під час самостійної роботи з основних розділів курсу фізики конденсованого стану і фізики маловимірних квантових систем.

Посібник побудовано з врахуванням положень кредитно-модульної системи організації навчального процесу. Кожний розділ супроводжується стислим викладом теоретичного матеріалу, надано приклади розв'язування задач, а потім пропонуються задачі для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів.
Друкується в авторській редакції.

УДК 538.9 (076.1)
ББК 22.37я73

ISBN 978-617-529-033-0
ISBN 978-617-529-035-4 (Т. 2)

© Коротун А. В., Тітов І. М.,
Куницький Ю. А.,
Погосов В. В., 2011

© ЗНТУ, 2011

ЗМІСТ

Основні умовні позначення	5
Передмова	8
1. Теплові властивості кристалічної ґратки	9
Основні формули та визначення	9
Приклади розв'язування задач	14
Задачі для самостійного розв'язування	22
Класична теорія теплоємності	22
Теорія теплоємності Ейнштейна	23
Теорія теплоємності Дебая	25
Теплопровідність твердих тіл	28
Теплове розширення твердих тіл	31
2. Процеси переносу в твердих тілах	33
Основні формули та визначення	33
Приклади розв'язування задач	45
Задачі для самостійного розв'язування	78
Електронна теплоємність і теплопровідність	78
Електропровідність твердих тіл	78
Термоелектричні та гальваноманітні явища	86
3. Контактні та поверхневі явища в твердих тілах	88
Основні формули та визначення	88
Приклади розв'язування задач	109
Задачі для самостійного розв'язування	116
Контактні явища	116
Поверхневі явища	127
4. Емісійні явища в твердих тілах	131
Основні формули та визначення	131
Приклади розв'язування задач	152
Задачі для самостійного розв'язування	180
Термоелектронна емісія	180
Фотоелектронна емісія	187
Автоелектронна емісія	193
5. Магнітні властивості твердих тіл	197
Основні формули та визначення	197
Приклади розв'язування задач	211
Задачі для самостійного розв'язування	237
Намагніченість. Магнітна сприйнятливність	237

Діа- та парамагнетизм	241
Феро- та антиферромагнетизм	244
Ферити та магнітний резонанс	250
6. Оптичні властивості твердих тіл	253
Основні формули та визначення	253
Приклади розв'язування задач	287
Задачі для самостійного розв'язування	314
7. Надпровідність	335
Основні формули та визначення	335
Приклади розв'язування задач	341
Задачі для самостійного розв'язування	356
8. Низькорозмірні системи	368
Основні формули та визначення	368
Приклади розв'язування задач	379
Задачі для самостійного розв'язування	448
Рекомендована література	454
Додаток А. Кристалічні ґратки твердих тіл	457
Додаток Б. Теплові властивості твердих тіл	459
Додаток В. Електричні властивості твердих тіл	460
Додаток Г. Емісійні властивості матеріалів	464
Додаток Д. Магнітні характеристики твердих тіл	465
Додаток Е. Оптичні характеристики твердих тіл	466
Додаток Е. Критичні параметри надпровідників	468

Основні умовні позначення

A	– постійна величина
a	– стала кристалічної ґратки; радіус борівської орбіти; прискорення
a_0	– радіус першої борівської орбіти
B	– постійна величина
\mathcal{B}	– модуль вектора магнітної індукції
b	– ширина
c	– швидкість поширення електромагнітної хвилі; швидкість світла
D	– коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра; коефіцієнт дифузії
E	– енергія мікрочастинки
e	– заряд електрона
e	– основа натуральних логарифмів
\mathcal{E}	– напруженість електричного поля
\mathcal{E}_a	– напруженість поля при термоелектричному ефекті
ε_F	– енергія Фермі
f	– функція розподілу
\hat{H}	– оператор Гамільтона (гамільтоніан)
h	– стала Планка; товщина
\hbar	– стала Дірака
I	– сила струму
i	– уявна одиниця
J	– інтенсивність світла
j	– густина струму
\mathbf{k}	– хвильовий вектор носія заряду
k	– модуль хвильового вектора
k_B	– стала Больцмана
L	– лінійний розмір
l	– довжина
m_e	– маса електрона
m^*	– ефективна маса мікрочастинки
N	– число частинок; густина квантових станів

N_A	– стала Авогадро
\aleph	– уявний показник заломлення
n	– концентрація частинок; концентрація електронів в зоні провідності
\bar{n}	– дійсний показник заломлення середовища
P	– імпульс електрона
R	– електричний опір; коефіцієнт відбивання
R_H	– стала Холла
r	– радіус
S	– площа
s	– швидкість звуку
T	– температура; коефіцієнт пропускання
t	– час
U	– потенціальна енергія; висота потенціального бар'єру; напруга
V	– об'єм кристала
v	– швидкість
v_g	– групова швидкість
v_{ph}	– фазова швидкість
W	– імовірність
w	– густина ймовірності
α	– абсолютна диференціальна термо-ЕРС
γ	– густина речовини; коефіцієнт поглинання
ε	– відносна діелектрична проникність
ε_0	– діелектрична стала вакууму
θ	– азимутальний кут у сферичній системі координат
κ	– число атомів в елементарній комірці; коефіцієнт тепло-провідності
λ	– довжина хвилі; довжина вільного пробігу
μ	– молярна маса; рухливість носіїв заряду
ν	– частота; число зіткнень
ρ	– питомий опір; густина заряду
σ	– питома електропровідність; ефективний переріз
τ	– час життя; час релаксації
τ_M	– максвеллівський час релаксації

- ϕ – робота виходу
- φ_k – контактна різниця потенціалів
- Ψ – координатна хвильова функція
- ω – циклічна частота

ПЕРЕДМОВА

Фізика конденсованого стану є одним з найбільших важливих розділів сучасної фізики. Тверде тіло з його складними електричними, оптичними, тепловими і магнітними властивостями – традиційно привабливий об'єкт фундаментальних досліджень. Пояснення складних явищ і розуміння фізичних процесів у твердому тілі призводить до важливих застосувань, наприклад, у галузі обчислювальної техніки, техніки зв'язку, електроніки, при створенні нових матеріалів. Ідеї, що зародилися в надрах фізики конденсованого стану, є плідними для астрофізики, квантової теорії поля, біофізики, фізики активних матеріалів, напівпровідників, діелектриків, металів тощо.

При вивченні університетського курсу фізики конденсованого стану або фізики твердого тіла значну увагу приділяють проблемам кореляцій між атомно-електронною структурою твердих тіл, їх складом і фізичними властивостями. Вирішенню цієї проблеми має сприяти не лише осмислене вивчення теоретичного матеріалу, але й закріплення отриманих знань і навичок у ході лабораторних робіт (експериментальне вивчення деяких законів і ефектів) та практичних занять (розв'язування задач та практичне застосування законів, правил і принципів). Разом із аналізом фізичного змісту, виділення найбільш важливих чинників, які впливають на протікання різних процесів і явищ, важливим є обговорення меж застосовності отриманих співвідношень, порівняння нових результатів з отриманими й їхня фізична інтерпретація. Ці елементи сприяють ефективній роботі студентів як на практичних заняттях, так і під час самостійної роботи. Тому кожний розділ супроводжується досить детальним теоретичним матеріалом, великою кількістю прикладів розв'язання і чималою кількістю задач для самостійного розв'язування.

Особливістю цього навчального посібника є можливість його використання при проведенні практичних занять для студентів різних спеціальностей як технічних, так і класичних університетів.

Автори висловлюють щире подяку Н. А. Смирновій, Є. Л. Жавжарову, Т. В. Булатецькій і Н. І. Тітовій за допомогу в підготовці оригінал-макету книги.

1. Теплові властивості кристалічної ґратки

Основні формули та визначення

Теплові властивості кристала – теплоємність і теплопровідність – зазвичай описують моделлю ідеального газу фононів.

Молярна внутрішня енергія хімічно простих (які складаються з однакових атомів) твердих тіл у класичній теорії теплоємності виражається формулою

$$U_{\mu} = 3RT, \quad (1.1)$$

де $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала; T – термодинамічна температура.

Теплоємність C_V системи (тіла) за сталого об'єму визначають як похідну від внутрішньої енергії U за температурою, тобто

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V. \quad (1.2)$$

Закон Дюлонга і Пті: при кімнатній температурі молярна теплоємність одноатомних твердих тіл є величина стала, однакова для хімічно простих речовин, і дорівнює $3R$:

$$C_{\mu} = 3R. \quad (1.3)$$

Закон Неймана – Коппа: молярна теплоємність хімічно складних тіл (які складаються з різних атомів)

$$C_{\mu} = 3\kappa R, \quad (1.4)$$

де κ – загальна кількість частинок у хімічній формулі сполуки.

Середнє значення енергії $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осцилятора, яка припадає на один ступінь вільності, в квантовій теорії Ейнштейна виражають формулою

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}, \quad (1.5)$$

де $\varepsilon_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ – нульова енергія; ω – циклічна частота коливань осцилятора.

Молярну внутрішню енергію кристала в квантовій теорії теплоємності Ейнштейна визначають за формулою

$$U_\mu = U_\mu^0 + 3R \frac{\Theta_E}{e^{\frac{\Theta_E}{T}} - 1}, \quad (1.6)$$

де $U_\mu^0 = \frac{3}{2}R\Theta_E$ – молярна нульова енергія за Ейнштейном; Θ_E – характеристична температура Ейнштейна.

Молярна теплоємність кристала в квантовій теорії теплоємності Ейнштейна

$$C_\mu = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\Theta_E}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_E}{T}} - 1 \right)^2}. \quad (1.7)$$

При низьких температурах ($T \ll \Theta_E$)

$$C_\mu = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\Theta_E}{T}}. \quad (1.8)$$

Частотний спектр коливань у квантовій теорії теплоємності Дебая задають функцією розподілу частот $g(\omega)$. Число dZ власних частот тіла, які припадають на інтервал частот від ω до $\omega + d\omega$, визначають за виразом

$$dZ = g(\omega)d\omega.$$

Для тривимірного кристала, який містить N атомів,

$$dZ = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^3 d\omega, \quad (1.9)$$

де ω_D – максимальна частота, яка обмежує спектр коливань.

Енергія твердого тіла U пов'язана із середньою енергією $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осцилятора і функцією розподілу частот $g(\omega)$ співвідношенням

$$U = \int_0^{\omega_D} \langle \varepsilon \rangle g(\omega) d\omega. \quad (1.10)$$

Молярна внутрішня енергія кристала за Дебаєм

$$U_\mu = U_\mu^0 + 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (1.11)$$

де $U_\mu^0 = \frac{9}{8} R\Theta_D$ – молярна нульова енергія кристала за Дебаєм; інтеграл

$$\int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx,$$

в якому $x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ – безрозмірна змінна, є величиною, що пов'язує

середню енергію квантового осцилятора і функцію розподілу частот. У залежності від меж інтегрування інтеграл має значення:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}, \quad \int_0^1 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 0,225, \quad \int_0^2 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 1,18. \quad (1.12)$$

Молярна теплоємність кристала за Дебаєм

$$C_{\mu} = 3R \left(12 \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - \frac{3 \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)}{e^{\frac{\Theta_D}{T}} - 1} \right). \quad (1.13)$$

Граничний закон Дебая: в області низьких температур¹ ($T \ll \Theta_D$) формула (1.13) набуває вигляду

$$C_{\mu} = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (1.14)$$

Закон Фур'є: кількість теплоти dQ , перенесена через поверхню площею S , перпендикулярну напрямку теплового потоку за час dt , дорівнює

$$dQ = -\Lambda \frac{dT}{dx} S dt, \quad (1.15)$$

де Λ – теплопровідність; $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури. Знак мінус у формулі вказує, що напрямок теплового потоку протилежний до напрямку вектора градієнта температури.

Теплопровідність Λ , теплоємність \tilde{C} , розрахована на одиницю об'єму, швидкість s звуку (усереднене значення) і середня довжина вільного пробігу λ фононів пов'язані співвідношенням

$$\Lambda = \frac{1}{3} \tilde{C} s \lambda. \quad (1.16)$$

Довжина вільного пробігу фононів, яка обмежується зіткненнями з дефектами, зіткненнями на стінках кристала та з іншими фононами, дорівнює

¹ Вважати при розв'язуванні задач $T \ll \Theta_D$, якщо $\frac{T}{\Theta_D} < 0,1$.

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}, \quad (1.17)$$

де n – концентрація розсіювальних центрів; σ – переріз розсіяння фононів.

Сила $f(x)$, яка повертає частинку в положення рівноваги при ангармонічних коливаннях, визначають за виразом

$$f(x) = -\beta x + \gamma x^2, \quad (1.18)$$

де β – коефіцієнт гармонічності, пов'язаний з рівноважною відстанню r_0 між атомами кристала і модулем поздовжньої пружності E співвідношенням

$$\beta = r_0 E; \quad (1.19)$$

γ – коефіцієнт ангармонічності, який характеризує асиметрію коливань атомів у твердому тілі. Для оцінки за порядком величин можна прийняти

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\beta}{r_0}. \quad (1.20)$$

Коефіцієнт лінійного розширення, за визначенням,

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dT}. \quad (1.21)$$

Теоретично його виражають через коефіцієнти β і γ формулою

$$\alpha_l = \frac{\gamma k_B}{\beta^2 r_0}, \quad \text{або наближено} \quad \alpha_l = \frac{1}{2} \frac{k_B}{\beta r_0^2}. \quad (1.22)$$

Коефіцієнт об'ємного розширення, за визначенням,

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dT}. \quad (1.23)$$

Для твердих ізотропних тіл

$$\alpha_V = 3\alpha_l. \quad (1.24)$$

Густина тіла при температурі T

$$\rho_T = \frac{\rho_0}{1 + \alpha_V T}, \quad (1.25)$$

де ρ_0 – густина при температурі $T = 273 \text{ К}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. Скориставшись законом Дюлонга і Пті, визначте, з якого матеріалу зроблено кульку масою $m = 25 \text{ г}$, якщо для її нагрівання від $t_1 = 10^\circ \text{C}$ до $t_2 = 30^\circ \text{C}$ необхідно витратити кількість теплоти $Q = 117 \text{ Дж}$.

Розв'язання

Витрачену кількість теплоти визначимо за формулою

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

де c – питома теплоємність матеріалу кульки.

За законом Дюлонга і Пті, молярна теплоємність $C_\mu = 3R$.

Молярна C_μ і питома c теплоємності пов'язані співвідношенням

$$C_\mu = c\mu,$$

звідки

$$c = \frac{C_\mu}{\mu} = \frac{3R}{\mu}.$$

Тоді

$$Q = cm(t_2 - t_1) = \frac{3R}{\mu} m(t_2 - t_1),$$

звідки

$$\mu = \frac{3mR(t_2 - t_1)}{Q} = \frac{3 \cdot 0,025 \cdot 8,31 \cdot (30 - 10)}{117} = 107 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Відповідь: $\mu = 107 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; срібло.

Приклад 1.2. Обчисліть за класичною теорією теплоємність C_V кристала броміду алюмінію AlBr_3 об'ємом $V = 200 \text{ см}^3$. Густина ρ броміду алюмінію дорівнює $3,01 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Розв'язання

Хімічна формула сполуки AlBr_3 містить чотири атоми ($\kappa = 4$). Тому, відповідно до закону Неймана – Коппа, молярна теплоємність кристала:

$$C_\mu = 3\kappa R.$$

Теплоємність C_V всього кристала дорівнює

$$C_V = \nu C_\mu = \frac{m}{\mu} C_\mu = \frac{\rho V}{\mu} C_\mu = \frac{3\kappa \rho V}{\mu} R.$$

Отже, підставляючи в останню формулу чисельні значення, отримаємо

$$C_V = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3,01 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{267 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 = 225 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Відповідь: $C_V = 225 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Приклад 1.3. Користуючись теорією теплоємності Ейнштейна, визначте зміну внутрішньої енергії одного моля крис-

тала при нагріванні його від $T_1 = 0$ до $T_2 = 0,1\Theta_E$.
Характеристичну температуру Ейнштейна для даного кристалу прийміть рівною $\Theta_E = 300$ К.

Розв'язання

Молярна внутрішня енергія кристала в квантовій теорії теплоємності Ейнштейна визначається формулою (1.6):

$$U_\mu = U_\mu^0 + 3R \frac{\Theta_E}{e^{\frac{\Theta_E}{T}} - 1}.$$

Зміна внутрішньої енергії:

$$\Delta U_\mu = \int_{T_1}^{T_2} dU_\mu = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dU_\mu}{dT} dT = \int_{T_1}^{T_2} C_\mu dT. \quad (1)$$

Для низьких температур ($T \ll \Theta_E$) теплоємність визначають за виразом (1.8):

$$C_\mu = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\Theta_E}{T}}. \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в (1), отримуємо:

$$\Delta U_\mu = \int_{T_1}^{T_2} 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 e^{-\frac{\Theta_E}{T}} dT.$$

Введемо нову змінну $x = \frac{\Theta_E}{T}$, тоді $dx = -\frac{\Theta_E}{T^2} dT$. При цьому температура T_1 відповідає $x_1 \rightarrow \infty$, $T_2 = 0,1\Theta_E = 10$.

Остаточнo отримуємо

$$\Delta U_\mu = 3R\Theta_E \int_{10}^{\infty} e^{-x} dx = 3R\Theta_E e^{-10} = 3 \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot e^{-10} = 340 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $\Delta U_\mu = 340$ Дж.

Приклад 1.4. Визначте кількість теплоти ΔQ , необхідну для нагрівання кристала NaCl масою $m = 20$ г на $\Delta T = 2$ К у двох випадках: 1) $T_1 = \Theta_D$; 2) $T_1 = 2$ К. Характеристичну температуру Дебая для NaCl прийняти рівною $\Theta_D = 320$ К.

Розв'язання

Кількість теплоти, яка підводиться для нагрівання тіла від температури T_1 до T_2 , обчислимо за формулою

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT, \quad (1)$$

де C_V – теплоємність тіла (системи).

Теплоємність C_V тіла пов'язана з молярною теплоємністю C_μ співвідношенням

$$C_V = \nu C_\mu = \frac{m}{\mu} C_\mu.$$

Підставивши цей вираз у формулу (1), отримаємо

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} C_\mu dT. \quad (2)$$

У загальному випадку C_μ є функцією температури, тому за знак інтеграла її виносити не можна. Проте в першому випадку змінною теплоємності порівняно з її значенням при температурі T_1 можна знехтувати і вважати її на всьому інтервалі температур ΔT постійною і рівною $C_\mu(T_1)$. Через це формула (2) набуває вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_\mu(T_1) \Delta T. \quad (3)$$

Молярну теплоємність $C_\mu(T_1)$ у теорії Дебая виражають співвідношенням (1.13):

$$C_\mu = 3R \left(12 \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - \frac{3 \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)}{e^{\frac{\Theta_D}{T}} - 1} \right).$$

У першому випадку при $T_1 = \Theta_D$ інтеграл

$$\int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 0,225, \text{ отже, } C_\mu = 2,87R.$$

Підставляючи C_μ у формулу (3), отримаємо

$$\Delta Q = 2,87 \frac{m}{\mu} R \Delta T = 2,87 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{58,5 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 2 = 16,3 \text{ Дж}.$$

У другому випадку ($T \ll \Theta_D$) визначення ΔQ полегшується тим, що можна скористатися граничним законом Дебая, відповідно якому теплоємність пропорційна кубу абсолютної температури. У цьому випадку теплоємність сильно змінюється в межах заданого інтервалу температур і її не можна виносити за знак інтеграла в формулі (2).

Використовуючи вираз граничного закону Дебая (1.14)

$$C_\mu = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_2}^{T_2+\Delta T} T^3 dT = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{\Theta_D^3} \frac{T^4}{4} \Big|_{T_2}^{T_2+\Delta T} = \\ &= \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{(T_2 + \Delta T)^4}{4} - \frac{T_2^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

З урахуванням того, що $T_2 + \Delta T = 2T_2$, вираз (4) набуває вигляду

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{\Theta_D^3} 15T_2^4 = 9\pi^4 \frac{m}{\mu} R \frac{T_2^4}{\Theta_D^3} = 9 \cdot 3,14^4 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-3}}{58,5 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \times \\ \times \frac{2^4}{320^3} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,22 \text{ мДж}.$$

Відповідь: $\Delta Q = 16,3 \text{ Дж}$; $\Delta Q = 1,22 \text{ мДж}$.

Приклад 1.5. Зовнішня поверхня стіни має температуру $t_1 = -20^\circ \text{C}$, внутрішня – температуру $t_2 = 20^\circ \text{C}$. Товщина стіни $h = 40 \text{ см}$. Визначте теплопровідність Λ матеріалу стіни, якщо через одиницю її поверхні за час $\Delta \tau = 1 \text{ год}$ проходить кількість теплоти $Q = 460,5 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^2}$.

Розв'язання

Кількість теплоти Q , яка переноситься внаслідок теплопровідності за час $\Delta \tau$, визначають за допомогою формули (1.15):

$$Q = \Lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta \tau,$$

де $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ – градієнт температури в напрямку, перпендикулярному до нескінченно малої площадки ΔS .

У нашому випадку $\Delta T = \Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = h$, $\Delta S = 1 \text{ м}^2$, тоді

$$Q = \frac{\Lambda (t_2 - t_1) \Delta \tau}{h}.$$

Звідси теплопровідність

$$\Lambda = \frac{Qh}{(t_2 - t_1) \Delta \tau} = \frac{460,5 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 3600} = 1,28 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Відповідь: $\Lambda = 1,28 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.

Приклад 1.6. При нагріванні деякого металу від $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 500^\circ\text{C}$ його густина зменшується в 1,027 рази. Знайдіть для цього металу коефіцієнт лінійного розширення α_l , вважаючи його постійним у заданому інтервалі температур.

Розв'язання

Густина металу при температурі t_2 дорівнює $\rho = \frac{m}{V}$, тоді його густина при температурі t_1 дорівнює $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$.

Відносна зміна об'єму при нагріванні

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho_0}} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho} - 1. \quad (1)$$

З іншого боку,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \alpha_V \Delta T,$$

де α_V – температурний коефіцієнт об'ємного розширення. Оскільки метал ізотропний, то температурний коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_l = \frac{\alpha_V}{3}$, тоді

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3\alpha_l \Delta T = 3\alpha_l \Delta t = 3\alpha_l (t_2 - t_1). \quad (2)$$

Прирівнюючи у виразах (1) і (2) праві частини, маємо

$$\frac{\rho_0}{\rho} - 1 = 3\alpha_l(t_2 - t_1),$$

звідки

$$\alpha_l = \frac{\frac{\rho_0}{\rho} - 1}{3(t_2 - t_1)} = \frac{1,027 - 1}{3 \cdot 500} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

Відповідь: $\alpha_l = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Приклад 1.7. Оцініть термічний коефіцієнт розширення твердого тіла α , вважаючи, що коефіцієнт ангармонічності $\gamma \approx \frac{\beta}{2r_0}$. При оцінці прийміть: модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$, міжатомна відстань $r_0 = 0,3 \text{ нм}$.

Розв'язання

Теоретичне значення термічного коефіцієнту розширення α_l можна оцінити за формулою (1.22):

$$\alpha_l = \frac{\gamma k_B}{\beta^2 r_0}. \quad (1)$$

З урахуванням наближеної рівності $\gamma \approx \frac{\beta}{2r_0}$ формула (1) набуває вигляду:

$$\alpha_l \approx \frac{k_B}{2\beta r_0^2}. \quad (2)$$

Використовуючи співвідношення (1.19), перепишемо (2) у вигляді:

$$\alpha_l \approx \frac{k_B}{2Er_0^3} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{2 \cdot 100 \cdot 10^9 \cdot (0,3 \cdot 10^{-9})^3} = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Відповідь: $\alpha_l = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Задачі для самостійного розв'язування

Класична теорія теплосмності

- 1.1. Обчисліть питомі теплосмності c металу за класичною теорією теплосмності.

№ варіанту	Метал	$\mu, 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$	№ варіанту	Метал	$\mu, 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
1	Купрум	63,5	13	Аргентум	107,9
2	Плюмбум	207,2	14	Алюміній	27,0
3	Молібден	95,9	15	Тантал	180,9
4	Вольфрам	183,9	16	Хром	52,0
5	Титан	47,9	17	Аурум	197,0
6	Ніобій	92,9	18	Цинк	65,38
7	Залізо	55,8	19	Паладій	106,4
8	Кобальт	58,9	20	Платина	195,1
9	Магній	24,3	21	Іридій	192,2
10	Нікол	58,7	22	Ванадій	50,9
11	Літій	6,94	23	Родій	102,9
12	Манган	54,94	24	Бісмут	208,98

- 1.2. Користуючись класичною теорією, обчисліть питомі теплосмності c кристалів:

№ варіанту	Кристал	№ варіанту	Кристал
1	NaCl	13	MnCl ₂
2	Ba(NO ₃) ₂	14	CaHPO ₄
3	KCl	15	RbI
4	CaF ₂	16	Fe ₃ O ₄
5	Al ₂ O ₃	17	AgBr

6	MgO	18	CoO
7	Fe ₂ (SO ₄) ₃	19	TiCl
8	SiO ₂	20	Au ₂ O ₃
9	LiF	21	BaTiO ₃
10	Cu(OH) ₂	22	CaCl ₂
11	GaAs	23	Cr ₂ (SO ₄) ₃
12	Au(OH) ₃	24	Ca ₃ (PO ₄) ₂

- 1.3. Skorиставшись законом Дюлонга і Пті, знайдіть, у скільки разів питома теплоємність Алюмінію більше за питому теплоємність Платини.
- 1.4. Свинцева куля летить із швидкістю $v = 400 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, зазнає удару зі стінкою і входить в неї. Вважаючи, що 10% кінетичної енергії кулі йде на її нагрівання, знайдіть, на скільки градусів нагрілася куля. Питому теплоємність свинцю визначте за законом Дюлонга і Пті.
- 1.5. Визначте зміну ΔU внутрішньої енергії кристала нікелю при його нагріванні від $t_1 = 0^\circ \text{C}$ до $t_2 = 200^\circ \text{C}$. Маса кристала $m = 20 \text{ г}$. Теплоємність C_V обчисліть.
- 1.6. Виведіть формулу для середньої енергії $\langle \varepsilon \rangle$ класичного лінійного гармонічного осцилятора при тепловій рівновазі. Обчисліть значення $\langle \varepsilon \rangle$ при $T = 300 \text{ К}$.
- 1.7. Визначте енергію U і теплоємність C_V системи, яка складається з $N = 10^{25}$ класичних тримірних незалежних гармонічних осциляторів. Температура $T = 300 \text{ К}$.

Теорія теплоємності Ейнштейна

- 1.8. Визначте: 1) середню енергію $\langle \varepsilon \rangle$ лінійного одномірного квантового осцилятора при температурі $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 200 \text{ К}$); 2) енергію U системи, яка складається з $N = 10^{25}$ квантових

тримірних незалежних осциляторів, при температурі $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 300 \text{ K}$).

- 1.9. Знайдіть частоту ν коливань атомів Аргентуму за теорією теплоємності Ейнштейна, якщо характеристична температура Θ_E Аргентуму дорівнює 165 K .
- 1.10. Знайдіть, у скільки разів зміниться середня енергія $\langle \varepsilon \rangle$ квантового осцилятора, яка припадає на один ступінь вільності, з підвищенням температури від $T_1 = \frac{\Theta_E}{2}$ до $T_2 = \Theta_E$? Врахуйте нульову енергію.
- 1.11. Визначте відношення $\frac{\langle \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon_T \rangle}$ середньої енергії квантового осцилятора до середньої енергії теплового руху молекул ідеального газу при температурі $T = \Theta_E$.
- 1.12. Використовуючи квантову теорію теплоємності Ейнштейна, обчисліть зміну ΔU_μ молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його на $\Delta T = 2 \text{ K}$ від температури $T = \frac{\Theta_E}{2}$.
- 1.13. Скориставшись теорією теплоємності Ейнштейна, визначте зміну ΔU_μ молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його від нуля до $T = 0,25\Theta_E$. Характеристичну температуру Ейнштейна для даного кристала прийміть рівною $\Theta_E = 300 \text{ K}$.
- 1.14. Визначте відносну похибку, якої буде припущено, якщо при розрахунку теплоємності C_μ замість значення, яке дає теорія Ейнштейна (при $T = \Theta_E$), скористатися значенням, що дає закон Дюлонга і Пті.
- 1.15. Обчисліть за теорією Ейнштейна молярну нульову енергію U_μ^0 кристала Цинку. Характеристична температура Ейнштейна для Цинку дорівнює $\Theta_E = 230 \text{ K}$.

Теорія теплоємності Дебая

- 1.16. Розглядаючи в дебаївському наближенні тверде тіло як систему з поздовжніх і поперечних стоячих хвиль, встановіть функцію розподілу частот $g(\omega)$ для кристала з тримірною кристалічною ґраткою. При виведенні прийміть, що кількість власних коливань Z обмежена і дорівнює $3N$ (N – кількість атомів у об'ємі, що розглядається).
- 1.17. Одномірний ланцюжок складається з атомів масами $m_1 = m$ і $m_2 = 9m$. Оцініть відносний внесок у теплоємність оптичних коливань атомів ланцюжка при температурі $T_1 = \frac{\Theta_D}{10}$.
- 1.18. У кристалі кухонної солі NaCl при температурі $T = 10$ К теплоємність одиниці об'єму $\tilde{C} = 830 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}$. Оцініть швидкість звуку s у кристалі та його дебаївську температуру Θ_D . Стала ґратки NaCl дорівнює $a = 0,3$ нм.
- 1.19. Знаючи функцію розподілу частот $g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^3$ для тримірної кристалічної ґратки, виведіть формулу для енергії кристала, який містить N_A атомів.
- 1.20. Визначте відносну зміну внутрішньої енергії кристала корунду Al_2O_3 при нагріванні від $t_1 = 30^\circ\text{C}$ до $t_2 = 150^\circ\text{C}$. Маса кристала $m = 30$ г. Умову $T > \Theta_D$ вважати виконаною.
- 1.21. Використовуючи формулу енергії тримірного кристала

$$U_\mu = 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx,$$

отримайте вираз для молярної теплоємності.

- 1.22. Використовуючи формулу (1.13), знайдіть граничний вираз молярної теплоємності при низьких температурах ($T \ll \Theta_D$).

- 1.23. Мідний зразок масою $m = 50$ г перебуває при температурі $T_1 = 10$ К. Визначте кількість теплоти, необхідну для його нагрівання до температури $T_2 = 15$ К. Температуру Дебая для міді прийміть рівною $\Theta_D = 300$ К. Умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.
- 1.24. Використовуючи теорію Дебая, обчисліть питому теплоємність заліза при температурі $T = 15$ К. Прийміть температуру Дебая для заліза рівною $\Theta_D = 467$ К. Умову $T \ll \Theta_D$ вважати виконаною.
- 1.25. Температура Дебая алмазу $\Theta_D = 2000$ К. Визначте його питому теплоємність при температурі $T = 30$ К.
- 1.26. Обчисліть дебаївську частоту ω_D , якщо відомо, що молярна теплоємність C_μ срібла при $T = 20$ К дорівнює $C_\mu = 1,7 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.
- 1.27. Яка питома теплоємність свинцю при температурі $t = 100^\circ \text{C}$? Температура Дебая $\Theta_D = 330$ К.
- 1.28. Обчисліть відношення зміни ΔU внутрішньої енергії кристала при його нагріванні від нуля до $T = 0,1\Theta_D$ до нульової енергії U_0 . Вважати $T \ll \Theta_D$.
- 1.29. Обчисліть за теорією Дебая молярну нульову енергію U_μ^0 кристала, характеристична температура Дебая якого Θ_D .

№ варіанту	Метал	Θ_D , К	№ варіанту	Метал	Θ_D , К
1	Купрум	343	11	Аргентум	225
2	Плюмбум	105	12	Алюміній	428
3	Молібден	450	13	Тантал	240
4	Вольфрам	400	14	Хром	630
5	Титан	420	15	Ніобій	275
6	Ванадій	380	16	Нікол	450
7	Іридій	420	17	Паладій	274
8	Кобальт	445	18	Платина	240

9	Літій	344	19	Ферум	470
10	Аурум	165	20	Родій	480

- 1.30. Використовуючи квантову теорію теплоємності Дебая, обчисліть зміну ΔU_μ молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його на $\Delta T = 2$ К від температури $T = \frac{\Theta_D}{2}$.
- 1.31. Визначте відносну похибку, якої буде припущено, якщо при розрахунку теплоємності C_μ замість значення, яке дає теорія Дебая (при $T = \Theta_D$), скористатися значенням, яке дає закон Дюлонга і Пті.
- 1.32. При нагріванні срібла масою $m = 10$ г від температури $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К було підведено $\Delta Q = 0,71$ Дж теплоти. Визначте характеристичну температуру Дебая Θ_D срібла. Вважати $T \ll \Theta_D$.
- 1.33. Визначте кількість теплоти ΔQ , необхідну для нагрівання кристала з матеріалу X масою m на ΔT у двох випадках: 1) $T_1 = \Theta_D$; 2) $T_2 = \Delta T$. Характеристичну температуру Дебая для NaCl прийняти рівною $\Theta_D = 320$ К.

№ варіанту	Матеріал	m , г	ΔT , К	Θ_D , К
1	Вольфрам	5	1	400
2	Кобальт	15	2	445
3	Алюміній	17	3	428
4	Ванадій	6	5	380
5	Нікель	1	4	450
6	Мідь	2	10	343
7	Залізо	3	9	470
8	Платина	4	6	240
9	Срібло	26	8	225
10	Молибден	7	7	450
11	Хром	8	1	630
12	Титан	9	3	420

13	Свинець	10	5	105
14	Вольфрам	20	6	400
15	Кобальт	19	4	445
16	Алюміній	18	2	428
17	Ванадій	16	7	380
18	Нікель	14	8	450
19	Мідь	13	11	343
20	Залізо	11	9	470
21	Платина	12	10	240
22	Срібло	21	12	225
23	Молібден	25	15	450
24	Титан	22	13	420
25	Свинець	24	14	105

1.34. Знайдіть відношення $\frac{\Theta_E}{\Theta_D}$ характеристичних температур Ейнштейна і Дебая.

Вказівка. Скористайтесь виразом для нульових енергій, обчислених за теоріями Ейнштейна і Дебая.

1.35. Розглядаючи в дебайвському наближенні систему з поздовжніх і поперечних стоячих хвиль, встановіть вигляд функції розподілу частот $g(\omega)$ для кристала з двовимірною ґраткою (тобто кристала, який складається з шарів, що не взаємодіють). При виведенні вважайте, що кількість власних коливань Z обмежена і дорівнює $3N$ (N – кількість атомів в об'ємі, що розглядається).

1.36. При відомій функції розподілу частот $g(\omega) = \frac{6N}{\omega_D^3} \omega^3$ для кристала з двовимірною ґраткою, виведіть формулу для внутрішньої енергії U кристала, який містить N_A атомів.

Теплопровідність твердих тіл

1.37. При кімнатній температурі середня довжина вільного пробігу фононів у кристалі хлористого натрію в чотири рази більше за

сталу його гратки $a = 5,64 \text{ \AA}$. Обчисліть коефіцієнт теплопровідності цього кристала, якщо швидкість звуку в ньому $s = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

- 1.38. Розрахуйте потужність N , необхідну для того, щоб підтримувати температуру $t_1 = 100^\circ\text{C}$ в термостаті, площа поверхні якого дорівнює $S = 1,5 \text{ м}^2$, товщина ізолюючого шару дорівнює $h = 2 \text{ см}$ і зовнішня температура $t = 20^\circ\text{C}$.
- 1.39. Вода при температурі $t_1 = 0^\circ\text{C}$ покрита шаром льоду товщиною $h = 50 \text{ см}$. Температура повітря дорівнює $t_2 = 30^\circ\text{C}$. Визначте кількість теплоти Q , яку передала вода за час $\tau = 1 \text{ год}$ через поверхню льоду площею $S = 1 \text{ м}^2$. Теплопровідність льоду дорівнює $\Lambda = 2,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$.
- 1.40. Металева циліндрична посудина радіусом $r = 9 \text{ см}$ наповнена льодом при температурі $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Посудина теплоізована шаром пробки товщиною $h = 1 \text{ см}$. Через який час τ увесь лід розтане, якщо температура зовнішнього повітря $t_2 = 25^\circ\text{C}$? Вважати, що теплообмін відбувається лише через бічну поверхню посудини середнім радіусом $r_0 = 9,5 \text{ см}$.
- 1.41. Пластинки з міді (товщиною $h_1 = 9 \text{ мм}$) і заліза (товщиною $h_2 = 3 \text{ мм}$) складені разом. Зовнішню поверхню мідної пластинки підтримують при температурі $t_1 = 50^\circ\text{C}$, зовнішню поверхню залізної – при $t_2 = 0^\circ\text{C}$. Визначте температуру θ поверхні їх стику. Площа пластинок набагато більша за їх товщину.
- 1.42. Обчисліть довжину вільного пробігу фононів у кристалі Аргентуму при $T = 300 \text{ К}$, якщо коефіцієнт теплопровідності

Аргентуму $\Lambda = 418 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, а швидкість поширення звуку

$$s = 3700 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.43. У кварці при кімнатній температурі довжина вільного пробігу фононів має величину $\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, швидкість звуку

$$s = 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \text{ Оцініть теплопровідність кварцу.}$$

1.44. Оцініть довжину вільного пробігу фононів у Германії при температурі $T = 300 \text{ К}$, використовуючи такі дані: дебаївська температура Германію $\Theta_D = 360 \text{ К}$, коефіцієнт теплопровідності

$$\Lambda = 80 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \text{ молярна маса } \mu = 72,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \text{ густина}$$

$$\rho = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \text{ середня швидкість звуку } s = 4500 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \text{ Вважайте, що перенесення тепла здійснюється лише фононами.}$$

1.45. Дебаївська температура алмазу $\Theta_D = 2000 \text{ К}$. Обчисліть відношення теплопровідності алмазу при температурі $T = 50 \text{ К}$ до теплопровідності при 4 К , вважаючи, що в обох випадках домінуючим процесом розсіяння фононів є розсіяння на межах кристала.

1.46. Розрахуйте коефіцієнт теплопровідності при температурі $T = 1 \text{ К}$ кристалічного стрижня діаметром 3 мм із синтетичного корунду (Al_2O_3). Швидкість звуку в корунді $s = 5000 \frac{\text{м}}{\text{с}}$,

$$\text{його густина } \rho = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \text{ дебаївська температура}$$

$$\Theta_D = 1000 \text{ К}.$$

1.47. Оцініть максимально можливу величину коефіцієнта теплопровідності циліндра діаметром $d = 3 \text{ мм}$ з кристалічного штучного сапфіру при температурі $T = 30 \text{ К}$. Температура Дебая сапфіра $\Theta_D = 100 \text{ К}$, швидкість звуку $s = 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а його

теплоємність при $T \ll \Theta_D$ визначають виразом

$$C_V = 0,1T^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}.$$

- 1.48. Фонони розсіюються в кристалі на домішкових центрах з поперечним перерізом розсіяння σ порядку геометричного (10^{-15} см^2). Оцініть фононну теплопровідність кристала при температурі $T = 30 \text{ К}$, якщо концентрація домішок у ньому $n = 10^{21} \text{ м}^{-3}$, а швидкість звуку $s = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. При якій товщині кристала почне впливати розсіяння фононів на межах?

Теплове розширення твердих тіл

- 1.49. Елементарна комірка кристала Купруму – гранецентрований куб. Визначте лінійний коефіцієнт теплового розширення α_l монокристала Купруму, якщо модуль Юнга $E = 123 \text{ ГПа}$, а густина $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.
- 1.50. Знайдіть коефіцієнт об'ємного розширення α_V для анізотропного кристала, коефіцієнти лінійного розширення якого за трьома взаємно перпендикулярними напрямками становлять $\alpha_1 = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $\alpha_2 = 1,10 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $\alpha_3 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.
- 1.51. Обчисліть максимальну силу F_{max} , яка повертає атом твердого тіла в положення рівноваги, якщо коефіцієнт гармонічності $\beta = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, а коефіцієнт ангармонічності $\gamma = 500 \text{ ГПа}$.
- 1.52. Визначте силу (що відповідає максимальному зміщенню), яка повертає атом твердого тіла в положення рівноваги, якщо амплітуда теплових коливань складає 5% від середньої міжатомної відстані за даної температури. При розрахунках прийняти: коефіцієнт гармонічності $\beta = 50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, коефіцієнт ангармонічності $\gamma = 500 \text{ ГПа}$, середня міжатомна відстань $r_0 = 0,4 \text{ нм}$.

- 1.53. Яка максимальна зміна $\Delta\Pi_{\max}$ потенціальної енергії атомів у кристалічній ґратці твердого тіла при гармонічних коливаннях, якщо амплітуда теплових коливань становить 5% від середньої міжатомної відстані? Середню відстань r_0 між атомами прийміть рівною 0,3 нм, модуль Юнга $E = 100$ ГПа .
- 1.54. Покажіть, що у випадку, коли зміщення частинок у кристалічній ґратці твердого тіла описується законом Гука $F(x) = -\beta x$, теплового розширення немає.
- 1.55. Оцініть коефіцієнт гармонічності β в рівнянні коливань частинок твердого тіла (1.18), якщо рівноважна відстань r_0 між частинками дорівнює 0,3 нм, модуль Юнга $E = 200$ ГПа .
- 1.56. Яку силу F потрібно прикласти до кінців сталевго стрижня площею поперечного перерізу $S = 10$ см², щоб не дати йому розширитися при нагріванні від $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 30^\circ\text{C}$?
- 1.57. До сталевго дроту радіусом $r = 1$ мм підвішено вантаж. Під дією цього вантажу дріт отримав таке ж видовження, як і при нагріванні на $\Delta t = 20^\circ\text{C}$. Знайдіть масу m вантажу.
- 1.58. Мідний дріт натягнутий гарячим при температурі $t_1 = 150^\circ\text{C}$ між двома міцними нерухожими стінками. При якій температурі t_2 , остигаючи, розірветься дріт? Вважайте, що закон Гука справедливий аж до розриву дроту.
- 1.59. Яку довжину l_0 повинні мати при температурі $t_0 = 0^\circ\text{C}$ сталевий і мідний стрижні, щоб за будь-якої температури сталевий стрижень був довший мідного на $\Delta l = 5$ см ?
- 1.60. На нагрівання мідної болванки масою $m = 1$ кг, яка перебуває при температурі $t_0 = 0^\circ\text{C}$, витрачено кількість теплоти $Q = 138,2$ кДж . У скільки разів при цьому збільшився її об'єм? Питому теплоємність міді знайдіть із закону Дюлонга і Пті.

2. Процеси переносу в твердих тілах

Основні формули та визначення

Класична теорія електропровідності Друде. Елементарна теорія металів була побудована Друде на основі припущень, що електрони металу представляють собою газ вільних електронів, що складається з частинок масою m_e , які рухаються на тлі важких нерухомих йонів, та підкоряється звичайній кінетичній теорії нейтральних розріджених газів.

Основні положення теорії Друде:

1. В інтервалі часу між зіткненнями не враховуються взаємодії електрона з іншими електронами (*наближення незалежних електронів*) та йонами (*наближення вільних електронів*). Отже, за відсутності зовнішніх полів кожний електрон рухається з постійною швидкістю по прямій лінії. За наявності зовнішніх полів рух електрона підкоряється законам механіки Ньютона.
2. Зіткнення – це миттєві події, при яких раптово змінюється швидкість електрона.
3. Вважається, що за одиницю часу електрон зазнає зіткнення з ймовірністю, рівною $\frac{1}{\tau}$. Ймовірність того, що електрон зазнає зіткнення протягом нескінченно малого проміжку часу dt , дорівнює $\frac{dt}{\tau}$. Час τ називають **часом релаксації** або **часом вільного пробігу**. Вважається, що τ не залежить від просторового положення електрона і його швидкості.
4. Електрони приходять у стан теплової рівноваги виключно завдяки зіткненням. Швидкість електрона v відразу після зіткнення не пов'язана з його швидкістю до зіткнення, направлена випадково, а її величина

відповідає температурі середовища T ($v \propto \sqrt{T}$) в тій області, де відбулося зіткнення.

В якості міри густини електронного газу часто використовують радіус сфери, об'єм якої дорівнює об'єму, що припадає на один електрон провідності – **радіус комірки Вігнера – Зейтца**:

$$r_s = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi n_e}}, \quad (2.1)$$

де n_e – концентрація електронів.

Якщо n_e електронів в одиниці об'єму напівпровідника рухаються з однаковою швидкістю \mathbf{v} , то густина струму визначатиметься виразом:

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

У будь-якій точці металу електрони рухаються в будь-яких напрямках і мають різні швидкості. Сумарна густина струму дається виразом (2.2), де \mathbf{v} – позначає вже середню швидкість електронів. За відсутності електричного поля всі напрямки руху *рівномірні* і середня швидкість дорівнює нулю. За наявності поля \mathbf{E} середня швидкість $\mathbf{v}_{av} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle$ відмінна від нуля і має протилежний полю напрямку.

Закон Ома в диференційній формі має вигляд:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

де \mathbf{E} – напруженість постійного електричного поля;

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \quad (2.4)$$

σ – провідність; τ – час релаксації; m_e – маса вільного електрона.

Середньоквадратична швидкість теплового руху електронів:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}. \quad (2.5)$$

Величину питомої провідності металів можна також представити у вигляді:

$$\sigma = en_e \mu_n, \quad (2.6)$$

де величина

$$\mu_n = \frac{e\tau}{m_e} \quad (2.7)$$

називається рухливістю носіїв струму.

Густина теплової потужності, що виділяється металевим провідником зі струмом:

$$w_p = \sigma \mathcal{E}^2. \quad (2.8)$$

В анізотропному тілі (монокристалі) напрямки векторів \mathbf{j} і \mathcal{E} , взагалі кажучи, не співпадають і лінійний зв'язок між ними виражається формулами:

$$j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \mathcal{E}_\beta, \quad (2.9)$$

де величини $\sigma_{\alpha\beta}$ складають симетричний тензор другого рангу (тензор провідності):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}. \quad (2.10)$$

Квантова теорія електропровідності Зоммерфельда. Подальшим розвитком теорії електропровідності металів у рамках моделі вільних електронів було застосування до електронного газу квантової статистики Фермі-Дірака (*теорія Зоммерфельда*).

З квантової теорії вільних електронів випливає, що електронний газ в металі є виродженим, і всі квантові стани, розташовані нижче енергії Фермі, зайняті електронами. Тому зовнішнє поле може впливати лише на електрони, розташовані поблизу рівня Фермі, переводячи їх на більш високі вільні рівні. Це означає, що у виродженому газі у формуванні електропровідності (так само, як і електронної теплоємності та теплопровідності) можуть брати участь не всі вільні електрони, а лише ті із них, які розташовані поблизу рівня Фермі. Тому за час релаксації слід брати час пробігу

електронів, які мають енергію, практично рівну енергії Фермі. Середня швидкість електронів, які приймають участь в переносі заряду, дорівнює **швидкості Фермі** v_F , яка визначається із енергії Фермі ε_F :

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_e}}. \quad (2.11)$$

Для визначення часу релаксації τ_F необхідно знати відстань, яку проходить електрон у напрямку дрейфу до повної втрати швидкості. В теорії Друде вважалося, що після зіткнення електрону з йоном ґратки електрон повністю втрачає свою швидкість. Однак, часто для того, щоб швидкість у даному напрямку зменшилася практично до нуля, необхідно не одне, а в середньому ν зіткнень з розсіюючими центрами (наприклад при взаємодії з низькочастотними фононами). Середній шлях, який пройде електрон за ν зіткнень, дорівнює вже не середній довжині вільного пробігу l , а середній транспортній довжині вільного пробігу $L = \nu l$.

З урахуванням вищенаведеного квантова теорія вільних електронів призводить до виразу для **електропровідності**, в багатьом подібному тому, що і класичне наближення:

$$\sigma = \frac{ne^2 L_F}{m_e \nu_F} = \frac{ne^2 \nu l_F}{m_e \nu_F}, \quad (2.12)$$

де l_F – довжина вільного пробігу електронів, що мають енергію Фермі.

Зазначимо, що основна відмінність виразів для електропровідності в рамках класичної і квантової моделей вільних електронів полягає в принципово різних підходах до визначення довжини вільного пробігу та середньої швидкості електронів, що беруть участь в процесі заряду.

Перехід до теорії провідності з урахуванням квантових положень (хоча і в теорії вільних електронів) дозволяє зв'язати провідність зі зміщенням сфери Фермі. За наявності поля всі електрони будуть зазнавати дію сили в одному і тому ж напрямку, і всі електрони, що знаходяться всередині об'єму фазового простору, обме-

женого поверхнею Фермі, отримують прискорення. Схематично це показано на рис. 2.1.

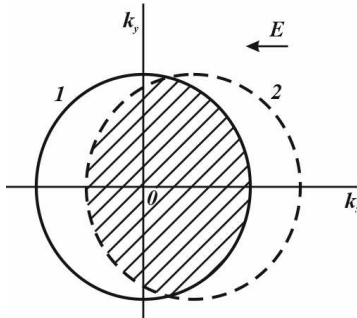


Рисунок 2.1 – Зміщення поверхні Фермі в результаті дії електричного поля.

Коли процеси розсіювання скомпенсують ефект прискорення під дією поля, встановиться стаціонарний стан, і об'єм, обмежений поверхнею Фермі, буде залишатися в одному і тому ж зміщеному положенні 2. В кристалі встановиться постійний струм, пропорційний прикладеному полю, що відповідає виконанню закону Ома. Значимо, що електрони, стани яких знаходяться всередині заштрихованої на рисунку області, фактично не зазнали впливу поля, оскільки їхні імпульси не змінилися. В електропровідності, таким чином, ефективно діють лише електрони з енергіями, близькими енергії Фермі. Провідність можна зв'язати зі зміщенням сфери Фермі, якому перешкоджають зіткнення. Оскільки $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = \hbar \frac{d\mathbf{k}}{dt}$, де хви-

льовий вектор $\mathbf{k} = \frac{m_e \mathbf{v}_F}{\hbar}$, то за відсутності зіткнень зовнішнє постійне електричне поле \mathbf{E} зміщує однорідно всі точки сфери Фермі в \mathbf{k} -просторі за час τ на величину

$$\delta \mathbf{k} = \mathbf{k}(\tau) - \mathbf{k}(0) = -\frac{e\mathbf{E}}{\hbar} \tau.$$

Зіткнення перешкоджають переміщенню сфери. У виникаючому стаціонарному стані густина струму

$$\mathbf{j} = n(-e)\delta\mathbf{v} = -\frac{ne\hbar\delta\mathbf{k}}{m_e} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{ne^2L_F}{m_e v_F}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Розгляд електропровідності у наближенні вільних електронів дало можливість якісно пояснити електропровідність матеріалів, в яких є вільні електрони. Однак причина появи таких електронів в одних та їхня відсутність в інших матеріалах залишалася не з'ясованою. Введення квантових понять у теорію вільних електронів лише показало, що електропровідність пов'язана з переносом не всіх, а лише електронів Фермі. Таким чином, питання про те, чому одні матеріали провідники, інші – діелектрики, а треті – напівпровідники, залишається відкритим.

Для відповіді на це питання необхідно розглянути електропровідність з точки зору квантово-механічних уявлень про рух електронів у періодичному полі кристалу, тобто із застосуванням поняття енергетичних зон. При цьому в строгій теорії враховується, що внаслідок взаємодії з періодичним полем ґратки хвильові функції електрону залишаються блохівськими функціями. Крім того, електрони необхідно характеризувати деякою ефективною масою m^* , яка поблизу границі зони може сильно відрізнятися від m_e . Тоді вираз (2.12) для електропровідності набуває вигляду:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2 v l_F}{m^* v_F}. \quad (2.13)$$

Розглянемо залежність m^* від положення рівня Фермі відносно границь зони Бриллюена. Можна записати, що

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E(\mathbf{k})}{d\mathbf{k}^2} = \frac{1}{\hbar} \frac{dv}{d\mathbf{k}},$$

де $E(\mathbf{k})$ – енергія електрону, \mathbf{v} – середня швидкість (для даного випадку це v_F). В одновірному випадку залежності $E(k)$, $v(k)$ і $m^*(k)$ в системі розширених зон мають вигляд, показаний на рис. 2.2.

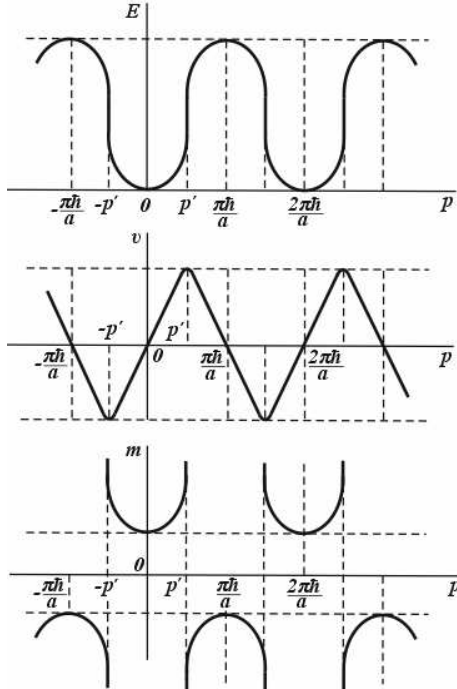


Рисунок 2.2 – Залежність енергії E , групової швидкості v та ефективної маси m^* електрону від імпульсу p

Із залежностей для E , v і m^* , представлених на рис. 2.2, видно, що в центральній зоні Бриллюена буде мати місце наближення вільних електронів, залежність $E(k)$ є опуклою вниз функцією (відрізок $0P'$, де $E(k)$ змінюється по параболі). В цьому випадку ефективна маса m^* додатна і майже не відрізняється від звичайної m_e . При збільшенні хвильового вектору k параболічний вид кривої $E(k)$ зникає і з'являється точка перегину P' . В цій точці ефективна маса $m^* \rightarrow \infty$ і електрон перестає прискорюватися. Після проходження цієї точки кривизна функції $E(k)$ змінює знак і разом з цим змінить знак і ефективна маса m^* . Від'ємна маса буде характеризувати гальмування електронів.

При сильній взаємодії електронів з кристалічною ґраткою ефективна маса велика. У перехідних металах d -електрони сильніше зв'язані із ґраткою порівняно з s -електронами, тобто мають більшу ефективну масу. Саме тому у перехідних металах спостерігається відносно низька електропровідність.

Електронну частину теплоємності металу оцінюють за формулою

$$C_V^e \approx \frac{3}{2} k_B \frac{2k_B T}{\varepsilon_F} n_e = 3 \frac{k_B^2 n_e}{\varepsilon_F} T, \quad (2.14)$$

де ε_F - енергія Фермі.

Розглядаючи електрони як газ вільних квазічастинок, на основі газокінетичної теорії вираз для коефіцієнта електронної теплопровідності матиме вигляд:

$$\Lambda = \frac{1}{3} C v_F \lambda, \quad (2.15)$$

де C – електронна теплоємність; v_F – ферміївська швидкість електронів; $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$ – довжина їхнього вільного пробігу (σ , n відповідно ефективний переріз і концентрація розсіювальних центрів).

Питомий опір ρ як металів, так і напівпровідників розраховують за **формулою Друде – Лоренца**

$$\rho = \frac{m^*}{n_e e^2 \tau}, \quad (2.16)$$

де τ – час релаксації, тобто час вільного пробігу електрона між двома послідовними зіткненнями. Час релаксації електронів у металі можна виразити через довжину вільного пробігу λ та ферміївську швидкість v_F :

$$\tau = \frac{\lambda}{v_F}, \quad (2.17)$$

а в напівпровідниках через рухливість μ_e :

$$\tau = \frac{\mu_e m^*}{e}. \quad (2.18)$$

Рівняння Больцмана. Для розрахунку електропровідності необхідно знайти електричний струм, що виникає під дією слабкого електричного поля. Ці задачі розв'язуються з використанням класичної функції розподілу або квантово-механічної матриці густини в залежності від характеру руху частинок. Функція розподілу $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ заряджених частинок, що знаходяться в електромагнітному полі, задовольняє **рівнянню Больцмана**:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I[f]. \quad (2.19)$$

Функція розподілу нормується умовою

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p = n(\mathbf{r}, t), \quad (2.20)$$

де $n(\mathbf{r}, t)$ – густина числа частинок. В багатокомпонентній системі необхідно описувати кожну компоненту своєї функції розподілу.

Права частина рівняння Больцмана (2.19) називається **інтегралом зіткнень**. Інтеграл зіткнень описує процеси взаємного розсіювання частинок і має містити необхідну інформацію про закони їхньої взаємодії. Для кожної системи він має свій достатньо складний вигляд. У більшості випадків рівняння Больцмана представляє собою інтегродиференціальне рівняння відносно функції розподілу. Для отримання напівкласичних результатів інтеграл зіткнень часто записують у **наближенні часу релаксації**:

$$I[f] = -\frac{f - f_0}{\tau(p)}, \quad (2.21)$$

де f_0 – рівноважна функція розподілу, $\tau(p)$ – час релаксації, який може залежати від енергії частинок. Ця величина має розглядатися як феноменологічний підгоночний параметр, який підбирається з умови найкращого погодження з даними досліду або з більш строгою теорією. Зміст цього параметру стає зрозумілим із розгляду просторово однорідної системи у відсутності зовнішніх полів:

$$\frac{\partial f(p, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} [f(p, t) - f_0(p)], \quad (2.22)$$

звідки витікає експоненційний закон релаксації нерівноважного розподілу

$$f(p, t) = f_0(p) + \delta f(p, 0) e^{-t/\tau(p)}, \quad (2.23)$$

де $f_0(p) + \delta f(p, 0)$ – початкова нерівноважна функція розподілу. Слід мати на увазі, що наближення до рівноваги може відбуватися за більш складним законом (наприклад, визначатися декількома різними часами релаксації), тому можливість використання наближення часу релаксації слід перевіряти у кожному конкретному випадку.

Термоелектричні явища. Ефект Зесбека полягає у виникненні ЕРС у ланцюзі, який складається з двох різних провідників, контакти яких підтримуються при різних температурах; коефіцієнт цієї термо-ЕРС вимірюють за наявності градієнта температур ∇T і відсутності зовнішнього струму:

$$\mathfrak{E}_\alpha = \alpha \nabla T, \quad (2.24)$$

де α – кінетичний коефіцієнт ефекту Зесбека або *абсолютна диференціальна термо-ЕРС*.

Для сильно виродженого електронного газу (у випадку металів) Мотт отримав наступний вираз:

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B T}{3e} \left. \frac{\partial \ln \sigma(E)}{\partial E} \right|_{E=E_F}. \quad (2.25)$$

Для степеневі залежності довжини вільного пробігу носіїв від енергії і для простої параболічної енергетичної зони вираз (2.25) має вигляд:

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B}{3e} (r+1) \frac{k_B T}{E_F}. \quad (2.26)$$

Для невідродженого напівпровідника справедлива **формула Писаренка**:

$$\alpha = \frac{k_B}{e} \left[r + \frac{5}{2} + \ln \frac{2(2\pi m_d^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3 N} \right], \quad (2.27)$$

де N – концентрація носіїв заряду (n або p); m_d^* – ефективна маса густини станів; r – параметр розсіяння.

Для змішаної провідності термо-ЕРС зазвичай менша, ніж у випадку провідності одного типу, внаслідок часткової компенсації термоелектричних струмів електронів і дірок, і визначається так:

$$\alpha = \frac{\alpha_p \mu_p p - \alpha_n \mu_n n}{\mu_p p + \mu_n n}, \quad (2.28)$$

де α_n і α_p – розраховані за формулою (2.27) термо-ЕРС, спричинені рухом відповідно електронів і дірок; μ_n і μ_p – відповідні рухливості.

Добротність термоелектричного матеріалу

$$Z = \frac{\alpha^2 \sigma}{\kappa}, \quad (2.29)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності.

Добротність має різку температурну і концентраційну залежність, і при фіксованій температурі величина Z досягає максимуму Z_{\max} при деякій концентрації n_0 , яка з підвищенням температури зростає. За певних припущень (наявність носіїв заряду одного знаку, відсутність виродження, мала величина електронної теплопровідності), можна одержати для n_0 і Z_{\max} оцінні співвідношення:

$$n_0 \approx \frac{2(2\pi m_d^* k_B T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}; \quad (2.30)$$

$$Z_{\max} \approx M \frac{(m^*)^{\frac{3}{2}}}{\kappa_q} T^{\frac{3}{2}} e^{r+\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

де M – число долин; κ_q – фононна теплопровідність.

Ефект Пельтьє є протилежним ефекту Зеебека і полягає в тому, що при сталій температурі й наявності струму через зразок на контактах може виділятися або поглинатися, в залежності від напрямку струму, деяка кількість тепла, пропорційна пройденій через контакт кількості електрики:

$$dQ_{\Pi} = \Pi dt, \quad (2.32)$$

де Π – кінетичний коефіцієнт ефекту Пельтьє.

Ефект Томсона. Якщо уздовж однорідного провідника, по якому тече електричний струм, є градієнт температур, то в об'ємі провідника поглинається або виділяється залежно від напрямку струму деяка кількість теплоти, пропорційна силі струму, часу й градієнту температури:

$$Q_T = \tau_T It \nabla T. \quad (2.33)$$

Це явище називають *ефектом Томсона*, а τ_T у формулі називають *кінетичним коефіцієнтом ефекту Томсона*.

У випадку коли струму немає ($\mathbf{j} = 0$), напруженість поля термоелектричних ефектів має вигляд:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nabla \varepsilon_F}{e} + \alpha \nabla T. \quad (2.34)$$

Співвідношення (2.34) описує всі три термоелектричні ефекти. Слід зазначити, що з погляду механізму виділення або поглинання тепла ефекти Пельтьє і Томсона аналогічні. Ефект Томсона є виділенням енергії в термоелектричному полі $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha = \alpha \nabla E$, а ефект

Пельтьє виділенням енергії в полі $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\nabla \varepsilon_F}{e}$.

Між кінетичними коефіцієнтами термоелектричних ефектів α , Π і τ_T є певний взаємозв'язок:

$$\alpha = \frac{\Pi}{T}; \quad (2.35)$$

$$\tau_T = -T \frac{d\alpha}{dT}. \quad (2.36)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Обчисліть довжину вільного пробігу електронів у міді при $T = 300$ К, якщо її питомий опір при цій температурі дорівнює $0,017$ мкОм·м.

Розв'язання

Згідно уявлень квантової теорії, питомий опір металів пов'язаний з довжиною вільного пробігу λ співвідношенням

$$\rho = \sqrt[3]{3\pi^2} \frac{\hbar}{e^2 n^{\frac{2}{3}} \lambda}.$$

Концентрація вільних електронів у Купрумi

$$n = \rho_{Cu} \frac{N_A}{\mu} = \frac{8920 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,54 \cdot 10^{-3}} = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3},$$

де ρ_{Cu} – густина Купруму; N_A – число Авогадро; μ – молярна маса.

Звідси випливає, що довжина вільного пробігу

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt[3]{3\pi^2} \frac{\hbar}{e^2 n^{\frac{2}{3}} \rho} = \sqrt[3]{3 \cdot (3,14)^2} \times \\ &\times \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{(1,6 \cdot 10^{-19}) \cdot (8,45 \cdot 10^{28})^{\frac{2}{3}} \cdot 0,017 \cdot 10^{-6}} = 3,89 \cdot 10^{-8} \text{ м}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\lambda = 3,89 \cdot 10^{-8}$ м .

Приклад 2.2. Визначте час, за який електрон пройде відстань 1 км по мідному проводу, якщо питомий опір міді $0,017$ мкОм·м, а різниця потенціалів на кінцях провідника $U = 220$ В . За який час електрон пролетить цю ж відстань, рухаючись без зіткнень, при тій самій різниці потенціалів? Який час передачі сигналу?

Розв'язання

Із закону Ома випливає, що питома провідність $\sigma = \frac{env}{\mathcal{E}}$.

Концентрація вільних електронів у міді $n = 8,45 \cdot 10^{28}$ м⁻³ (див. розв'язок попередньої задачі). Тоді середня швидкість дрейфу електронів

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\mathcal{E}}{\rho en} = \frac{U}{\rho enl} = \\ &= \frac{220}{0,017 \cdot 10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,45 \cdot 10^{28} \cdot 10^3} = 9,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Час дрейфу електрона по провіднику $t = \frac{l}{\bar{v}} = 10^6$ с .

За відсутності зіткнень із вузлами ґратки електрон рухається прискорено і час прольоту

$$t_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l^2 m}{eU}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 220}} = 2,26 \cdot 10^{-4} \text{ с} .$$

Енергія вздовж проводів лінії передається електромагнітним полем, яке поширюється вздовж проводів із швидкістю світла c . Вважаючи, що середовищем, яке оточує провід, є повітря, час передачі сигналу

$$t_c = \frac{l}{c} = \frac{10^3}{3 \cdot 10^8} = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ с} .$$

Відповідь: $t = 10^6$ с ; $t_{\text{np}} = 2,26 \cdot 10^{-4}$ с ; $t_c = 3,33 \cdot 10^{-6}$ с .

Приклад 2.3. Електричний струм силою $I = 8$ А протікає по сталевому дроту. Радіус перерізу $r = 0,5$ мм . Обчисліть швидкість направленої руху (дрейфу) електронів у дроті. Концентрацію електронів провідності прийміть рівною 10^{29} м⁻³.

Розв'язання

Використовуючи формулу (2.2), виразимо середню швидкість направленої руху через густину струму:

$$\bar{v} = \frac{j}{en_e},$$

де $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2}$. Тоді

$$\bar{v} = \frac{I}{en_e \pi r^2} = \frac{8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29} \cdot 3,14 \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}} = 6,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Відповідь: $\bar{v} = 6,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Приклад 2.4. За температури 0 °С концентрація вільних електронів у сріблі $n_e = 5,8 \cdot 10^{28}$ м⁻³ , а питома електропровідність срібла $\sigma = 6,7 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$. Визначте максимальну швидкість вільних електронів, якщо їхня середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-8}$ м .

Розв'язання

Відповідно до квантової теорії питома електропровідність металу

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \bar{\lambda}}{m_e v_F},$$

де v_F – швидкість електрона на рівні Фермі, яка є максимальною.
Отже,

$$v_F = \frac{n_e e^2 \bar{\lambda}}{m_e \sigma} = 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_F = 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.

Приклад 2.5. Розрахуйте значення константи для лужних металів у законі Відемана – Франца за теорією Друде.

Розв'язання

Розглянемо металевий зразок, вздовж якого створено градієнт температур. Закон Фур'є для густини теплового потоку

$$q = -\Lambda \frac{dT}{dx}, \quad (1)$$

з іншого боку

$$q = Wv = nE(T)v,$$

де W – густина енергії.

Враховуючи баланс теплоти, що переноситься у різні сторони, маємо

$$q = \frac{1}{2} nv \{E(T(x - v\tau)) - E(T(x + v\tau))\}.$$

Розкладемо енергію в ряд Тейлора за формулою

$$f(x+a) = f(x) + f'(x)a + \frac{1}{2!} f''(x)a^2 + \dots$$

Отже,

$$q = \frac{1}{2}nv \left\{ \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dx} (-v\tau) - \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dx} v\tau \right\} = -nv^2\tau \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dx}, \quad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), отримуємо

$$\Lambda = nv^2\tau \frac{dE}{dT}.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{3}v^{-2} = v_x^{-2}$, та що в теорії Друде $\bar{E} = \frac{3}{2}k_B T$ і

$$C_{el} = \frac{d\bar{E}}{dT} = \frac{3}{2}k_B,$$

маємо

$$\Lambda = \frac{2}{3} \frac{n\bar{E}\tau}{m_e} C_{el}.$$

Коефіцієнт електропровідності визначається виразом (2.4)

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e},$$

тому

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\sigma T} &= \frac{2}{3} \frac{3}{2} \frac{k_B n \tau}{m_e T} \frac{m_e}{e^2 n \tau} \frac{3}{2} k_B = \frac{3}{2} \frac{k_B^2}{e^2} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right)^2 = \\ &= 1,116 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{кг}^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\Lambda}{\sigma T} = \frac{3}{2} \frac{k_B^2}{e^2} = 1,116 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{кг}^2}.$$

Приклад 2.6. Розрахуйте значення константи для лужних металів у законі Відемана – Франца за теорією Зоммерфельда.

Розв'язання

У попередньому прикладі було отримано співвідношення:

$$\Lambda = nv^2\tau \frac{dE}{dT}.$$

Внаслідок того, що $\frac{dE}{dT} = C_{el}$ і $v^2 = \frac{1}{3}v_F^2$, маємо

$$\Lambda = \frac{1}{3}nv_F^2\tau C_{el}.$$

Електронна теплоємність у теорії Зоммерфельда визначається співвідношенням:

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 T}{\varepsilon_F};$$

а швидкість Фермі дорівнює

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_e}}.$$

Тоді вираз для коефіцієнта теплопровідності набуває вигляду:

$$\Lambda = \frac{1}{3}n \frac{2\varepsilon_F}{m_e} \tau \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 T}{\varepsilon_F} = \frac{1}{3}n \frac{\pi^2 k_B^2 T}{m_e} \tau.$$

Підставляючи значення коефіцієнта електропровідності у закон Відемана – Франца, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda}{\sigma T} &= \frac{1}{3}n \frac{\pi^2 k_B^2 T}{m_e} \tau \frac{m_e}{e^2 n \tau T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right)^2 = \\ &= 2,447 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{кг}^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\Lambda}{\sigma T} = \frac{3}{2} \frac{k_B^2}{e^2} = 2,447 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{кг}^2}.$

Приклад 2.7. Покажіть, що коли $k_B T \ll \varepsilon_F$, то для відношення питомих теплоємностей електронного газу при постійних тиску й об'ємі справедливе співвідношення:

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 = O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2.$$

Розв'язання

Енергію вільних електронів E та їх кількість N в об'ємі V запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} E &= V \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = V \int_0^\infty \frac{m_e}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m_e \varepsilon}{\hbar^2}} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \\ &= V \frac{m_e \sqrt{2m_e}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{3}{2}} f(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1)$$

$$N = V \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = V \frac{m_e \sqrt{2m_e}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}} f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2)$$

де $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}} + 1}$ – функція Фермі.

В (1) і (2) користуємось розкладанням Зоммерфельда:

$$\int_0^\infty H(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \approx \int_0^\mu H(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 H'(\mu). \quad (3)$$

Для виразу (1) $H(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, тоді

$$E = VB \left(\frac{2}{5} \mu^{\frac{5}{2}} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{3}{2} \mu^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{5} VB \mu^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\mu^2} \right), \quad (4)$$

де $B \equiv \frac{m_e \sqrt{2m_e}}{\pi^2 \hbar^3}$. Для (2) $H(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, тоді аналогічно запишемо:

$$N = VB \left(\frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3} VB \mu^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{8 \mu^2} \right). \quad (5)$$

Враховуючи, що при температурі $T = 0$ К у (4) $E = N \frac{3}{5} \varepsilon_F$,
 $\mu = \varepsilon_F$, маємо:

$$N \frac{3}{5} \varepsilon_F = \frac{2}{5} VB \varepsilon_F^{\frac{5}{2}}; \quad \frac{2}{5} VB = N \frac{3}{5} \varepsilon_F \frac{1}{\varepsilon_F^{\frac{5}{2}}}.$$

Отже, (4) запишемо у вигляді:

$$E = N \frac{3}{5} \varepsilon_F \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{5 \pi^2 (k_B T)^2}{8 \mu^2} \right). \quad (4a)$$

Аналогічно з (5) маємо:

$$N = \frac{2}{3} VB \varepsilon_F^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{2}{3} VB = N \frac{1}{\varepsilon_F^{\frac{3}{2}}}.$$

Рівняння (5) перепишемо у вигляді:

$$1 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{8 \mu^2} \right). \quad (5a)$$

Із (5a) маємо:

$$\left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{8 \mu^2} \right)^{\frac{5}{3}}} \approx 1 - \frac{5 \pi^2 (k_B T)^2}{24 \mu^2}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (4a), отримаємо з точністю до величин другого порядку малості:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left(1 - \frac{5}{24} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\mu^2} \right) \left(1 + \frac{5}{8} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\mu^2} \right) = \\
 &= \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\varepsilon_F^2} + O\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^4 \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Між теплоємністю при сталому тиску й теплоємністю при сталому об'ємі газу є загальне термодинамічне співвідношення:

$$C_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P. \quad (8)$$

Для електронного газу за будь-якої температури:

$$P = \frac{2}{3} \frac{E}{V}. \quad (9)$$

З формули для концентрації вільних електронів $n_e = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}$

і формули для енергії Фермі $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$ випливає, що

$$\varepsilon_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e}. \quad (10)$$

Отже, (7) запишемо у вигляді:

$$E = \frac{3}{5} N \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\varepsilon_F^2} + O\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^4 \right]. \quad (7a)$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T &= \frac{3}{5} N (3\pi^2 N)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(-\frac{2}{3}\right) V^{-\frac{5}{3}} \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\varepsilon_F^2}\right] = \\ &= -\frac{2}{5} N \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{V} \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\varepsilon_F^2}\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи (7а) в (9), отримаємо:

$$P = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{\varepsilon_F^2}\right]. \quad (12)$$

Підставляючи (7а), (11) і (12) у (8), враховуючи, що для металів $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \beta \sim 10^{-5}$, одержимо з точністю до величин другого порядку малості для теплоємності системи з N електронів при сталому тиску:

$$C_P \approx \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[\frac{5}{6} \frac{\pi^2 k_B^2}{\varepsilon_F^2} T + O\left(\frac{T^3}{T_F^4}\right) \right] = \frac{1}{2} N \frac{\pi^2 k_B^2}{\varepsilon_F} T \left[1 + O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right].$$

Звідси для питомої теплоємності електронного газу при сталому тиску:

$$c_P = \frac{C_P}{V} \approx \frac{1}{2} n_e \frac{\pi^2 k_B^2}{\varepsilon_F} T \left[1 + O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right].$$

Враховуючи, що $c_V = \frac{1}{2} n_e \frac{\pi^2 k_B^2}{\varepsilon_F} T^2$, маємо

² Точніше, c_V , подібно до c_P , також визначається з точністю до величин другого порядку малості. Однак ця обставина не змінює ходу міркувань (переконатися в цьому пропонуємо самостійно).

$$c_p \approx c_v \left[1 + O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \right].$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 \approx O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2.$$

Для кімнатної температури $\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 \approx \left(\frac{10^2}{10^4}\right)^2 = 10^{-4}$.

Відповідь: $\frac{c_p}{c_v} - 1 \approx O\left(\frac{T}{T_F}\right)^2$.

Приклад 2.8. Зразок напівпровідника довжиною 30 мм, шириною 5 мм і товщиною 1 мм має опір 500 Ом. При внесенні його в магнітне поле з індукцією $B = 0,5$ Тл, перпендикулярне площині пластини, на гранях зразка виникає ЕРС Холла 5 мВ при струмі через зразок 10 мА. Визначте рухливість Холла і концентрацію носіїв заряду в напівпровіднику, вважаючи, що він є напівпровідником p -типу.

До якого значення зміниться ЕРС Холла, якщо в те саме поле внести зразок міді таких самих розмірів і з таким самим струмом? Концентрація електронів провідності в міді $n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Розв'язання

Питома провідність напівпровідника

$$\sigma = \frac{l}{RS} = e\rho\mu_H,$$

де l – довжина напівпровідника; S – площа поперечного перерізу; μ_H – рухливість Холла. Коефіцієнт Холла

$$R_H = \frac{1}{ep} = \frac{U_H h}{IB},$$

де U_H – ЕРС Холла; h – товщина зразка. Звідси концентрація дірок

$$p = \frac{IB}{ehU_H} = \frac{10^{-2} \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 6,25 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Рухливість Холла

$$\mu_H = \frac{l}{eRSp} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,25 \cdot 10^{21}} = 0,012 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Значимо, що для тих самих значень розмірів зразка, індукції магнітного поля і струму ЕРС Холла пропорційна зворотному значенню концентрації носіїв заряду. Тому ЕРС Холла в мідному зразку

$$U_{H_{\text{Cu}}} = \frac{U_H \frac{1}{n}}{\frac{1}{p}} = \frac{pU_H}{n} = \frac{6,25 \cdot 10^{21} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^{28}} = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{ В} = 0,37 \text{ нВ}.$$

Відповідь: $p = 6,25 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$; $\mu_H = 0,012 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$; $U_{H_{\text{Cu}}} = 0,37 \text{ нВ}$.

Приклад 2.9. Знайдіть вираз для високочастотної електропровідності у теорії Друде.

Розв'язання

Напівкласичне рівняння руху електрона має вигляд:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} - e\mathbf{E}, \quad (1)$$

де τ – час релаксації.

Змінне в часі електричне поле, що викликає струм у металі

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Підставляючи (2) – (3) в (1), отримуємо:

$$-i\omega \mathbf{p}(\omega) e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\tau} \mathbf{p}(\omega) e^{-i\omega t} - e \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t},$$

звідки

$$\mathbf{p}(\omega) = \frac{e \mathbf{E}}{-\frac{1}{\tau} + i\omega}.$$

Густина струму

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = -en \mathbf{v} = -\frac{en}{m_e} \mathbf{p} = \frac{\frac{ne^2}{m_e}}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \mathbf{E} = \sigma(\omega) \mathbf{E}.$$

Тому високочастотна електропровідність

$$\sigma(\omega) = \frac{\frac{ne^2}{m_e}}{\frac{1}{\tau} - i\omega} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau};$$

статична електропровідність (за $\omega = 0$)

$$\sigma_0 \equiv \frac{ne^2\tau}{m_e}.$$

Відповідь: $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}.$

Приклад 2.10. Оцініть вплив ступеня неоднорідності високочастотного електричного поля на значення високочастотної електропровідності для випадку лужних металів.

Розв'язання

Напівкласичне рівняння руху електрона має вигляд:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} - e\mathbf{E}. \quad (1)$$

Напруженість електричного поля, що викликає струм у металі

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \approx \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})\{1 + i\mathbf{k}\mathbf{r}\}e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (1) шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(\omega)e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Підставляючи (2) – (3) в рівняння (1), отримуємо:

$$-i\omega\mathbf{p}(\omega)e^{-i\omega t} = -\frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau}e^{-i\omega t} - e\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})(1 + i\mathbf{k}\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

або після спрощення

$$-i\omega\mathbf{p}(\omega) = -\frac{\mathbf{p}(\omega)}{\tau} - e\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})(1 + i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (4)$$

Враховуючи, що $\mathbf{k}\mathbf{r} = \mathbf{k}\mathbf{v}\tau = \frac{\tau}{m_e}\mathbf{k}\mathbf{p}(\omega)$, приведемо співвідношення

(4) до вигляду

$$\mathbf{p}(\omega) = \frac{e\left(1 + \frac{i\tau}{m_e}\mathbf{k}\mathbf{p}(\omega)\right)}{\frac{1}{\tau} - i\omega}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}).$$

Густина струму

$$\mathbf{j}(\omega) = -nev = -\frac{ne}{m_e} \mathbf{p}(\omega) = \sigma(\omega) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega, \mathbf{k}),$$

або

$$\mathbf{j}(\omega) = \frac{ne\tau}{m_e} \frac{e \left(1 + \frac{i\tau}{m_e} \mathbf{k} \mathbf{p}(\omega) \right)}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ne^2\tau}{m_e} \left(\frac{1 + \frac{i\tau}{m_e} \mathbf{k} \mathbf{p}(\omega)}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \right) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\omega, \mathbf{k}).$$

Враховуючи, що статична електропровідність $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e}$, за-
пишемо вираз для високочастотної електропровідності з урахуван-
ням неоднорідності

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \left(1 + \frac{i\tau}{m_e} \mathbf{k} \mathbf{p}(\omega) \right).$$

Відповідь: $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \left(1 + \frac{i\tau}{m_e} \mathbf{k} \mathbf{p}(\omega) \right).$

Приклад 2.11. Визначте електронну питому теплоємність для зон-
ної структури

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 M^{-1}$$

і, порівнявши її з відповідним результатом для віль-
них електронів, покажіть, що для питомої теплоєм-
ності ефективну масу можна визначати як

$$m^* = \sqrt[3]{|M|},$$

де M – діагональний тензор маси.

Розв'язання

Квантова теорія вільних електронів дає такий вираз для питомої теплоємності:

$$c_v = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T g(\varepsilon), \quad (1)$$

де $g(\varepsilon)$ – густина одноелектронних квантових станів поблизу поверхні Фермі. Вираз для питомої теплоємності блохівських електронів співпадає з (1), якщо ввести в ньому густину одноелектронних станів для блохівських електронів.

Загальна формула для густини одноелектронних станів має вигляд:

$$g_n(\varepsilon) = \int_{s_n(\varepsilon)} \frac{ds}{4\pi^3} \frac{1}{|\nabla \varepsilon_n(\mathbf{k})|}, \quad (2)$$

де інтегрування ведуть по поверхні постійної енергії в \mathbf{k} -просторі. Внаслідок симетрії $\varepsilon(\mathbf{k})$ поблизу екстремуму тензор M^{-1} є діагональним, $((M^{-1}(\mathbf{k}))_{ij}) = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j}$, M – тензор ефективної маси):

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2} \left[M_{xx}^{-1} (k_x - k_{0x})^2 + M_{yy}^{-1} (k_y - k_{0y})^2 + M_{zz}^{-1} (k_z - k_{0z})^2 \right]. \quad (3)$$

Звідси знаходимо:

$$|\nabla \varepsilon_n(\mathbf{k})| = \hbar^2 \left[(M_{xx}^{-1})^2 (k_x - k_{0x})^2 + (M_{yy}^{-1})^2 (k_y - k_{0y})^2 + (M_{zz}^{-1})^2 (k_z - k_{0z})^2 \right]. \quad (4)$$

Із (3) виходить, що поверхня постійної енергії ε є тривісним еліпсоїдом

$$\frac{(k_x - k_{0x})^2}{a^2} + \frac{(k_y - k_{0y})^2}{b^2} + \frac{(k_z - k_{0z})^2}{c^2} = 1, \quad (5)$$

де

$$a^2 \equiv \frac{2}{\hbar^2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{M_{xx}^{-1}}; \quad b^2 \equiv \frac{2}{\hbar^2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{M_{yy}^{-1}}; \quad c^2 \equiv \frac{2}{\hbar^2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{M_{zz}^{-1}}.$$

Підставимо в (4) значення $(k_z - k_{0z})^2$ із (5) (цією операцією $\nabla \varepsilon_n(\mathbf{k})$ відноситься до поверхні еліпсоїда):

$$|\nabla \varepsilon_n(\mathbf{k})| = \hbar^2 M_{zz}^{-1} c \sqrt{\left(\frac{c^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\right)(k_x - k_{0x})^2 + \left(\frac{c^2}{b^4} - \frac{1}{b^2}\right)(k_y - k_{0y})^2 + 1}. \quad (6)$$

Елемент ds поверхні еліпсоїда визначаємо за відомою формулою:

$$ds = d(k_x - k_{0x})d(k_y - k_{0y}) \sqrt{\left(\frac{\partial(k_z - k_{0z})}{\partial(k_x - k_{0x})}\right)^2 + \left(\frac{\partial(k_z - k_{0z})}{\partial(k_y - k_{0y})}\right)^2 + 1}, \quad (7)$$

де з формули (5)

$$k_z - k_{0z} = c \sqrt{1 - \frac{(k_x - k_{0x})^2}{a^2} - \frac{(k_y - k_{0y})^2}{b^2}}.$$

В результаті отримаємо:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{c^2}{a^4} - \frac{1}{a^2}\right)(k_x - k_{0x})^2 + \left(\frac{c^2}{b^4} - \frac{1}{b^2}\right)(k_y - k_{0y})^2 + 1} \times \frac{d(k_x - k_{0x})d(k_y - k_{0y})}{\sqrt{1 - \frac{(k_x - k_{0x})^2}{a^2} - \frac{(k_y - k_{0y})^2}{b^2}}}. \quad (8)$$

Підставляючи (8) і (6) у (2), і зробивши скорочення, отримаємо:

$$g_n(\varepsilon) = \frac{8}{4\pi^3} \frac{ab}{\hbar^2 M_{zz}^{-1} c} \iint \frac{d(k_x - k_{0x})d(k_y - k_{0y})}{\sqrt{a^2 b^2 - b^2(k_x - k_{0x})^2 - a^2(k_y - k_{0y})^2}}. \quad (9)$$

Множник „8” з’являється тому, що інтегрування проводилось лише за першим октантом еліпсоїда. Коли елемент поверхні ds при інтегруванні зміщується по поверхні першого октанта еліпсоїда, змінні

$(k_x - k_{0x})$ і $(k_y - k_{0y})$ пробігають всі значення в області першого квадранта еліпсоїда, який є перерізом еліпсоїда площиною $k_z - k_{0z} = 0$. З урахуванням цього маємо:

$$g_n(\varepsilon) = \frac{8}{4\pi^3} \frac{ab}{c} \frac{1}{\hbar^2 M_{zz}^{-1}} \int_0^b d(k_y - k_{0y}) \times \\ \times \int_0^{a\sqrt{1 - \frac{(k_y - k_{0y})^2}{b^2}}} \frac{d(k_x - k_{0x})}{\sqrt{a^2 b^2 - b^2 (k_x - k_{0x})^2 - a^2 (k_y - k_{0y})^2}}.$$

Після інтегрування (табличний інтеграл) отримаємо:

$$g_n(\varepsilon_F) = \frac{8}{4\pi^3} \frac{ab}{c} \frac{1}{\hbar^2 M_{zz}^{-1}} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\sqrt{M_{zz}^{-1} M_{xx}^{-1} M_{yy}^{-1}}} \frac{\sqrt{2}}{\hbar} \sqrt{\varepsilon_F - \varepsilon_0}; \\ g_n(\varepsilon_F) = \frac{\sqrt[3]{|M|}}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2\sqrt[3]{|M|}(\varepsilon_F - \varepsilon_0)}{\hbar^2}}. \quad (10)$$

Підставляючи (10) у (1), отримаємо формулу для питомої теплоємності блохівських електронів (однієї зони):

$$c_v = \frac{k_B T}{3\hbar^2} \sqrt[3]{|M|} \sqrt{\frac{2\sqrt[3]{|M|}(\varepsilon_F - \varepsilon_0)}{\hbar^2}}.$$

Густину одноелектронних станів у випадку вільних електронів визначають за формулою:

$$g_n(\varepsilon_F) = \frac{m^*}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m^* \varepsilon_F}{\hbar^2}}. \quad (11)$$

Вирази (10) і (11) співпадають, якщо для блохівських електронів увести поняття ефективної маси для теплоємності:

$$m^* = \sqrt[3]{|M|},$$

де $|M|$ – визначник матриці M .

$$\text{Відповідь: } c_v = \frac{k_B^2 T}{3\hbar^2} \sqrt[3]{|M|} \sqrt{\frac{2\sqrt[3]{|M|}(\epsilon_F - \epsilon_0)}{\hbar^2}}.$$

Приклад 2.12. Знайдіть величину і напрямок вектора густини струму \mathbf{j} (в прямокутній системі координат $(X_1 X_2 X_3)$), що виникає в кристалічній пластинці площею S і товщиною d ($d \ll \sqrt{S}$) під дією зовнішнього поля $\mathbf{E} = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ в напрямку $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, якщо питома провідність кристала в цій системі координат описується тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Розв'язання

Компоненти вектор напруженості електричного поля \mathbf{E} дорівнюють

$$\mathbf{E}_1 = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad \mathbf{E}_2 = 1,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad \mathbf{E}_3 = 0.$$

Відповідно до закону Ома в диференціальній (локальній) формі компоненти вектора густини струму $\mathbf{j}(j_1, j_2, j_3)$ в кристалі дорівнюють

$$j_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \mathbf{E}_k,$$

або

$$j_1 = \sigma_{11} \mathbf{E}_1 + \sigma_{12} \mathbf{E}_2 + \sigma_{13} \mathbf{E}_3;$$

$$j_2 = \sigma_{21}\mathcal{E}_1 + \sigma_{22}\mathcal{E}_2 + \sigma_{23}\mathcal{E}_3;$$

$$j_3 = \sigma_{31}\mathcal{E}_1 + \sigma_{32}\mathcal{E}_2 + \sigma_{33}\mathcal{E}_3.$$

В результаті розрахунків отримуємо:

$$j_1 = 0,74 \frac{\text{А}}{\text{М}^2}; \quad j_2 = 1,47 \frac{\text{А}}{\text{М}^2}; \quad j_3 = 0,846 \frac{\text{А}}{\text{М}^2}; \quad |\mathbf{j}| = 1,85 \frac{\text{А}}{\text{М}^2}.$$

Напрямок вектора \mathbf{j} визначається кутами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ за допомогою формули

$$\cos \varphi_i = \frac{j_i}{|\mathbf{j}|} \quad (i = \overline{1,3}).$$

Ці кути дорівнюють $\varphi_1 = 66^\circ; \varphi_2 = 37^\circ; \varphi_3 = 63^\circ$.

Відповідь: $|\mathbf{j}| = 1,85 \frac{\text{А}}{\text{М}^2}; \varphi_1 = 66^\circ; \varphi_2 = 37^\circ; \varphi_3 = 63^\circ$.

Приклад 2.13. На основі напівкласичних рівнянь руху блохівського електрона покажіть, що для зонної структури

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 M^{-1},$$

де матриця M не залежить від \mathbf{k} , статична електропровідність дорівнює

$$\sigma = n_e e^2 \tau M^{-1}$$

(n_e – концентрація електронів провідності; τ – час релаксації).

Розв'язання

Наведений за умовою задачі вираз для $\varepsilon(\mathbf{k})$ описує залежність енергії блохівського електрона від хвильового вектора \mathbf{k} поблизу екстремуму зони з координатою \mathbf{k}_0 . В околі точки \mathbf{k}_0 $\varepsilon(\mathbf{k})$ зазвичай має досить високу симетрію, завдяки чому тензор M^{-1}

виявляється діагональним ($(M^{-1}(\mathbf{k}))_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial k_i \partial k_j}$, M – тензор ефективної маси). Отже, вираз для $\varepsilon(\mathbf{k})$ спрощується:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2} \left[M_{xx}^{-1} (k_x - k_{0x})^2 + M_{yy}^{-1} (k_y - k_{0y})^2 + M_{zz}^{-1} (k_z - k_{0z})^2 \right]. \quad (1)$$

Напівкласичні рівняння руху блохівського електрона в постійному електричному полі мають вигляд:

$$\dot{\mathbf{r}} = v(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_n(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}, \quad (2)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E}. \quad (3)$$

Інтегрування (3) дає залежність хвильового вектора блохівського електрона від часу:

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) - \frac{e\mathbf{E}t}{\hbar}. \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (1), отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 + \frac{\hbar^2}{2} \left[M_{xx}^{-1} \left(k_x - k_{0x} - \frac{e\mathcal{E}_x t}{\hbar} \right)^2 + M_{yy}^{-1} \left(k_y - k_{0y} - \frac{e\mathcal{E}_y t}{\hbar} \right)^2 + \right. \\ \left. + M_{zz}^{-1} \left(k_z - k_{0z} - \frac{e\mathcal{E}_z t}{\hbar} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де через \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z позначено компоненти вектора \mathbf{E} .

Густину струму визначають за загальною формулою

$$\mathbf{j} = - \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})) v(\mathbf{k}), \quad (6)$$

де $f(\varepsilon(\mathbf{k}))$ – функція Фермі, а інтегрування ведуть по всьому \mathbf{k} -простору.

Для наближеного розрахунку зміною функції розподілу під дією поля знехтуємо, тоді згідно (2) за допомогою (5) отримаємо

$$\begin{aligned} v(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla \varepsilon(\mathbf{k}) = \hbar \left[M_{xx}^{-1} \left(k_x - k_{0x} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_x t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_x + \right. \\ \left. + M_{yy}^{-1} \left(k_y - k_{0y} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_y t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_y + M_{zz}^{-1} \left(k_z - k_{0z} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_z t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_z \right], \quad (7) \end{aligned}$$

Підставляючи (7) в (6), маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = - \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})) \hbar \left[M_{xx}^{-1} \left(k_x - k_{0x} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_x t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_x + \right. \\ \left. + M_{yy}^{-1} \left(k_y - k_{0y} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_y t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_y + M_{zz}^{-1} \left(k_z - k_{0z} - \frac{e\mathbf{\varepsilon}_z t}{\hbar} \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

При $t = 0$, тобто до ввімкнення електричного поля $\mathbf{\varepsilon}$, $\mathbf{j} = 0$. Враховуючи це, з виразу (8) маємо:

$$\mathbf{j} = - \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})) \left[-M_{xx}^{-1} e\mathbf{\varepsilon}_x t \mathbf{e}_x - M_{yy}^{-1} e\mathbf{\varepsilon}_y t \mathbf{e}_y - M_{zz}^{-1} e\mathbf{\varepsilon}_z t \mathbf{e}_z \right]. \quad (9)$$

Для кожного електрона час t дії поля $\mathbf{\varepsilon}$ після його останнього зіткнення різний. Середній час дії $\mathbf{\varepsilon}$ по всіх електронах $\bar{t} = \tau$, де τ – середній час вільного пробігу між двома послідовними зіткненнями електрона. Після введення τ , із (9) отримуємо

$$\mathbf{j} = e^2 \tau M^{-1} \mathbf{\varepsilon} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})) = n_e e^2 \tau M^{-1} \mathbf{\varepsilon}, \quad (10)$$

де n_e – концентрація електронів провідності.

З (10) для тензора статичної провідності маємо:

$$\sigma = n_e e^2 \tau M^{-1}. \quad (11)$$

Відповідь: $\sigma = n_e e^2 \tau M^{-1}$.

Приклад 2.14. Нерівноважна функція розподілу в змінному електричному полі за сталої температури має вигляд:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f(\varepsilon(\mathbf{k})) + \text{Re} \left[\delta g(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right],$$

$$\delta g(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega) = \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \times$$

$$\times \frac{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}.$$

Знайдіть за допомогою цієї функції густину струму і заряду, що індукуються змінним полем. Покажіть, що застосування співвідношення

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\partial n_{\text{eq}}(\mu)}{\partial \mu} \delta \mu(\mathbf{q}, \omega)$$

забезпечує виконання рівняння неперервності

$$\mathbf{q} \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) = \omega \rho(\mathbf{q}, \omega), \quad (\nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0).$$

Розв'язання

I. За відсутності зовнішніх полів у стані термодинамічної рівноваги функцією розподілу блохівських електронів є функція Фермі $f(\varepsilon(\mathbf{k}))$. В результаті дії зовнішніх полів функція розподілу змінюється. Нерівноважна функція розподілу може бути записана у вигляді

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = g^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \frac{d}{dt'} g^0(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t')) dt', \quad (1)$$

де (\mathbf{r}, \mathbf{k}) – точка фазового простору, для якої знаходиться нерівноважна функція для моменту часу t ; $g^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ – рівноважна функція розподілу в точці, що розглядається; $g^0(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t'))$ – рівноважна

жна функція розподілу для точки $(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t'))$ орбіти, в яку електрон потрапив після зіткнення в момент часу t' (а в момент часу t цей електрон, рухаючись по орбіті під дією зовнішніх полів, потрапив в точку (\mathbf{r}, \mathbf{k}) , не зазнавши зіткнень в інтервалі часу від t' до t); τ – час релаксації, що залежить лише від енергії ($\tau \approx \tau(\varepsilon_F)$);

$$g^0(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t')) = \frac{1}{e \frac{\varepsilon(\mathbf{k}(t')) - \mu(\mathbf{r}(t'), t')}{k_B T} + 1} = f(\varepsilon(\mathbf{k}(t'))). \quad (2)$$

За сталої температури і наявності зовнішнього електричного поля, що залежить від координат і часу, із (2), з використанням напівкласичних рівнянь руху для блохівських електронів

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}; \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} &= -e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} g^0(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t')) &= \frac{\partial g^0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t'} + \frac{\partial g^0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} + \frac{\partial g^0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t'} = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \hbar \mathbf{v}(\mathbf{k}(t')) \frac{e \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t')}{\hbar} + \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \nabla_{\mu \mathbf{v}}(\mathbf{k}(t')) + \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \mu}{\partial t'}. \end{aligned} \quad (4)$$

Змінне електричне поле представимо у вигляді:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (5)$$

Це поле індукує в об'ємі кристалу змінну густину заряду:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= -e \delta n(\mathbf{r}, t), \\ \delta n(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\delta n(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Хімічний потенціал рівноважної функції розподілу повинен відповідати миттєвій локальній густині електронів $n(\mathbf{r}, t)$, тобто повинен змінюватися так само, як і $\delta n(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{r}, t) &= \mu + \delta\mu(\mathbf{r}, t), \\ \delta\mu(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left[\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right].\end{aligned}\quad (7)$$

Підставляючи (5) і (7) в (4), маємо:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt'} g^0(\mathbf{r}(t'), \mathbf{k}(t')) &= \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{k}(t')) e \text{Re} \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t')} \right] + \right. \\ &+ \text{Re} \left[\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i\mathbf{q} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t')} \right] \mathbf{v}(\mathbf{k}(t')) + \left. \text{Re} \left[\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) (-i\omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t')} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (8)$$

Через наявність у підінтегральному виразі (1) експоненційного множника $e^{\frac{t-t'}{\tau}}$ суттєвий внесок у величину інтеграла дають лише $t - t' \leq \tau$. Як показують чисельні оцінки, навіть за максимально можливих полів $\boldsymbol{\varepsilon}$ у металі (порядку $1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$) зміна \mathbf{k} за час $\tau \sim 10^{-14}$ с складає $\sim 10 \text{ м}^{-1}$. Розміри зони Бриллюена складають приблизно $\frac{1}{a} \sim 10^{10} \text{ м}^{-1}$. Отже, зміною \mathbf{k} під дією поля можна знехтувати і покласти $\mathbf{k}(t') = \mathbf{k}(t)$. В результаті після підстановки (8) в (1) величини, що залежать від $\mathbf{k}(t')$ ($\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ і \mathbf{v}), можуть бути винесені за знак інтеграла і віднесені до значення \mathbf{k} в точці $(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ траєкторії. Після цього інтеграл в (1) легко інтегрується, і ми знаходимо

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f(\varepsilon(\mathbf{k})) + \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (9)$$

II. За загальною формулою для густини струму з використанням (9) маємо:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -e \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \mathbf{v}(\mathbf{k}) g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \\ = \operatorname{Re} \left\{ \left[-e \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) \frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \right] \times \right. \\ \left. \times e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \quad (10)$$

Для рівноважної густини електронів при значенні хімічного потенціалу, що дорівнює μ , за загальною формулою маємо:

$$n_{\text{eq}}(\mu) = \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})). \quad (11)$$

Аналогічно для індукованої змінним полем густини електронів знаходимо:

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} f(\varepsilon(\mathbf{k})) + \\
&+ \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \operatorname{Re} \left[\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \right] = \\
&= n_{\text{eq}}(\mu) + \operatorname{Re} \left\{ \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Із (11) і (12) отримуємо:

$$\begin{aligned}
e[n(\mathbf{r}, t) - n_{\text{eq}}(\mu)] &= -e\delta n(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) = \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \right] e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right\}. \tag{13}
\end{aligned}$$

З іншого боку, вираз для $\rho(\mathbf{r}, t)$ можна отримати в інший спосіб, якщо ввести справедливе для малих $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)$ співвідношення:

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\partial n_{\text{eq}}(\mu)}{\partial \mu} \delta\mu(\mathbf{q}, \omega). \tag{14}$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= -e\delta n(\mathbf{r}, t) = -e\operatorname{Re}\left[\delta n(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}\right] = \\ &= -e\operatorname{Re}\left[\frac{\partial n_{\text{eq}}(\mu)}{\partial \mu}\delta\mu(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}\right].\end{aligned}\quad (15)$$

З (11) маємо:

$$\frac{\partial n_{\text{eq}}(\mu)}{\partial \mu} = \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{\partial f(\varepsilon(\mathbf{k}))}{\partial \mu} = \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f(\varepsilon(\mathbf{k}))}{\partial \varepsilon}\right).\quad (16)$$

Підставляючи (16) в (15), отримуємо:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[-e\left(\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\delta\mu(\mathbf{q}, \omega)\right)e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}\right].\quad (17)$$

Порівнюючи (13) і (17), знаходимо, що

$$\frac{\delta\mu(\mathbf{q}, \omega)i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} = \delta\mu(\mathbf{q}, \omega).\quad (18)$$

З урахуванням (18) (10) і (17) можуть бути записані у вигляді:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}\right],\quad (10, a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) \equiv -e\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3}\mathbf{v}(\mathbf{k})\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\delta\mu(\mathbf{q}, \omega),\quad (10, б)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\left[\rho(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}-\omega t)}\right],\quad (17, a)$$

де

$$\rho(\mathbf{q}, \omega) \equiv -e\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3}\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\delta\mu(\mathbf{q}, \omega).\quad (17, б)$$

З (10, a) і (10, б) знаходимо:

$$\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) i \mathbf{q} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right] = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega)}{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega)} \operatorname{Re} \left[i \delta \mu(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (19)$$

З (17, а) і (17, б) знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \operatorname{Re} \left[\rho(\mathbf{q}, \omega) (-i\omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right] = -\frac{\omega \rho(\mathbf{q}, \omega)}{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega)} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[i \delta \mu(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

З (19) і (20) знаходимо:

$$\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) - \omega \rho(\mathbf{q}, \omega)}{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega)} \operatorname{Re} \left[i \delta \mu(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (21)$$

Вираз у чисельнику в правій частині (21) є рівняння неперервності у випадку, коли $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ і $\rho(\mathbf{r}, t)$ задані в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

Співвідношення (21) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) - \omega \rho(\mathbf{q}, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{j}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]; \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[\rho(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \end{aligned}$$

Приклад 2.15. Нерівноважна функція розподілу електронів у змінному електричному полі за сталої температури має вигляд:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f(\varepsilon(\mathbf{k})) + \text{Re} \left[\delta g(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right],$$

$$\delta g(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega) = \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \times$$

$$\times \frac{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}.$$

Покажіть, що за незмінної густини заряду струм описується формулою:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right],$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}.$$

Покажіть, що достатньою умовою незмінності густини струму за наявності змінного електричного поля в кристалі є те, що електричне поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ має бути перпендикулярним площині дзеркальної симетрії, в якій лежить хвильовий вектор \mathbf{q} .

Розв'язання

У виразі:

$$\delta g(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega) = \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}, \quad (1)$$

$\delta \mu(\mathbf{q}, \omega)$ – амплітуда коливань хімічного потенціалу внаслідок зміни густини електронів під дією змінного електричного поля ($\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)$ – амплітуда цього поля, \mathbf{q} – його хвильовий вектор). За сталої густини заряду потрібно покласти $\delta \mu(\mathbf{q}, \omega) = 0$. Тоді нерівноважна функція розподілу буде мати вигляд:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = f(\varepsilon(\mathbf{k})) + \operatorname{Re} \left[\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\delta \mu(\mathbf{q}, \omega) i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k})) - e\mathbf{v}(\mathbf{k})\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (2)$$

Використовуючи загальну формулу для густини струму:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -e \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \mathbf{v}(\mathbf{k}) g(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (3)$$

маємо:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e^2 \operatorname{Re} \left[\int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]. \quad (4)$$

Вираз (4) можна записати у більш компактній формі:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right], \quad (5)$$

де

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}, \quad (6)$$

є тензор високочастотної електропровідності (розгляд проведений лише для однієї зони провідності й інтегрування проводиться по об'єму зони Бриллюена).

Відповідь: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)} \right]$, де тензор високочастотної електропровідності $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega)$ дорівнює:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}.$$

Приклад 2.16. Покажіть, що достатньою умовою незмінності густини струму за наявності змінного електричного поля в кристалі є те, що електричне поле \mathbf{E} повинно бути перпендикулярним площині дзеркальної симетрії, в якій лежить хвильовий вектор \mathbf{q} .

Розв'язання

Загальна теорія поведінки блохівських електронів у змінному електричному полі дає для амплітуди коливань хімічного потенціалу $\delta\mu(\mathbf{q}, \omega)$ формулу:

$$\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) \left[1 - \frac{i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))} \right] = -\frac{e\mathbf{v}(\mathbf{k})\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}))}. \quad (1)$$

Виконання умови $\delta\mu(\mathbf{q}, \omega) = 0$ (за якої в металі не виникає коливань густини електронів під дією зовнішнього поля) еквівалентне, як видно з (1), співвідношенню:

$$\mathbf{v}(\mathbf{k})\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\hbar}\nabla\varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) = 0, \quad (2)$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ – амплітуда змінного поля з хвильовим вектором \mathbf{q} і частотою ω ; $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ – швидкість блохівського електрона.

Легко бачити, що умова (2) виконується для точок \mathbf{k} , що лежать у площині дзеркальної симетрії у випадку, коли вектор $\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ перпендикулярний цій площині (відповідно – вектор \mathbf{q} лежить у площині дзеркальної симетрії) (рис. 2.1). На рис. 2.1 площина дзеркальної симетрії співпадає з площиною $k_z = 0$. Умова (2) для точок цієї площини виконується завдяки тому, що вектор $\nabla\varepsilon(\mathbf{k})$ для них лежить у площині дзеркальної симетрії.

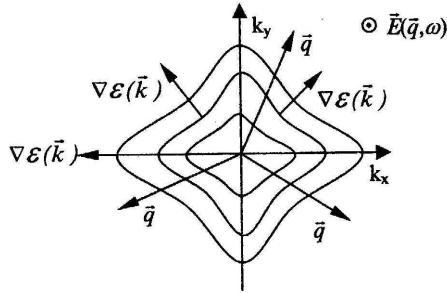


Рисунок 2.1

Для точки $(k_z > 0, k_x, k_y)$ з кутом θ між $\nabla\varepsilon(\mathbf{k})$ і $\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ і відповідної їй точки $(k_z < 0, k_x, k_y)$ з кутом $\pi - \theta$ між $\nabla\varepsilon(\mathbf{k})$ і $\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ скалярний добуток $\nabla\varepsilon(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega)$ однаковий за абсолютною величиною і протилежний за знаком. Знак і абсолютна величина добутку $\mathbf{q}\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \mathbf{q} \nabla\varepsilon(\mathbf{k})$, що присутній і в чисельнику і в знаменнику виразу (1), для цих точок, внаслідок дзеркальної симетрії, однакові. Отже, для кожної пари площин, рівновіддалених від площин дзеркальної симетрії $k_z = 0$, величина $\delta\mu(\mathbf{q}, \omega)$, згідно з (1), відрізняється лише знаком. Зміна її знаку при переході від першої до другої площини означає, що коливання хімічного потенціалу електронів з $k_z > 0$ і $k_z < 0$ проходить у протифазі. Отже, коливання густин електронів з $k_z > 0$ і $k_z < 0$ також відбувається у протифазі. Оскільки електрони з $k_z > 0$ і електрони з $k_z < 0$ однорідно розподілені в реальному просторі (в об'ємі кристала), результуючого коливання повної густини електронів не відбувається.

Задачі для самостійного розв'язування

Електронна теплоємність і теплопровідність

- 2.1. Обчисліть відносний внесок електронного газу в загальну теплоємність срібла за кімнатної температури. Вважати, що на кожний атом припадає один вільний електрон і що теплоємність срібла за даної температури визначають за законом Дюлонга і Пті.
- 2.2. Оцініть граткову і електронну теплоємності срібла при температурах 300 К і 3 К. Дебаївська температура срібла $\Theta_D = 220$ К, електронну теплоємність розрахувати за моделлю вільних електронів.
- 2.3. Для типових значень параметрів металів оцініть температуру, за якої електронна і граткова теплоємності стають одного порядку.
- 2.4. В одновалентних металах при кімнатній температурі довжина вільного пробігу електронів $\lambda_e = 10^{-3}$ м, швидкість Фермі $v_F = 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а $C_V = 0,1R$. Чому дорівнює теплопровідність, зумовлена електронами?
- 2.5. При температурі $T = 300$ К коефіцієнт теплопровідності германію дорівнює $\Lambda = 80 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, а його питомий опір – 10^{-2} Ом·м. Яке відношення його електронної теплопровідності до граткової?

Електропровідність твердих тіл

- 2.6. Питомий електроопір сплаву Ag+1%Ni при температурі $T \approx 0$ К дорівнює $\rho = 10^{-6}$ Ом·см. Стала гратки $a = 3 \text{ \AA}$, гратку вважати кубічною, в зону провідності кожний атом Аргентуму віддає один електрон. Оцініть величину перерізу розсіювання електронів на атомах Ніколу.

- 2.7. Визначте рухливість μ електронів натрію за температури 0°C , якщо його електропровідність складає $\sigma = 2,3 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$, а концентрація носіїв заряду $n_e = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.
- 2.8. Відношення електропровідності срібла і міді за деякої температури складає $\frac{\sigma_{\text{Ag}}}{\sigma_{\text{Cu}}} = \frac{6,12}{5,76}$. Обчисліть відношення рухливостей у цих металах.
- 2.9. Довжина вільного пробігу електронів у тонких дротиках з чистих металів при низьких температурах практично визначається їхнім діаметром. Оцініть, яка за цих умов ефективна питома електропровідність мідного дроту діаметром $d = 0,1 \text{ мм}$.
- 2.10. Питомий опір сплаву $\text{Ag} + 1\% \text{Ni}$ за температури $T \approx 0 \text{ К}$ дорівнює $\rho = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Стала ґратки $a = 3 \text{ \AA}$, ґратку вважати кубічною, в зону провідності кожний атом Аргентуму видає один електрон. Оцініть величину перерізу розсіювання електронів на атомах Ніколу.
- 2.11. Обчисліть питомий опір металевого провідника, який має густину 970 кг/м^3 і молярну масу $0,023 \text{ кг/моль}$, якщо відомо, що середня швидкість дрейфу електронів в електричному полі напруженістю $\mathcal{E} = 1 \frac{\text{В}}{\text{М}}$ складає $5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$. Можна вважати, що на кожний атом кристалічної ґратки припадає один електрон.
- 2.12. У металевому провіднику з площею поперечного перерізу $S = 10^{-2} \text{ мм}^2$ і опором 10 Ом концентрація вільних електронів дорівнює $8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Визначте середню швидкість дрейфу електронів за напруги $0,1 \text{ В}$.
- 2.13. До мідного дроту довжиною 6 м і діаметром $0,56 \text{ мм}$ прикладено напругу $0,1 \text{ В}$. Скільки електронів пройде через поперечний переріз провідника за 10 с , якщо питомий електроопір міді дорівнює $0,017 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$?
- 2.14. Електропровідність одновалентного Купруму за температури 0°C $\sigma = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$. Знайдіть час релаксації електронів.

- 2.15. У моделі атому Гідрогену електрон рухається навколо протона по коловій орбіті радіусом $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Чому дорівнює сила струму, зумовлена рухом електрона по орбіті?
- 2.16. У мідному провіднику під дією електричного поля протікає струм густиною $j = 1 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Визначте швидкість дрейфу та її відношення до середньої сумарної швидкості руху електронів при температурі 300 К.
- 2.17. При включенні в електричне коло провідника діаметром 0,5 мм і довжиною 43 мм різниця потенціалів склала 2,4 В при струмі 2 А. Визначте питомий електроопір провідника.
- 2.18. Питомий опір Аргентуму при кімнатній температурі дорівнює $\rho = 0,015$ мкОм · м, а температурний коефіцієнт опору складає $\alpha_p = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. Визначте, як зміниться довжина вільного пробігу електронів при нагріванні провідника від 300 до 1 000 К.
- 2.19. Із мідного проводу з площею поперечного перерізу $S = 0,5 \text{ мм}^2$ зроблено петлю у формі кола радіусом $r = 60$ см. Щоб виконати один оберт у петлі, електрону в середньому необхідно 10 год. Знайдіть силу струму, який протікає по проводу. Прийміть, що концентрація вільних електронів у міді дорівнює 10^{29} м^{-3} .
- 2.20. Різниця потенціалів між кінцями мідного дроту довжиною $L = 10$ м дорівнює 1 В. За який час електрон провідності пройде шлях від одного кінця дроту до іншого, якщо питомий електроопір міді дорівнює 17 нОм·м, а концентрація електронів провідності у міді дорівнює 10^{29} м^{-3} ?
- 2.21. Питома провідність міді $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$. Чому дорівнює середня довжина вільного пробігу вільних електронів у міді, якщо їх середня швидкість хаотичного руху дорівнює $0,13 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а концентрація $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$?

- 2.22. Середня швидкість дрейфу електронів у мідному дроті дорівнює $74 \frac{\text{МКМ}}{\text{с}}$. Визначте різницю потенціалів на кінцях дроту довжиною $L = 5 \text{ м}$. Питома провідність міді $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$, а концентрація електронів провідності у ньому складає 10^{29} м^{-3} .
- 2.23. Припустима сила струму в алюмінієвому дроті площею поперечного перерізу $S = 1 \text{ мм}^2$ дорівнює 8 А . При цьому електрони провідності мають середню швидкість дрейфу $\bar{v} = 0,28 \frac{\text{ММ}}{\text{с}}$. Визначте кількість електронів провідності, що припадають на один атом Алюмінію.
- 2.24. Яка кількість електронів проходила через балістичний гальванометр у дослідах Толмена – Стюарта, якщо лінійна швидкість котушки досягала $v_0 = 300 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, загальна довжина проводів обмотки складала $l = 500 \text{ м}$, а опір ланцюга $R = 500 \text{ Ом}$?
- 2.25. Металевий провідник рухається з прискоренням $a = 100 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$. Використовуючи модель вільних електронів, визначте напруженість електричного поля в провіднику.
- 2.26. По мідному проводу тече струм, густина якого $j = 1 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$. Оцініть, який шлях пройде електрон, що перемістився вздовж проводу на відстань $L = 10 \text{ мм}$. Прийняти, що концентрація вільних електронів у міді дорівнює 10^{29} м^{-3} , а середня швидкість хаотичного руху електронів дорівнює $1000 \frac{\text{КМ}}{\text{с}}$.
- 2.27. Знайдіть сумарний імпульс електронів у прямому проводі довжиною $l = 1000 \text{ м}$, по якому протікає струм $I = 70 \text{ А}$.
- 2.28. При протіканні електричного струму по металевому дроту напруженість електричного поля всередині нього дорівнює $0,05 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Швидкість дрейфу електронів провідності при цьому

- дорівнює $0,5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$. Визначте середню частоту зіткнень електронів провідності з йонами ґратки.
- 2.29. По мідному проводу завдовжки $l = 100$ м тече струм $I = 5$ А. Визначте суму електричних сил, які діють на всі вільні електрони у даному проводі, якщо концентрація електронів провідності в міді дорівнює 10^{29} м^{-3} , а питомий електроопір міді $\rho = 17$ нОм·м.
- 2.30. Визначте об'ємну густину теплової потужності в металевому провіднику, якщо густина протікаючого струму дорівнює $j = 10 \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$ при напруженості електричного поля $\mathcal{E} = 1 \frac{\text{МВ}}{\text{м}}$.
- 2.31. Виходячи з моделі вільних електронів, визначте кількість зіткнень, яких зазнає електрон у металі за 1 с. Концентрацію електронів провідності прийняти рівною $n = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, а питому провідність $\sigma = 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$.
- 2.32. Питомий електроопір чистої міді при 20 і 100°C дорівнює відповідно 0,0168 і 0,0226 мкОм·м. Користуючись лінійною апроксимацією залежності $\rho(T)$, визначте температурний коефіцієнт питомого електроопору при 0°C.
- 2.33. На кожний атом міді припадає один електрон провідності. Яка середня швидкість електронів провідності \bar{v} , якщо через мідний провід $d = 0,2$ мм тече струм $I = 10$ А?
- 2.34. Визначте середню довжину вільного пробігу електронів у міді, якщо концентрація вільних електронів за 0°C $n_e = 8,47 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, питомий опір $\rho = 1,56 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а максимальна швидкість вільних електронів $v_F = 1,57 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.
- 2.35. Концентрація вільних електронів за 0°C у золоті складає $n_e = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, питомий опір $\rho = 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а максимальна швидкість вільних електронів $v_F = 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. Знайдіть середню довжину вільного пробігу електронів.

- 2.36. При нагріванні проводу з манганіну довжиною 1,5 м і діаметром 0,1 мм від 20 до 100°C його опір зменшується на 0,07 Ом, а довжина зростає на 0,16%. Визначте температурний коефіцієнт питомого електроопору. При розрахунках прийняти, що при кімнатній температурі для манганіну питомий електроопір $\rho = 0,47 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$.
- 2.37. Знайдіть величину і напрямок вектора густини струму \mathbf{j} (в прямокутній системі координат (X_1, X_2, X_3)), що виникає в кристалічній пластинці площею S і товщиною d ($d \ll \sqrt{S}$) під дією зовнішнього поля \mathbf{E} в указаному напрямку, якщо питома провідність кристала в цій системі координат описується тензором σ_{ij} .

№ варіанту	$\mathbf{E}, \frac{\text{В}}{\text{м}}$	Напрямок	$\sigma_{ij}, 10^{-5} \frac{\text{См}}{\text{м}}$
1	$2 \cdot 10^4$	$(1; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 9 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
2	$2,2 \cdot 10^4$	$(1; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$
3	$2,1 \cdot 10^4$	$(0; 1; 1)$	$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -4 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$
4	$1,2 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ -6 & 12 & 0 \\ 7 & 0 & 22 \end{pmatrix}$
5	$1,1 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6	$1,3 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
7	$1,4 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8	$1,5 \cdot 10^4$	$(0; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
9	$1,6 \cdot 10^4$	$(1; 0; 0)$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
10	$1,7 \cdot 10^4$	$(0; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
11	$1,8 \cdot 10^4$	$(1; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
12	$1,9 \cdot 10^4$	$(1; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
13	$2,9 \cdot 10^4$	$(0; 1; 1)$	$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
14	$2,3 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

15	$2,5 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
16	$2,4 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
17	$2,6 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
18	$2,7 \cdot 10^4$	$(0; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 9 \\ -3 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
19	$2,9 \cdot 10^4$	$(0; 1; 1)$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
20	$2,8 \cdot 10^4$	$(0; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
21	$1,0 \cdot 10^4$	$(1; 1; 1)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
22	$3,0 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
23	$3,3 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 11 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

24	$3,1 \cdot 10^4$	$\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
25	$3,2 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.38. Питома електропровідність кристала ромбічної сингонії описується в прямокутній системі координат (X_1, X_2, X_3) тензором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3\sigma_0 \end{pmatrix},$$

де $\sigma_0 > 0$. Визначте густину струму \mathbf{j} , що виникає при прикладенні до кристала зовнішнього електричного поля $\mathbf{E}(\mathcal{E}_0, 0, -\mathcal{E}_0)$, де $\mathcal{E}_0 > 0$.

2.39. Деякий анізотропний діелектрик має тензор відносної діелектричної проникності, який у декартовій системі координат записується так:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 6,5 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5 & 0 \\ 0 & 0 & 6,65 \end{pmatrix}.$$

У діелектрику створене рівномірне електричне поле $\mathbf{E} = 2,51\mathbf{i} + 1,71\mathbf{j} + 9,21\mathbf{k}$. Визначте вектор електричної індукції. Який кут у просторі між векторами \mathbf{E} і \mathbf{D} ?

Термоелектричні та гальваноманітні явища

2.40. Оцініть значення абсолютної питомої термо-ЕРС за температури $T = 300$ К для метала з концентрацією вільних електронів $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

- 2.41. Струм у ланцюзі, що складається з термопары опором 5 Ом і гальванометра опором 8 Ом, дорівнює 0,5 мА у випадку, коли спай термопары поміщений у посудину з киплячою водою. Чому дорівнює питома термо-ЕРС термопары за температури оточуючого середовища 20 °С?
- 2.42. Запишіть густина потужності тепловиділення для загального випадку, коли провідник неоднорідний за хімічним складом і в ньому підтримується градієнт температури.
- 2.43. Покажіть, що за наявності в провіднику із однорідного матеріалу електричного струму і градієнта температури в ньому виникає тепловиділення Томпсона, густина потужності якого $q_T = \tau_T \mathbf{j} \nabla T$. Його знак залежить від взаємної орієнтації густини струму та градієнту температури. Розрахуйте коефіцієнт Томсона τ_T .
- 2.44. Покажіть, що на контактi двох провідників різного хімічного складу при проходженні електричного струму виділяється (поглинається) в розрахунку на одиницю площі тепло $q_{\Pi} = \Pi j$, що залежить від напрямку струму (ефект Пельтьє). Розрахуйте коефіцієнт Пельтьє Π .
- 2.45. Розімкнутий ланцюг складається з двох різних квазілінійних провідників, причому місця їхнього контакту знаходяться при різних температурах T_1 і T_2 . Покажіть, що на кінцях ланцюга утворюється різниця потенціалів (термо-ЕРС) $E_T = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T} dT$, де Π – коефіцієнт Пельтьє.
- 2.46. Питома провідність σ кремнію з домішками дорівнює $112 \frac{\text{См}}{\text{м}}$. Визначте рухливість μ_p дірок та їх концентрацію n_p , якщо стала Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{Кл}}$. Вважаючи, що напівпровідник має лише діркову провідність.
- 2.47. Металеву стрічку товщиною $\delta = 0,1$ мм і шириною $b = 5$ см вміщено в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 1$ Тл, на-

правленою перпендикулярно поверхні стрічки. По стрічці тече струм $I = 1,6 \text{ А}$. Знайдіть холлівську різницю потенціалів.

- 2.48. Напівпровідник у вигляді тонкої пластини завширшки $b = 1 \text{ см}$ і довжиною $l = 10 \text{ см}$ вміщений в однорідне магнітне поле індукцією $B = 0,2 \text{ Тл}$. Вектор магнітної індукції перпендикулярний площині пластини. До кінців пластини (за напрямком l) прикладена постійна напруга $U = 300 \text{ В}$. Визначте холлівську різницю потенціалів U_H на гранях пластини, якщо стала Холла $R_H = 0,1 \frac{\text{М}^3}{\text{Кл}}$, питомий опір $\rho = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

3. Контактні та поверхневі явища в твердих тілах

Основні формули та визначення

Роботою виходу ϕ електрона з металу називають мінімальну енергію, яку необхідно надати електрону провідності металу для того, щоб він зміг вийти з металу у вакуум. Її визначають за співвідношенням:

$$\phi = e(\varphi - \varphi') - \mu, \quad (3.1)$$

де φ і φ' – електричні потенціали відповідно в точках всередині металу і вакуумі біля поверхні металу; μ – хімічний потенціал електронного газу в металі. Величину $\mu - e\varphi$ називають **електрохімічним потенціалом** електронного газу в металі.

Робота виходу залежить від роду металу і стану його поверхні. Для чистих металів вона має значення порядку декількох електронвольт.

У класичній електронній теорії робота виходу - це робота, яку здійснює електрон при його вильоті з металу, по-перше, проти сил притягання з боку позитивних зарядів, індукованих електроном на поверхні металу, і, по-друге, проти сил електричного поля *подвій-*

ного електричного шару. Цей шар виникає на поверхні металу завдяки тому, що в процесі теплового руху електрони провідності можуть пересікати поверхню металу, утворюючи біля неї „електронну хмару“. Густина цієї „хмари“ практично відмінна від нуля лише в межах декількох міжатомних відстаней ($\approx 10^{-10}$ м). Такий подвійний електричний шар подібний до тонкого зарядженого конденсатору, однією з обкладинок якого є поверхня металу з позитивними іонами, які знаходяться на ній, а іншою – „електронна хмара“. За межами подвійного шару напруженість його електричного поля дорівнює нулю.

Величину

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' = \frac{\phi + \mu}{e} \quad (3.2)$$

називають **поверхневим стрибком потенціалу** на межі метал – вакуум або **контактною різницею потенціалів** між металом і вакуумом. У класичній електронній теорії поверхневий стрибок потенціалу

$$\Delta\varphi_{\text{кл}} = \frac{\phi}{e}.$$

Це значення відрізняється від істинного, наведеного вище, і узгоджується з ним лише якісно.

Закони Вольти:

- 1) при з'єднанні двох провідників, виготовлених з різних металів, між ними виникає контактна різниця потенціалів, яка залежить лише, від їхнього хімічного складу і температури;
- 2) різниця потенціалів між кінцями ланцюга, який складається з послідовно з'єднаних металевих провідників, що перебувають при однаковій температурі, залежить від хімічного складу проміжних провідників; вона дорівнює контактній різниці потенціалів, яка виникає при безпосередньому з'єднанні крайніх провідників.

У стані рівноваги електрохімічні потенціали $\mu - e\varphi$ для обох металів, які контактують, мають бути рівні. Тому при приведенні в

контакт двох незаряджених металів ($\varphi' = 0$) з різними роботами виходу ϕ_1 і ϕ_2 ($\phi_2 < \phi_1$) електрони переходять переважно з другого металу в перший. При цьому обидва метали заряджаються (метал 1 – негативно, метал 2 – позитивно) і створюють в оточуючому просторі електричне поле. Одночасно відбувається відносний зсув енергетичних рівнів електронів у контактуючих металах. У металі 1 всі рівні зміщуються вгору, а в металі 2 – вниз. Для встановлення рівноваги достатньо, аби з металу 2 перейшла в метал 1 незначна частина електронів провідності. Тому при приведенні металів у контакт значення хімічних потенціалів μ_1 і μ_2 не змінюються.

Умовою рівноваги для контакту двох металів є вираз

$$e\phi_1 - \mu_1 = e\phi_2 - \mu_2, \quad (3.3)$$

де ϕ_1 і ϕ_2 – рівноважні значення потенціалів першого і другого металів. Величину

$$\Delta\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e} \quad (3.4)$$

називають **внутрішньою контактною різницею потенціалів**. Вона зумовлена відмінністю хімічних потенціалів електронів у контактуючих металах. Відповідно до виразу для хімічного потенціалу

$$\Delta\phi_{12} = \frac{1}{e} \left[\varepsilon_{F_1} - \varepsilon_{F_2} + \frac{\pi^2}{12} (k_B T)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{F_2}} - \frac{1}{\varepsilon_{F_1}} \right) \right], \quad (3.5)$$

де ε_{F_1} і ε_{F_2} – значення енергії Фермі для першого і другого металів. Величина $\Delta\phi_{12}$ залежить від температури T контакту металів і зумовлює термоелектричні явища.

Потенціал змінюється від ϕ_1 до ϕ_2 у межах подвійного електричного шару, який утворюється на поверхні контакту, і називається **контактним шаром**. Товщина контактного шару має величину порядку $10^{-10} \div 10^{-9}$ м. Виникнення цього шару при контакті двох металів пов'язано з переходом з одного металу, який заряджається позитивно, в інший, який заряджається негативно, лише незначної частини електронів провідності, які знаходяться в об'ємі

контактного шару. Тому для кожного з металів концентрація електронів у контактному шарі практично така ж сама, як і в решті об'єму металу, так що питомий електричний опір контактного шару не відрізняється від питомого опору решти металу.

У класичній електронній теорії металів внутрішню контактну різницю потенціалів розглядають як наслідок відмінності концентрацій n_0 електронів провідності в контактуючих металах. У стані рівноваги дифузійний потік електронів з металу з великим значенням n_0 у метал з меншим значенням n_0 повністю компенсується потоком електронів у зворотному напрямі під впливом електричного поля контактного шару. Відповідний вираз для внутрішньої контактної різниці потенціалів має вигляд

$$\Delta\varphi_{12_{\text{кл}}} = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}. \quad (3.6)$$

Це значення відрізняється від точного значення $\Delta\varphi_{12}$ і може бути використане лише для якісного розгляду залежності внутрішньої контактної різниці потенціалів від температури.

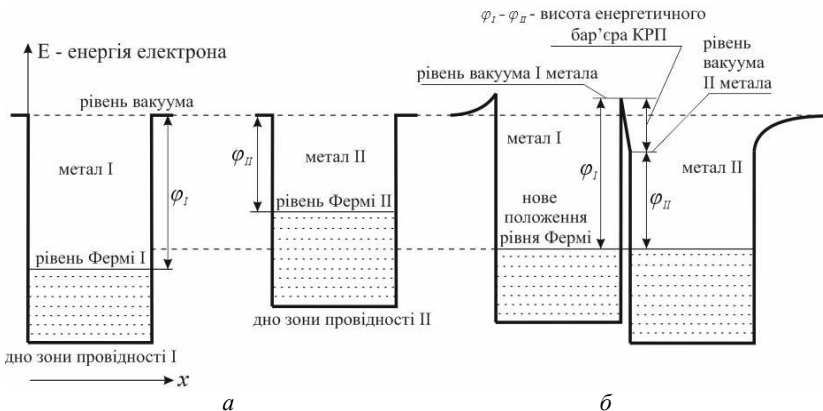
Зовнішньою контактною різницею потенціалів називають різницю потенціалів між двома точками, які знаходяться поблизу поверхонь першого (φ_1) і другого (φ_2) контактуючих металів поза ними. З умови рівності електростатичних потенціалів електронів у контактуючих металах випливає, що

$$\Delta\varphi'_{12} = \varphi'_1 - \varphi'_2 = -\frac{\phi_1 - \phi_2}{e}, \quad (3.7)$$

де ϕ_1 і ϕ_2 – роботи виходу електронів з першого і другого металів.

Розглянемо виникнення контактної різниці потенціалів між двома металевими тілами.

На рис. 3.1, а зображено електронні енергетичні діаграми для двох незаряджених, ізольованих один від одного металевих тіл з різними значеннями роботи виходу електронів при температурі, близькій до абсолютного нуля.



a – електронні енергетичні діаграми для двох незаряджених, ізольованих один від одного металевих тіл з різними роботами виходу електронів;
б – електронна енергетична діаграма двох металевих тіл при електричному контакті після встановлення рівноваги

Рисунок 3.1 – Виникнення контактної різниці потенціалів при електричному контакті двох різних металів

Оскільки в такому вихідному стані системи електричного поля між тілами немає, рівні вакууму (енергія електрона у термодинамічній рівновазі, який перебуває в спокої, зовні тіла біля його поверхні) у першому і другого тіл співпадають.

Але рівні Фермі у різних тіл не співпадають, оскільки кожний відрізняється від рівня вакууму на свою роботу виходу. Як можна побачити з рисунку, рівень Фермі в першому тілі, і всі стани під ним заповнені електронами. Система не є рівноважною.

Якщо тепер привести тіла в електричний контакт (рис. 3.1, *б*), то в системі почне встановлюватися рівновага: електрони з другого тіла будуть переходити в перше на вільні стани з меншою енергією. Внаслідок такого процесу перше тіло набуває негативного потенціалу ϕ_1 , а друге – позитивного ϕ_2 .

Набуття тілом будь-якого потенціалу призводить до того, що всі власні стани (дозволені значення енергії електрона) одержать однаковий приріст енергії. Внаслідок цього всі енергетичні рівні

першого тіла перемістяться вгору на величину $|e\varphi_1|$ і відповідно для другого тіла – вниз на величину $|e\varphi_2|$.

Одночасно з цим відбувається й інший процес – переміщення рівнів Фермі в „структурі енергетичних зон“ кожного тіла (відносно дна зони провідності). У першому тілі – переміщення вгору, у другому тілі – вниз. Адже при температурі, близькій до абсолютного нуля, всі заповнені стани лежать безпосередньо під рівнем Фермі. З потраплянням електронів у зону провідності першого тіла заповнюються нові, раніше незаповнені квантові стани, підіймаючи рівень Фермі відносно дна зони провідності.

Отже, з переходом електронів із другого тіла у перше рівні Фермі в обох тілах зближуються. Рівновага в системі настане, коли рівні Фермі співпадуть. Різницю потенціалів цих тіл, які врівноважились, називають *контактною різницею потенціалів*.

Проте в об’ємних металевих тілах (а саме такими є електроди вакуумних приладів) другим процесом, тобто зміною концентрації електронів, можна знехтувати. Наприклад, для того щоб змінити потенціал металеві кульки радіусом 1 см (ємність $C \approx 1,1$ пФ) на $\varphi_1 = 1$ В, достатньо лише змінити кількість електронів кульки на

$$\Delta N = \frac{\Delta\varphi_1 C}{e} \approx 10^7.$$
 Оскільки повна кількість вільних електронів у

такої кульки $N \approx 10^{24}$, то відносною зміною кількості вільних зарядів $\frac{\Delta N}{N} \approx 10^{-17}$ можна знехтувати. Інакше кажучи, відносна зміна

кількості вільних електронів у таких тілах незначна, оскільки ємність тіла мала, а концентрація електронів дуже велика.

За таких умов, контактну різницю потенціалів, як це видно з рис. 3.1, б, визначають за виразом (3.7).

В основі контактних явищ лежать фізичні процеси, що протікають у напівпровідниках під дією електричного поля на контакті. Найбільш поширеними контактами є:

- контакт метал–напівпровідник;
- p - n –перехід;
- n^+ - n –перехід (p^+ - p) – це перехід між напівпровідниками з одним типом провідності і різними концентраціями домішок;

- гетеропереходи – це переходи між напівпровідниками з різною шириною забороненої зони, що бувають *ізотипові* (n - n , p - p) і *неізотипові* (p - n).

При розгляді вищезазначених переходів використовують роботу виходу електронів з металу ϕ_m , роботу виходу електронів із напівпровідника ϕ_n , що визначаються як енергетична відстань між рівнем Фермі ε_F та нульовим рівнем у вакуумі

Контакт метал–напівпровідник може бути *запірним* ($\phi_m > \phi_n$ для напівпровідника n -типу; $\phi_m < \phi_n$ для напівпровідника p -типу) чи *антизапірним* в залежності від співвідношення між роботами виходу електронів із напівпровідника і металу. Запірний контакт метал – напівпровідник n -типу має **ширину об'ємного заряду** в напівпровіднику:

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0(\phi_m - e\varphi_k)}{e^2 N_d}}, \quad (3.8)$$

де ε – діелектрична проникність напівпровідника; $\phi_m - \phi_n$ – висота потенціального бар'єру на межі метал – напівпровідник; N_d – концентрація донорів у напівпровіднику n -типу φ_k - контактна різниця потенціалів.

Запірний контакт має випрямляючі властивості, його **вольт-амперна характеристика** має вигляд:

$$j = j_s \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) = AT^2 e^{-\frac{A_m}{k_B T}} \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right), \quad (3.9)$$

де U – напруга, прикладена до переходу; при прямому включенні позитивна, при зворотному – негативна.

Параметри електронно–діркового переходу залежать від параметрів p - і n -областей (рис. 3.2).

Для *невироджених* напівпровідників, виходячи з **закону діючих мас** ($n_n p_n = n_i^2$ (для n -типу), $p_p n_p = n_i^2$ (для p -типу)):

$$n_p = \frac{n_i^2}{N_a} - \text{концентрація електронів у } p\text{-області}; \quad (3.10 \text{ а})$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{N_d} - \text{концентрація дірок у } n\text{-області}. \quad (3.10 \text{ б})$$

Питома провідність квазінейтральної p-області

$$\sigma_p = ep_p\mu_p, \quad (3.11)$$

і квазінейтральної n-області

$$\sigma_n = en_n\mu_n, \quad (3.12)$$

набагато більші за провідність збіднілої області p-n-переходу (ОПЗ). Тому падінням напруги на квазінейтральних областях можна знехтувати.

Висота потенціального бар'єру переходу φ_k (або контакт-на різниця потенціалів) (рис. 3.3, а) дорівнює

$$\varphi_k = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_n}{n_p} \quad \text{або} \quad \varphi_k = \varphi_T \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2}, \quad (3.13)$$

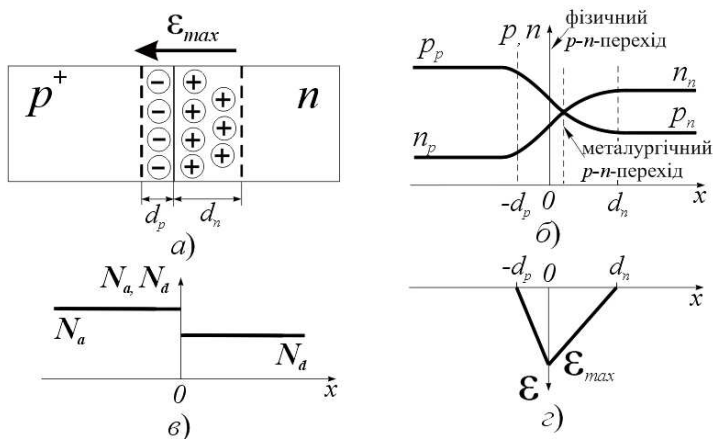
де n_n , n_p – концентрації електронів у n- та p-області, розподіл яких зображений на рис. 3.2, б; N_d , N_a – концентрації домішок у n- та p-області, розподіл яких зображений на рис. 3.2, в (при кімнатній температурі вся домішка йонізована, тому концентрація основних носіїв заряду (ОНЗ) дорівнює концентрації домішок); φ_T – тепловий потенціал ($\varphi_T = \frac{k_B T}{e}$).

Ширина різкого p-n-переходу (або області просторового заряду (ОПЗ)) d в кожній з областей залежить від концентрації основних носіїв в областях та прикладеної напруги U (при прямих напругах ОПЗ звужується, при зворотних – розширюється):

$$p_p d_p = n_n d_n; \quad d = d_n + d_p;$$

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{e}(\varphi_k - U)\left(\frac{1}{n_n} + \frac{1}{p_p}\right)} \quad \text{або} \quad d = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{e}(\varphi_k - U)\left(\frac{1}{N'_a} + \frac{1}{N'_d}\right)}, \quad (3.14 \text{ а})$$

де d_n і d_p – товщини областей просторового заряду в n - і p -областях (рис. 3.2, а).



а) структура p - n -переходу;
 в) розподіл домішок;

б) розподіл носіїв;
 г) розподіл електричного поля

Рисунок 3.2 – Електронно-дірковий перехід в рівноважному стані

Для **плавних p - n -переходів** з лінійним розподілом домішок біля границі розділу напівпровідників ширина переходу дорівнює:

$$d = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon_0\varepsilon}{e}\left(\frac{1}{N'_A} + \frac{1}{N'_D}\right)^2} (\varphi_k - U), \quad (3.14 \text{ б})$$

де N'_A та N'_D – градієнти концентрації донорних і акцепторних домішок.

Оскільки всередині p - n -переходу загальний негативний заряд йонізованих акцепторів дорівнює загальному позитивному заряду йонізованих донорів, то

$$d_n N_d S = d_p N_a S, \quad (3.15)$$

тут S – площа поперечного перерізу p - n -переходу.

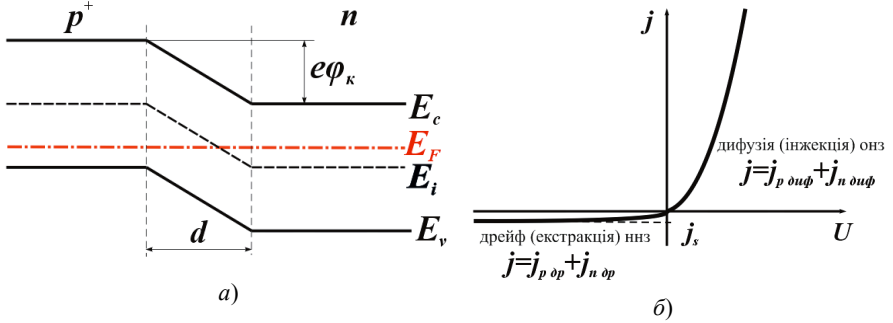


Рисунок 3.3 – Зонна діаграма електронно-діркового переходу в рівноважному стані (а) та ВАХ p - n -переходу (б)

Звідси випливає, що

$$\frac{d_n}{d_p} = \frac{N_a}{N_d} = \frac{p_p}{n_p}. \quad (3.16)$$

Напруженість електричного поля в p - n -переході максимальна на металургійній межі (рис. 3.2, з) і дорівнює

$$\mathcal{E}_{\max} = -\frac{2\varphi_k}{d} \quad \text{або} \quad \mathcal{E}_{\max} = -\frac{eN_a d_p}{\varepsilon\varepsilon_0} = -\frac{eN_d d_n}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3.17 a)$$

Залежність напруженості електричного поля від координати x $\mathcal{E}(x)$ в напівпровіднику n - і p -типу відповідно:

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{eN_d}{\varepsilon\varepsilon_0}(d_n - x), \quad x > 0; \quad (3.17 б)$$

та

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{eN_a}{\varepsilon\varepsilon_0}(d_p + x), \quad x < 0. \quad (3.17 в)$$

Залежність потенціалу від координати x $\varphi(x)$ в напівпровіднику n - і p -типу відповідно:

$$\varphi(x) = \frac{eN_d}{2\varepsilon\varepsilon_0} (x + d_p)^2, \quad x < 0; \quad (3.18 \text{ а})$$

та

$$\varphi(x) = -\frac{eN_d}{2\varepsilon\varepsilon_0} (x - d_n)^2, \quad x > 0. \quad (3.18 \text{ б})$$

Позитивний та негативний заряд по обидві сторони границі розділення p - та n -областей для східчастого переходу дорівнює:

$$Q = eN_d d_n S = eN_a d_p S, \quad (3.19)$$

Бар'єрна сміність p - n -переходу – це сміність при зворотному зміщенні, обумовлена зміною заряду йонізованих носіїв в області просторового заряду, і визначається виразом:

$$C_{\bar{6}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2e(\varphi_k - U)} \frac{n_n p_p}{(n_n + p_p)}}. \quad (3.20)$$

Дифузійна сміність – це сміність p - n -переходу при прямому зміщенні, обумовлена зміною заряду інжекттованих носіїв в базу з емітера:

$$C_d = \frac{e^2 S}{k_B T} (p_n L_p + n_p L_n) e^{\frac{eU}{k_B T}} = \frac{e^2 S}{k_B T} (p_n L_p + n_p L_n) \left(\frac{j}{j_s} + 1 \right). \quad (3.21)$$

При прямо- і зворотнозміщеному p - n -переході спостерігаються *інжекція* й *екстракція* неосновних носіїв заряду відповідно. При інжекції концентрації неосновних носіїв на межах переходу зростають (*надлишкові*) у n - і p -області відповідно:

$$\Delta p_n(0) = p_n \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right); \quad \Delta n_p(0) = n_p \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) \quad (3.22 \text{ а})$$

При зворотному зміщенні – зменшуються:

$$\Delta p_n(0) = p_n \left(e^{-\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right); \quad \Delta n_p(0) = n_p \left(e^{-\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right). \quad (3.22 \text{ б})$$

Ці значення концентрацій використовуються як граничні умови на p - n -переході.

Вольт-амперна характеристика p - n -переходу (рис. 3.3, б) виражає залежність між струмом I (або густиною струму j) через p - n -перехід і прикладеною напругою U :

$$j = e \left(\frac{D_n n_p}{L_n} + \frac{D_p p_n}{L_p} \right) \left(e^{\pm \frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) = j_s \left(e^{\pm \frac{eU}{k_B T}} - 1 \right), \quad (3.23 \text{ а})$$

де

$$j_s \equiv e \left(\frac{D_n n_p}{L_n} + \frac{D_p p_n}{L_p} \right), \quad (3.23 \text{ б})$$

j_s – густина зворотного струму насичення (рис. 3.3, б); D_n і D_p – коефіцієнти дифузії, відповідно, електронів і дірок; L_n і L_p – відповідні дифузійні довжини.

Для p - n -переходу з тонкими нейтральними областями ($W_n \ll L_p$ і $W_p \ll L_n$) і зворотним зміщенням густина струму насичення знаходиться за формулою:

$$j_s = e \left(\frac{D_n n_p}{L_n} \operatorname{cth} \frac{W_p}{L_n} + \frac{D_p p_n}{L_p} \operatorname{cth} \frac{W_n}{L_p} \right), \quad (3.23 \text{ в})$$

Струм складається з діркової й електронної складових, вони визначають коефіцієнт інжекції p - n -переходу:

$$\gamma_p = \frac{j_p}{j_n + j_p}. \quad (3.24)$$

За відсутності зовнішньої зміщувальної напруги через p - n -перехід протікають такі складові струму (рис. 3.3, б):

$$\text{дифузійний струм дірок} \quad - \quad j_{p_{\text{диф}}} = -e D_p \frac{dp}{dx}; \quad (3.25)$$

$$\text{дрейфовий струм дірок} \quad - \quad j_{p_{\text{др}}} = e \mu_p p_n \mathbf{E}_{\text{max}}; \quad (3.26)$$

дифузійний струм електронів -
$$j_{n_{\text{диф}}} = eD_n \frac{dn}{dx}; \quad (3.27)$$

дрейфовий струм електронів -
$$j_{n_{\text{др}}} = e\mu_n n_p \mathcal{E}_{\text{max}}. \quad (3.28)$$

Наявність поверхневих станів на поверхні напівпровідника призводить до утворення подвійного шару електричного заряду. В залежності від його типу (акцептори або донори), поверхня заряджається негативно або позитивно. При цьому в приповерхневій області виникає шар об'ємного заряду. Електричне поле, що виникає при цьому, викликає вигин енергетичних зон (рис. 3.4):

$$E_c(\mathbf{r}) = E_c^0 - e\varphi(\mathbf{r}), \quad E_v(\mathbf{r}) = E_v^0 - e\varphi(\mathbf{r}). \quad (3.29)$$

Величину вигину зон на поверхні напівпровідника, тобто різницю між значеннями електростатичного потенціалу на поверхні та в об'ємі, називають **поверхневим потенціалом** φ_s .

В області об'ємного заряду концентрації електронів і дірок залежать від координат. Для невідроджених напівпровідників ці залежності мають вигляд

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= N_c e^{\frac{E_F - E_c^0 + e\varphi(\mathbf{r})}{k_B T}} = n e^{\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{k_B T}}, \\ p(\mathbf{r}) &= N_v e^{\frac{E_v^0 - e\varphi(\mathbf{r}) - E_F}{k_B T}} = n e^{-\frac{e\varphi(\mathbf{r})}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При вигині зон вгору (вниз) у напівпровіднику p -типу (n -типу) концентрація основних носіїв заряду – дірок (електронів) поблизу поверхні збільшується, утворюється *збагачений* дірками (електронами) шар. При вигині зон униз (вгору) в напівпровіднику p -типу (n -типу) відбувається зменшення концентрації основних носіїв заряду – утворення *збіднілого* шару. В останньому випадку, якщо вигин зон достатньо великий (як правило, більший за $\frac{\Delta E_g}{2}$,

де ΔE_g – ширина забороненої зони напівпровідника), поблизу поверхні виникає шар, концентрація електронів (дірок) в якому може стати помітною. Шар поблизу поверхні, провідність якого порівня-

на з провідністю в об'ємі напівпровідника чи перевищує її й створюється електронами (дірками) в напівпровідниках p -типу (n -типу), називається *інверсійним*.

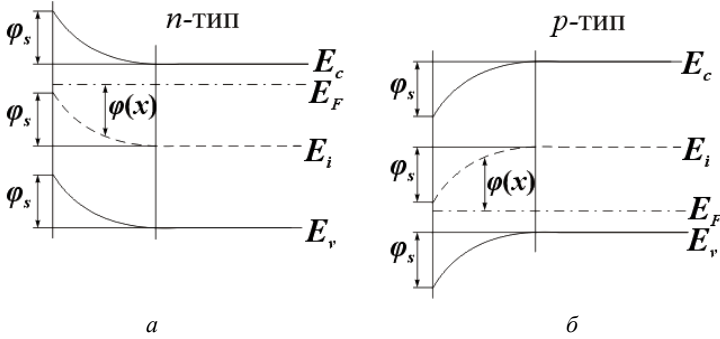


Рисунок 3.4 – Енергетичні діаграми на поверхні напівпровідника n -типу (а) та p -типу (б), режим збіднення

Ширина області просторового заряду характеризується *довжиною екранування*, або *дебаївською довжиною* L_D . Для електронного напівпровідника вона дорівнює

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{e^2 N_c \Phi'_{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_F - E_c}{k_B T} \right)}}, \quad (3.31)$$

де $\Phi'_{\frac{1}{2}}(\eta)$ – похідна інтегралу Фермі. В неvirодженому випадку

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n}}, \quad (3.32)$$

де n – концентрація електронів, а в умовах виродження

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{e^2 N(E_F)}}, \quad (3.33)$$

де $N(E_F)$ – густина станів на рівні Фермі.

Для власного напівпровідника за відсутності виродження маємо

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{2e^2 n_i}}. \quad (3.34)$$

Залежність *концентрації власних носіїв заряду* від температури виражається формулою

$$n_i^2 = A^* e^{-\frac{\Delta E_g}{\phi_T}}, \quad (3.35)$$

де $A^* = 0,5 \cdot 10^{16} \left(\frac{m_n m_p}{m^2} \right)^{\frac{3}{4}} T^{\frac{3}{2}}$.

Залежність концентрації носіїв заряду з рівнем Фермі E_F для невороджених напівпровідників визначається формулами:

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}}, \quad (3.36)$$

де $N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_{dn}^* k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ – ефективна густина станів в зоні провідності;

$$p = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}}, \quad (3.37)$$

де $N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_{dp}^* k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$ – ефективна густина станів у валентній зоні.

Поверхневі явища. Усі реальні тіла обмежені, а поверхневі явища відіграють важливу роль як у природних, так і в технологічних процесах.

Першим кроком на шляху опису просторово-обмежених тіл є уявлення про нескінченно-протяжну плоску межу поділу двох фаз: твердого тіла і вакууму. Тоді для кристалічного твердого тіла на

перший план висуваються два явища, пов'язані із наявністю поверхні: *релаксація поверхні* та її *реконструкція*.

Під **релаксацією поверхні** розуміють відмінність відстаней між останніми кристалографічними площинами, паралельними площині межі з вакуумом, від відстаней між такими самими площинами в об'ємі. При цьому вважають, що розташування атомів в останній із площин повністю співпадає з розташуванням атомів в усіх інших паралельних їй площинах. Якщо атоми останньої з площин зміщені з тих положень, які вони займають в інших площинах, розташованих в об'ємі матеріалу, то кажуть, що відбулася **реконструкція поверхні**.

Однією з причин реконструкції поверхні є поява на ній „обірваних“ зв'язків. При цьому валентні зв'язки, які вивільнилися, спричинюють більш сильну взаємодію між атомами, які містяться в сусідніх рядах поверхневої площини. Внаслідок цього поверхневі атоми розбиваються на пари, причому відстань між атомами в парі менша, ніж відстань між атомами, які належать сусіднім парам. Отже, реконструкція поверхні може призводити не лише до значного зміщення поверхневих атомів, але і до збільшення періоду повторення подібних елементів порівняно з періодом об'ємної ґратки. У деяких випадках навіть змінюється симетрія розміщення атомів порівняно з тим, що мало місце в об'ємі.

Стійкі конденсовані тіла самочинно не розпадаються на окремі частини. З фізичної точки зору причиною стійкості є необхідність виконати роботу для утворення нових поверхонь поділу з вакуумом при розділенні тіла на частини. Отже, енергія тіла, яке має більш протяжну межу з вакуумом, виявляється більшою, ніж у тіла, яке має менш протяжну межу. Цю додаткову енергію відносять до площі поверхні тіла і називають **поверхневою енергією** σ :

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \quad (3.38)$$

де $\Delta F = F - (F_1 + F_2)$ – надлишкова вільна енергія поверхні поділу фаз.

У рівновазі тіло має прийняти таку форму, при якій поверхнева енергія мінімальна. Тверді кристалічні тіла мають більш складну рівноважну форму, ніж рідкі, оскільки поверхневі енергії різ-

них кристалографічних граней не однакові. У цьому випадку мінімум поверхневої енергії досягається завдяки зниженню поверхневого натягу внаслідок адсорбції інших речовин.

Речовини, які знижують поверхневий натяг, називають **поверхнево-активними (ПАР)**. Речовини ж, які підвищують поверхневий натяг, називають **поверхнево-інактивними (ППР)**.

Адсорбція – це спонтанна зміна концентрації розчиненої речовини в поверхневому шарі порівняно з її концентрацією в об'ємі фази, у випадку ПАР – збільшення концентрації (додатна адсорбція), а у випадку ППР – зменшення (від'ємна адсорбція). Речовину, на поверхні якої відбувається адсорбція, називають **адсорбентом**, а речовину, яка адсорбується, – **адсорбтивом (адсорбатом)**.

Для кількісного опису адсорбції використовують три величини:

- ❖ **гіббсівська або надлишкова адсорбція** Γ_i (моль/м²) – надлишок i -го компонента в поверхневому шарі порівняно з його кількістю в об'ємі фази на одиницю площі поверхні;
- ❖ **абсолютна адсорбція** α (моль/м²) – кількість речовини в поверхневому шарі;
- ❖ **питома адсорбція** a (моль/кг) – кількість речовини, віднесена до маси адсорбату.

Виходячи з другого закону термодинаміки, Дж. Гіббс вивів рівняння, яке пов'язує величину адсорбції зі здатністю розчиненої речовини змінювати поверхневий натяг розчину (**рівняння Гіббса**):

$$\Gamma = - \frac{d\sigma}{dc_i} \frac{c_i}{RT}, \quad (3.39)$$

де c_i – концентрація i -го компонента.

Процес накопичення молекул на твердому адсорбенті – фізичну адсорбцію описують рівняннями Фрейндліха і Ленгмюра.

Емпіричне рівняння Фрейндліха:

$$a = \frac{v}{m} = kc^b, \quad (3.40)$$

де v , m – відповідно кількість адсорбтиву (моль) і маса адсорбенту (кг); c – концентрація адсорбтиву (кмоль/м³); k , b – емпіричні константи.

Рівняння Фрейндліха досить добре описує адсорбцію для інтервалу середніх концентрацій розчинів (або тисків газу). Частіше за все його використовують у логарифмічній формі:

$$\ln a = \ln k + \frac{1}{b} \ln c, \quad (3.41)$$

що дозволяє побудувати лінійну залежність $\ln a - \ln c$ і визначити емпіричні константи k і b .

Рівняння Ленгмюра:

$$\alpha = \alpha_{\infty} \frac{kP}{1 + kP}, \quad (3.42)$$

де α – адсорбція (моль/м²); α_{∞} – гранична адсорбція (моль/м²); P – рівноважний тиск адсорбтиву в об'ємі фази, яка межує з адсорбентом; k – константа адсорбційної рівноваги.

При $P \rightarrow 0$ у знаменнику рівняння (3.12) можна знехтувати величиною kP порівняно з одиницею, тоді $\alpha = \alpha_{\infty} kP$. При $P \rightarrow \infty$ настає пересичення адсорбційного шару і $\alpha = \alpha_{\infty}$. Рівняння Ленгмюра добре описує адсорбцію при незначних значеннях тиску, а також поверхнево-активних молекул із розчинів при незначних концентраціях (у цьому разі замість P використовують величину c). За значенням α_{∞} можна визначити важливу характеристику твердого адсорбенту – **активну питому поверхню** $S_{\text{пит}}$. Якщо відома площа S_0 , яку займає одна молекула газу або ПАР у насиченому моношарі, то:

$$S_{\text{пит}} = \alpha_{\infty} S_0 N_A. \quad (3.43)$$

При розробці теорії мономолекулярної адсорбції газу на твердому адсорбенті Ленгмюр виходив з таких припущень:

- ❖ адсорбція локалізована (молекули не переміщуються на поверхні) на окремих адсорбційних центрах, кожний з

яких взаємодіє лише з однією молекулою газу; внаслідок цього утворюється мономолекулярний шар;

- ❖ адсорбційні центри енергетично еквівалентні – поверхня адсорбенту еквіпотенціальна;
- ❖ адсорбовані молекули не взаємодіють одна з одною.

Рівняння Брунауера, Еммета і Теллера (рівняння БЕТ):

$$A = \frac{A_{\infty} C_0 \frac{P}{P_s}}{\left(1 - \frac{P}{P_s}\right) \left[1 + (C_0 - 1) \frac{P}{P_s}\right]}, \quad (3.44)$$

де C_0 – константа; P – рівноважний тиск пари в оточуючому просторі при заданих умовах; P_s – тиск насиченої пари за даної температури.

Рівняння БЕТ описує S -подібну ізотерму адсорбції. Згідно з теорією БЕТ:

- ❖ на поверхні адсорбенту є певна кількість рівноцінних в енергетичному аспекті активних центрів;
- ❖ кожна молекула першого шару є активним центром для адсорбції молекул другого шару, а молекули другого шару – активні центри для адсорбції молекул третього шару тощо;
- ❖ взаємодією сусідніх молекул у межах одного шару нехтують.

До поверхневих явищ, які знижують поверхневий натяг, окрім адсорбції, відносять адгезію, змочування і розтікання.

Адгезія – злипання двох різнорідних твердих тіл або рідких поверхонь за рахунок міжмолекулярних сил. Якщо привести в контакт дві взаємно нерозчинні рідини або рідину – тверде тіло, або два твердих тіла, то під дією міжмолекулярних сил вони міцно прилипають один до одного, так що для їх розділення потрібно виконати певну роботу. Адгезія – це спонтанне поверхнєве явище, яке призводить до зниження поверхневої енергії.

Робота адгезії W_a характеризує міцність адгезійного зв'язку, віднесеного до одиниці площі. Рівноважну роботу адгезії можна

співставити з рівноважною роботою когезії. Когезія відбиває міжмолекулярну взаємодію всередині гомогенної фази.

Рівноважна робота когезії дорівнює подвійному значенню поверхневого натягу, тобто

$$W_k = 2\sigma. \quad (3.45)$$

Робота адгезії для двох конденсованих фаз, які мають поверхні на межі з повітрям, дорівнює

$$W_a = \sigma_{p-\Gamma} + \sigma_{p-T} + \sigma_{T-\Gamma}. \quad (3.46)$$

Вираз (3.46) називають **рівнянням Дюпре**.

Змочування – це різновид адгезії, який відносять до взаємодії рідина – тверде тіло. Ступінь змочування поверхні рідини визначається косинусом крайового кута змочування θ . Рівноважні крайові кути визначають за **рівнянням Юнга**:

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{T-\Gamma} - \sigma_{p-T}}{\sigma_{p-\Gamma}}. \quad (3.47)$$

З рівняння (3.47) випливає, що коли $\sigma_{T-\Gamma} > \sigma_{p-T}$, $\cos\theta > 0$ ($\theta < 90^\circ$), – рідина змочує поверхню, якщо $\sigma_{T-\Gamma} < \sigma_{p-T}$, $\cos\theta < 0$ ($\theta > 90^\circ$), – то не змочує.

Рівняння Дюпре – Юнга, отримане в результаті поєднання (3.16) і (3.17), відбиває вплив змочування на адгезійну взаємодію:

$$W_a = \sigma_{p-\Gamma} (1 + \cos\theta). \quad (3.48)$$

Чим краще змочування ($\theta < 90^\circ$), тим більша робота адгезії.

Розділивши обидві частини рівняння (3.48) на величину 2σ , отримаємо:

$$\frac{W_a}{2\sigma} = \frac{1 + \cos\theta}{2}, \quad \text{або} \quad \frac{W_a}{W_k} = \frac{1 + \cos\theta}{2}. \quad (3.49)$$

З рівняння (3.49) можна зробити висновки:

❖ при $\theta = 0^\circ$, $\cos\theta = 1$ і $W_a = W_k$;

❖ при $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$ і $W_a = \frac{W_k}{2}$;

❖ при $\theta = 180^\circ$, $\cos \theta = -1$ і $W_a = 0$. Такого стану практично не буває, оскільки завжди існує деяка адгезія.

Розтікання – теж різновид адгезії, який відбувається у випадку, коли робота адгезії перевищує роботу когезії рідини, яка розтікається, тобто рідина розтікається, якщо її міжмолекулярні зв'язки руйнуються в результаті адгезії:

$$f = \sigma_{\Gamma-\Gamma} - \sigma_{P-\Gamma} - \sigma_{P-T}; f = W_a - W_k, \quad (3.50)$$

де f – коефіцієнт розтікання.

При $f > 0$ рідина розтікається по поверхні, при $f < 0$ – не розтікається.

Якщо поверхня твердого тіла неоднорідна, а є сукупністю маленьких ділянок, які чергуються, з різними контактними кутами θ_1 і θ_2 , то контактний кут композитної поверхні θ можна визначити згідно із **законом Кассьє**:

$$\cos \theta = x_1 \cos \theta_1 + x_2 \cos \theta_2, \quad (3.51)$$

де x_1 і x_2 – частини поверхні, зайняті її складовими компонентами. Природно, що виконується умова $x_1 + x_2 = 1$. Перспективна можливість різко збільшити контактний кут полягає у створенні на поверхні нанорозмірних виступів і впадин, що чергуються. Якщо сам по собі матеріал не змочується рідиною, а відстань між виступами мала, то в місцях впадин рідина контактує лише з газом, для якого контактний кут дорівнює майже 180° . Якщо площа виступів значно менше площі впадин, то, згідно із законом Кассьє, контактний кут на такій поверхні буде наближатися до 180° , – *супергідрофобна поверхня*.

Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Оцініть величину внутрішньої контактної різниці потенціалів між Купрумом і Калієм при температурі 27 °С.

Розв'язання

Внутрішня контактна різниця потенціалів, згідно формули (3.6), дорівнює

$$\Delta\varphi_{12_{\text{кл}}} = \frac{k_{\text{В}}T}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}.$$

Купрум і Калій входять до групи одновалентних елементів, у яких поза замкненої оболонки є лише один колективізований електрон. Отже, на один атом припадає один вільний електрон. Тому для відношення концентрацій вільних електронів запишемо:

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 39 \cdot 10^{-3}}{0,86 \cdot 10^3 \cdot 63,5 \cdot 10^{-3}} = 6,4.$$

Звідси

$$\Delta\varphi_{12_{\text{кл}}} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \ln 6,4 \approx 0,04 \text{ В}.$$

Відповідь: $\Delta\varphi_{12_{\text{кл}}} = 0,04 \text{ В}.$

Приклад 3.2. Дві кульки, одну радіусом r_1 з металу з роботою ϕ_1 , іншу – радіусом r_2 з роботою виходу ϕ_2 , з'єднали провідником. Обчисліть контактну різницю потенціалів; потенціал, набутий кожною з кульок окремо; заряд, який пройшов по провіднику та нове значення енергії Фермі цієї системи.

Розв'язання

При з'єднанні електрони з тіла з меншою роботою виходу (для визначеності кулька 1) будуть переходити в тіло з більшою

роботою виходу (кулька 2) до тих пір, доки система не досягне рівноваги і рівні Фермі не співпадуть. Кулька 1 набуває заряду $+q$, кулька 2 – заряду $-q$. Хоча заряди і рівні за абсолютною величиною, набуті кульками потенціали в загальному випадку відрізняються за модулем. Потенціал першої кульки $\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1}$, потенціал

другої кульки $\phi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$.

Різниця потенціалів $\phi_1 - \phi_2$, яка утворилася між двома кульками, дорівнює контактній різниці потенціалів:

$$\Delta\phi'_{12} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно невідомого заряду q , маємо

$$q = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}.$$

Потенціали, набуті кожною з кульок окремо, обернено пропорційні їхнім радіусам і дорівнюють

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}, \quad \phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}.$$

Нове значення енергії Фермі (відрахованої від рівня енергії електрона, який перебуває в стані спокою на нескінченості) складає:

$$\epsilon_F = -\phi_1 - \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 r_1} = -\phi_2 + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{\phi_1 r_1 + \phi_2 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Відповідь отримаємо в еВ, якщо взяти ϕ_1, ϕ_2 в еВ, а r в см.

Відповідь: $\Delta\phi'_{12} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}; \quad q = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}; \quad \phi_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e};$

$$\phi_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \frac{\phi_2 - \phi_1}{e}; \quad \varepsilon_F = -\frac{\phi_1 r_1 + \phi_2 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Приклад 3.3. Два діоди з ідеальними p - n -переходами мають однакову геометрію і зроблені з одного матеріалу. Час життя електронів дірок у кожному діоді однаковий: $\tau_{n1} = \tau_{p1} = \tau_1$; $\tau_{n2} = \tau_{p2} = \tau_2$. У першому діоді час життя τ_1 у 4 рази менший, ніж у другому τ_2 . Концентрація домішок N_a і N_d у першому діоді в 10 разів більша, ніж у другому. Визначте відношення густин струмів $\frac{j_1}{j_2}$ за однакового значення напруги.

Розв'язання

Скористаємось формулою для густини струму

$$j = en_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right) \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right).$$

Якщо діоди виготовлені з одного матеріалу, то наближено можна вважати, що коефіцієнти дифузії носіїв заряду в них однакові. Але внаслідок того, що час життя носіїв заряду різний, дифузійні довжини $L = \sqrt{D\tau}$ у першому діоді удвічі менші, ніж у другому. Звідси з урахуванням відмінностей у концентраціях домішок маємо:

$$j_1 = en_i^2 \left(\frac{D_n}{L_{n1} N_{a1}} + \frac{D_p}{L_{p1} N_{d1}} \right) \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right);$$

$$j_2 = en_i^2 \left(\frac{D_n}{L_{n2} N_{a2}} + \frac{D_p}{L_{p2} N_{d2}} \right) \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) = en_i^2 \left(\frac{D_n}{20L_{n1} N_{a1}} + \frac{D_p}{20L_{p1} N_{d1}} \right) \times$$

$$\times \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right).$$

Остаточно отримуємо

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Відповідь: $\frac{j_1}{j_2} = 0,05$.

Приклад 3.4. Визначте, як зміниться густина зворотного струму насичення j_s крізь кремнієвий p - n -перехід зі зменшенням температури від $T_1 = 300$ К до $T_2 = 250$ К. Зі зміною температури ширина забороненої зони кремнію змінюється за законом

$$\Delta E_g(T) = \Delta E_g^0 - \xi(T - 300),$$

$$\text{де } \xi = 2,84 \cdot 10^{-4} \frac{\text{eВ}}{\text{К}}.$$

Розв'язання

У формулу для густини струму

$$j = en_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right) \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right)$$

підставимо вираз для власної концентрації носіїв заряду

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}},$$

отримаємо:

$$j = eN_c N_v \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right) e^{-\frac{\Delta E_g}{k_B T}} \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right) = j_s \left(e^{\frac{eU}{k_B T}} - 1 \right),$$

де густина зворотного струму насичення j_s дорівнює:

$$j_s = eN_c N_v \left(\frac{D_n}{L_n N_a} + \frac{D_p}{L_p N_d} \right) e^{-\frac{\Delta E_g}{k_B T}}.$$

Параметри N_c , N_v , D_n , D_p , L_n і L_p слабо залежать від температури. Тому основна температурна залежність зворотного струму насичення визначається множителем $e^{-\frac{\Delta E_g}{k_B T}}$. При $T_1 = 300$ К цей множник дорівнює:

$$e^{-\frac{\Delta E_{g1}}{k_B T_1}} = e^{-\frac{1,12}{8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 300}} = 1,96 \cdot 10^{-19}.$$

При $T_2 = 250$ К :

$$e^{-\frac{\Delta E_{g2}}{k_B T_2}} = e^{-\frac{1,12 - 2,84 \cdot (250 - 300)}{8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 300}} = 1,84 \cdot 10^{-23}.$$

Відношення зворотних струмів насичення в основному визначається відношенням цих експонент, тобто

$$\frac{j_{s1}}{j_{s2}} \approx \frac{1,96 \cdot 10^{-19}}{1,84 \cdot 10^{-23}} \approx 10^4.$$

Відповідь: $\frac{j_{s1}}{j_{s2}} \approx 10^4$.

Приклад 3.5. Розрахуйте роботу адгезії в системі вода – графіт, якщо крайовий кут дорівнює 90° , а поверхневий натяг води складає $71,96 \frac{\text{мДж}}{\text{м}^2}$. Визначте коефіцієнт розтікання води на графіті.

Розв'язання

Вираз для роботи адгезії через крайовий кут дається рівнянням Дюпре – Юнга (3.48):

$$W_a = \sigma_{p-\Gamma} (1 + \cos \theta) = 71,96 \cdot (1 + \cos 90^\circ) = 71,96 \frac{\text{мДж}}{\text{м}^2}.$$

Робота когезії відповідно до виразу (3.45) дорівнюватиме:

$$W_k = 2\sigma_{p-g} = 2 \cdot 71,96 = 143,92 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^2}.$$

Коефіцієнт розтікання визначимо за формулою (3.50):

$$f = W_a - W_k = 71,96 - 143,92 = -71,96 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^2},$$

тобто вода не розтікається по графіту.

Відповідь: $W_a = 71,96 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^2}$; $f = -71,96 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^2}$ (вода не розтікається по графіту).

Приклад 3.6. Побудуйте ізотерму адсорбції-десорбції, скориставшись експериментальними капілярної конденсації парів води в порах активованого вугілля при 293 К.

$p, 10^{-2}$ Па	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$a_{\text{адс.}}, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$	6,5	9,0	11,5	14,0	22,5	26,6	30,0
$a_{\text{дес.}}, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$	7,0	10,3	13,5	16,5	25,0	27,6	30,0

Розрахуйте та побудуйте інтегральну криву розподілу пор за розмірами. Молярний об'єм води

$$V_\mu = 18 \frac{\text{см}^3}{\text{моль}}; \text{ тиск її насиченої пари } 2\,338 \text{ Па; пове-}$$

$$\text{рхневий натяг } 71,96 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^2}.$$

Розв'язання

Для розрахунку інтегральної кривої адсорбції розподілу об'ємі в пор за розмірами скористаємось кривою десорбції. Радіус пор розрахуємо за рівнянням Кельвіна:

$$r = \frac{2\sigma V_\mu}{RT \ln \frac{P_s}{P}},$$

де r – радіус пор, який випростовується при заданому відносному тиску. Кожній точці десорбційної гілки ізотерми адсорбції відповідає певна величина адсорбції a і відносний тиск $\frac{P}{P_s}$. Знаючи величину a , можна розрахувати об'єм заповнених пор за даного тиску:

$$V_n = a_{\text{дес}} V_\mu.$$

Результати розрахунків заносимо в таблицю:

$p, 10^{-2}$ Па	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$\frac{P}{P_s}$	0,004	0,008	0,017	0,026	0,034	0,038	0,043
$\frac{P_s}{P}$	233,8	116,9	58,45	38,97	29,22	25,98	23,38
$\ln \frac{P_s}{P}$	5,45	4,76	4,07	3,66	3,38	3,26	3,15
$r, \text{нм}$	0,195	0,223	0,262	0,290	0,315	0,327	0,338
$V_n, 10^6 \text{ м}^3$	126	185,4	243	297	450	496,8	540

Використовуючи вихідні дані адсорбції-десорбції і відповідні значення відносного тиску, можна побудувати ізотерму адсорбції (рис. 3.5).

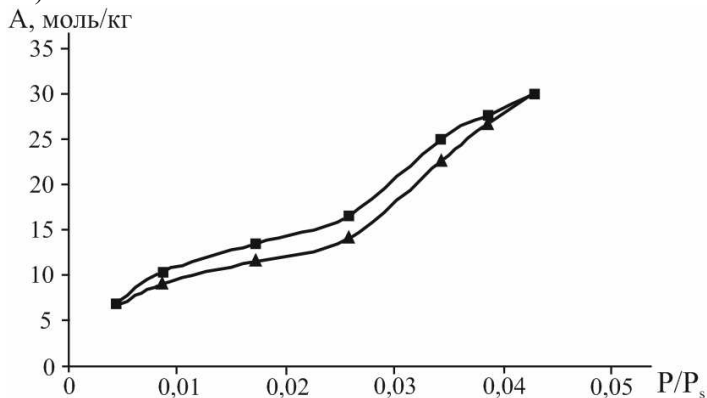


Рисунок 3.5 – Ізотерма адсорбції

Знаючи об'єм заповнюваних пор за даного тиску і відповідні значення радіусів, будемо інтегральну криву розподілу об'єму пор за радіусами (рис. 3.6)

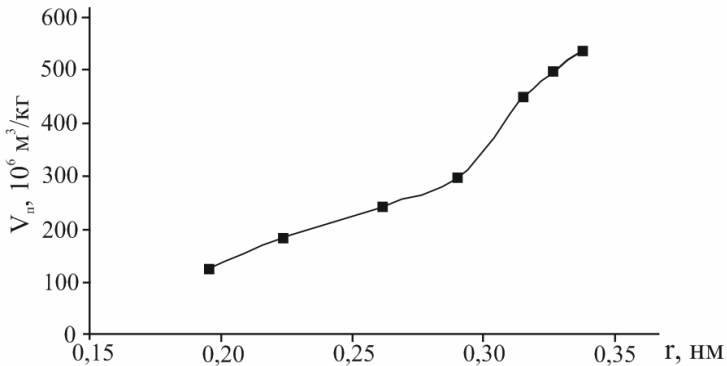


Рисунок 3.6 – Інтегральна крива розподілу об'єму пор за радіусами

Задачі для самостійного розв'язування

Контактні явища

- 3.1. Робота виходу у Калію 2 еВ, а у Вольфраму – 4,54 еВ. Зарядками якого знаку заряджаються Калій і Вольфрам при контакті? Чому дорівнює контактна різниця потенціалів? Чому при розведенні контактуючих поверхонь на них не залишається заряду?
- 3.2. Визначте внутрішню контактну різницю потенціалів, яка виникає при контакті двох металів з концентрацією вільних електронів $n_{01} = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ і $n_{02} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$.
- 3.3. Кульку радіусом 4 см з металу з роботою виходу $\phi_1 = 1 \text{ еВ}$ і кульку радіусом 2 см з металу з роботою виходу $\phi_2 = 7 \text{ еВ}$ з'єднали провідником. Обчисліть контактну різницю потенціалів; потенціал, набутий кожною кулькою окремо; кількість електронів, які перейшли по провіднику і нове значення енергії Фермі цієї системи.

- 3.4. Кульку діаметром 3 см з металу з роботою виходу $\phi_1 = 1$ еВ і кульку діаметром 1 см з металу з роботою виходу $\phi_2 = 7$ еВ з'єднали провідником, у розрив якого підключено джерело напруги з ЕРС $\mathcal{E} = 1$ В, як показано на рис. 3.7, а. Обчисліть контактну різницю потенціалів між кульками, кількість електронів, які перейшли по провіднику, і нові значення енергії Фермі електронів у цій системі. Побудуйте енергетичну діаграму.

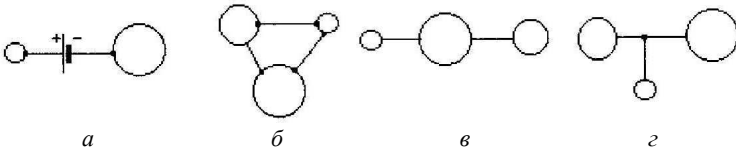


Рисунок 3.7

- 3.5. Три кульки (радіусом 4 см з роботою виходу $\phi_1 = 1$ еВ; радіусом 3 см з роботою виходу $\phi_2 = 2$ еВ і радіусом 2 см з роботою виходу $\phi_3 = 3$ еВ відповідно) з'єднали, як показано на рис. 3.7, б. Обчисліть контактну різницю потенціалів між кожною парою кульок; потенціал, набутий першою кулькою, і нове значення енергії Фермі цієї системи.
- 3.6. Три кульки (радіусом 4 см з роботою виходу $\phi_1 = 1$ еВ; радіусом 1 см з роботою виходу $\phi_2 = 2$ еВ і радіусом 2 см з роботою виходу $\phi_3 = 3$ еВ відповідно) з'єднали, як показано на рис. 3.7, в. Обчисліть потенціал, набутий першою кулькою, і нове значення енергії Фермі цієї системи.
- 3.7. Три кульки (радіусом 4 см з роботою виходу $\phi_1 = 2$ еВ; радіусом 2 см з роботою виходу $\phi_2 = 3$ еВ і радіусом 3 см з роботою виходу $\phi_3 = 1$ еВ відповідно) з'єднали, як показано на рис. 3.7, г. Обчисліть потенціал, набутий першою кулькою, і нове значення енергії Фермі цієї системи.
- 3.8. Визначте різницю потенціалів між поверхнями катоду й аноду, якщо анодна напруга (напруга від зовнішнього джерела) дорівнює $+2,5$ В, а робота виходу електронів з катоду й аноду

- відповідно 2,1 еВ і 3,9 еВ. Нарисуйте енергетичну діаграму для електрона в системі.
- 3.9. Незаряджений конденсатор ємністю $C = 100$ пФ, металеві обкладинки якого мають роботу виходу $\phi_1 = 3$ еВ і $\phi_2 = 1$ еВ, замкнули накоротко. Знайдіть заряд конденсатора. Нарисуйте енергетичну діаграму для електрона в системі.
- 3.10. Конденсатор ємністю $C = 200$ пФ, обкладинки якого виготовлені з металів з роботами виходу $\phi_1 = 3,5$ еВ і $\phi_2 = 2$ еВ, приєднали до батареї з ЕРС $\mathcal{E} = 1,5$ В. Знайдіть заряд конденсатора. Нарисуйте енергетичну діаграму для електрона в системі. Розгляньте обидва варіанти підключення конденсатора до батареї.
- 3.11. Плоский конденсатор (площа пластин $S = 3$ см², відстань між пластинами $d = 1$ мм, робота виходу матеріалу обкладинок 4 еВ і 2 еВ) приєднали до джерела напруги з ЕРС, рівною 1,5 В. Знайдіть заряд конденсатора і напруженість поля в діелектрику. Нарисуйте енергетичну діаграму для електрона в системі. Розгляньте обидва варіанти підключення конденсатора.
- 3.12. Монети однакових розмірів і форми, але виготовлені з різних металів: мідь ($\phi_{\text{Cu}} = \phi_1 = 4,4$ еВ), нікель ($\phi_{\text{Ni}} = \phi_2 = 4,5$ еВ) і срібло ($\phi_{\text{Ag}} = \phi_3 = 4,3$ еВ) складені в нескінченний стовпчик періодично: ... – Cu – Ni – Ag – Cu – Знайдіть положення рівня Фермі в системі. Нарисуйте енергетичну діаграму для електрона.
- 3.13. Напруга, яка подається на анод діода (відносно катода) дорівнює -1 В. З якою мінімальною початковою швидкістю має виходити електрон з катода, щоб досягнути анода, якщо катод і анод мають роботу виходу відповідно 1,5 і 2,7 еВ?
- 3.14. Відстань між пластинами плоского конденсатора $d = 1$ мм. Одна з пластин виготовлена з платини (для якої робота виходу електрона $\phi_1 = 5,29$ еВ), друга – з алюмінію ($\phi_2 = 3,74$ еВ). Пластини закорочені мідним проводом. Якою буде напруже-

ність E електричного поля між пластинами? Який напрямок буде у поля?

- 3.15. Між електродами двоелектродної лампи (діода) включено батарею з ЕРС $\mathcal{E} = 10$ В. Матеріалом катоду є вольфрам (для якого робота виходу електрона $\phi_w = \phi_1 = 4,5$ еВ), матеріалом анода – нікель (для якого $\phi_{Ni} = \phi_2 = 4,84$ еВ). Яку енергію набувають електрони на шляху від катода до анода? Швидкістю, з якою електрони вилітають з катода, можна знехтувати.
- 3.16. Покажіть, що висота потенційного бар'єру p - n -переходу, сформованого в невідродженому напівпровіднику, визначається виразом $e\phi_k = k_B T \ln \frac{p_p n_n}{n_i^2}$, де p_p та n_n – рівноважні концентрації основних носіїв заряду в p - і n -областях; n_i – власна концентрація носіїв заряду.
- 3.17. Розрахуйте для температури 573 К контактну різницю потенціалів p - n -переходу, сформованого в фосфіді індію, якщо рівноважні концентрації основних носіїв заряду в p - і n -областях однакові і дорівнюють 10^{17} см $^{-3}$, а власна концентрація $n_i = 10^{13}$ см $^{-3}$.
- 3.18. Для різкого несиметричного p - n -переходу при $N_a = 2N_d$, побудувати розподіл концентрації домішок $N(x)$, густини об'ємного заряду Q , градієнта потенціалу $\frac{d\phi}{dx}$ і потенціалу ϕ уздовж координати x , перпендикулярної границі p - n -переходу. Домішки вважати йонізованими.
- 3.19. Для симетричного плавного p - n -переходу з лінійним розподілом концентрації домішок при $N_a = 2N_d$, побудуйте розподіл концентрації домішок $N(x)$, густини об'ємного заряду Q , градієнта потенціалу $\frac{d\phi}{dx}$ і потенціалу ϕ уздовж координати x , перпендикулярної границі p - n -переходу. Домішки вважати йонізованими.

- 3.20. Визначте контактну різницю потенціалів в p - n -переході із арсеніду галію при кімнатній температурі, якщо концентрація основних носіїв заряду в областях p - і n -типу однакова і дорівнює 10^{23} м^{-3} . Порівняйте отриманий результат з контактною різницею потенціалів в кремнієвому p - n -переході з аналогічним розподілом домішок. Власна концентрація носіїв заряду при $T = 300 \text{ К}$ дорівнює $1,7 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ для арсеніду галію і 10^{16} м^{-3} для кремнію.
- 3.21. В структурі з кремнієвим p - n -переходом питомий опір p -області $\sigma_p = 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а питомий опір n -області $\sigma_n = 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Розрахуйте контактну різницю потенціалів ϕ_k , якщо рухливість дірок $\mu_p = 0,05 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ та електронів $\mu_n = 0,13 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, а власна концентрація $n_i = 1,38 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ при температурі $T = 300 \text{ К}$.
- 3.22. В монокристалі напівпровідника довжиною $0,2 \text{ мм}$ і площею поперечного перерізу $S = 10^{-6} \text{ м}^2$ утворено p - n -перехід. На бокових поверхнях монокристалу сформовано омичні контакти для підключення зовнішньої напруги, межа між p - і n -областями розташована посередині. Питомий опір p -області $\rho_p = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, час життя неосновних носіїв заряду в ній $\tau_n = 75 \text{ нс}$. Питомий опір n -області $\rho_n = 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, час життя дірок у ній $\tau_p = 150 \text{ нс}$.

Визначте: а) контактну різницю потенціалів; б) зворотний струм насичення; в) частину струму, створеного дірками. При розрахунках вважати, що в напівпровіднику рухливість електронів $\mu_n = 0,3 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,15 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, власна концентрація носіїв заряду $n_i = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ при $T = 300 \text{ К}$.

3.23. Концентрація донорів та акцепторів у n - та p -областях різкого p - n -переходу відповідно дорівнює $5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ та 10^{17} см^{-3} . Визначте контактну різницю потенціалів та густину зворотного струму насичення, якщо при кімнатній температурі коефіцієнти дифузії для неосновних електронів і дірок 100 та $50 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ відповідно, а дифузійна довжина $L_n = L_p = 0,8 \text{ см}$.

Власну концентрацію носіїв заряду вважати рівною 10^{13} см^{-3} .

3.24. Структура з кремнієвим p - n -переходом має питому провідність p -області $\sigma_p = 10^3 \frac{\text{См}}{\text{м}}$ і питому провідність n -області $\sigma_n = 20 \frac{\text{См}}{\text{м}}$. Час життя неосновних носіїв заряду 5 і 1 мкс в p - і n -областях відповідно.

Визначте: а) відношення діркової складової в p - n -переході до електронної; б) густину зворотного струму насичення і густину струму через p - n -перехід при прямій напрузі 0,3 В. Розрахунок здійснювати для температури $T = 300 \text{ К}$, вважаючи, що власна концентрація носіїв заряду $n_i = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,12 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,05 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

3.25. Різкий p - n -перехід сформований із матеріалу p -типу з питомим опором $\rho_p = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ та з матеріалу n -типу з питомим опором $\rho_n = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ при $T = 300 \text{ К}$. Час життя неосновних носіїв заряду в матеріалі p - і n -типу 100 та 150 мкс відповідно, площа переходу $S = 1 \text{ мм}^2$. Розрахуйте зворотній струм насичення у припущенні, що товщина p - і

n -областей значно більша дифузійної довжини, якщо $\mu_p = 4,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$; $\mu_n = 0,135 \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$; $n_i = 6,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$.

- 3.26. Струм, який проходить через p - n -перехід при великій зворотній напрузі і $T = 300 \text{ К}$, дорівнює $2 \cdot 10^{-7} \text{ А}$. Знайдіть струм при прямій напрузі $0,1 \text{ В}$.
- 3.27. Розрахуйте пряму напругу на p - n -переході при струмові 1 мА , якщо зворотній струм насичення при кімнатній температурі дорівнює: а) 1 мкА ; б) 1 нА .
- 3.28. Посередині напівпровідникового стрижня довжиною 2 мм перерізом $0,5 \times 1 \text{ мм}$ знаходиться p - n -перехід. Питома провідність в p -області $\sigma_p = 100 \frac{\text{См}}{\text{см}}$, питома провідність в n -області $\sigma_n = 1 \frac{\text{См}}{\text{см}}$. При температурі $T = 300 \text{ К}$ зворотній струм насичення p - n -переходу дорівнює 5 мкА . Розрахуйте напругу, при якій струм через перехід дорівнює 1 і 10 мА . Уточніть результати з урахуванням падіння напруги на об'ємних опорах p - і n -областей. Зміною опорів об'ємів областей при збільшенні рівня інжекції знехтувати.
- 3.29. Різкий p - n -перехід має площину поперечного перерізу $S = 1 \text{ мм}^2$. Область p - сильно легована, так що її питома провідність в декілька разів більша питомої провідності n -області. Питомий опір n -області $5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, а час життя неосновних носіїв заряду в ній $\tau_p = 50 \text{ мкс}$. Визначте зворотній струм p - n -переходу і пряму напругу при струмові 1 мА .
- 3.30. Визначте при температурі $T = 300 \text{ К}$ контактну різницю потенціалів кремнієвого p - n -переходу, якщо концентрація домішок $N_a = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ і $N_d = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$.
- 3.31. В невеликому прямокутному германієвому стрижні утворено плаский p - n -перехід. Перехід зміщено у зворотному напрямі, струм через нього дорівнює 1 мкА . В p -області на деякій

відстані від p - n -переходу, паралельно йому напрямлено світловий промінь, що викликало збільшення струму через перехід до 54 мкА. При переміщенні світлового променя до p - n -переходу на відстань 0,6 мм струм збільшився до 107 мкА. Чому дорівнює середній час життя електронів в p -області стрижня, якщо рухливість електронів $\mu_n = 0,38 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$? Розрахунок здійснити для кімнатної температури ($T = 300 \text{ К}$).

3.32. При кімнатній температурі ($T = 300 \text{ К}$) зворотній струм насичення p - n -переходу, отриманого в арсеніді галію, дорівнює 2,5 мкА. Визначте опір p - n -переходу при прямій напрузі 0,1 В. Побудуйте прямі гілки вольт-амперної та вольт-омної характеристик цього p - n -переходу.

3.33. Визначте концентрацію акцепторних домішок в p -області електронно-діркового переходу і концентрацію донорних домішок в n -області, якщо відомо, що при кімнатній температурі ($T = 300 \text{ К}$) питомі провідності p -областей: $\sigma_n = 1 \frac{\text{См}}{\text{см}}$;

$$\sigma_p = 100 \frac{\text{См}}{\text{см}}.$$

3.34. При прямій напрузі 0,1 В на p - n -переході через нього проходить певний струм. Якою повинна бути пряма напруга, щоб струм збільшився вдвічі? Розрахунок провести для кімнатної температури.

3.35. Яку напругу необхідно прикласти до p - n -переходу при $T = 300 \text{ К}$, щоб прямий струм через нього дорівнював зворотному струму насичення $I_{sзв}$? При якій прямій напрузі прямий струм $I_{sпр} = 100I_{sзв}$?

3.36. Зворотній струм насичення $I_{sзв}$ германієвого p - n -переходу площею $S = 1 \text{ мм}^2$ при температурі $T = 300 \text{ К}$ дорівнює 10 мкА. Припускаючи, що струм обумовлений лише електронами, розрахуйте дифузійну довжину електронів L_n в p -об-

ласті. Рівень Фермі в p -області лежить на $0,5 \text{ eV}$ нижче дна зони провідності, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

- 3.37. У скільки разів зміниться бар'єрна ємність різкого p - n -переходу при збільшенні зворотної напруги від 20 до 80 В ?
- 3.38. Якщо до різкого p - n -переходу прикласти змінну напругу амплітудою $0,5 \text{ В}$, то максимальна ємність переходу дорівнює 2 пФ . Визначте контактну різницю потенціалів і мінімальне значення ємності переходу, якщо за відсутності зовнішньої напруги вона дорівнює 1 пФ .
- 3.39. Бар'єрна ємність різкого p - n -переходу дорівнює 200 пФ при зворотній напрузі 2 В . Яка зворотна напруга необхідна, щоб вона зменшилася до 50 пФ , якщо контактна різниця потенціалів $\phi_k = 0,82 \text{ В}$?
- 3.40. Розрахуйте бар'єрну ємність різкого p - n -переходу, отриманого в стрижні арсеніду галію площею поперечного перерізу $S = 1 \text{ мм}^2$. Ширина області об'ємного заряду p - n -переходу дорівнює $2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Відносна діелектрична проникність напівпровідника $\epsilon = 13,1$.
- 3.41. Доведіть, що для несиметричного різкого p - n -переходу при концентрації домішок $N_a \ll N_d$ ширина області об'ємного заряду може бути визначена за допомогою формули
$$\delta = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0\mu_p\phi_k}{\sigma_p}}$$
, де μ_p – рухливість дірок; σ_p – питома провідність p -області.
- 3.42. Покажіть, що при концентрації домішок $N_d \gg N_a$ напруга пробою різкого несиметричного p - n -переходу при швидкому збільшенні напруги може бути знайдено за допомогою формули
$$U_{\text{пр}} = \frac{\epsilon\epsilon_{\text{пр}}^2}{2eN_a}$$
, де $\epsilon_{\text{пр}}$ – напруженість поля, при якій відбувається пробій у збідненому носіями заряду шарі.

- 3.43. У рівноважному стані висота потенційного бар'єру p - n -переходу дорівнює $0,2 \text{ В}$, концентрація акцепторних домішок $N_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ в p -області набагато менша, ніж концентрація донорних домішок N_d в n -області. Знайдіть бар'єрну ємність p - n -переходу, що відповідає зворотнім напругам $0,1$ та 10 В , якщо площа переходу $S = 1 \text{ мм}^2$. Розрахуйте ширину області об'ємного заряду p - n -переходу для цих значень напруги. Чому вона буде дорівнювати при прямій напрузі $0,1 \text{ В}$?
- 3.44. У кремнієвому різкому p - n -переході n -область має питомий опір $\rho_n = 5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, час життя неосновних носіїв заряду в ній $\tau_n = 1 \text{ мкс}$; для p -області: $\rho_p = 0,1 \text{ Ом} \cdot \text{см}$; $\tau_p = 5 \text{ мкс}$. Знайдіть відношення діркової складової струму до електронної. Визначте густину струму, який протікає через p - n перехід при прямій напрузі $0,3 \text{ В}$?
- 3.45. У різкому p - n -переході площею $S = 10^{-6} \text{ м}^2$ концентрація акцепторної домішки в p -області $N_a = 10^{24} \text{ м}^{-3}$, концентрація донорної домішки в n -області $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$. Рухливість дірок $\mu_p = 0,2 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,4 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, дифузійна довжина неосновних носіїв заряду: $L_p = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $L_n = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, відносна діелектрична проникність матеріалу $\epsilon = 16$, власна концентрація носіїв заряду $n_i = 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Розрахуйте для температури $T = 300 \text{ К}$:
- концентрацію основних і неосновних носіїв заряду;
 - питому провідність p - і n -областей;
 - контактну різницю потенціалів;
 - коефіцієнти дифузії для носіїв заряду обох типів;
 - зворотній струм насичення $I_{\text{зв}}$;
 - ширину області об'ємного заряду p - n -переходу при зворотній напрузі 10 В ;

- е) бар'єрну ємність p - n -переходу при зворотній напрузі 10 В ;
- ж) відношення діркової складової струму через p - n -перехід до електронної.
- 3.46. У кремнієвому різкому p - n -переході з концентраціями домішок $N_a = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ і $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ лавинний пробій настає при напруженості електричного поля $6 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Розрахуйте ширину p - n -переходу і зворотну напругу, необхідну для початку виникнення пробою. Відносна діелектрична проникність кремнію $\varepsilon = 12$.
- 3.47. Кремнієвий p - n -перехід має площу поперечного перерізу $S = 1 \text{ мм}^2$ і бар'єрну ємність $C_{бар} = 300 \text{ пФ}$ при зворотній напрузі $U_{зв} = 10 \text{ В}$. Визначте максимальну напруженість електричного поля в області об'ємного заряду. Як зміниться ємність, якщо зворотну напругу збільшити удвічі? Відносна діелектрична проникність кремнію $\varepsilon = 12$.
- 3.48. Бар'єрна ємність різкого p - n -переходу дорівнює 25 пФ при зворотній напрузі 5 В. Як вона зміниться при збільшенні зворотної напруги $|U_{зв}|$ до 7 В ?
- 3.49. Визначте бар'єрну ємність і ширину p - n -переходу, сформованого в арсеніді індію, при температурі $T = 300 \text{ К}$, якщо концентрація основних носіїв заряду: $p_p = 10^{16} \text{ см}^{-3}$; $n_n = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, відносна діелектрична проникність InAs $\varepsilon = 14,6$, площа поперечного перерізу p - n -переходу $S = 0,01 \text{ см}^2$. До p - n -переходу прикладена зворотна напруга $U_{зв} = 100 \text{ В}$.
- 3.50. Контакт метал – напівпровідник з бар'єром Шоттки, який має зворотній струм насичення $I_s = 10 \text{ мкА}$, з'єднаний послідовно з джерелом напруги $U_{дж} = 10 \text{ В}$ та резистором опору

- $R = 1 \text{ кОм}$. Знайдіть прямий струм, пряму напругу і опір контакту за кімнатної температури.
- 3.51. Питомий опір p -області кремнієвого p - n -переходу: $\rho_p = 2 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, а питомий опір n -області $\rho_n = 1 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Обчисліть контактну різницю потенціалів (висоту потенціального бар'єру) при $T = 300 \text{ К}$.
- 3.52. Маємо кремнієвий p - n -перехід з концентрацією домішок $N_d = 10^3 N_a$, причому на кожні 10^8 атомів Силіцію припадає один атом акцепторної домішки. Визначте контактну різницю потенціалів за температури $T = 300 \text{ К}$. Концентрації атомів Силіцію N та йонізованих атомів n_i прийміть такими: $N = 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, $n_i = 10^{10} \text{ см}^{-3}$.
- 3.53. Германієвий p - n -перехід має зворотній струм насичення 1 мкА , а кремнієвий перехід такого ж розміру – зворотній струм насичення 10^{-8} А . Визначте і порівняйте прямі та зворотні опори германієвого і кремнієвого p - n -переходу. Вважайте, що вимірювання зворотніх струмів насичення здійснювалися при зворотній напрузі $U_{зв} = 5 \text{ В}$.

Поверхневі явища

- 3.54. При вивченні адсорбції бром у воді на вугіллі були отримані такі дані:

$c, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}$	0,00259	0,00669	0,01708	0,02975
$A, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$	3,10	4,27	5,44	6,8

Визначте ємність моношару та константу адсорбційної рівноваги в рівнянні Ленгмюра графічним методом.

3.55. За константами рівняння Ленгмюра $\Gamma_{\infty} = 413,6 \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$,

$K = 10^{-3} \frac{\text{М}^2}{\text{Н}}$ розрахуйте адсорбцію на активованому вугіллі

при значеннях рівноважного тиску P .

№ варіанту	$P, 10^2 \text{ Па}$	№ варіанту	$P, 10^2 \text{ Па}$
1.	10	14.	30
2.	15	15.	35
3.	80	16.	20
4.	90	17.	115
5.	25	18.	85
6.	100	19.	105
7.	50	20.	135
8.	40	21.	150
9.	45	22.	120
10.	60	23.	110
11.	65	24.	200
12.	70	25.	185
13.	75		

3.56. На основі експериментальних даних графічним методом розрахуйте ємність моношару та константу адсорбційної рівноваги в рівнянні Ленгмюра при адсорбції мурашиної кислоти з водного розчину на вугіллі

$c, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}$	0,002	0,005	0,014	0,055
$A, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$	0,124	0,186	0,238	0,267

3.57. Визначте граничну мономолекулярну адсорбцію та константу адсорбційної рівноваги для розчину гептилового спирту за зміною адсорбції з концентрацією (для графічного розрахунку скористатися рівнянням мономолекулярної адсорбції Ленгмюра).

$c, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{М}^3}$	0,384	0,50	0,655	1,25	2,60
$a, 10^{-7} \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{М}^2}$	11,1	14,5	18,2	27,8	49,2

3.58. Визначте ємність моношару та константу адсорбційної рівноваги для розчину гептилового спирту за даними залежності адсорбції від концентрації (для графічного розрахунку скористатися рівнянням мономолекулярної адсорбції Ленгмюра).

$c, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{М}^3}$	0,935	1,875	3,10	5,55	11,05
$a, 10^{-7} \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{М}^2}$	8,75	17,35	25,1	37,8	56,5

3.59. Використовуючи рівняння БЕТ, розрахуйте питому поверхню адсорбенту за ізотермою адсорбції бензолу, якщо

$\frac{P}{P_s}$	0,04	0,27
$A, \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{КГ}}$	0,348	0,805

Площа, яку займає молекула бензолу, складає $0,49 \text{ нм}^2$.

3.60. Визначте крайовий кут змочування, утворений краплею води на твердому тілі, якщо поверхневі натяги на межі повітря – тверде тіло, рідина – тверде тіло і рідина – повітря дорівнюють відповідно $0,067$; $0,020$ і $0,074 \frac{\text{Дж}}{\text{М}^2}$.

3.61. Розрахуйте роботу адгезії для води, гліцерину та бензолу, що змочують фторопласт. Поверхневий натяг (на межі з повітрям) води, гліцерину та бензолу відповідно дорівнюють $71,96$; $63,2$ і $28,9 \frac{\text{МДж}}{\text{М}^2}$, а крайові кути складають 108 , 100 і 46° .

- 3.62. Обчисліть коефіцієнт розтікання та з'ясуйте, чи буде розтікатися нормальний гексан по воді, якщо робота когезії для гексану $0,0368 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$, а робота адгезії гексану до води $0,0401 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$.
- 3.63. Порошок кварцу та сірки обережно висипали на поверхню води. Яке явище буде спостерігатися на поверхні, якщо крайовий кут для кварцу дорівнює 0° , а для сірки – 78° ?
- 3.64. Обчисліть крайовий кут, утворений формамідом на поверхні желатинового гелю, якщо робота адгезії складає $48,7 \frac{\text{мДж}}{\text{м}^2}$.

Поверхневий натяг формаміду дорівнює $38,2 \frac{\text{мДж}}{\text{м}^2}$.

- 3.65. Зі збільшенням концентрації розчинних домішок енергія активації міграції межі бікристалу проходить через максимум. Вважайте що енергія активації міграції $E_m = E_a + q$, де E_a – енергія активації дифузії; q – теплота адсорбції. Вважайте, що теплота адсорбції пропорційна тій частині атомів домішки, яка переміщується разом з межею: $q = q_0 + \beta \hat{\Gamma}$, де $\hat{\Gamma} = \Gamma - \delta c$, $[\Gamma] = \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{см}^2}$; $[c] = \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{см}^3}$. Величина δ має зміст ефективної ширини межі:

$$\delta = \delta_0 + \frac{\Gamma}{n} a = \delta_0 + \epsilon \Gamma,$$

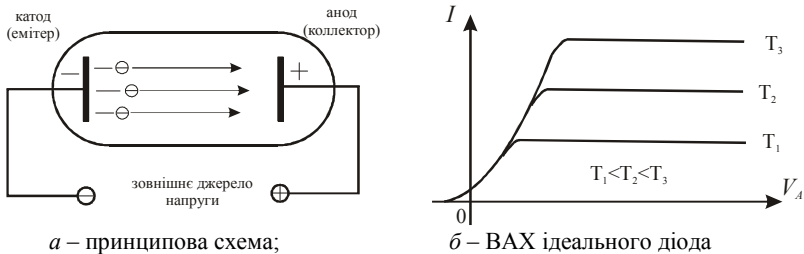
де δ_0 – ширина межі, що не містить домішки; n – кількість активних центрів в межі; a – період ґратки. Прийміть, що адсорбція підпорядковується закону Генрі: $\Gamma \sim \delta_0 c e^{\frac{q_0}{k_B T}}$. Знайдіть концентрацію, що відповідає максимуму кривої $E_m(c)$, і оцініть її величину за таких значень параметрів: $q = 0,1 \text{ еВ}$; $t = 500^\circ \text{C}$; $a = 3 \text{ \AA}$; $n = 10^{-12} \frac{\text{МОЛЬ}}{\text{см}^2}$.

4. Емісійні явища в твердих тілах

Основні формули і визначення

Термоелектронна емісія. Термоелектронною емісією називають випускання електронів поверхнею нагрітих провідних тіл. Вперше явище термоелектронної емісії виявив у досліді Т. А. Едісон (1883 р.).

Найпростіший прилад для спостереження термоелектронної емісії (термоелектронний діод) складається з двох металевих електродів, вміщених в об'єм з низьким тиском залишкових газів (рис. 4.1, а). Електрод, який емітує електрони, зазвичай називають *катодом*, хоча залежно від виду емісії використовують й інші терміни (термоемітер, фотоемітер, автоемітер). Електрод, який отримує електрони, зазвичай називають *анодом* або *колектором*. Незалежно від вживаної назви і знаку потенціалу, поданого на електроди, роботу виходу електронів аноду позначимо ϕ_k , а роботу виходу електронів аноду – ϕ_a .



а – принципова схема;

б – ВАХ ідеального діода

Рисунок 4.1 – Термоелектронний діод

Прикладаючи різницю потенціалів U_A ВА між катодом і анодом і вимірюючи струм I , який протікає між електродами, отримуємо вольт амперну характеристику (ВАХ) діода, тобто залежність анодного струму від анодної напруги (рис. 4.1, б).

Для електронів провідності тверде тіло представляють у вигляді енергетичної потенціальної ями з плоским дном, а на межі розділу (тверде тіло – вакуум) є потенціальний бар'єр – сходинок прямокутної форми (рис. 4.2, а). Із рис. 4.2, б можна побачити, що

при відмінній від нуля температурі серед електронів провідності у твердому тілі є такі, енергія яких вища рівня вакууму. Ці електрони можуть попадати у вакуум, рухаючись над потенціальним бар'єром на межі.

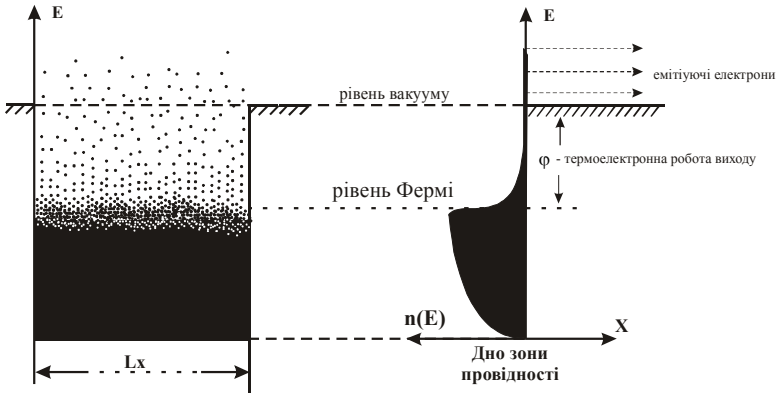


Рисунок 4.2 – Уявлення про тверде тіло як прямокутна потенціальна яма з плоским дном та потенціальними бар'єрами на межі тіла (а) та густина розподілу електронів за енергіями в металі (б)

Потенціальний бар'єр характеризується двома параметрами:

- 1) відстанню по осі енергії від рівня Фермі в кристалі до рівня вакууму – цю величину називають **термоелектронною роботою виходу** ϕ ;
- 2) середнім значенням коефіцієнта надбар'єрного відбивання для електронів, які вилітають із катоду у вакуум.

Для прямокутного потенціального бар'єра Річардсон і Дешман (1928 р) обчислили максимальну густину струму (струму насичення) термоелектронної емісії, яку може забезпечити при температурі T термокатод з роботою виходу електронів ϕ (**формула Річардсона – Дешмана**):

$$j = A_0 (1 - \bar{R}) T^2 e^{-\frac{\phi}{k_B T}}, \quad (4.1)$$

де $A_0 = \frac{4\pi m_e e k_B^2}{h^3} = 120,4 \frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}$ – термоемісійна стала Зоммерфельда; T – температура катоду за абсолютною шкалою Кельвіна

(К); \bar{R} – коефіцієнт відбивання електронів на межі тіло – вакуум (зазвичай не перевищує 0,07 і при оціночних розрахунках ним нехтують); ϕ – робота виходу електронів із катоду; k_B – стала Больцмана, $k_B = \frac{1}{11600} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$.

$$k_B = \frac{1}{11600} \frac{\text{eV}}{\text{K}}.$$

Для розрахунків рівняння (4.1) використовують найчастіше у вигляді:

$$j = 120,4T^2 e^{-\frac{11600}{T}\phi} \left(\frac{\text{A}}{\text{cm}^2} \right), \quad (4.2)$$

де роботу виходу виражають в електронвольтах. Силу струму I термоелектронної емісії визначають за виразом: $I = jS$, де S – площа емітуючої поверхні катоду.

Оскільки точне значення \bar{R} у загальному випадку невідоме, замість істинної роботи виходу електронів $\phi_{\text{іст}}$, яка є у рівняннях (4.1) – (4.2), вводять ефективну роботу виходу ϕ_{ef} таку, що:

$$A_0 (1 - \bar{R}) T^2 e^{-\frac{\phi_{\text{іст}}}{k_B T}} = A_0 T^2 e^{-\frac{\phi_{\text{ef}}}{k_B T}}. \quad (4.3)$$

Це призводить до того, що ефективна робота виходу ϕ_{ef} дещо вища істинної роботи виходу $\phi_{\text{іст}}$, а саме:

$$\phi_{\text{ef}} = \phi_{\text{іст}} - k_B T \ln(1 - \bar{R}). \quad (4.4)$$

У загальному випадку робота виходу залежить від температури, тому рівняння (4.1) – (4.4) не описують у явному вигляді залежність густини струму термоелектронної емісії від температури.

Якщо використати лінійну апроксимацію функції $\phi(T)$ біля деякого значення T_0 , то

$$\begin{aligned}\phi(T) &= \phi(T_0) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_{T_0} (T - T_0) = \\ &= \left[\phi(T_0) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_{T_0} T_0 \right] + \left(\frac{\partial\phi}{\partial T}\right)_{T_0} T.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Похідну $\frac{\partial\phi}{\partial T} \equiv \alpha_\phi$ називають температурним коефіцієнтом роботи виходу. Вираз у квадратних дужках називається річардсонівською роботою виходу ϕ_p і не залежить від температури.

Другий доданок у (4.5) після постановки в формулу Річардсона – Дешмана призводить до появи у формулі зайвого передекспоненціального множника, який теж не залежить від температури. Всю комбінацію співмножників називають **річардсонівською сталою термоемісії**:

$$A_p = A_0 (1 - \bar{R}) e^{\frac{\alpha_\phi}{k_B}}. \quad (4.6)$$

Рівняння (4.1) можна записати у вигляді

$$j = A_p T^2 e^{-\frac{\phi_p}{k_B T}}. \quad (4.7)$$

Зв'язок між істинною, ефективною і річардсонівською роботами виходу електронів задають виразом

$$j = A_0 (1 - \bar{R}) T^2 e^{-\frac{\phi_{\text{ет}}}{k_B T}} = A_0 T^2 e^{-\frac{\phi_{\text{еф}}}{k_B T}} = A_p T^2 e^{-\frac{\phi_p}{k_B T}}. \quad (4.8)$$

Для визначення величин A_p і ϕ із експериментально вимірних значень струму і температури застосовують так званий „метод прямих Річардсона“. Залежність $j(T)$, побудована в координатах

$y = \lg\left(\frac{j}{T^2}\right)$ і $x = \frac{5040}{T}$, є прямою, яку визначають за виразом

$$\lg\left(\frac{j}{T^2}\right) = \lg(A_p) - \phi_p \frac{5040}{T}, \quad (4.9)$$

і яка перетинає вісь ординат у точці $\lg A_p$. Коефіцієнт нахилу прямої дорівнює φ_p в електронвольтах (рис. 4.3).

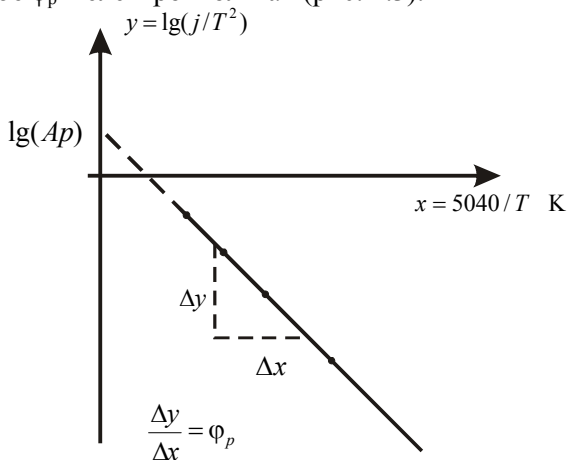


Рисунок 4.3 – Ілюстрація „методу прямих Річардсона“

Інший спосіб обчислення роботи виходу за експериментальними результатами („метод повного струму”) полягає в обчисленні $\phi_{\text{ПТ}}$ із (4.1) для кожного виміряного значення $I_e(T)$:

$$\phi_{\text{ПТ}} = -k_{\text{в}} T \ln \frac{I_e}{A_0 S T^2}. \quad (4.10)$$

Для того, щоб у чистому вигляді виявити вплив анодної напруги на струм у ланцюгу, припустимо, що контактна різниця потенціалів дорівнює нулю (катод і анод зроблені з одного матеріалу), а впливу об’ємного заряду електронів немає. Він або нейтралізований у міжелектродному проміжку рівним йому за модулем позитивним зарядом йонів, або нехтовно малий.

Струм у ланцюзі дорівнює струму насичення термокатоду j_n , якщо всі емітовані електрони досягають аноду. Такий режим роботи встановлюється, коли в міжелектродному проміжку немає електричного поля, що гальмує електрони. Якщо таке поле є, (анодна напруга U_A від’ємна), то струм у ланцюзі забезпечуватиметься лише тими з емітованих електронів, які зможуть подолати додатко-

вий потенціальний бар'єр $-eU_A$. У цьому разі густина струму в ланцюгу відповідатиме формулі Річардсона – Дешмана (4.1), але в показнику експоненти замість роботи виходу ϕ має бути $\phi - eU_A$:

$$j(U_A, T) = j_n(T) e^{\frac{eU_A}{k_B T}} = A_0 (1 - \bar{R}) T^2 e^{-\frac{\phi - eU_A}{k_B T}}. \quad (4.11)$$

Вольт-амперна характеристика, яка відповідає (4.11), наведена на рис. 4.4 в координатах $\lg j$ від U_A .

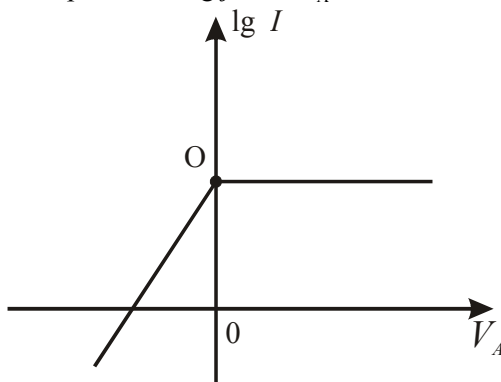


Рисунок 4.4 – Загальний вигляд впливу анодної напруги на струм діоду з термокатодом. Об'ємний заряд не враховується. Точкою О позначено перехідний випадок, коли електрон, який вилетів із катоду, попадає в поле нульової напруженості.

Якщо роботи виходу катоду ϕ_K і аноду ϕ_A не співпадають, то між електродами поряд з прикладеною анодною напругою U_A діє контактна різниця потенціалів. В результаті, точка нульової напруженості поля і ВАХ термоемісійного діоду в цілому зміщуються по осі анодних напруг. Якщо $\phi_K < \phi_A$, то ВАХ зміщується вправо на величину $\frac{\phi_A - \phi_K}{e}$, як це показано на рис. 4.5.

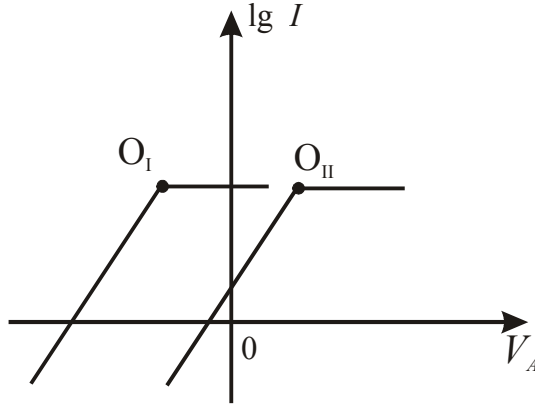


Рисунок 4.5 – Загальний вигляд впливу анодної напруги і контактної різниці потенціалів на струм діоду з термокатодом. Об’ємний заряд не враховується. Точками O_I і O_{II} позначені випадки, коли напруженість сумарного поля нульова

На рис. 4.4 і 4.5 зображені ВАХ при малих значеннях анодної напруги. При більших напругах проявляється **ефект Шоттки** – зниження потенціального бар’єру на межі тіло – вакуум при прикладенні електричного поля напруженістю \mathcal{E} , яке витягує електрони. Зниження роботи виходу електронів визначається формулою:

$$\Delta\phi = e\sqrt{e\mathcal{E}} \text{ CGSE} = 3,8 \cdot 10^{-4} \sqrt{\mathcal{E}} \text{ eV}, \quad (4.12)$$

де напруженість поля \mathcal{E} вимірюється в В/см.

У формулі Річардсона – Дешмана врахування ефекту Шоттки призводить лише до множення струму насичення на $e^{\frac{\Delta\phi}{k_B T}}$. Враховуючи (4.12), вираз (4.1) для густини струму термоелектронної емісії набуває вигляду

$$j = A_0 T^2 (1 - \bar{R}) e^{-\frac{\phi - e\sqrt{e\mathcal{E}}}{k_B T}}. \quad (4.13)$$

Із (4.13) виходить, що ефект Шоттки призводить до появи залежності густини струму насичення термоелектронної емісії від прикладеної зовнішньої різниці потенціалів анод – катод.

Якщо нагріте металеве тіло ізольоване і перебуває в вакуумі, то емітований електрон відразу починає гальмуватись, оскільки попадає в поле електростатичних сил, які створюються як від'ємним об'ємним зарядом інших емітованих електронів, так і додатним зарядом нагрітого тіла. У цьому разі у вакуумі поблизу поверхні ізольованого нагрітого тіла утворюється „електронна хмара“.

Вплив цього від'ємного об'ємного заряду на вольт-амперні характеристики легше зрозуміти, якщо припустити, що обидва електроди (анод і катод) мають однакову роботу виходу. Електрони в міжелектродному проміжку створюють від'ємний об'ємний заряд, який змінює розподіл потенціалу, як це зображено на рис. 4.6.

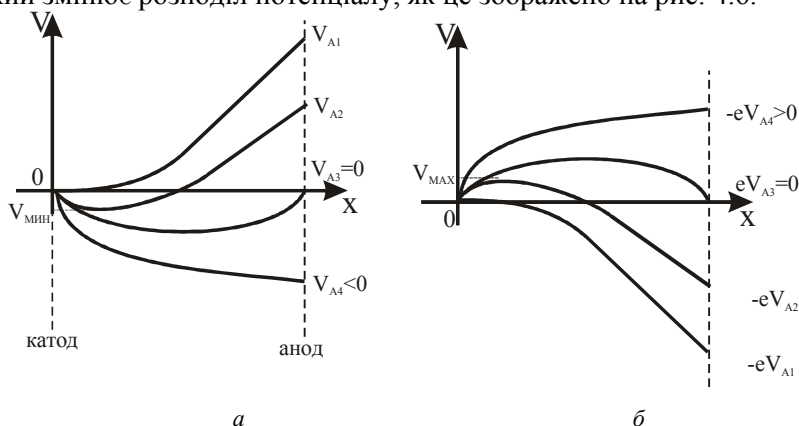


Рисунок 4.6 – Розподіл потенціалу (а) і потенціальної енергії (б) електрона в проміжку між анодом і катодом для плоскопаралельної конструкції діоду

Як видно із рис. 4.6, додатковий потенціальний бар'єр обмежує струм діоду як при додатних (крива U_{A2}), так і від'ємних (крива U_{A3}) значеннях анодної напруги. При досить значних позитивних значеннях анодної напруги (крива U_{A1}) цей бар'єр зникає, і струм діоду стає рівним струму насичення.

При досить значних за модулем від'ємних напругах (крива U_{A4} на рис. 4.6) на шляху електрона до аноду діє лише гальмівне поле, і потенціальна енергія електрона тільки зростає. Струм в діоді

ді обмежується саме від'ємним потенціалом аноду, а не об'ємним зарядом. Внаслідок цього отримуємо ВАХ, зображену на рис. 4.7. За рахунок впливу додаткового потенціального бар'єру, створюваного об'ємним зарядом, струм при незначній (за модулем) напрузі зменшується.

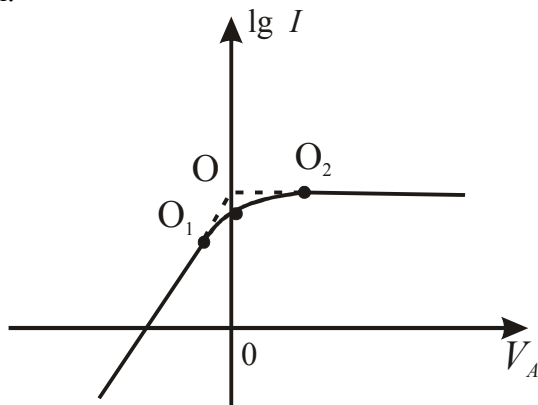


Рисунок 4.7 – Загальний вигляд залежності струму діоду з термокатодом від анодної напруги з урахуванням об'ємного заряду

Відрізок прямої праворуч точки O_2 (рис. 4.7) відповідає випадку, коли в будь-якій області між електродами електричне поле, створюване прикладеною напругою, перевищує поле від'ємного об'ємного заряду. Струм діоду стає рівним струму насичення. Цьому випадку відповідає крива U_{A1} на рис. 4.6. Відрізок прямої ліворуч точки O_1 (рис. 4.7) відповідає випадку, коли об'ємний заряд на струм не впливає (крива U_{A4} на рис. 4.6).

В області проміжних значень прикладеної напруги задача про те, як на величину струму впливає об'ємний заряд, створений цим самим струмом, вирішується доволі складно чисельними методами.

Наближене ж аналітичне рішення задається **формулою Чайльда – Ленгмюра (закон „трьох других“)**:

$$I = gU^{\frac{3}{2}}. \quad (4.14)$$

Коефіцієнт g називають первеансом і для діоду з плоскопаралельними електродами визначають за формулою

$$g = \frac{1}{9\pi} \left(\frac{2e}{m_e} \right)^2 \frac{S}{d^2} = 2,33 \frac{S}{d^2} \frac{\text{мкА}}{\text{В}^{1,5}}, \quad (4.15)$$

де S – площа катоду, d – відстань між електродами.

В режимі обмеження струму об'ємним зарядом розподіл потенціалу в міжелектродному просторі задають формулою

$$U(x) = U_A \left(\frac{x}{d} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (4.16)$$

При виведенні цих формул спрощено припускалося, що електрони залишають катод з нульовою швидкістю. Насправді, термоелектрони, які вилетіли із емітера, мають максвеллівський розподіл за швидкостями і середню кінетичну енергію $2k_B T$. Середня енергія, яка витрачається на емісію одного електрона, складає

$$E = \phi + 2k_B T. \quad (4.17)$$

Фотоелектронна емісія. *Фотоелектронною емісією*, або *зовнішнім фотоелектром*, називають емісію електронів з речовини під дією падаючого на її поверхню електромагнітного випромінювання.

Дослідним шляхом були встановлені такі **закони зовнішнього фотоелектру**:

1. *Закон Столетова* – за незмінного спектрального складу випромінювання сила струму фотоелектричної емісії (тобто кількість електронів, що емітують за одиницю часу) пропорційна інтенсивності падаючого випромінювання.
2. Максимальна кінетична енергія електронів, що емітують, не залежить від інтенсивності випромінювання за незмінного спектрального складу випромінювання і лінійно залежить від його частоти, якщо частота змінюється.
3. Для кожної речовини, з якої виготовлений фотоелектричний емітер, існує мінімальна гранична частота (або максимальна довжина хвилі) падаючого випромінювання, за якої фотоелектричний ефект відсутній. Це так звана *червона*, або *довгохвильова межа фотоелектру*.

Узагальнюючи закони зовнішнього фото ефекту, А. Ейнштейн сформулював закон збереження енергії для одиничного акту фотоemisії – передачі енергії фотона $h\nu$ (або $\hbar\omega$) електрону, що емітує у вакуум (**рівняння Ейнштейна**):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2} + \phi, \quad (4.18)$$

де ν – частота випромінювання; λ – довжина хвилі випромінювання; h – стала Планка ($h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ Дж · с); ϕ – фотоелектронна робота виходу електронів з фотоемітера; v_{\max} – максимальна швидкість електронів, що емітують.

Формулу (4.18) зручно використовувати у позасистемних одиницях (електронвольтах і мікронах):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,24}{\lambda}, \quad (4.19)$$

$$\frac{1,24}{\lambda} = 2,84 \cdot 10^{-12} v_{\max}^2 + \phi, \quad (4.20)$$

де $h\nu$ і ϕ вимірюються в електронвольтах, λ – мкм, $v_{\max} - \frac{M}{c}$.

З виразу (4.18) видно, що за граничної умови $v_{\max} = 0$:

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = \phi, \quad (4.21)$$

де λ_{\max} – довгохвильова межа фото ефекту; ϕ – робота виходу фотокатоду.

У металевих фотемітерах (рис. 4.8, а, б) при передачі електрону фотоном мінімальної граничної енергії $\frac{hc}{\lambda_{\max}}$ висота потенціального бар'єру, який долає електрон, дорівнює відстані за шкалою енергії від рівня Фермі до рівня вакууму. Отже, для металу фотоелектронна і термоелектронна роботи виходу співпадають.

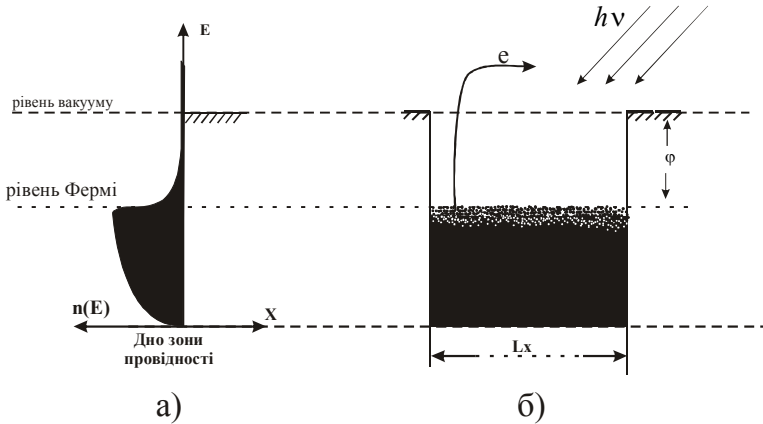


Рисунок 4.8 – Фотоелектронна емісія електронів з металу

Схема приладу для вивчення фотоелектронної емісії наведена на рис. 4.9. Малий розмір фотоемітера і сферично симетрична конструкція колектора примушують будь-який вибитий електрон рухатися вздовж силових ліній електричного поля. Така конструкція електродів дозволяє визначити енергію електронів, що емітують, методом гальмівного електричного поля.

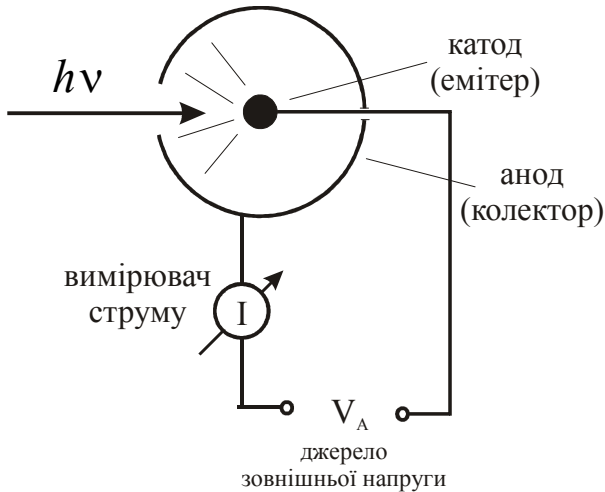


Рисунок 4.9 – Схема приладу для вивчення зовнішнього фотоелектричного ефекту

Збільшуючи гальмівне поле (зміною напруги зовнішнього джерела), фотоемісійний струм у ланцюзі можна зменшити, а при деякому значенні напруги зовнішнього джерела $U_{\text{зап}}$ (запираючій напрузі) зменшити фотострум до нуля. Визначивши дослідним шляхом запираючу напругу, можна обчислити максимальну кінетичну енергію фотоелектрона, що входить у формулу (4.18).

При цьому потрібно враховувати, що в проміжку анод – катод електричне поле складається з електричного поля від зовнішнього джерела (рис. 4.9) і поля контактної різниці потенціалів анода і катода (КРП). Результирує електричне поле всередині вакуумного проміжку може бути як прискорюючим електрони до колектора, так і гальмуючим їх.

Для того, щоб електрон міг досягти колектора, енергії поглиненого фотона має вистачити і на вихід електрона з емітера, і на подолання гальмівної різниці потенціалів між емітером і колектором ($\phi_A - \phi_K - eU_A$), тобто енергія фотона повинна бути більшою, ніж $(\phi_A - eU_A)$.

При запираючій напрузі максимальна кінетична енергія емітованого електрона переходить у потенціальну енергію електрона, що знаходиться в стані спокою, який трохи не долетів до колектора.

Зв'язок між довжиною хвилі, роботою виходу анода і запираючою напругою $U_{\text{зап}}$ може бути отриманий із рівняння (4.18). З урахуванням роботи виходу анода і катода ϕ_A і ϕ_K одержуємо

$$h \frac{c}{\lambda} - \phi_K = \frac{m_e v_{\text{max}}^2}{2} = \phi_A - \phi_K - eU_{\text{зап}}. \quad (4.22)$$

З (4.22) випливає, що

$$\lambda = \frac{hc}{\phi_A - eU_{\text{зап}}} \approx \frac{1,24}{\phi_A - eU_{\text{зап}}} \text{ (мкм)}. \quad (4.23)$$

В останній рівності формули (4.23) величину $\phi_A - eU_{\text{зап}}$ слід брати в еВ. Про роботу виходу ϕ_K можна лише сказати, що $\phi_K < \frac{hc}{\lambda} = \frac{1,24}{\lambda}$ еВ.

На рис. 4.10 наведено родину вольт-амперних характеристик (ВАХ) вакуумного фотоелементу – залежність величини фотоструму від прикладеної зовнішньої напруги U_A , зняті за різних умов експерименту. Слід відмітити схожість ВАХ вакуумного фотоелементу з ВАХ такого ж термоемісійного діоду: і одна, й інша ВАХ містять ділянку монотонного збільшення струму і горизонтальну ділянку (режим струму насичення).

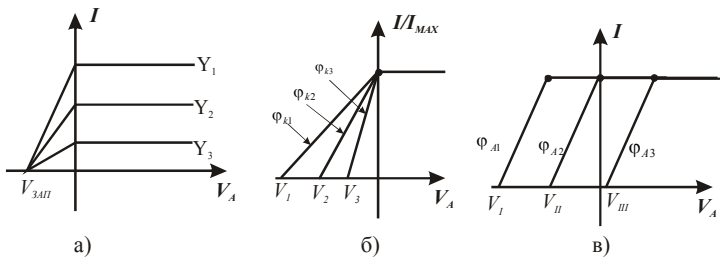


Рисунок 4.10 – Вольт-амперні характеристики вакуумного фотоелементу за різних значень інтенсивності випромінювання (а), роботи виходу фотоемітера (б) і контактної різниці потенціалів (в)

На рис. 4.11 і 4.12, наведено енергетичні діаграми для електрона в системі катод – анод для двох різних випадків.

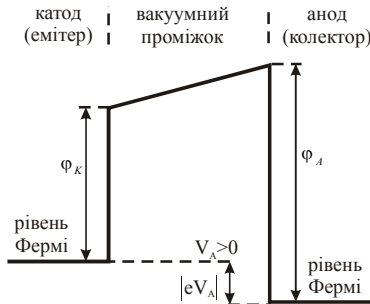


Рисунок 4.11 – Енергетична діаграма для електрона в системі анод – катод у випадку гальмівного електричного поля

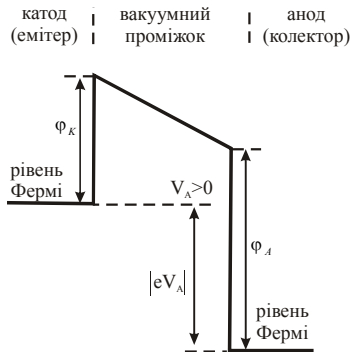


Рисунок 4.12 – Енергетична діаграма для електрона в системі анод – катод у випадку прискорюючого електричного поля

Безпосередній електричний контакт анода і катода призводить до того, що їхні рівні Фермі вирівнюються. При цьому катод і анод отримують різні потенціали, а у вакуумному проміжку діє поле контактної різниці потенціалів.

Якщо ж анод і катод з'єднані через зовнішнє джерело напруги U_A і мають можливість обмінюватися електронами, то рівні Фермі катода й анода вже не співпадають. Рівень Фермі електрода, до якого підключили позитивний полюс джерела зовнішньої напруги, розташований нижче по шкалі енергії, ніж рівень Фермі електрода, підключеного до негативного полюса джерела. При цьому відстань між рівнями Фермі дорівнює $|eU_A|$, де U_A – напруга зовнішнього джерела.

Вище в усіх прикладах розглядався одиничний акт взаємодії кванта випромінювання з електроном у фотоемітері. Насправді в реальних приладах на фотоемітер падає потік фотонів і, в свою чергу, фотоемітер випускає у вакуум потік електронів. При цьому лише незначна частина фотонів передає свою енергію електронам так, щоб електрони могли вийти з фотоемітера. Решта фотонів поглинаються у фотокатоді без емісії електронів у вакуум або відбиваються від поверхні фотокатоду.

Тому важливою практичною характеристикою вакуумного фотоелементу є **квантовий вихід фотоемітера** η , тобто відно-

шення кількості електронів, що вилетіли з емітера до кількості падаючих за той же час квантів.

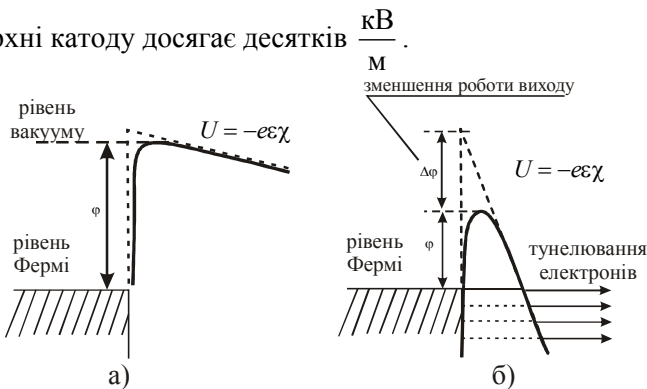
Для монохроматичного випромінювання з довжиною хвилі λ квантовий вихід визначається простим співвідношенням:

$$\eta = \frac{hcI}{e\lambda P_{\text{випр}}} = \frac{hc}{e\lambda} \gamma, \quad (4.24)$$

де I – сила струму фотоемісії; $P_{\text{випр}}$ – потужність монохроматичного випромінювання; $\gamma \equiv \frac{I}{P_{\text{випр}}}$ – спектральна чутливість фотока-

тоду. Для одного і того ж фотокаряду спектральна чутливість може приймати різні значення в залежності від спектрального складу падаючого випромінювання.

Автоелектронна емісія. Якщо до металевого катоду прикласти зовнішнє електричне поле, що витягує електрони, то потенціальний бар'єр на межі поділу метал – вакуум набуває трикутної форми (рис. 4.13, а, пунктирна лінія). При цьому сили електростатичного зображення „закругляють“ вершину трикутника, в результаті чого відбувається зменшення висоти бар'єра. Це *ефект Шоттки*, який починає помітно проявлятися, коли напруженість поля поблизу поверхні катоду досягає десятків $\frac{\text{кВ}}{\text{М}}$.



а – ефект Шоттки;

б – сильне електричне поле

Рисунок 4.13 – Енергетична діаграма електрона на межі поділу метал - вакуум

При подальшому збільшенні напруженості поля висота і ширина потенціального бар'єру зменшуються (рис. 4.13, б) до такої величини, за якої проявляється і стає домінуючим *квантово-механічне тунелювання* електрона крізь потенціальний бар'єр. З'являється емісія електронів у вакуум під дією сильного зовнішнього електричного поля – **автоелектронна емісія**.

Густина струму автоелектронної емісії визначається переважно *прозорістю* потенціального бар'єру, що представляє собою ймовірність тунелювання електрона, який налітає на бар'єр:

$$D(E) = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{d}{\hbar} \sqrt{2m_e (U - E)} \right)}{4 \left(\frac{E}{U} \right) \left(1 - \frac{E}{U} \right)}}. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) визначає прозорість прямокутного потенціального бар'єру шириною d . Для бар'єрів більш складної форми, у тому числі трикутної або трикутної із закругленням, точний (шредінгерівський) розв'язок не виражається через елементарні функції. У цьому випадку зазвичай використовують квазікласичну (наближену) формулу для прозорості бар'єру довільної форми:

$$D \approx e^{-2 \frac{\sqrt{2m_e}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx}, \quad (4.26)$$

де m_e – маса електрона; $U(x)$ – форма потенціального бар'єру; x_1 і x_2 – розв'язки рівняння $E = U(x)$.

Застосування (4.26) до бар'єру трикутної форми (без закруглення) дає для електрона на рівні Фермі

$$D = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3e\hbar E} \phi^{\frac{3}{2}}} = e^{-0,683 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{E}}. \quad (4.27)$$

Тут і далі для кількісних оцінок робота виходу ϕ виражається в еВ, а напруженість електричного поля \mathcal{E} поблизу поверхні катода в $\frac{\text{В}}{\text{А}}$.

Залежність густини струму автоелектронної емісії j від роботи виходу катода ϕ і напруженості електричного поля \mathcal{E} поблизу поверхні, що емітує **рівняння Фаулера – Нордгейма (основний закон автоелектронної емісії)**:

$$j = \frac{e^3}{16\pi^2 \hbar} \frac{\mathcal{E}^2}{\phi t^2(\mathcal{E}, \phi)} e^{-\frac{4\sqrt{2}m_e \phi^{\frac{3}{2}}}{3eh} \theta(\mathcal{E}, \phi)}, \quad (4.28)$$

де $\theta(\mathcal{E}, \phi)$ і $t(\mathcal{E}, \phi)$ – спеціальні функції, що враховують вплив на величину струму автоелектронної емісії ступеня зниження трикутного потенціального бар'єру за рахунок сил дзеркального зображення. Обидві ці функції можуть бути представлені як функції лише одного параметра

$$y = \frac{e\sqrt{e\mathcal{E}}}{\phi} = \frac{3,8\sqrt{\mathcal{E}}}{\phi}, \quad (4.29)$$

що має простий фізичний зміст: величина y відношення зниження бар'єру $\Delta\phi$ до роботи виходу ϕ . Легко бачити, що при $y=1$ відбувається повне зняття бар'єру для електронів, які знаходяться на рівні Фермі.

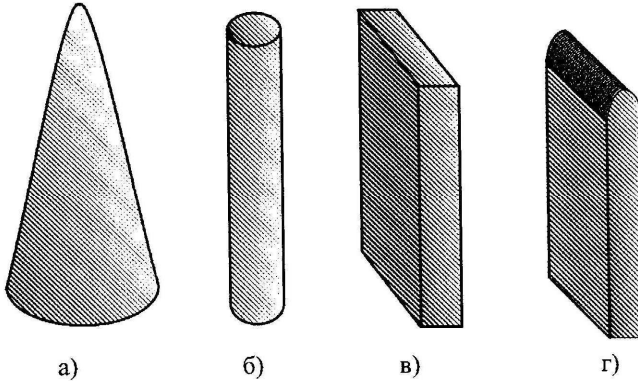
На практиці, без помітних похибок значення функції $t(y)$ можна прийняти рівним одиниці. Значення $\theta(y)$ (функція Нордгейма) зазвичай лежать у діапазоні $0,7 \div 0,9$. При $y=1$ функція $\theta(y)$ перетворюється в нуль. У більшості випадків значення $\theta(y)$ також обирають рівним одиниці. Більш точна апроксимація – поліном другого ступеня:

$$\theta(y) = 0,95 - 1,03y^2, \quad \text{якщо } y < 1. \quad (4.30)$$

Підставляючи в рівняння (4.28) значення фізичних констант, отримаємо рівняння Фаулера – Нордгейма в чисельному вигляді:

$$\lg j = 10,188 - 0,297 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{E}} \theta(y) + \lg \left(\frac{\mathcal{E}^2}{\phi t^2(y)} \right), \quad (4.31)$$

Кількісні оцінки показують, що для експериментального спостереження автоелектронної емісії з металів необхідно створити поблизу поверхні автокатода сильне електричне поле напруженістю не менше $10^9 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Отримати однорідне електричне поле з таким гігантським значенням напруженості в плоскопаралельній системі анод – катод технічно неможливе, тому для вивчення і застосування в техніці автоелектронної емісії використовують автоемісійні катоди з неоднорідним полем (рис. 4.14).



a – вістряний ; *б* – коаксiальний; *в* – лезоподiбний; *г* – плiвковий

Рисунок 4.14 – Автоемісійні катоди різної геометрії

В наведені вище формули (4.28) – (4.31) входить напруженість електричного поля, яка безпосередньо не вимірюється. Напруженість електричного поля \mathcal{E} пропорційна прикладеній напрузі U :

$$\mathcal{E} = \beta U . \quad (4.32)$$

Коефіцієнт пропорційності β у виразі (4.32) називається **формфактором**. Він є розв'язком відповідної електростатичної задачі і залежить лише від форми і розмірів системи анод – катод. Для систем електродів, що розглядаються значення формфактора наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Значення формфактора для різних систем електродів

Значення формфактора	Система електродів
$\beta = \frac{R}{r(R-r)}$	Сферично-симетрична
$\beta = \frac{1}{r \ln \frac{R}{r}}$	Коаксіальні циліндри
$\beta = \frac{2}{r \ln \frac{2R}{r}}$	Вістряний автоемітер у формі параболоїда обертання
$\beta = \frac{1}{\sqrt{2Rr}}$	Протяжний лезоподібний автоемітер з поперечним перерізом у формі параболи
$\beta = \frac{1}{\sqrt{\pi R h}}$	Плівка з емітуючим торцем постійної товщини h

У наведених в табл. 4.1 формулах величина R – відстань між вершиною (емітуючою частиною) автоемітера та анодом; r – радіус закруглення вершини автоемітера.

В експерименті вимірюють не густину струму автоемісії j , яка не може бути безпосередньо виміряною, як і площа поверхні S , що емітує, а силу струму

$$I = jS. \quad (4.33)$$

Підставляючи (4.32) і (4.33) у (4.31), отримаємо

$$\lg I = 10,188 - 0,297 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\beta} \theta(y) \frac{1}{U} + \lg \left(\frac{\beta^2 U^2 S}{\phi t^2(y)} \right), \quad (4.34)$$

або в формі, зручній для обробки експериментальних даних:

$$\lg \left(\frac{I}{U^2} \right) = 10,188 - 0,297 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\beta} \theta(y) \frac{1}{U} + \lg \left(\frac{\beta^2 S}{\phi t^2(y)} \right). \quad (4.35)$$

На рис. 4.15 наведено графік залежності $\lg \left(\frac{I}{U^2} \right)$ від $\frac{1}{U}$ у тій області значень напруженості поля, яка характерна для типового автоемісійного експерименту. Як можна побачити з рисунка, графік представляє собою відрізок прямої (подібно до тих прямих ліній, що застосовують у „методі прямих Річардсона“ для термоемісії). Ця пряма називається **прямою Фаулера – Нордгейма**, а відповідні координати – **координатами Фаулера – Нордгейма**.

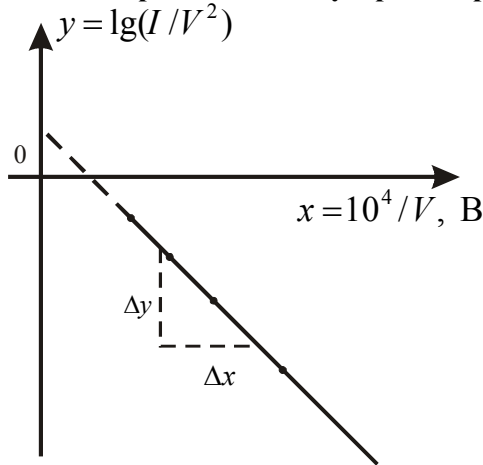


Рисунок 4.15 – Теоретична пряма Фаулера – Нордгейма та експериментальні точки залежності $\lg \left(\frac{I}{U^2} \right)$ від $\frac{1}{U}$

Відповідно до формули (4.35), побудувавши на графіку за експериментальними точками пряму Фаулера – Нордгейма, з вели-

чини нахилу прямої та її точки перетину з віссю $\lg\left(\frac{I}{U^2}\right)$ можна визначити величини S і β , які безпосередньо визначають у досліді.

Провідник, який помістили в електричне поле з великим значенням напруженості, зазнає значних механічних (або, як кажуть, пондеромоторних) навантажень на розтягання. Механічні напруження (негативний тиск) прикладене до поверхні катода з боку електростатичного поля і дорівнює густині електростатичної енергії у безпосередній близькості до поверхні:

$$P = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2}{2}. \quad (4.36)$$

Якщо напруженість поля \mathcal{E} виразити в $\frac{\text{В}}{\text{А}}$, а механічне напруження P в одиницях $\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$, то формула для розрахунку набуває вигляду

$$P = 44\mathcal{E}^2. \quad (4.37)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Яка частка β електронів у вольфрамовому дроті при температурі $T = 2600$ К зможе подолати потенціальний бар'єр поблизу катода висотою 1 еВ?

Розв'язання

Використовуючи співвідношення

$$I = I_0 e^{-\frac{e\varphi}{k_B T}},$$

визначимо, яка частка електронів може подолати потенціальний бар'єр висотою 1 еВ:

$$\beta = \frac{I}{I_e} = e^{-\frac{e\phi}{k_B T}} = e^{-\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 2600}} \approx 0,012, \quad \text{або} \quad \eta = 1,2\%.$$

Отже, майже 1,2% електронів у вольфрамовому дроті при температурі $T = 2600$ К мають енергію, достатню для подолання потенціального бар'єру висотою 1 еВ.

Відповідь: $\beta = 1,2\%$.

Приклад 4.2. При якій температурі торійований катод буде давати в 5000 разів більший струм емісії порівняно зі струмом емісії катода з чистого вольфраму при тій самій температурі? Розміри катодів однакові.

Розв'язання

Струми емісії торійованого I_{T-W} й вольфрамового I_W катодів відповідно дорівнюють

$$I_{T-W} = 3 \cdot 10^4 ST^2 e^{\frac{2,63}{k_B T}};$$

$$I_W = 6 \cdot 10^5 ST^2 e^{\frac{4,52}{k_B T}}.$$

Отже,

$$\frac{I_{T-W}}{I_W} = 5000 = \frac{1}{20} e^{\frac{4,52-2,63}{8,625 \cdot 10^{-5} T}} = \frac{1}{20} e^{\frac{21900}{T}},$$

звідки

$$10^5 = e^{\frac{21900}{T}};$$

тому

$$T = 1900 \text{ К}.$$

Відповідь: $T = 1900 \text{ К}$.

Приклад 4.3. Оксидний катод діаметром 1 мм і ефективною довжиною 2 см працює при температурі $T = 1000 \text{ К}$. Визначте струм емісії, питому потужність розжарювання і ефективність катода, якщо напруга розжарювання складає 6,3 В, а струм розжарювання 0,3 А.

Розв'язання

Визначимо густину струму емісії, вважаючи для оксидного катода $A = 100 \frac{\text{А}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^2}$ і $b_0 = 11200 \text{ К}$,

$$j_e = AT^2 e^{\frac{b_0}{T}} = 100 \cdot 1000^2 \cdot e^{\frac{11200}{1000}} = 1,37 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Струм емісії

$$I_e = j_e S = \pi dl j_e = 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,37 \cdot 10^3 = 0,086 \text{ А} = 86 \text{ мА}.$$

Потужність розжарювання катода

$$P_{\text{роз}} = U_{\text{роз}} I_{\text{роз}} = 6,3 \cdot 0,3 = 1,89 \text{ Вт}.$$

Питома потужність розжарювання:

$$P'_{\text{роз}} = \frac{P_{\text{роз}}}{S} = \frac{P_{\text{роз}}}{\pi dl} = \frac{1,89}{3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 3,01 \cdot 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Ефективність катода:

$$H = \frac{I_e}{P_{\text{роз}}} = \frac{0,086}{1,89} = 0,0455 \frac{\text{А}}{\text{Вт}}.$$

Відповідь: $I_e = 86 \text{ мА}$; $P'_{\text{роз}} = 3,01 \cdot 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$; $H = 0,0455 \frac{\text{А}}{\text{Вт}}$.

Приклад 4.4. Маємо циліндричний катод радіусом $r_k = 0,01 \text{ см}$ і коаксіальний циліндричний анод радіусом

$r_a = 1,0$ см . Температура катода $T = 2500$ К . Розрахуйте відсоток збільшення β струму емісії, який викликається ефектом Шотткі (порівняно зі струмом без врахування ефекту), якщо між анодом і катодом створено прискорюючу різницю потенціалів $U = 600$ В .

Розв'язання

Напруженість електричного поля в зоні між електродами циліндричного конденсатора дорівнює

$$\mathcal{E} = \frac{U}{r_k \ln \frac{r_a}{r_k}} = \frac{600}{10^{-4} \cdot \ln \left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}} \right)} = 1,303 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}} .$$

Струм емісії I_e за рахунок ефекту Шотткі збільшується порівняно зі струмом емісії I_{e0} за відсутності поля відповідно до виразу:

$$I_e = I_{e0} e^{\frac{0,44\sqrt{\mathcal{E}}}{T}} ,$$

звідси

$$\frac{I_e}{I_{e0}} = e^{\frac{0,44\sqrt{\mathcal{E}}}{T}} = e^{\frac{0,44\sqrt{1,303 \cdot 10^6}}{2500}} = 1,22 .$$

Отже, ефект Шотткі в даному випадку викликає збільшення струму емісії на

$$\beta = \frac{I_e - I_{e0}}{I_{e0}} = \frac{1,22I_{e0} - I_{e0}}{I_{e0}} = 0,22 \quad \text{або} \quad \beta = 22\% .$$

Відповідь: $\beta = 22\%$.

Приклад 4.5. Струм емісії карбідованого катода, що працює за температури $T = 2000$ К , дорівнює $I_e = 0,1$ А . Чому дорівнює струм емісії вольфрамового катода, нагрі-

того до тієї ж температури, якщо розміри обох катодів однакові?

Розв'язання

Струми емісії катодів визначаються співвідношенням

$$I_e = AST^2 e^{-\frac{b_0}{T}},$$

де $A = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^2}$, $b_0 = 52400 \text{ К}$ – для вольфрамового катоду;

$A = 1,15 \cdot 10^2 \frac{\text{А}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^2}$, $b_0 = 17400 \text{ К}$ – для карбідованого катоду.

Струм емісії вольфрамового катоду:

$$I_{e-w} = 6 \cdot 10^5 \cdot 2000^2 \text{ Сe}^{-\frac{52400}{2000}}.$$

Аналогічно струм емісії карбідованого катоду:

$$I_e = 1,15 \cdot 10^2 \cdot 2000^2 \text{ Сe}^{-\frac{17400}{2000}}.$$

Отже,

$$\frac{I_{e-w}}{I_e} = \frac{I_{e-w}}{0,1} = \frac{6 \cdot 10^5}{1,15 \cdot 10^2} e^{-\frac{-52400+17400}{2000}},$$

звідки

$$I_{e-w} = 522 \cdot e^{-17,5} = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ А} = 13,1 \text{ мкА}$$

Відповідь: $I_{e-w} = 13,1 \text{ мкА}$.

Приклад 4.6. Перерахуйте втрати потужності розжарювання термоелектронного катоду. Катод працює за температури $T = 1800 \text{ К}$ і має густину струму емісії

$j_e = 10 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$. Площа поверхні катода $S = 0,05 \text{ см}^2$,

робота виходу катода $\phi_K = 1,8 \text{ еВ}$, напруга розжа-

рювання 10 В, струм розжарювання 1 А. Яка частина потужності розжарювання витрачається на емісію електронів?

Розв'язання

Тепло, що підводиться до катоду, витрачається на:

- 1) випромінювання;
- 2) тепловідвід утримувачами катода;
- 3) здійснення електронами роботи виходу;
- 4) надання електронам початкової швидкості.

Якщо катод працює в режимі насичення, то потужність втрат на вказані в п. 3) і 4),

$$P = I_e \left(\varphi_K + \frac{2k_B T}{e} \right),$$

де P – потужність; I_e – струм емісії; $I_e \varphi_K$ – потужність, необхідна для здійснення роботи виходу; $I_e \frac{2k_B T}{e}$ – потужність, що витрачається на надання електронам середньої початкової енергії $2k_B T$, необхідної для їхньої емісії. Тому:

$$P = j_e S \left(\varphi_K + \frac{2k_B T}{e} \right) = 0,05 \cdot 10 \cdot \left(1,8 + \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1800}{1,6 \cdot 10^{-19}} \right) = 1,15 \text{ Вт} .$$

Потужність розжарювання:

$$P_H = I_H U_H = 1 \cdot 10 = 10 \text{ Вт} .$$

Визначимо, яка частина потужності витрачається на емісію електронів:

$$\beta = \frac{P}{P_H} \cdot 100\% = \frac{1,15}{10} \cdot 100\% = 11,5\%$$

Відповідь: $\beta = 11,5\%$.

Приклад 4.7. Визначте сталі Річардсона й ефективну роботу виходу електронів при густині струму насичення величиною $1 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ для оксидного катоду, для якого

$$\phi = 1,12 + 4,4 \cdot 10^{-4} T \text{ еВ}.$$

Розв'язання

Відповідно до формул (4.5) і (4.6)

$$\phi_p = 1,12 \text{ еВ},$$

$$A_p = A_0 e^{\frac{1}{k_B} \frac{\partial \phi}{\partial T}} \approx 7,3 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}.$$

За формулою (4.7) знайдемо температуру, за якої густина струму насичення досягає значення $10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ – $T = 960 \text{ К}$.

З формули (4.8) випливає, що ефективна робота виходу виражається виразом

$$\phi_{\text{ef}} = k_B T \ln \left(\frac{A_0 T^2}{j} \right) = 1,53 \text{ еВ}.$$

Відповідь: $\phi_p = 1,12 \text{ еВ}$; $A_p = 7,3 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}$; $\phi_{\text{ef}} = 1,53 \text{ еВ}$.

Приклад 4.8. Знайдіть кількість електронів, які вилітають внаслідок термоелектронної емісії з металу, нагрітого до температури T .

Розв'язання

У даному випадку є невироджений електронний газ, і в розподілі Фермі – Дірака можна знехтувати одиницею порівняно з експонентою:

$$\frac{dn}{n} = \frac{m_e^3}{4\pi^3 \hbar^3} e^{-\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z.$$

Вилітають усі частинки, в яких z -компонента швидкості (за нормаллю до поверхні) така, що відповідна їй кінетична енергія перевищує роботу виходу електрона з металу ϕ . Тому, проінтегрувавши за всіма значеннями v_x і v_y , маємо:

$$\frac{dn}{n} = \frac{2\pi m_e^3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2k_B T}{m_e} v_z e^{-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{m_e v_z^2}{2} - \mu \right)} dv_z,$$

і далі отримуємо відповідь

$$\langle n_e \rangle = \frac{m_e^2 k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{\sqrt{\frac{2A}{m_e}}}^{\infty} v_z e^{-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{m_e v_z^2}{2} - \mu \right)} dv_z = \frac{m_e^2 k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{\phi - \mu}{k_B T}}.$$

Відповідь: $\langle n_e \rangle = \frac{m_e^2 k_B T}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{A - \mu}{k_B T}}.$

Приклад 4.9. Катод емітує електрони, що створює електронний струм густиною j між анодом і катодом. Різниця потенціалів між анодом і катодом U_0 . Визначте розподіл потенціалу в проміжку між анодом і катодом у випадках, коли довжина вільного пробігу електрона набагато більша і набагато менша, ніж довжина проміжку L . В другому випадку рухливість електронів μ вважати такою, що не залежить від напруженості поля.

Розв'язання

Густина струму електронів є сталою величиною, тому що електрони не створюються й не знищуються у міжелектродному проміжку, тобто

$$j = en(x)v(x) = \text{const},$$

де $n(x)$ – концентрація електронів; $v(x)$ – швидкість електронів у точці x . Якщо довжина вільного пробігу електронів велика, то зі-

ткненнями електрона з частинками газу знехтуємо і тоді

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} \quad (U - \text{потенціал поля у точці } x, \text{ причому у катода}$$

$$U(0) = 0). \text{ Звідси густина електронів } n(x) = \frac{j}{e \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}}.$$

Перетворимо рівняння Пуассона

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{ne}{\epsilon_0}$$

з урахуванням того, що $\mathcal{E} = -\frac{dU}{dx}$

$$\epsilon \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{ne}{\epsilon_0} \frac{dU}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{j}{e \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}} \frac{dU}{dx} = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{dU}{dx};$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\mathcal{E}^2)}{dx} = \frac{2j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{d}{dx}(\sqrt{U});$$

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + \frac{2j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}}.$$

Граничні умови для цього рівняння можуть бути двох типів, що відповідають двом різним фізичним ситуаціям. Ця задача описує процеси, які відбуваються в електронній лампі – діоді. Граничні умови $U = 0$ при $x = 0$ і $U = U_0$ при $x = L$ відповідають випадку, коли внутрішній опір джерела, до якого підключено діод, набагато більший за внутрішній опір лампи. При цьому всі електрони, що емітуються катодом, потрапляють на анод, тобто діод працює в режимі насичення. Другий режим здійснюється у тому випадку, якщо лише частина електронів повертається на катод і поблизу катода утворюється хмара електронів та йонів, тобто створюється область з високою провідністю. Тоді поблизу катода маємо граничну умову

$\mathcal{E} = -\frac{dU}{dx}\Big|_{x=0} = 0$. Розв'язок рівняння Пуассона із вказаними граничними умовами має вигляд:

$$U = \left(\frac{9\sqrt{m_e}}{4\epsilon_0\sqrt{2e}} j \right)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}},$$

тобто у цьому випадку різниця потенціалів між електродами U_0 однозначно пов'язана з густиною струму

$$U_0 = \left(\frac{9}{4\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} j \right)^{\frac{2}{3}} L^{\frac{4}{3}}, \quad j = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_0^{\frac{3}{2}}}{L^2}.$$

Отримана залежність має назву „закон трьох других“.

При малій довжині вільного пробігу електрона порівняно з відстанню між електродами маємо для густини струму електронів $j = e\mu l(x)\mathcal{E}(x)$ і, розв'язуючи рівняння Пуассона, отримаємо

$$\mathcal{E}^2(x) = \mathcal{E}_0^2 + \frac{2j}{\epsilon_0\mu} x, \quad U = -\frac{j}{\epsilon_0\mu} \left(\mathcal{E}_0^2 + \frac{2j}{\epsilon_0\mu} x \right)^{\frac{1}{2}},$$

причому використана гранична умова $U = 0$ при $x = 0$.

Якщо електронний струм значно менший, ніж струм насичення, то друга гранична умова $\mathcal{E} = 0$ при $x = 0$. При цьому отримуємо розв'язки рівняння Пуассона у вигляді

$$U = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{j}{2e\epsilon_0\mu}} x^{\frac{3}{2}}, \quad j = \frac{9e\epsilon_0\mu}{8} \frac{U_0^2}{L^3}.$$

Відповідь: розподіл потенціалу у випадку, коли довжина вільного пробігу електрона набагато більша довжини міжелект-

родного проміжку L , має вигляд: $U_0 = \left(\frac{9}{4\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} j \right)^{\frac{2}{3}} L^{\frac{4}{3}}$;

у випадку, коли довжина вільного пробігу електрона

набагато менша довжини між електродного проміжку L , розподіл потенціалу має вигляд: $U = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{j}{2e\epsilon_0\mu}} x^{\frac{3}{2}}$.

Приклад 4.10. Нікелевий електрод нагрівають до $T = 1600$ К. Чому дорівнює струм електронів, що випромінюються поверхнею $S = 1$ см².

Розв'язання

Виберемо за вісь z напрямком нормалі до поверхні металу. Згідно зі статистичною моделлю, що використовується для оцінки тиску, з усіх частинок, які мають компоненту швидкості v_z з виділеної площею 1 м² зіткнуться за 1 с лише ті, що потрапляють в об'єм $|v_z| \cdot 1$ м³ (де v_z – в $\frac{M}{c}$). Проінтегрувавши за всіма напрямками імпульсу та помноживши цей інтеграл на елементарний заряд, отримаємо густину струму термоелектронної емісії:

$$j = e \int v_z dN = \frac{e}{m_e} \int p_z dN, \quad (1)$$

де dN – диференціал кількості частинок в об'ємі $V = 1$ м³.

Для подальшого розгляду зручно ввести циліндричні координати і розбити простір імпульсів на елементи об'єму

$$dp_x dp_y dp_z = p_r dp_r d\phi dp_z. \quad (2)$$

Вважаючи $V = 1$ м³, знаходимо кількість комірок у фазовому об'ємі $\Delta\Gamma_i$:

$$Z_i = \frac{g}{h^3} \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{g p_r}{h^3} \Delta p_r \Delta \phi \Delta p_z. \quad (3)$$

Енергія електронів у циліндричній системі координат має вигляд

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_e} = \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m_e}. \quad (4)$$

Переходячи до неперервного розподілу, за допомогою цих співвідношень маємо для чисел заповнення

$$dN = \frac{g}{h^3} \frac{p_r p_z dp_r d\phi dp_z}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m_e k_B T}} + 1}. \quad (5)$$

Будемо вважати, що лише ті електрони, в яких z -компонента імпульсу задовольняє умови

$$p_z \geq p_0, \quad (6)$$

можуть вийти з металу. Тоді для густини струму маємо

$$j = \frac{eg}{m_e h^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{p_r p_z dp_r dp_z d\phi}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m_e k_B T}} + 1} = \frac{2\pi eg}{m_e h^3} \int_0^\infty p_r dp_r \int_{p_0}^\infty \frac{p_z dp_z}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m_e k_B T}} + 1}. \quad (7)$$

Для інтегрування за p_z зробимо підстановку:

$$e^{\frac{p_z^2}{2m_e k_B T}} = y, \quad e^{\frac{p_0^2}{2m_e k_B T}} = y_0, \quad e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_r^2}{2m_e k_B T}} = C. \quad (8)$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^\infty \frac{p_z dp_z}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_r^2 + p_z^2}{2m_e k_B T}} + 1} &= m_e k_B T \int_{y_0}^\infty \frac{dy}{y(Cy + 1)} = m_e k_B T \ln \left(\frac{1}{Cy_0} + 1 \right) = \\ &= m_e k_B T \ln \left[e^{\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_0^2 + p_r^2}{2m_e k_B T}} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Інтегрування частинами дає для інтегралу, що залишився, вираз

$$j = \frac{\pi eg}{m_e h^3} \int_0^\infty \frac{p_r^3 dp_r}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + \frac{p_0^2 + p_r^2}{2m_e k_B T}} + 1}. \quad (10)$$

В усіх процесах, пов'язаних із зовнішньою емісією електронів, основне значення має ефективна робота виходу

$$\phi = \frac{p_0^2}{2m_e} - \mu, \quad (11)$$

яка слабо залежить як від геометрії поверхні, так і від фізичних процесів, що призводять до випускання електронів. Роблячи підстановку

$$\frac{p_r^2}{2m_e k_B T} = t, \quad (12)$$

та враховуючи співвідношення (11), маємо з формули (10):

$$j = \frac{2\pi e g m_e k_B^2 T^2}{h^3} \int_0^\infty \frac{t dt}{e^{t + \frac{\phi}{k_B T}} + 1}. \quad (13)$$

Внаслідок того, що $\frac{\phi}{k_B T} = 31,16$ у нашому випадку (для нікелю $\phi = 4,3$ еВ, $k_B T = 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 1600 = 0,138$ еВ), будемо мати

$$e^{\frac{\phi}{k_B T}} \gg 1, \quad (14)$$

і тому можна обмежитися першим членом розкладу в ряд. Тоді формула (13) призводить у першому наближенні до наступного виразу для густини струму термоелектронної емісії:

$$j = \frac{2\pi e g}{h^3} m_e k_B^2 T^2 e^{-\frac{\phi}{k_B T}}. \quad (15)$$

Струм крізь поверхню $S = 1$ см² буде

$$I = jS = \frac{2\pi e g}{h^3} m_e k_B^2 T^2 e^{-\frac{\phi}{k_B T}} S = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2}{(6,63 \cdot 10^{-34})^3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \times \\ \times (1,38 \cdot 10^{-23})^2 \cdot 1600^2 \cdot e^{-31,16} \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 9 \text{ мкА}.$$

Відповідь: $I = 9$ мкА .

Приклад 4.11. Визначте довгохвильову (червону) межу для фотокатода ($\phi_K = 1,1$ еВ). На скільки зсунеться червона межа фотоелектру за наявності електричного поля напруженістю $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{см}}$?

Розв'язання

Застосовуючи формули (4.18) – (4.21), отримаємо:

$$\lambda = \frac{1,24}{1,1} = 1,127 \text{ мкм} ,$$

$$\Delta\lambda = \frac{1,24}{\phi_K - \Delta\phi_K} - \lambda ,$$

де $\Delta\phi_K$ визначається ефектом Шотткі:

$$\Delta\phi_K = 3,8 \cdot 10^{-4} \sqrt{\mathcal{E}} = 0,027 \text{ еВ} ,$$

тоді

$$\Delta\lambda = 0,029 \text{ мкм} .$$

Відповідь: $\lambda = 1,127$ мкм ; $\Delta\lambda = 0,029$ мкм .

Приклад 4.12. Визначте ширину потенціального бар'єру для електрона, який перебуває на рівні Фермі, у наближенні трикутного бар'єру і бар'єру, округленого силами дзеркального відбиття. Визначити відповідне зниження потенціального бар'єру. Автоелектронна емісія відбувається з вольфрамового автокатода ($\phi = 4,5$ еВ) при напруженості електричного поля $3 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}$.

Розв'язання

Ширина трикутного бар'єру

$$d_0 = \frac{\phi}{e\mathcal{E}} = \frac{4,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9} = 15 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 15 \text{ \AA}.$$

Зниження потенціального бар'єра визначається формулою (4.12):

$$\Delta\phi = 3,8 \cdot 10^{-4} \sqrt{\mathcal{E}} = 3,8 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{3 \cdot 10^7} = 2,08 \text{ еВ}.$$

Форма потенціального бар'єру визначається виразом:

$$U(x) = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x} - e\mathcal{E}x.$$

Розв'язки рівняння $\phi = U(x)$:

$$e\mathcal{E}x^2 - \phi x + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 - \frac{e^3\mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0}}}{2e\mathcal{E}} = \frac{\phi}{2e\mathcal{E}} \pm \sqrt{\left(\frac{\phi}{2e\mathcal{E}}\right)^2 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0\mathcal{E}}}.$$

Ширина закругленого бар'єру

$$d_1 = x_2 - x_1 = \sqrt{\left(\frac{\phi}{e\mathcal{E}}\right)^2 - \frac{e}{4\pi\epsilon_0\mathcal{E}}} = d_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\phi}{\phi}\right)} = 13,3 \text{ \AA}.$$

Відповідь: $d_0 = 15 \text{ \AA}$; $d_1 = 13,3 \text{ \AA}$; $\Delta\phi = 2,08 \text{ еВ}$.

Приклад 4.13. Оцініть величину густини струму автоелектронної емісії із вольфрамового вістря ($\phi = 4,5 \text{ еВ}$) у вигляді параболоїда обертання, якщо радіус закруглення вістря $r = 10^{-5} \text{ см}$, відстань катод – анод $R = 1,0 \text{ см}$, функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, а анодна напруга

$U = 4 \cdot 10^3$ В. Як зміниться значення густини струму, якщо відстань катод – анод R зменшити у 10 разів?

Розв'язання

Відповідно до формули (4.31) маємо:

$$\lg j = 10,188 - 0,297 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{E}} \theta(y) + \lg \left(\frac{\mathcal{E}^2}{\phi r^2(y)} \right), \quad (1)$$

де напруженість електричного поля \mathcal{E} з урахуванням геометричної форми вістря можна визначити за виразом (4.32)

$$\mathcal{E} = \beta U = \frac{2U}{r \ln \frac{2R}{r}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^{-5} \cdot \ln \frac{2 \cdot 1,0}{10^{-5}}} = 6,55 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}. \quad (2)$$

Підставляючи отримане значення \mathcal{E} у формулу (1), отримаємо:

$$\lg j = 4,843, \quad \text{звідки} \quad j = 6,97 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}.$$

Якщо відстань катод – анод R зменшити у 10 разів, то напруженість електричного поля \mathcal{E} , розрахована за виразом (2), набуває значення:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^{-5} \cdot \ln \frac{2 \cdot 0,1}{10^{-5}}} = 8,08 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}},$$

а густина струму

$$\lg j_1 = 5,844, \quad \text{звідки} \quad j_1 = 6,99 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}.$$

Отже, зміна струму дорівнюватиме

$$\frac{j_1}{j} \approx 10.$$

Відповідь: $j = 6,97 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$; $\frac{j_1}{j} \approx 10$.

Приклад 4.14. Механічна міцність вольфраму складає $10^3 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$.

Виходячи з цього, оцініть максимальну напруженість електричного поля, допустиму для вольфраму. Чи існує ще за такої напруженості поля потенціальний бар'єр для електрона, що знаходиться на рівні Фермі? Яка максимальна густина струму автоелектронної емісії, яку можна отримати з вольфрамового катоду в припущенні справедливості формули Фаулера – Нордгейма?

Розв'язання

З формули (4.37) випливає:

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{P}{44}} = \sqrt{\frac{10^3}{44}} = 4,77 \frac{\text{В}}{\text{А}} = 4,77 \cdot 10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Умова зняття потенціального бар'єру

$$y = \frac{\Delta\phi}{\phi} = \frac{3,8 \cdot 10^{-4} \sqrt{\mathcal{E}_2}}{\phi} = 1,$$

звідки

$$\mathcal{E}_2 = \left(\frac{\phi}{3,8 \cdot 10^{-4}} \right)^2 = \left(\frac{4,5}{3,8 \cdot 10^{-4}} \right)^2 = 1,41 \cdot 10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

Густину струму знайдемо за формулою (4.31)

$$\lg j_2 = 10,188 - 0,297 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\mathcal{E}_2} \theta(y) + \lg \left(\frac{\mathcal{E}_2^2}{\phi t^2(y)} \right),$$

де $t(y) = t(1) = 1$, $\theta(y) = \theta(1) = 0$. Отже,

$$\lg j_2 = 9,833; \Rightarrow j_2 = 6,81 \cdot 10^9 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

Відповідь: бар'єр знімається повністю за напруженості електричного поля втричі меншої, ніж гранично припустима за міцністю матеріалу; максимальна густина струму

$$j_2 = 6,81 \cdot 10^9 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

Приклад 4.15. Визначте густина струму електронів, що емітуються металевою поверхнею під дією сильного електричного поля \mathcal{E} . Температуру вважайте низькою, структуру кристалічної ґратки, а також сили електростатичного зображення не враховувати.

Розв'язання

Нехай поверхня, яку залишають електрони, співпадає з площиною $z=0$. Всередині металу ($z < 0$) їхня потенціальна енергія за відсутності електричного поля дорівнює U_0 . Всередині металу електрони провідності у сукупності утворюють фермі-газ в основному стані та займають усі енергетичні рівні аж до рівня, який відповідає рівню Фермі ε_F . За наявності електричного поля зовні металу описується виразом (рис. 4.16):

$$U(z) = U_0 - e\mathcal{E}z. \quad (1)$$

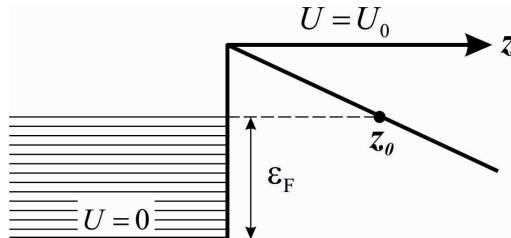


Рисунок 4.16

З рис. 4.16 видно, що за наявності поля зовні металу утворюється потенціальний бар'єр. Тоді коефіцієнт проходження T у наближенні Вентцеля – Крамерса – Бриллюена (ВКБ) має вигляд:

$$T = e^{-\frac{2\sqrt{2m_e}}{h} \int_0^{z_0} \sqrt{U(z) - E_z} dz}, \quad (2)$$

де

$$E_z = \frac{m_e v_z^2}{2}, \quad z_0 = \frac{U_0 - E_z}{e\mathcal{E}}. \quad (3)$$

Вираз (2) швидко зменшується зі зменшенням E_z , а після обчислення інтеграла отримуємо

$$T = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3} \frac{U_0 - E_z}{eh\mathcal{E}}}. \quad (4)$$

Густину струму розраховуємо за формулою

$$j = e \int v_z T dn, \quad (5)$$

де dn – кількість електронів провідності в елементі імпульсного простору $dp_x dp_y dp_z$, віднесена до 1 см^2 . Для фермі-газу всередині фермі-сфери

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 2m_e \varepsilon_F \quad (6)$$

отримаємо

$$dn = 2 \frac{dp_x dp_y dp_z}{h^3}, \quad (7)$$

зовні фермі-сфери маємо $dn = 0$.

Якщо в імпульсному просторі ввести циліндричні координати ρ , φ , p_z :

$$p_x = \rho \cos \varphi, \quad p_y = \rho \sin \varphi, \quad \rho^2 + p_z^2 \leq 2m_e \varepsilon_F,$$

то інтеграл (5) можна записати у вигляді:

$$j = \frac{2e}{h^3} 2\pi \int_0^{\sqrt{2m_e \varepsilon_F}} dp_z \int_0^{\sqrt{2m_e \varepsilon_F - p_z^2}} \rho \frac{p_z}{m_e} T d\rho,$$

причому інтегрування поширюється на всі електрони, для яких $v_z > 0$. За допомогою введення нової змінної

$$\varepsilon = \varepsilon_F - E_z \quad (7)$$

останній інтеграл спрощується до вигляду

$$j = \frac{4\pi m_e e}{h^3} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon T(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (8)$$

де

$$T(\varepsilon) \equiv e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3} \frac{(U_0 - \varepsilon_F + \varepsilon)^{3/2}}{e\hbar\varepsilon}}. \quad (9)$$

Для оцінки інтеграла (8) скористаємось тією обставиною, що коефіцієнт проходження $T(\varepsilon)$ має максимальне значення при $\varepsilon = 0$ (це відповідає максимуму енергії електронів $E_z = \varepsilon_F$), а потім зі зростанням ε швидко зменшується. Через це основний внесок в інтеграл (8) дають електрони з малими значеннями ε і тоді можна скористатися розкладанням

$$(U_0 - \varepsilon_F + \varepsilon)^{3/2} = (U_0 - \varepsilon_F)^{3/2} + \frac{3}{2}\varepsilon(U_0 - \varepsilon_F)^{1/2} + \dots$$

Вводячи позначення

$$\xi \equiv 2 \frac{\sqrt{2m_e}}{e\hbar\varepsilon} (U_0 - \varepsilon_F)^{3/2}, \quad (10)$$

знаходимо

$$T = e^{-\frac{2\xi}{3}} e^{-\frac{\xi\varepsilon}{U_0 - \varepsilon_F}}$$

та

$$j = \frac{4\pi m_e e}{h^3} e^{-\frac{2\xi}{3} \varepsilon_F} \int_0^{\frac{\xi \varepsilon}{U_0 - \varepsilon_F}} \xi e^{-\frac{\xi \varepsilon}{U_0 - \varepsilon_F}} d\varepsilon.$$

Тут підінтегральний вираз теж швидко зменшується зі зростанням ε , тому, не вносячи суттєвої похибки, інтегрування поширимо до нескінченності, та остаточно отримаємо

$$j = \frac{4\pi m_e e}{h^3} \frac{(U_0 - \varepsilon_F)^2}{\xi^2} e^{-\frac{2\xi}{3}}. \quad (11)$$

Проаналізуємо отримані результати. Згідно формул (10) і (11), густина струму швидко зменшується зі збільшенням роботи виходу $U_0 - \varepsilon_F$ та зі зменшенням напруженості електричного поля ξ . Якщо напруженість поля вимірювати у $\frac{\text{В}}{\text{см}}$, роботу виходу в еВ, а густину струму – в $\frac{\text{А}}{\text{см}^2}$, то співвідношення (10) та (11) будуть мати вигляд:

$$\xi = 1,047 \cdot 10^8 \frac{(U_0 - \varepsilon_F)^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, \quad j = 1,59 \cdot 10^{10} \frac{(U_0 - \varepsilon_F)^2}{\xi^2} e^{-\frac{2\xi}{3}}. \quad (12)$$

Якщо величина ξ має порядок 1, то для густини струму слід очікувати значень порядку $10^{10} \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$. Це означає, що практично кожний електрон після зіткнення з поверхнею залишає метал. Тому, в цьому випадку ні саму модель, ні наближений метод розрахунку застосувати не можна. Зі збільшенням значень ξ густина струму швидко зменшується, тому доцільно спитати, для яких значень напруженості поля за різних значень роботи виходу можна очікувати густину струму $1 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$? Відповідь на це питання дає табл. 4.2.

Таблиця 4.2

$\xi, \frac{\text{В}}{\text{см}}$	$U_0 - \varepsilon_F, \text{еВ}$
10^6	0,083
10^7	0,43
10^8	2,19

Внаслідок того, що для металів робота виходу $U_0 - \varepsilon_F$ завжди має порядок декількох еВ, то для полів, напруженість яких менша, ніж $10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, холодної емісії не повинно бути. Але з експериментів відомо, що порогові значення напруженості поля мають порядок $10^6 \frac{\text{В}}{\text{см}}$. Таке значне розходження неможливо пояснити тепловими збудженнями фермі-газу, але урахування збуджень дозволяє знизити роботу виходу на величину $0,1 \div 0,01 \text{ еВ}$ ($k_B T \sim 0,033 \text{ еВ}$ за звичайних температур). Це протиріччя можна подолати, якщо врахувати сили електростатичного зображення.

Відповідь:
$$j = \frac{4\pi m_e e (U_0 - \varepsilon_F)^2}{h^3 \xi^2} e^{-\frac{2\xi}{3}}$$

Приклад 4.16. Висота потенціального бар'єру, що заважає холодній емісії, значно знижується внаслідок дії сил електростатичного зображення. З'ясуйте, як впливають ці сили на величину густини струму холодної емісії.

Розв'язання

Сили електростатичного зображення виникають внаслідок спотворення поверхневого заряду, викликаного присутністю електрона в області $z > 0$. Якщо величина z значно більша, ніж стала кристалічної ґратки, то можна не враховувати структуру кристалічної ґратки металу та розглядати його як суцільне середовище. У цьому випадку сила електростатичного зображення розраховується методами класичної електростатики

$$U_3 = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z^2}. \quad (1)$$

Для малих z цей вираз не можна застосовувати, тому що при $z \rightarrow 0$ $U_3 \rightarrow \infty$. Але надалі будемо користуватися цим виразом у всій області зміни z , вважаючи, що можлива похибка не вплине на результати внаслідок того, що густина струму холодної емісії залежить виключно від ширини та висоти потенціального бар'єру в тій області енергії, де висота більша за енергію електрона.

З урахуванням вищесказаного потенціална енергія електрона, який знаходиться поза металом

$$U(z) = U_0 - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z^2} - e\mathcal{E}z. \quad (2)$$

Співвідношення (2) будемо розглядати лише в області між z_1 та z_2 (рис. 4.17), де z_1 та z_2 – розв'язки квадратного рівняння $U(z) = E_z$:

$$z_{1,2} = \frac{U_0 - E_z}{2e\mathcal{E}} \pm \sqrt{\frac{(U_0 - E_z)^2}{4e^2\mathcal{E}^2} - \frac{e}{16\pi\epsilon_0\mathcal{E}}}. \quad (3)$$

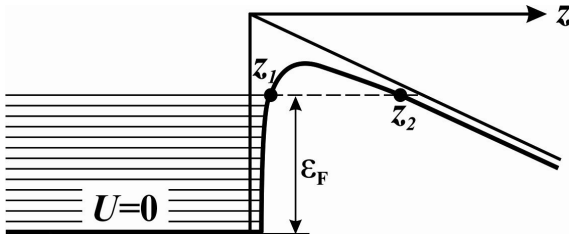


Рисунок 4.17

Обидва корені будуть дійсними, якщо

$$\left(\frac{U_0 - E_z}{e}\right)^2 > \frac{e\mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0}.$$

Зауважимо, що ця умова виконується навіть для полів, напруженість яких має порядок $10^{11} \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Для великих значень напруженості висота бар'єру буде менша, ніж енергія Фермі електронного газу в металі. В експериментах використовують поля, напруженість яких не перевищує $10^9 \frac{\text{В}}{\text{м}}$, тому можна вважати, що

$$\frac{e\mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0} \ll \left(\frac{U_0 - E_z}{e} \right)^2, \quad (4)$$

і замість радикалу (3) взяти відповідний розклад. Таким чином, маємо

$$z_1 = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0(U_0 - E_z)} \quad \text{та} \quad z_2 = z_0 - z_1, \quad (5)$$

де

$$z_0 = \frac{U_0 - E_z}{e\mathcal{E}}, \quad (6)$$

причому $z_1 \ll z_2$. Завдяки силам електростатичного зображення вершина потенційного бар'єру, згідно з формулою (2) зміщується з точки $z=0$ в точку $z = \sqrt{\frac{e}{16\pi\epsilon_0\mathcal{E}}}$, а його висота дорівнює тепер

$$U_0 - e\sqrt{\frac{e\mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0}}, \text{ а не } U_0.$$

Згідно з умовою (4), це призводить не стільки до зниження потенціального бар'єру, скільки робить його вершину більш половою, і ми можемо очікувати, що за інших рівних умов коефіцієнт проходження (прозорості) буде значно більшим. За аналогією з попереднім прикладом, можна переконатися, що основний внесок у густину струму холодної емісії будуть вносити ті електрони, енергія яких близька до значення $E_z = A$. Для таких енергій величина

$z_1 = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0(U_0 - A)}$ у всякому разі не менша, ніж стала кристалічної гратки, тому наявність розбіжності при $z = 0$ в потенціалі сил електростатичного зображення для подальшого розгляду не має ніякого значення.

Використовуючи наближення ВКБ, можна записати для коефіцієнта проходження вираз

$$T = e^{-2\sqrt{\frac{2m_e}{\hbar}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{U(z) - E_z} dz}.$$

Враховуючи, що

$$U(z) - E_z = \frac{e\mathcal{E}}{z}(z - z_1)(z_2 - z),$$

одержуємо

$$-\frac{\hbar}{2\sqrt{2m_e e\mathcal{E}}} \ln T = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{(z - z_1)(z_2 - z)}{z}} dz. \quad (7)$$

Інтеграл у (7) є інтегралом еліптичного типу, і його можна виразити через табличні інтеграли.

Введемо замість z нову змінну $x = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$, в результаті інтеграл в (7) перетворюється до вигляду

$$(z_2 - z_1)^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{x+c}} dx,$$

де $c \equiv \frac{z_1}{z_2 - z_1}$. Покладемо надалі $\frac{z_2 - z_1}{z_2} = k^2$ та $x = \frac{(1 - k^2) \sin^2 \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$,

тоді замість інтеграла в (7) можна записати

$$\frac{2k^4}{\sqrt{1 - k^2}} z_1^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} d\varphi.$$

В свою чергу цей інтеграл можна представити у вигляді лінійної комбінації двох повних еліптичних інтегралів $E(k)$ та $K(k)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}} d\varphi = \frac{1}{3k^4} \left[\frac{2-k^2}{1-k^2} E(k) - 2K(k) \right]. \quad (8)$$

У справедливості (8) можна переконатися таким чином. Якщо ввести позначення

$$1 - k^2 \sin^2 \varphi = \delta^2,$$

то повні еліптичні інтеграли запишуться у вигляді

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\delta}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta d\varphi.$$

Далі шляхом диференціювання неважко переконатися в справедливості тотожності

$$3k^2 \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\delta^5} = \frac{2-k^2}{k^2(1-k^2)} \delta - \frac{2}{k^2 \delta} + \frac{d}{d\varphi} \left[\sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{\delta^3} - \frac{2-k^2}{k^2(1-k^2)} \right) \right].$$

Якщо тепер проінтегрувати цю рівність, то в результаті отримаємо співвідношення

$$3k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\delta^5} d\varphi = \frac{2-k^2}{k^2(1-k^2)} E(k) - \frac{2}{k^2} K(k),$$

з якого випливає формула (8).

Підсумовуючи результат, запишемо (7) та (8) у вигляді

$$-\frac{\hbar}{2\sqrt{2m_e e\mathcal{E}}}\ln T = \frac{2}{3}z_2^{\frac{3}{2}}\left[(2-k^2)E(k) - \frac{2}{k^2}K(k)\right]. \quad (9)$$

Ця формула допускає подальші спрощення. Дійсно, $z_1 \ll z_2$, тому $k^2 \approx 1$ і параметр k^2 можна замінити параметром

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{z_1}{z_2} \ll 1, \quad (10)$$

а потім розкласти праву частину формули (9) у ряд за степенями цього нового параметра, який буде швидко збігатися

$$K(k) = \Lambda + \frac{1}{4}(\Lambda - 1)k'^2 + \dots,$$

$$E(k) = 1 + \frac{1}{2}\left(\Lambda - \frac{1}{2}\right)k'^2 + \dots,$$

причому $\Lambda = \ln \frac{4}{k'}$. Підставляючи ці ряди в праву частину (9), знаходимо

$$\frac{2}{3}z_2^{\frac{3}{2}}\left[1 + k'^2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\ln \frac{4}{k'}\right)\right] = \frac{2}{3}z_0^{\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{3}{2}k'^2\left(\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{k'}\right)\right].$$

Якщо б $k' = 0$, то значення T співпадало б з результатом прикладу 4.14, отриманим без урахування сил електростатичного зображення. Позначимо це значення T_0 , тоді

$$T = T_0^{1-\lambda}, \quad (11)$$

де

$$\lambda = \frac{3}{2}k'^2\left(\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{k'}\right). \quad (12)$$

Використовуючи нове значення коефіцієнта проходження T , оцінимо інтеграл, що фігурує в формулі для густини струму (формула (8) у прикладі 4.14). Як і в попередньому прикладі основний

внесок у густину струму холодної емісії дають електрони, для яких значення E_z знаходяться поблизу точки $E_z = \varepsilon_F$. З цієї причини ми можемо розкласти величину λ в ряд в околі точки $E_z = \varepsilon_F$, тобто в околі точки $E = 0$, і обмежимося в подальшому членом, який лінійно залежить від E . Це означає, що

$$k'^2 \approx \left(\frac{z_1}{z_2} \right)_{E_z = \varepsilon_F} = \frac{e^3 \mathcal{E}}{16\pi \varepsilon_0 (U_0 - \varepsilon_F)^2}, \quad (13)$$

а інтегрування виконується так само, як і в прикладі 4.14. В результаті замість виразу (11) з прикладу 4.14, яке ми позначимо через j_0 , отримаємо вираз

$$j = j_0 e^{\frac{2\lambda\xi}{3}}, \quad (14)$$

де $\lambda \ll 1$. При більш точному розрахунку у формулі (14) з'являється додатковий множник

$$\left(1 - \frac{7}{3}\lambda + k'^2 \right)^{-2}.$$

Основну роль у виразі (14) відіграє експонента.

Розглянемо приклад. Якщо напруженість поля \mathcal{E} вимірювати у $\frac{\text{В}}{\text{см}}$, роботу виходу в еВ, то разом зі співвідношенням (12) з прикладу 4.14 маємо вираз

$$k'^2 = 3,58 \cdot 10^{-8} \frac{\mathcal{E}}{(U_0 - \varepsilon_F)^2}.$$

Нехай робота виходу $U_0 - \varepsilon_F = 3$ еВ, а напруженість поля $\mathcal{E} = 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, тоді

$$\xi = 54,5; \quad k'^2 = 0,0397; \quad \lambda = 0,208; \quad e^{\frac{2\lambda\xi}{3}} = 1860;$$

$$j_0 = 0,9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}; \quad j = 1,7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Термоелектронна емісія

- 4.1. Знайдіть роботу виходу ϕ електрона з металу, якщо підвищення температури металу від значення $T = 2000 \text{ K}$ на $\Delta T = 0,01 \text{ K}$ збільшує струм насичення термоелектронної емісії на $0,01\%$.
- 4.2. Робота виходу електронів з поверхні Танталу $4,05 \text{ eV}$. Обчисліть густину струму емісії при температурі $T = 2000 \text{ K}$. Скористайтеся теоретичним значенням передекспоненційного множника.
- 4.3. Згідно з умовою попередньої задачі, розрахуйте збільшення густини струму емісії за рахунок ефекту Шоттки, якщо поблизу поверхні танталу створено електричне поле $\mathcal{E} = 10^8 \frac{\text{В}}{\text{м}}$.
- 4.4. Оцініть висоту потенціального бар'єру, створюваного об'ємним електронним зарядом поблизу поверхні катода, якщо відомо, що ефективна робота виходу електронів з катода $\phi_{\text{eff}} = 3,3 \text{ eV}$ при температурі $T = 2000 \text{ K}$, а густина анодного струму $j_A = 10^{-3} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$.
- 4.5. Знайдіть ефективну роботу виходу електронів при температурі $T = 2000 \text{ K}$ в умовах насичення, і середню за поверхнею роботу виходу електронів плямуватої поверхні, в якій $0,1$ площі поверхні зайнято ділянками з роботою виходу електронів $3,3 \text{ eV}$, а $0,9$ площі поверхні зайнято ділянками з роботою виходу електронів $4,6 \text{ eV}$.

- 4.6. За рахунок ефекту Шоттки робота виходу електронів зменшилася на 0,1 еВ. Чому дорівнює прискорююче електричне поле біля поверхні катода?
- 4.7. Оксидний катод площею $S = 1 \text{ см}^2$ при температурі $T_1 = 800 \text{ К}$ дає струм емісії $I_1 = 0,088 \text{ А}$, а при температурі $T_2 = 1000 \text{ К}$ – $I_2 = 3,34 \text{ А}$. Методом повного струму визначте роботу виходу електронів та її температурний коефіцієнт.
- 4.8. Обчисліть питому потужність, яку необхідно підвести до катода для створення термоелектронного потоку густиною $10^{-1} \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ із катода при температурі 2 200 К за умов повного відбору струму емісії.
- 4.9. Оцініть ефективну роботу виходу електронів із плівки Ва на W (система Ва – W) при $T = 1300 \text{ К}$, якщо значення річардсонівських сталих відомі $\phi_p = 1,56 \text{ еВ}$, $A_p = 1,5 \frac{\text{А}}{\text{см}^2 \cdot \text{К}^2}$.
- 4.10. Оцініть густина струму в діоді з молібденовим анодом ($\phi_A = 4,3 \text{ еВ}$) при затримуючій анодній напрузі $U_A = -1 \text{ В}$, якщо вольфрамовий катод ($\phi_K = 4,5 \text{ еВ}$) діоду працює при $T = 2500 \text{ К}$.
- 4.11. Діод працює в недоканалному режимі так, що впливом об'ємного заряду можна знехтувати. Анодний струм при трьох значеннях анодній напруги: 0 В, +1 В і +2 В дорівнює $I = 10^{-9} \text{ А}$, $I = 10^{-4} \text{ А}$, $I = 10^{-2} \text{ А}$. Визначте температуру катода, роботу виходу електронів катода і аноду.
- 4.12. Визначте значення густини струму електронної емісії в діоді з вольфрамовими катодом і анодом (робота виходу $\phi = 4,5 \text{ еВ}$); відстань між електродами дорівнює 0,1 см при анодній напрузі 200 В; 20 В; –2 В. Температура катода 2500 К.
- 4.13. На скільки має змінитись робота виходу матеріалу катода для того, щоб густина струму термоелектронної емісії зменшилася на 1%? Температура катода дорівнює $T = 2500 \text{ К}$.
- 4.14. Струм емісії карбідованого катода, який працює при температурі 2000 К дорівнює 100 А. Чому дорівнює струм емісії во-

вольфрамового катода таких же розмірів і розігрітого до тієї ж температури? Робота виходу матеріалів катодів відповідно дорівнює: 3,25 еВ і 4,5 еВ.

- 4.15. Вольфрамовий, торійований і оксидний катоди нагріті до температури 2400 К, 1900 К і 1000 К відповідно. Як відносяться площі цих катодів, якщо струми емісії катодів однакові? Робота виходу матеріалів катодів дорівнює відповідно 4,5 еВ, 2,6 еВ, 1,0 еВ.
- 4.16. Обчисліть питому потужність, необхідну для забезпечення неперервної емісії електронів із вольфрамового емітера при температурі 2500 К за умови відбору всього струму насичення.
- 4.17. Обчисліть питому потужність, підведення якої до катода необхідне для термоелектронного струму густиною $0,1 \text{ А/см}^2$ при температурі 2500 К за умови відбору всього струму емісії.
- 4.18. Обчисліть питому потужність, підведення якої потрібно для створення електронного потоку густиною $0,1 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ при температурі 2200 К за умов відбору всього струму емісії.
- 4.19. Катод і анод мають роботу виходу $\phi = 1,8 \text{ еВ}$. Температура катода 1100 К. Якою буде густина струму діода, якщо при напрузі в 100 В між електродна відстань 2 мм?
- 4.20. Чому дорівнюватиме анодний струм плоскопаралельного діода, якщо температура катода 1100 К, робота виходу електронів із катода 2,1 еВ; анодна напруга 100 В, відстань анод-катод 0,5 см; площа катода 3 см^2 .
- 4.21. Плоский діод має електроди площею 1 см^2 . Якою має бути між електродна відстань, щоб при струмі 100 мА різниця потенціалів склала 100 В?
- 4.22. Катод плоского діода виготовлено із вольфраму ($\phi_{\text{к}} = 4,5 \text{ еВ}$), анод виготовлено із платини ($\phi_{\text{а}} = 5,32 \text{ еВ}$), міжелектродна відстань дорівнює 1 см. Температура катода 2500 К. Обчисліть, при якій мінімальній прикладеній напрузі досягається струм насичення.

- 4.23. Катод плоского діода виготовлено із вольфраму ($\phi = 4,5$ eВ), анод виготовлено із торію ($\phi = 3,5$ eВ), міжелектродна відстань дорівнює 1 см. Температура катоду 2500 К. Обчисліть, при якій мінімальній прикладеній напрузі досягається струм насичення.
- 4.24. Оцініть значення анодного струму в діоді з оксидним катодом ($\phi_K = 2,0$ eВ) і молібденовим анодом ($\phi_A = 4,3$ eВ) в режимі об'ємного електронного заряду при двох значеннях анодної напруги $U_{A1} = 3$ В і $U_{A2} = 10$ В, якщо відомо, що первеанс діода $g = 10^{-4} \frac{\text{А}}{\text{В}^{1,5}}$. При оцінюванні не враховувати вплив потенціального бар'єру поблизу катоду.
- 4.25. Оцініть значення потужності, розсіяваної на нікелевому аноді ($\phi_A = 4,5$ eВ) діода з оксидним катодом ($\phi_K = 2,0$ eВ) в режимі об'ємного заряду при анодній напрузі $U_A = 10$ В, якщо відомо, що первеанс діода $g = 10^{-2} \frac{\text{А}}{\text{В}^{1,5}}$. При оцінюванні не враховувати вплив потенціального бар'єру поблизу катоду.
- 4.26. У скільки разів зміниться значення анодного струму I_A при постійній анодній напрузі $U_A = 10$ В у діоді з оксидним катодом ($\phi_K = 2,0$ eВ), який працює в режимі об'ємного електронного заряду, в результаті напилення плівки барію із катоду на нікелевий анод, якщо відомо, що $\phi_{Ni} = 4,4$ eВ, $\phi_{Ni+Ba} = 2,6$ eВ. При оцінках не враховувати вплив потенціального бар'єру поблизу катоду.
- 4.27. Визначте напруженість електричного поля біля аноду плоскопаралельного діода, який працює в режимі обмеження струму просторовим зарядом, якщо анодна напруга дорівнює 300 В, а відстань катод-анод дорівнює 1 см.
- 4.28. Обчисліть висоту потенціального бар'єру, створюваного об'ємним електронним зарядом поблизу поверхні катоду, якщо ефективна робота виходу електронів із катоду $\phi = 3,3$ eВ при $T = 2000$ К, а густина анодного струму $j = 0,05$ А/см².

- 4.29. Плоскопаралельний діод має катод площею 10 см^2 з роботою виходу 4 еВ , температурою 2000 К і відстанню до аноду 1 см . Визначити анодний струм при анодній напрузі $U = 465\text{ В}$.
- 4.30. Яка густина струму в діоді з анодом, чия робота виходу $\phi_A = 2,5\text{ еВ}$, при затримуючих напругах $U_1 = 1\text{ В}$ і $U_2 = 3\text{ В}$, якщо катод з роботою виходу $\phi_K = 4,5\text{ еВ}$; температура катоду $T = 2500\text{ К}$. Нарисувати енергетичну діаграму діоду.
- 4.31. Плоский діод має електроди площею 1 см^2 . Якою має бути міжелектродна відстань, щоб при струмові 100 мА різниця потенціалів склала 100 В . Катод і анод із одного матеріалу з роботою виходу $\phi = 1,8\text{ еВ}$. Температура катоду 1100 К . Яким буде струм діоду, якщо при напрузі в 100 В міжелектродна відстань зменшиться удвічі?
- 4.32. Температура катоду плоскопаралельного термоемісійного діоду дорівнює 2000 К . У скільки разів зміниться струм насичення термоелектронної емісії, якщо поблизу поверхні катоду прикласти прискорююче електричне поле напруженістю 20 кВ/см ?
- 4.33. Внаслідок ефекту Шоттки анодний струм діоду перевищив струм насичення в $1,4$ рази. Визначити температуру катоду, якщо напруженість електричного поля біля катоду дорівнює 40 кВ/см .
- 4.34. У скільки разів збільшиться струм насичення вакуумного термоелектронного діода, якщо катод з роботою виходу $\phi = 1,8\text{ еВ}$, а температуру катоду зменшити з 3100 К до 1400 К ?
- 4.35. Внаслідок ефекту Шоттки анодний струм діоду в два рази перевищив струм насичення. Визначте температуру катоду, якщо напруженість електричного поля поблизу катоду дорівнює 100 кВ/см .
- 4.36. Струм емісії катоду, який працює при температурі $T = 2100\text{ К}$ протягом деякого інтервалу часу знижується на 5% . З якою зміною роботи виходу електронів пов'язано це зниження? До якого значення необхідно підвищити напруженість електричного поля для відновлення початкового рівня

емісії, якщо за нормальних робочих умов напруженість поля поблизу катоду дорівнює 10 кВ/см ?

- 4.37. Катод плоскопаралельного діоду виготовлено з вольфраму. Як зміниться робота виходу електронів із катоду, якщо на анод подати прискорюючу напругу 1000 В ? Відстань між катодом і анодом дорівнює 2 мм .
- 4.38. Обчисліть у скільки разів збільшиться електронний струм насичення цезієвого емітера при температурі 500 К при збільшенні напруженості електричного поля від нуля до 100 кВ/см . Визначити абсолютні величини густини струму насичення цезієвого емітера за цих умов. Робота виходу електронів із цезію $\phi = 1,81 \text{ еВ}$.
- 4.39. Обчисліть відносне зменшення роботи виходу електронів із вольфраму ($\phi = 4,5 \text{ еВ}$) за наявності біля його поверхні прискорюючого електричного поля напруженістю 1 МВ/см .
- 4.40. Оцініть при температурі $T = 1500 \text{ К}$ значення густини струму термоелектронної емісії і температурного коефіцієнта роботи виходу електронів $\frac{d\phi}{dT}$ для системи W-J (плівка ітрію на вольфрам), якщо значення річардсонівських сталих відомі і дорівнюють: $\phi_p = 4,5 \text{ еВ}$, $A_p = 7 \text{ А/см}^2\text{К}^2$. Коефіцієнт відбивання від бар'єру $R = 0$.
- 4.41. Визначте значення річардсонівських сталих ϕ_p і A_p для системи W-Th, якщо відомо, що ефективна робота виходу електронів : $\phi_{\text{ef}} = 3,4 \text{ еВ}$ при $T = 1800 \text{ К}$, температурний коефіцієнт роботи виходу $\frac{d\phi}{dT} = 10^{-4} \frac{\text{еВ}}{\text{К}}$, коефіцієнт відбивання $R = 0$.
- 4.42. Обчисліть значення річардсонівських сталих ϕ_p і A_p для імпрегнованого катоду, якщо відомо, що густина струму термоелектронної емісії $j_1 = 1 \text{ А/см}^2$ при $T_1 = 1500 \text{ К}$, а при $T_2 = 1600 \text{ К}$ – $j_2 = 3 \text{ А/см}^2$. Коефіцієнт відбивання $R = 0$.

- 4.43. Обчисліть значення річардсонівських сталих ϕ_p і A_p і температурного коефіцієнту роботи виходу $\frac{d\phi}{dT}$ для катоду з двома сортами плям $\phi_1 = 2,5$ еВ і $\phi_2 = 3,0$ еВ, якщо $f_1 = f_2$, де f_1 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_1 , а f_2 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_2 . Коефіцієнт відбивання від бар'єру $R = 0$.
- 4.44. Оцініть густину струму термоелектронної емісії системи W-Cs при 800 К, якщо значення річардсонівських сталих відомі і дорівнюють: $\phi_p = 1,41$ еВ, $A_p = 3,55$ А/см² К².
- 4.45. Обчисліть значення „середньої по поверхні” роботи виходу електронів для деякого складного катоду з двома сортами плям: $\phi_1 = 4,6$ еВ і $\phi_2 = 2,5$ еВ, якщо $f_1 = 0,09$, а $f_2 = 0,1$, де f_1 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_1 , а f_2 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_2 .
- 4.46. Обчисліть значення f_2 – частки поверхні, зайнятої плямами з роботою виходу $\phi_2 = 2,5$ еВ, при якому робота виходу „середня по поверхні” $\phi_{\text{пов}} = 4$ еВ, якщо робота виходу з плям $\phi_1 = 4,6$ еВ.
- 4.47. Обчисліть значення ефективної роботи виходу електронів при $T = 1150$ К для деякого складного катоду з двома сортами плям: $\phi_1 = 4,6$ еВ і $\phi_2 = 2,5$ еВ, якщо $f_1 = 0,9$, а $f_2 = 0,1$, де f_1 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_1 , а f_2 – частка поверхні, зайнята плямами з ϕ_2 .
- 4.48. Оцініть довговічність оксидного катоду при температурі 1000 К, вважаючи її рівною часу втрат 2% запасу активної речовини (нормальний запас складає $5 \cdot 10^{-3} \frac{\Gamma}{\text{см}^2}$). Швидкість випаровування окису барію w у $\frac{\Gamma}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$ визначається співвідношенням $\lg w = 7,7 - \frac{20000}{T}$.

- 4.49. Оцініть значення питомої потужності розжарення катоду із ренію і його економічність, якщо відомо, що при $T = 2500$ К густина струму насичення термоелектронної емісії $j = 0,1 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$, а інтегральний коефіцієнт випромінювання поверхні $\xi = 0,4$.
- 4.50. Оцініть значення енергії, необхідне в середньому для емісії одного електрона із катода, який при $T = 2500$ К забезпечує густина струму термоелектронної емісії $j = 0,1 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$.

Фотоелектронна емісія

- 4.51. Визначте максимальну швидкість фотоелектронів поблизу поверхні емітера при опроміненні цезієвого фотоемітера з роботою виходу електронів $1,81$ еВ монохроматичним світлом із довжиною хвилі $0,39$ мкм.
- 4.52. Обчисліть квантовий вихід фотокатода, чутливість якого на довжині хвилі $0,63$ мкм складає $75 \cdot 10^{-6} \frac{\text{А}}{\text{Вт}}$?
- 4.53. У діоді з цезієвим фотокатодом ($\phi_K = 1,81$ еВ), який опромінюється світлом з довжиною хвилі $0,53$ мкм, і вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ еВ) визначте запірну зовнішню напругу $U_{\text{зап}}$, при якій струм фотоемісії дорівнюватиме нулю.
- 4.54. Цезієвий емітер фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ еВ) з'єднаний з його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ еВ) через батарею з ЕРС $1,2$ В, підключену позитивним полюсом до колектору. Визначте мінімальну довжину хвилі падаючого випромінювання λ , при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюгу фотоелемента.
- 4.55. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $0,23$ мкм запірна напруга $U_{\text{зап1}}$ виявилась рівною $-2,2$ В, а при довжині хвилі $0,27$ мкм — $U_{\text{зап2}} = -1,4$ В. Як визначити числове значення сталої Планка?

Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Якою має бути робота виходу фотоемітера?

4.56. Обчисліть енергію фотонів:

а) жовтого світла з довжиною хвилі $\lambda = 2557 \text{ \AA}$,

б) синього світла з довжиною хвилі $\lambda = 4210 \text{ \AA}$,

с) ультрафіолетового випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 2557 \text{ \AA}$.

Визначте максимальну швидкість електронів, які вибиваються кожним із наведених вище фотонів з поверхні цезієвого фотокатода, який має роботу виходу $1,89 \text{ eV}$. Температура фотокатода $T \rightarrow 0 \text{ K}$.

4.57. Обчисліть довжину монохроматичного світла, яке падає на фотоемітер ($\phi_K = 1 \text{ eV}$), якщо максимальна швидкість електронів, які вибиваються з поверхні емітера, $v_{\max} = 500 \text{ км/с}$.

4.58. Визначте максимальну швидкість фотоелектронів поблизу поверхні емітера при опроміненні монохроматичним світлом довжиною $0,59 \text{ мкм}$ емітера з роботою виходу електронів $1,6 \text{ eV}$.

4.59. Визначте максимальну швидкість фотоелектронів поблизу поверхні емітера при опроміненні фотоемітера з роботою виходу електронів $1,6 \text{ eV}$ монохроматичним світлом довжиною $0,36 \text{ мкм}$.

4.60. Обчисліть максимальну швидкість електронів, які вибиваються з поверхні фотоемітера під дією монохроматичного пучка світла гелій-кадмієвого ОКГ з довжиною хвилі $\lambda = 0,44 \text{ мкм}$. Робота виходу сурм'яно-цезієвого фото емітера дорівнює $1,6 \text{ eV}$.

Обчисліть роботу виходу електронів із фотокатода за величиною довжини хвилі $\lambda_{\max} = 12000 \text{ \AA}$, яка відповідає довгохвильовій границі фото ефекту.

4.61. Визначте довгохвильову (червону) границю фото ефекту для цезієвого фотокатода ($\phi_K = 1,81 \text{ eV}$). На скільки зсунеться че-

рвона границя фотоэффекту за наявності електричного поля
напруженістю $\mathcal{E} = 2,5 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{см}}$?

4.62. Монохроматичне випромінювання гелій-неонового лазера з довжиною хвилі $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ освітлює матеріали, наведені в таблиці.

1) Із якого матеріалу електрони будуть вибиватися з максимальною швидкістю? Чому дорівнюватиме ця швидкість?

2) Яку роботу виходу електронів матиме матеріал фотокатоду, призначеного для роботи у видимій частині спектру електромагнітних хвиль (0,35-0,7 мкм). Наведіть приклади таких матеріалів.

Матеріал	Робота виходу, еВ	Матеріал	Робота виходу, еВ
Барій	2,49	Неодим	3,20
Берилій	3,92	Нікол	4,50
Бісмут	4,40	Платина	5,32
Вольфрам	4,5	Празеодим	3,20
Гафній	3,53	Реній	5,00
Ферум	4,31	Рубідій	2,16
Аурум	4,30	Самарій	2,70
Калій	2,22	Аргентум	4,30
Кальцій	2,80	Стронцій	3,30
Кобальт	4,41	Тантал	4,12
Лантан	3,30	Торій	3,30
Літій	2,38	Карбон	4,70
Манган	3,64	Хром	4,58
Купрум	4,40	Цезій	1,81
Молібден	4,30	Церій	2,70
Натрій	2,35	Цинк	4,24

4.63. На фотоелемент падає потік монохроматичного випромінювання потужністю 100 мВт з довжиною хвилі 550 нм. Чому дорівнюватиме квантовий вихід фотокатода на даній довжині хвилі, якщо фотострум дорівнює 35 мкА?

- 4.64. Визначте квантовий вихід фотокатода, якщо його чутливість на довжині хвилі $0,69 \text{ мкм}$ складає $1 \cdot 10^{-6} \text{ А/Вт}$.
- 4.65. Визначте квантовий вихід фотокатода, якщо його чутливість на довжині хвилі $0,63 \text{ мкм}$ складає $2 \cdot 10^{-6} \text{ А/Вт}$.
- 4.66. На фотоелемент падає світловий потік з довжиною хвилі 550 нм і потужністю 120 мВт . Чому дорівнюватиме квантовий вихід фотокатода на даній хвилі, якщо фотострум дорівнює 150 мкА ?
- 4.67. Ізольований фотокатод, виготовлений із цезію ($\phi_K = 1,81 \text{ еВ}$), опромінюється світлом з довжиною хвилі $0,38 \text{ мкм}$. До якого потенціалу зарядиться фотокатод?
- 4.68. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $0,44 \text{ мкм}$ заперна напруга $U_{\text{зан}1}$ виявилась рівною $1,555 \text{ В}$, а при довжині хвилі $0,66 \text{ мкм}$ - $U_{\text{зан}2} = 2,503 \text{ В}$. Як визначити числове значення сталої Планка? Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Якою має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.69. Емісія із фотокатода, який освітлюється світлом з довжиною хвилі 4339 \AA , заперта напругою $-0,56 \text{ В}$. Для довжини хвилі 3125 \AA заперта напруга дорівнює $-1,680 \text{ В}$. Визначити роботу виходу фотокатода і числове значення сталої Планка. Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Яка має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.70. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,3 \text{ мкм}$ заперта напруга $U_{\text{зан}1}$ виявилась рівною $0,00777 \text{ В}$, а при довжині хвилі $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$ - $U_{\text{зан}2} = 1,8613 \text{ В}$. Визначити роботу виходу електронів і числове значення сталої Планка. Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Якою має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.71. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,3 \text{ мкм}$ заперта напруга $U_{\text{зан}1}$ виявилась рівною $0,696 \text{ В}$, а при довжині хвилі $\lambda = 0,8 \text{ мкм}$ - $U_{\text{зан}2} = 3,386 \text{ В}$. Визначити роботу виходу електронів і число-

- ве значення сталої Планка. Чому дорівнюватиме робота виходу анода? Якою має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.72. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,4$ мкм запірна напруга $U_{\text{зап1}}$ виявилась рівною 1,959 В, а при довжині хвилі $\lambda_2 = 0,5$ мкм – $U_{\text{зап2}} = 2,567$ В. Визначте роботу виходу електронів і числове значення сталої Планка. Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Якою має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.73. При освітленні вакуумного фотоелементу монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,6$ мкм запірна напруга $U_{\text{зап1}}$ виявилась рівною 0,9415 В, а при довжині хвилі $\lambda_2 = 0,7$ мкм – $U_{\text{зап2}} = 1,236$ В. Визначте роботу виходу електронів і числове значення сталої Планка. Чому дорівнюватиме робота виходу аноду? Якою має бути робота виходу фотоелемента?
- 4.74. Цезієвий емітер фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ еВ) з'єднаний дротом безпосередньо з його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ еВ). Визначити мінімальну довжину хвилі світла, при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелемента. Накреслити енергетичну діаграму фотоелемента.
- 4.75. У діоді з цезієвим фотокатодом ($\phi_K = 1,81$ еВ), який опромінюється світлом гелій-неонового лазера (довжина хвилі 0,63 мкм), і вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ еВ) визначити зовнішню напругу $U_{\text{зап}}$, при якій струм фотоemisії дорівнюватиме нулю.
- 4.76. У діоді з цезієвим фотоелементом ($\phi_K = 1,81$ еВ), який опромінюється світлом гелій-неонового лазера (довжина хвилі 0,63 мкм), і молібденовим колектором ($\phi_A = 4,3$ еВ) визначити значення напруги зовнішнього джерела, при якому фотострум дорівнюватиме нулю.
- 4.77. Цезієвий емітер фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ еВ) з'єднаний з його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ еВ) через батарею з ЕРС 2 В, підключену негативним полюсом до колектора. Визначи-

ти мінімальну довжину хвилі світла λ , при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелементу.

- 4.78. Цезієвий емітер фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ eV) з'єднаний з його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ eV) через батарею з ЕРС 2 В, підключену позитивним полюсом до аноду. Визначити мінімальну довжину хвилі світла λ , при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелементу. Накреслити енергетичну діаграму фотоелементу.
- 4.79. Між цезієвим емітером фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ eV) і його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ eV) увімкнено батарею з ЕРС 1,5 В, яку підключено позитивним полюсом до аноду. Яка мінімальна довжина хвилі світла, при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелементу? Накреслити енергетичну діаграму фотоелементу.
- 4.80. Між цезієвим емітером фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ eV) і його вольфрамовим колектором ($\phi_A = 4,5$ eV) увімкнено батарею з ЕРС 3 В, яку підключено позитивним полюсом до колектору. Яка мінімальна довжина хвилі світла, при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелементу? Накреслити енергетичну діаграму фотоелементу.
- 4.81. Між цезієвим емітером фотоелементу ($\phi_K = 1,81$ eV) і його вольфрамовим анодом ($\phi_A = 4,5$ eV) увімкнено батарею з ЕРС 1 В, яку підключено негативним полюсом до колектору. Яка мінімальна довжина хвилі світла, при якій ще немає струму у зовнішньому ланцюзі фотоелементу? Накреслити енергетичну діаграму фотоелементу.
- 4.82. Визначте коефіцієнт вторинної емісії матеріалів динодів десятискладного ФЕП, якщо при попаданні на фотокатод світлового потоку потужністю 10^{-8} Вт, з довжиною хвилі світла $\lambda = 0,4$ мкм вихідний струм у ФЕП складає 100 мкА. Квантовий вихід фотокатоду при даній довжині хвилі дорівнює 0,8 електрон/фотон.

Автоелектронна емісія

- 4.83. Оцініть густину струму автоелектронної емісії із молібденового автокатоду ($\phi = 4,2 \text{ eV}$), якщо напруженість електричного поля $2,6 \cdot 10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}$. Визначте ширину потенціального бар'єру для електрона, який перебуває на рівні Фермі, у наближенні трикутного бар'єру і бар'єру, округленого силами дзеркального відбиття. Визначте відповідне зниження потенціального бар'єру.
- 4.84. Оцініть величину густини струму автоелектронної емісії із вольфрамового вістря ($\phi = 4,5 \text{ eV}$) у вигляді параболоїда обертання, якщо радіус закруглення вістря $r = 10^{-5} \text{ см}$, відстань катод-анод $R = 10 \text{ см}$, функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, а анодна напруга $U = 4 \cdot 10^3 \text{ В}$. Як зміниться значення густини струму, якщо:
- при незмінній напрузі роботу виходу електронів знизити у 1,5 рази;
 - при незмінній роботі виходу напругу підвищити у 1,5 рази?
- 4.85. Оцініть величину густини струму автоелектронної емісії із вольфрамового вістря ($\phi = 4,5 \text{ eV}$) у вигляді параболоїда обертання, якщо радіус закруглення вістря $r = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, відстань катод – анод $R = 1,0 \text{ см}$, функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, а анодна напруга $U = 4 \cdot 10^3 \text{ В}$. Як зміниться значення густини струму, якщо:
- радіус закруглення r зменшити у 2 рази;
 - радіус закруглення r збільшити у 2 рази?
- 4.86. Оцініть величину густини струму автоелектронної емісії із вольфрамового вістря (робота виходу ϕ) у вигляді параболоїда обертання, якщо радіус закруглення вістря r , відстань катод – анод R , функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, а анодна напруга U . Як зміниться значення густини струму, якщо відстань катод – анод R зменшити у η разів? Збільшити в η разів?

№ варіанту	ϕ , eB	r , см	R , см	η	U , 10^3 В
1.	4,5	10^{-5}	1,1	5	4
2.	4,5	$1,2 \cdot 10^{-5}$	1,5	4	3
3.	4,5	$1,7 \cdot 10^{-5}$	1,8	3	2
4.	4,5	$1,5 \cdot 10^{-5}$	1,4	2	1
5.	4,5	$1,1 \cdot 10^{-5}$	0,9	1,5	1,3
6.	4,5	$1,3 \cdot 10^{-5}$	1,2	1,7	1,4
7.	4,5	$1,2 \cdot 10^{-5}$	1,1	4,5	3,9
8.	4,5	$1,1 \cdot 10^{-5}$	1,17	3,5	1,2
9.	4,5	$1,12 \cdot 10^{-5}$	2,12	2,7	2,4
10.	4,5	$1,25 \cdot 10^{-5}$	2,35	4,9	3,6
11.	4,5	$1,39 \cdot 10^{-5}$	1,74	1,4	1,5
12.	4,5	$1,34 \cdot 10^{-5}$	1,25	3,6	1,7
13.	4,5	$1,15 \cdot 10^{-5}$	1,94	4,1	1,1
14.	4,5	$1,07 \cdot 10^{-5}$	2,17	4,4	2,2
15.	4,5	$1,37 \cdot 10^{-5}$	2,28	3,2	2,6
16.	4,5	$1,03 \cdot 10^{-5}$	1,59	3,7	2,8
17.	4,5	$1,14 \cdot 10^{-5}$	1,31	3,4	3,1
18.	4,5	$1,18 \cdot 10^{-5}$	1,63	2,9	2,1
19.	4,5	$1,28 \cdot 10^{-5}$	1,86	2,3	4,1
20.	4,5	$1,31 \cdot 10^{-5}$	1,44	1,8	3,7
21.	4,5	$1,27 \cdot 10^{-5}$	2,07	3,9	2,5
22.	4,5	$1,19 \cdot 10^{-5}$	2,01	3,3	1,9
23.	4,5	$1,35 \cdot 10^{-5}$	1,71	4,8	2,7
24.	4,5	$1,40 \cdot 10^{-5}$	1,99	2,1	2,9
25.	4,5	$1,09 \cdot 10^{-5}$	1,49	4,2	1,4

- 4.87. Оцініть, як зміниться густина струму автоелектронної емісії із лезоподібного вольфрамового автокатоду з поперечним перерізом у формі параболи з радіусом закруглення $r = 4 \cdot 10^{-6}$ см, виставленого напроти плоского аноду на відстань $R = 2 \cdot 10^{-2}$ см, якщо анодну напругу підвищити з $U = 2 \cdot 10^4$ В до $U = 2,5 \cdot 10^4$ В. Функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, робота виходу електронів Вольфраму $\phi = 4,5$ еВ.
- 4.88. Оцініть, як зміниться густина струму автоелектронної емісії, якщо замість вольфрамового лезоподібного автокатоду з поперечним перерізом у формі параболи із радіусом закруглення $r = 4 \cdot 10^{-6}$ см, виставленого напроти плоского аноду на відстань $R = 2 \cdot 10^{-2}$ см, поставити лезоподібний катод із молібдену такої самої форми і розміру. Анодна напруга $U = 2,5 \cdot 10^4$ В, функція Нордгейма $\theta(y) = 1$, роботи виходу електронів Вольфраму і Молібдену дорівнюють відповідно 4,5 еВ і 4,2 еВ.
- 4.89. Оцініть, чи буде спостерігатись автоелектронна емісія із катоду у вигляді вольфрамового дроту ($\phi = 4,5$ еВ) діаметром $d = 20$ мкм, розміщеного всередині циліндричного аноду діаметром $D = 2$ см і анодній напрузі $U = 5 \cdot 10^3$ В. Якщо емісія спостерігатиметься, то оцініть величину густини струму із такого роду автокатоду, якщо ж ні, то при якій анодній напрузі має бути достатньо інтенсивна емісія?
- 4.90. В електронному проекторі відстань між плоским екраном (анодом) і вольфрамовим емітером у вигляді параболоїда обертання $R = 10$ см, різниця потенціалів між ними $U = 5 \cdot 10^3$ В, а коефіцієнт стискання зображення $k = 1,5$. Оцініть величину радіуса закруглення r емітера і густину струму автоелектронної емісії, який відбирається з емітера, якщо збільшення приладу $M = 3,3 \cdot 10^5$ разів, функція Фаулера – Нордгейма $\theta(y) = 1$, робота виходу електронів Вольфраму $\phi = 4,5$ еВ.
- 4.91. Визначте методом послідовних наближень у скільки разів необхідно зменшити різницю потенціалів між електродами для

відбору однакої густини струму автоелектронної емісії
 $j = 10^7 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$ при покритті вольфрамового емітера товстою
 плівкою цезію.

- 4.92. Обчисліть густину струму автоелектронної емісії електронів для Вольфраму ($\phi = 4,5 \text{ еВ}$) при напруженості електричного поля $\mathcal{E} = 6 \cdot 10^7 \frac{\text{В}}{\text{см}}$, вважаючи функції Нордгейма рівними $\theta(y) = 0,52$ і $t(y) = 1,06$. Параметр y визначається формулою (4.29).
- 4.93. Оцініть величину механічного напруження, яке випробовує голчастий автоелектронний емітер у вигляді параболоїда обертання, якщо анодна напруга $U = 4 \cdot 10^3 \text{ В}$, відстань катод-анод $R = 10 \text{ см}$, радіус закруглення вістря $r = 10^{-5} \text{ см}$.
- 4.94. Визначте механічні напруження в польовому йонному емітері із вольфраму при напруженості електричного поля, рівній $2 \cdot 10^8 \frac{\text{В}}{\text{см}}$.
- 4.95. Яка прозорість бар'єру висотою $U = 2 \text{ еВ}$ і шириною $L = 40 \text{ \AA}$ для електрона з енергією $E = 1 \text{ еВ}$. Перевірте розрахунком, чи можна замінити прозорість такого бар'єру добутком прозоростей двох послідовно розміщених бар'єрів з шириною кожного 20 \AA ; добутком прозоростей чотирьох бар'єрів з шириною кожного 10 \AA ?
- 4.96. Для автокатоду із вольфраму оцініть напруженість електричного поля, при якій прозорість тунельного потенціального бар'єра (у наближенні трикутного бар'єра) досягає значення 10^{-10} . Визначте ширину потенціального бар'єру для електрона, розміщеного на рівні Фермі. Визначте зниження потенціального бар'єра при його округленні силами дзеркального відображення.

5. Магнітні властивості твердих тіл

Основні формули і визначення

Намагніченість \mathbf{M} – це величина, яка дорівнює відношенню сумарного магнітного моменту всіх молекул речовини, які містяться в малому об'ємі ΔV речовини (магнетика), до величини цього об'єму:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m_i}, \quad (5.1)$$

де \mathbf{p}_{m_i} – магнітний момент окремої (i -ої) молекули; N – число молекул в об'ємі ΔV . Намагніченість \mathbf{M} вимірюється в $[\mathbf{M}] = 1 \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Питома намагніченість

$$\mathbf{M}_{\text{питг}} = \frac{1}{\Delta m} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m_i}, \quad (5.2)$$

де Δm – маса елемента об'єму ΔV речовини. Одиниці вимірювання $[\mathbf{M}_{\text{питг}}] = 1 \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}}$.

Молярна намагніченість

$$\mathbf{M}_{\mu} = \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m_i}, \quad (5.3)$$

де $\Delta v = \frac{m}{\mu}$ – кількість речовини, яка міститься в об'ємі ΔV . Одиниці вимірювання $[\mathbf{M}_{\mu}] = 1 \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{моль}}$.

Співвідношення намагніченостей

$$\mathbf{M}_{\text{питг}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{M}; \quad \mathbf{M}_{\mu} = \frac{\mu}{\rho} \mathbf{M}, \quad (5.4)$$

де ρ – густина речовини; μ – молярна маса речовини.

Зв'язок намагніченостей ізотропного магнетика з напруженістю \mathbf{H} магнітного поля, в яке поміщений цей магнетик:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}; \quad \mathbf{M}_{\text{пит}} = \chi_{\text{пит}} \mathbf{H}; \quad \mathbf{M}_{\mu} = \chi_{\mu} \mathbf{H}, \quad (5.5)$$

де χ , $\chi_{\text{пит}}$, χ_{μ} – відповідно магнітна сприйнятливість, питома магнітна сприйнятливість і молярна магнітна сприйнятливість.

Магнітні сприйнятливості пов'язані співвідношеннями

$$\chi_{\text{пит}} = \frac{\chi}{\rho} \quad \text{і} \quad \chi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho} \chi. \quad (5.6)$$

Об'ємна сприйнятливість величина безрозмірна, тоді як розмірність питомої сприйнятливості дорівнює $[\chi_{\text{пит}}] = \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$, а молярної

$$[\chi_{\mu}] = \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}.$$

Магнітна індукція \mathbf{B} в ізотропному магнетикі пов'язана з напруженістю \mathbf{H} магнітного поля і намагніченістю \mathbf{M} співвідношенням

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.7)$$

де

$$\mu \equiv 1 + \chi \quad (5.8)$$

– магнітна проникність середовища.

В анізотропних тілах, кристалах, проста пропорційність (5.7) замінюється лінійними співвідношеннями

$$\mathcal{B}_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k. \quad (5.9)$$

Тензор магнітної проникності μ_{ik} симетричний. Аналогічне співвідношення можна записати для зв'язку намагніченості з напруженістю поля:

$$M_i = \chi_{ik} H_k, \quad (5.10)$$

де χ_{ik} – тензор магнітної сприйнятливості.

За знаком і величиною магнітної сприйнятливості розрізняють три основних типи магнетиків:

- 1) *діамагнетики* – речовини, які дуже слабо намагнічуються проти поля:

$$\chi < 0, \quad |\chi| \ll 1, \quad \mu < 1;$$

- 2) *парамагнетики* – речовини, які слабо намагнічуються за полем:

$$\chi > 0, \quad |\chi| \ll 1, \quad \mu > 1;$$

- 3) *феромагнетики* – речовини, які дуже сильно намагнічуються за полем:

$$\chi > 0, \quad |\chi| \gg 1, \quad \mu \gg 1.$$

- 4) *антиферомагнетики* – речовини, для яких характерна антипаралельна орієнтація спінів сусідніх кутів ґратки, причому спінові магнітні моменти сусідніх вузлів при абсолютному нулі повністю компенсують один одного і спонтанна намагніченість антиферомагнетиків не виникає

$$\chi > 0, \quad |\chi| \ll 1$$

- 5) *феримагнетики* – це некомпенсовані антиферомагнетики

$$\chi > 0, \quad |\chi| \gg 1$$

Зміна енергії одиниці об'єму тіла в магнітному полі визначається співвідношенням

$$dE_H = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}), \quad (5.11)$$

а оскільки $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, то

$$dE_H = \mu_0 (\mathbf{H}d\mathbf{H} + \mathbf{H}d\mathbf{M}), \quad (5.12)$$

де M – магнітний момент одиниці об'єму, який може бути довільною функцією H .

Перший доданок формули (5.12) представляє собою енергію магнітного поля у вакуумі; тому при розгляді роботи, яка затрачається на намагнічування тіла, ним можна знехтувати.

Повний елемент роботи

$$dA = pdV - Hdp_m, \quad (5.13)$$

а перший закон термодинаміки запишеться у вигляді

$$dQ = dU + dA = dU + pdV - Hdp_m,$$

де dQ – кількість теплоти, передана тілу; dU – зміна його внутрішньої енергії; p_m – магнітний момент тіла.

Задача теорії повністю розв'язана, якщо визначено так звані **рівняння стану** тіла:

$$\begin{cases} U = U(T, V, H); \\ p = p(T, V, H); \\ p_m = p_m(T, V, H). \end{cases} \quad (5.14)$$

Які саме із шести величин – U, p, p_m, T, V, H вважати незалежними змінними, залежить від умови задачі, що розв'язується.

Згідно другому закону термодинаміки, **приріст ентропії**

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + dA}{T} = \frac{dU + pdV}{T} - \frac{H}{T} dp_m \quad (5.15)$$

є повним диференціалом, однак існують речовини, у яких не лише dS , але і складові, що входять у формулу (5.15)

$$dS' = \frac{dU + pdV}{T} \quad \text{та} \quad dS'' = -\frac{H}{T} dp_m$$

є повними диференціалами.

Тоді із визначення повного диференціалу випливає, що коефіцієнт при dp_m має бути функцією тільки p_m , тобто

$$\frac{H}{T} = f(p_m), \quad \text{або} \quad p_m = f\left(\frac{H}{T}\right). \quad (5.16)$$

Інакше кажучи, намагніченість однозначно визначається відношенням магнітного поля до температури. При малих полях $p_m \sim H$; $M = \chi H$ і, відповідно, магнітна сприйнятливість обернено пропорційна температурі.

При розгляді термодинамічних явищ широко використовуються так звані термодинамічні потенціали. Нагадаємо визначення деяких із них при відсутності магнітного поля.

Внутрішня енергія

$$dU = TdS - pdV; \quad U = U(S, V).$$

Вільна енергія

$$F = U - TS; \quad dF = -SdT - pdV; \quad F = F(T, V).$$

Термодинамічний потенціал

$$\Phi = U - TS + pV; \quad d\Phi = -SdT + Vdp; \quad \Phi = \Phi(T, p).$$

За наявності магнітного поля

$$dU = TdS - pdV + Hdp_m. \quad (5.17)$$

Аналогом величини pV є величина Hp_m . У відповідності з цим визначимо термодинамічний потенціал у присутності поля:

$$\Phi = U - TS + pV - Hp_m; \quad d\Phi = -SdT + Vdp - p_m dH. \quad (5.18)$$

Оскільки Φ – функція стану, а $d\Phi$ – повний диференціал, то

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{pH}; \quad V = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_{TH}; \quad p_m = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial H}\right)_{Tp}. \quad (5.19)$$

Продиференціювавши співвідношення (5.19), можна скласти рівняння, яке б пов'язувало похідні. Наприклад,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{pT} = \frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right); \quad \left(\frac{\partial p_m}{\partial p}\right)_{TH} = -\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H}\right),$$

звідки

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{pT} = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial p}\right)_{TH}.$$

Аналогічно отримуємо й інші співвідношення:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{pT} = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial p}\right)_{TH}; \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{TH} = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{pH}; \\ \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_{Tp} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial T}\right)_{pH}. \end{cases} \quad (5.20)$$

За відсутності магнітного поля розрізняють дві теплоємності: теплоємність при сталому об'ємі C_V та теплоємність при сталому тиску C_p . Величина C_p майже завжди більша, ніж C_V , оскільки, при нагріванні при сталому тиску тепло витрачається не лише на зміну внутрішньої енергії тіла, але й на роботу проти зовнішніх сил, що діють на тіло. В присутності магнітного поля виникає два нових параметра – магнітний момент тіла p_m і магнітне поле H . В результаті, якщо дослід відбувається, наприклад, при сталому тиску, необхідно розрізнити два нових види теплоємності.

Теплоємність при сталому намагніченні і сталому тиску можна задати виразом

$$C_{p, p_m} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{p, p_m} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p, p_m}, \quad (5.21)$$

а теплоємність при сталому полі і сталому тиску – виразом

$$C_{p,H} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{p,H} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,H}. \quad (5.22)$$

Можна побачити, що C_{p,p_m} не відрізняється від теплоємності за відсутності поля, оскільки робота намагнічення

$$dA'' = -H dp_m = 0.$$

В другому випадку частина теплоти витрачається на роботу намагнічування ($dA'' \neq 0$); відповідно співвідношення між теплоємностями C_{p,p_m} і $C_{p,H}$ є аналогічним співвідношенню між C_p і C_V за відсутності магнітного поля.

Розрахуємо різницю теплоємностей C_{p,p_m} і $C_{p,H}$. Будемо вважати, що незалежними є змінні p, T, H , а ентропію S представимо як складну функцію: $S = S[T, p, p_m(p, T, H)]$. Тоді

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{H,p} &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,p_m} + \left(\frac{\partial S}{\partial p_m} \right)_{p,T} \left(\frac{\partial p_m}{\partial T} \right)_{p,H}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial p_m} \right)_{p,T} &= \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_{p,T} \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} \right)_{p,T}, \end{aligned}$$

а згідно (5.20)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_{p,T} = \left(\frac{\partial p_m}{\partial T} \right)_{p,H}.$$

Звідси

$$C_{p,H} - C_{p,p_m} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{H,p} - T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,p_m} = T \left(\frac{\partial p_m}{\partial T} \right)_{p,H}^2 \left(\frac{\partial H}{\partial p_m} \right)_{p,T}. \quad (5.23)$$

Оскільки $\left(\frac{\partial H}{\partial p_m}\right)_{p,T} > 0$, для більшості речовин $C_{p,H} - C_{p,p_m} > 0$; лише у випадку $\left(\frac{\partial p_m}{\partial T}\right)_{p,H} = 0$ має місце рівність $C_{p,H} - C_{p,p_m} = 0$.

Орбітальне гіромагнітне відношення

$$\frac{p_{m_l}}{\mathcal{L}_l} = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e}, \quad (5.24)$$

де p_{m_l} – орбітальний магнітний момент електрона в атомі; \mathcal{L}_l – орбітальний момент імпульсу електрона; e – елементарний заряд.

Кутова швидкість прецесії електронної орбіти атома, який знаходиться у магнітному полі (**частота Лармора**),

$$\omega_L = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \mathcal{B}. \quad (5.25)$$

Індукований магнітний момент в атомі, поміщеному у магнітне поле,

$$\mathbf{p}_{m_{\text{вкл}}} = -\frac{e^2}{6m_e} \left(\sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2} \right) \mathcal{B}, \quad (5.26)$$

де $\overline{r_i^2}$ – середнє значення квадрату відстані електрона від ядра атома; Z – число електронів в атомі (йоні).

Молярна намагніченість ізотропного діамagnetика

$$\mathbf{M}_\mu = -\frac{e^2 N_A}{6m_e} \left(\sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2} \right) \mathcal{B}. \quad (5.27)$$

Молярна магнітна сприйнятливість ізотропного діамagnetика визначають за **формулою Ланжевена – Паулі**

$$\chi_\mu = -\frac{\mu_0 e^2 N_A}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \overline{r_i^2}, \quad (5.28)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{м}}$ – магнітна стала.

Магнетон Бора $\mu_{\text{В}}$ – елементарний магнітний момент
 ($\mu_{\text{В}} = 9,27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$)

$$\mu_{\text{В}} = \frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (5.29)$$

Молярна намагніченість ізотропного парамагнетика

$$M_{\mu} = p_{m_j} L(\alpha) N_{\Lambda}, \quad (5.30)$$

де p_{m_j} – магнітний момент молекули; $L(\alpha)$ – функція Ланжевена.

Функція Ланжевена

$$L(\alpha) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}, \quad (5.31)$$

де $\alpha \equiv \frac{p_{m_j} \mathcal{B}}{k_{\text{В}} T}$.

Наближене значення функції Ланжевена можна записати у вигляді знакозмінного ряду

$$L(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{45}\alpha^3 + \frac{2}{945}\alpha^5 - \dots \quad (5.32)$$

При $\alpha \ll 1$ ($p_{m_j} \mathcal{B} \ll k_{\text{В}} T$) $L(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}$ і молярна намагніченість

$$\mathbf{M}_{\mu} = \frac{p_{m_j}^2 N_{\Lambda}}{3k_{\text{В}} T} \mathcal{B}, \quad \text{або} \quad \mathbf{M}_{\mu} = \frac{\mu_0 p_{m_j}^2 N_{\Lambda}}{3k_{\text{В}} T} \mathbf{H}. \quad (5.33)$$

Молярна магнітна сприйнятливість ізотропного парамагнетика при $p_{m_j} \mathcal{B} \ll k_{\text{В}} T$

$$\chi_{\mu} = \frac{\mu_0 P_{m_j}^2 N_A}{3k_B T}. \quad (5.34)$$

Закон Кюрі

$$\chi_{\mu} = \frac{C}{T}, \quad (5.35)$$

де C – стала Кюрі ($C \equiv \frac{\mu_0 P_{m_j}^2 N_A}{3k_B}$).

Якщо повний момент атома \mathbf{J} , то парамагнітна частина сприйнятливості дорівнює

$$\chi = \frac{N \mu_0 g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B T}. \quad (5.36)$$

У цій формулі g – фактор Ланде, який визначає зв'язок між магнітним і повним моментом системи. Для йонів групи Феруму (Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu) відбувається „заморожування“ орбітального моменту – їхній парамагнетизм зумовлений лише спіном зовнішньої d -оболонки, тому в формулі (5.36) необхідно замінити J на S , а множник Ланде у них $g = g_s = 2$. Якщо магнітний момент атома визначається лише спіном одного зовнішнього електрона, тобто $S = \frac{1}{2}$, ця формула набуває вигляду

$$\chi = \frac{M}{H} = N \frac{\mu_0 P_m^2}{k_B T} = N \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B T}, \quad (5.37)$$

Феромагнетизм. У феноменологічній теорії феромагнетизму, побудованій П. Вейссом у 1907 р., для опису взаємодії сусідніх електронів провідності вважається, що у феромагнетику є деяке ефективне магнітне поле H_{ef} (це поле називають також *обмінним* в силу його квантовомеханічної природи). Величина обмінного поля пропорційна намагніченості (кількості електронів з корельованими напрямками магнітних моментів)

$$H_{\text{ef}} = \lambda M, \quad (5.38)$$

де λ – деяка константа, додатна у феро- і від’ємна в антиферомагнетиків.

Температурна залежність сприйнятливості феромагнетика у парамагнітній фазі визначають за **формулою Кюрі – Вейсса**

$$\chi = \frac{M}{H} = N \frac{\mu_0 g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3k_B(T-\Theta)} \propto \frac{1}{T-\Theta}, \quad (5.39)$$

де величину

$$\Theta \equiv \frac{N\mu_0 \langle p_m^2 \rangle \lambda}{3k_B} \quad (5.40)$$

називають **парамагнітною точкою Кюрі**.

В околі точки Кюрі для намагніченості насичення справедливе співвідношення:

$$\frac{M_s}{M_{s0}} = \alpha \sqrt{1 - \frac{T}{\Theta}}, \quad (5.41)$$

де α – константа для даного матеріалу; M_{s0} – намагніченість насичення за $T = 0$.

Для пояснення залежності кривої намагнічення та петлі гістерезису від внутрішніх властивостей феромагнетика та зовнішніх впливів необхідно розглянути основні типи енергій взаємодії, які в першому наближенні визначають магнітний стан феромагнетика:

- 1) електростатичну енергію обмінної взаємодії;
- 2) енергію природної (кристалографічної) магнітної анізотропії;
- 3) енергію магнітопружної взаємодії;
- 4) енергію феромагнетика в зовнішньому полі.

Електростатична енергія обмінної взаємодії визначається співвідношенням:

$$E_{\text{об}} = -2 \sum_{ij} A_{ij} \sigma^2 \cos \varphi_{ij}, \quad (5.42)$$

де A_{ij} – обмінний інтеграл для атомів i та j ; σ – модуль вектора спінового моменту; φ_{ij} – кут між напрямками спінових моментів атомів.

Якщо обмінний інтеграл додатний, то найнижчу енергію має симетричний стан і найпростішим прикладом є феромагнітний стан, а якщо він від’ємний, то найнижчу енергію має антисиметричний стан, і цей випадок відповідає антиферомагнітному стану з антипаралельними спінами.

Енергія кристалографічної магнітної анізотропії для кубічних кристалів

$$E_{\kappa} = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2, \quad (5.43)$$

де K_0 , K_1 , K_2 – константи кристалографічної магнітної анізотропії; α_1 , α_2 , α_3 – напрямні косинуси між вектором \mathbf{M}_s та осями x , y , z , які співпадають з основним кристалографічними напрямками кубічної ґратки.

Для гексагональних кристалів енергія кристалографічної магнітної анізотропії має вигляд

$$E_{\kappa} = K'_0 + K'_1\alpha^2 + K'_2\alpha^4, \quad (5.44)$$

де K'_0 , K'_1 , K'_2 – константи магнітної анізотропії; $\alpha = \cos\theta$, θ – кут між вектором спонтанної намагніченості і гексагональною віссю.

Енергію магнітопружної деформації одиниці об’єму можна записати у вигляді

$$E_{\text{м.пр.}} = \frac{E}{2} \left[\lambda_{100} + 3(\lambda_{111} - \lambda_{100})(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) \right]^2, \quad (5.45)$$

де λ_{100} та λ_{111} – магнітострикції для напрямків $[100]$ та $[111]$.

Додаючи останній вираз до енергії кристалографічної магнітної анізотропії, матимемо

$$E_a = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + K_3(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2)^2, \quad (5.46)$$

причому коефіцієнти K_1 , K_2 , K_3 матимуть інші значення, відмінні від тих, які входять до виразу (5.43).

Отже рівняння (5.46) виражає **енергію магнітної анізотропії** феромагнетиків, які мають кубічну структуру. В нього входять як енергія, що залежить від кристалографічної магнітної анізотропії, так і енергія магнітопружної деформації, що виникає завдяки магнітострикції, викликаній прикладенням магнітного поля.

Якщо феромагнетик піддати деформації, то до його вільної енергії магнітної анізотропії додається енергія пружних напружень, що має вигляд

$$E_{\tau} = -\frac{3}{2}\tau \left[\lambda_{100} \left(\alpha_1^2 \gamma_1^2 + \alpha_1^2 \gamma_2^2 + \alpha_1^2 \gamma_3^2 - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ \left. + 2\lambda_{111} (\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3 + \alpha_3 \alpha_1 \gamma_3 \gamma_1) \right], \quad (5.47)$$

де τ – дотичне напруження; γ_1 , γ_2 , γ_3 – напрямні косинуси пружного напруження відносно осей кристала.

Енергія взаємодії феромагнетиків з магнітним полем має вигляд

$$E_H = -(\mathbf{MH}). \quad (5.48)$$

У системі впорядкованих спінів можливі своєрідні збудження спінової системи – спінові хвилі, – які є коливаннями відносної орієнтації спінів у ґратці. У границі довгих хвиль $ka \ll 1$ закон дисперсії виявляється квадратичним за хвильовим числом k :

$$\hbar\omega = (2JSa^2)k^2. \quad (5.49)$$

Магнітний момент ядра¹

$$p_{m_j} = g\mu_N \sqrt{I(I+1)}, \quad (5.50)$$

¹ Магнітним моментом ядра називають також максимальне значення проєкції магнітного моменту ядра на напрямок вектора магнітної індукції зовнішнього поля, тобто $p_m = p_{m_{z_{\max}}} = g\mu_N I$

де g – ядерний фактор Ланде (g -фактор); μ_N – ядерний магнетон ($\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$); m_p – маса протона; I – спінове квантове число ядра (спін ядра).

Зв'язок магнітного моменту ядра з моментом імпульсу \mathcal{L}_I ядра:

$$p_{m_I} = \gamma \mathcal{L}_I, \quad (5.51)$$

де $\gamma = \frac{g\mu_N}{\hbar}$ – гіромагнітне відношення.

$$\mathcal{L}_I = \hbar \sqrt{I(I+1)}. \quad (5.52)$$

Проекція магнітного моменту ядра на напрямок вектора індукції зовнішнього поля

$$p_{m_z} = g\mu_N m_I, \quad (5.53)$$

де m_I – спінове магнітне квантове число ядра, $m_I = I, I-1, \dots, -I$.

Кругова частота ω_0 змінного магнітного поля, за якої відбувається резонансне поглинання енергії,

$$\omega_0 = \gamma \mathcal{B}_0, \quad (5.54)$$

де \mathcal{B}_0 – магнітна індукція зовнішнього постійного магнітного поля.

Відношення заселеностей енергетичних рівнів (за відсутності високочастотного поля)

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}, \quad (5.55)$$

де N_1 – заселеність енергетичного рівня E_1 ; N_2 – заселеність енергетичного рівня E_2 ($E_2 > E_1$).

Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. Визначте магнітну сприйнятливість χ і молярну сприйнятливість χ_μ Вісмуту, якщо питома магнітна

$$\text{сприйнятливість } \chi_{\text{пит}} = -1,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{М}^3}{\text{кг}}.$$

Розв'язання

Магнітну сприйнятливість χ визначають за співвідношенням

$$\chi = \frac{M}{H},$$

де M – намагніченість, H – напруженість магнітного поля.

Намагніченість M , в свою чергу, визначають за формулою (5.1)

$$M = |\mathbf{M}| = \frac{\left| \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m_i} \right|}{V},$$

де $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m_i}$ – сумарний магнітний момент усіх молекул в об'ємі V (магнетик вважають однорідним).

Відповідно

$$\chi_\mu = \frac{M_\mu}{H}; \quad M_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N p_{m_i}}{\nu},$$

де ν – кількість речовини (число молів даної речовини), і

$$\chi_{\text{пит}} = \frac{M_{\text{пит}}}{H}; \quad M_{\text{пит}} = \frac{\sum_{i=1}^N p_{m_i}}{m},$$

де m – маса речовини.

Для визначення питомої магнітної сприйнятливості знайдемо відношення

$$\frac{\chi}{\chi_{\text{пит}}} = \frac{M}{M_{\text{пит}}} = \frac{m}{V} = \rho,$$

звідки

$$\chi = \rho \chi_{\text{пит}},$$

де ρ – густина.

Підставляючи чисельні значення, отримаємо

$$\chi = 9,8 \cdot 10^3 \cdot (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -1,3 \cdot 10^{-6}.$$

Для визначення молярної магнітної сприйнятливості знайдемо аналогічне відношення

$$\frac{\chi_{\mu}}{\chi_{\text{пит}}} = \frac{M_{\mu}}{M_{\text{пит}}} = \frac{m}{\nu} = \mu,$$

де μ – молярна маса.

Тоді

$$\chi_{\mu} = \mu \chi_{\text{пит}}.$$

Отже,

$$\chi_{\mu} = 209 \cdot 10^{-3} \cdot (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \frac{\text{М}^3}{\text{моль}}.$$

Відповідь: $\chi \approx -1,3 \cdot 10^{-6}$; $\chi_{\mu} \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \frac{\text{М}^3}{\text{моль}}$.

Приклад 5.2. Знайдіть діамагнітну сприйнятливість атомарного Гідрогену за нормальних умов, якщо його атоми перебувають в основному стані.

Розв'язання

Діамагнітну сприйнятливості газу визначають за формулою (5.3)

$$\chi = -\frac{\mu_0 z e^2 n^{-2}}{6m_e} r^2.$$

Для атома Гідрогену $z=1$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3a_0^2$, де $a_0 = 52,9$ пм – радіус першої борівської орбіти.

Кількість атомів в одиниці об'єму визначимо із співвідношення

$$n = \frac{\rho N_A}{\mu} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Отже,

$$\chi = -\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{25}}{6 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 3(52,9 \cdot 10^{-12})^2 \approx -1,3 \cdot 10^{-9}.$$

Відповідь: $\chi \approx -1,3 \cdot 10^{-9}$.

Приклад 5.3. Визначте частоту ω_L ларморової прецесії електронної орбіти в атомі, який перебуває в однорідному магнітному полі індукцією $B = 1$ Тл.

Розв'язання

Нехай електрон рухається зі швидкістю v по круговій орбіті радіусом r в напрямку, показаному стрілкою на рис. 5.1. Момент

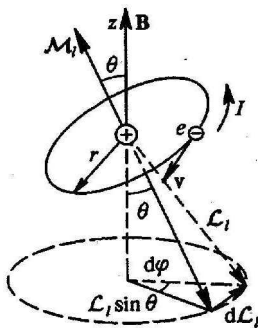


Рисунок 5.1.

імпульсу \mathcal{L}_l орбітального руху електрона направлений перпендикулярно до площини орбіти.

Орбітальний магнітний момент \mathbf{p}_{m_l} буде мати протилежний до вектора \mathcal{L}_l напрямок. Під дією зовнішнього магнітного поля (\mathbf{B}), збудженого уздовж осі Oz , на електронну орбіту буде діяти момент сили $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_{m_l} \mathbf{B}]$,

напрямок якого перпендикулярний площині, що містить вектори \mathbf{p}_{m_l} і \mathcal{B} . Під дією цього моменту вектор \mathcal{L}_l отримає приріст $d\mathcal{L}_l = \mathbf{M}dt$ в напрямку, який співпадає з \mathbf{M} , внаслідок чого площина, яка містить вектори \mathbf{p}_{m_l} і \mathcal{B} , повернеться на кут $d\varphi$. З рис. 5.1 видно, що

$$d\varphi = \frac{d\mathcal{L}_l}{\mathcal{L}_l \sin \theta}.$$

Тоді кутова швидкість прецесії (ларморова частота)

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\mathcal{L}_l}{\mathcal{L}_l \sin \theta dt}.$$

Оскільки $d\mathcal{L}_l = \mathbf{M}dt$, а $M = p_{m_l} \mathcal{B} \sin \theta$, то

$$\omega_L = \frac{p_{m_l} \mathcal{B} \sin \theta dt}{\mathcal{L}_l \sin \theta dt} = \frac{p_{m_l}}{\mathcal{L}_l} \mathcal{B}.$$

Скориставшись гіромагнітним співвідношенням $\frac{p_{m_l}}{\mathcal{L}_l} = \frac{1}{2} \frac{|e|}{m_e}$, отримаємо

$$\omega_L = \frac{1}{2} \frac{|e|}{m_e} \mathcal{B}.$$

Виконавши розрахунки, будемо мати:

$$\omega_L = \frac{1}{2} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 1 = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}.$$

Відповідь: $\omega_L = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$.

Приклад 5.4. Молекула NO має магнітний момент $p_{m_l} = 1,8\mu_B$.
Визначте питому парамагнітну сприйнятливність

$\chi_{\text{пит}}$ газоподібного оксиду азоту за нормальних умов.

Розв'язання

За теорією Ланжевена молярну магнітну сприйнятливість визначають за виразом (5.34)

$$\chi_{\mu} = \frac{\mu_0 P_{m_j}^2 N_A}{3k_B T}$$

Використовуючи формулу (5.6), отримаємо зв'язок між питомою і молярною магнітними сприйнятливостями:

$$\chi_{\text{пит}} = \frac{\chi_{\mu}}{\mu} = \frac{\mu_0 P_{m_j}^2 N_A}{3\mu k_B T},$$

де μ – молярна маса речовини.

Підставляючи чисельні значення, будемо мати

$$\chi_{\text{пит}} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot (1,8 \cdot 9,27 \cdot 10^{-24})^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 6,2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}^3}{\text{кг}}.$$

Відповідь: $\chi_{\text{пит}} = 6,2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}^3}{\text{кг}}.$

Приклад 5.5. В однорідне магнітне поле з індукцією \mathbf{B}_0 внесли кульку радіусом r з магнетика, сприйнятливість речовини якого χ – стала величина. Визначте індукцію і напруженість магнітного поля в просторі, який оточує кульку, і всередині кульки.

Розв'язання

Для кульки у зовнішньому магнітному полі намагнічення однорідне. Тому в силу ізотропності форми кульки зв'язок між \mathbf{B}_m , \mathbf{H}_m і \mathbf{M} залишається векторним (фактор форми N – скаляр, для кульки $N = \frac{1}{3}$). Тому всередині кульки

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_m, \quad \mathcal{B}_m = \mu_0(1-N)\mathbf{M}_0, \quad \mathcal{B}_i = \mu_0(\mathbf{H}_i + \mathbf{M}).$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m, \quad \mathbf{H}_m = -N\mathbf{M}, \quad \mathcal{B}_m = \mu_0(\mathbf{H}_m + \mathbf{M}).$$

За визначенням і умовою задачі $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$. Звідси випливає, що

$$\mathcal{B}_i = \frac{1+\chi}{1+\chi N}\mathcal{B}_0, \quad \mathbf{H}_i = \frac{1}{1+\chi N}\mathbf{H}_0, \quad \mathcal{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0.$$

Поле *зовні кулі* є суперпозицією однорідного поля і поля в центрі кулі диполя з магнітним моментом

$$\mathbf{p}_m = \frac{4}{3}\pi r^3\mathbf{M}.$$

Оскільки $\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi}{1+\chi N}\mathcal{B}_0$, то

$$\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_{me},$$

де

$$\mathcal{B}_{me} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right] = \frac{r^3}{3} \frac{\chi}{1+\chi N} \left[\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right],$$

і

$$\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_0 + \frac{r^3}{3} \frac{\chi}{1+\chi N} \left[\frac{3(\mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathcal{B}_0}{r^3} \right], \quad \mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}_e.$$

Відповідь: $\mathcal{B}_i = \frac{1+\chi}{1+\chi N}\mathcal{B}_0$; $\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{1+\chi N}\mathcal{B}_0$;

$$\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_0 + \frac{r^3}{3} \frac{\chi}{1+\chi N} \left[\frac{3(\mathcal{B}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathcal{B}_0}{r^3} \right]; \quad \mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu_0}\mathcal{B}_e.$$

Приклад 5.6. При насиченні магнітна індукція чистого заліза $\mathcal{B} = 2,2$ Тл. Враховуючи, що елементарна комірка

кристалічної ґратки Феруму представляє собою об'ємноцентрований куб з ребром $a = 0,286 \text{ нм}$, розрахуйте магнітний момент, що припадає на один атом Феруму (у магнетонах Бора).

Розв'язання

При магнітному насиченні феромагнетиків $H \ll M$. Тому

$$M \approx \frac{\mathcal{B}}{\mu_0}.$$

Кількість атомів заліза в одиниці об'єму

$$n = \frac{n_0}{a^3},$$

де n_0 – кратність елементарної комірки, тобто кількість атомів, що припадають на одну елементарну комірку. У випадку об'ємноцентрованого куба $n_0 = 2$.

Магнітний момент, що припадає на один атом,

$$p_m = \frac{M}{\mu_B n} \approx \frac{\mathcal{B} a^3}{\mu_0 \mu_B n_0} = \frac{2,2 \cdot (0,286 \cdot 10^{-9})^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 9,274 \cdot 10^{-24} \cdot 2} = 2,21.$$

Отриманий результат показує, що в кристалічній ґратці Феруму кількість некомпенсованих спінів у розрахунку на один атом менша, ніж у вільному атомі Феруму, магнітний момент якого $p_{m_{\text{Fe}}} = 4\mu_B$.

Відповідь: $p_m = 2,21\mu_B$.

Приклад 5.7. З експериментальних даних випливає, що за температури 700°C намагніченість насичення чистого заліза M_s складає 0,55 намагніченості насичення M_{s_0} за температури $T = 0 \text{ К}$ і $M_s = 0,296M_{s_0}$ за температури 750°C . Шляхом екстраполяції експери-

ментальних даних знайдіть температуру Кюрі для заліза.

Розв'язання

Намагніченість насичення різко спадає з наближенням до точки Кюрі Θ . Поблизу цієї точки виконується співвідношення

$$y = \frac{M_s}{M_{s0}} = \alpha \sqrt{1 - \frac{T}{\Theta}},$$

де α – константа для даного матеріалу. Звідси випливає, що

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{T_1}{\Theta}}}{\sqrt{1 - \frac{T_2}{\Theta}}}$$

і

$$\Theta = \frac{T_2 y_1^2 - T_1 y_2^2}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{1023 \cdot (0,55)^2 - 973 \cdot (0,296)^2}{(0,55)^2 - (0,296)^2} = 1042 \text{ К},$$

або 769°C .

Відповідь: $\Theta = 769^\circ\text{C}$.

Приклад 5.8. Зразок з речовини, яка містить еквівалентні ядра (протони), перебуває в однорідному магнітному полі ($B = 1 \text{ Тл}$). Визначте:

- 1) відносну різницю заселеностей енергетичних рівнів при температурі $T = 300 \text{ К}$;
- 2) частоту ν_0 , за якої буде відбуватися ядерний магнітний резонанс. Екрануючою дією електронних оболонок і сусідніх ядер знехтувати.

Розв'язання

1. У магнітному полі ядра набувають додаткової енергії, яку визначають за співвідношенням

$$E = -p_{m_z} \mathcal{B}, \quad (1)$$

де p_{m_z} – проекція магнітного моменту на напрямок вектора \mathcal{B} (вісь Oz). Проекція магнітного моменту ядра виражають формулою

$$p_{m_z} = g\mu_N m_I,$$

де g – ядерний фактор Ланде; μ_N – ядерний магнетон; m_I – спінове магнітне квантове число ядра.

Підставляючи цей вираз у формулу (1), отримаємо

$$E = -g\mu_N \mathcal{B} m_I.$$

Спінове магнітне квантове число m_I протона може приймати лише два значення: $m_I = +\frac{1}{2}$ і $m_I = -\frac{1}{2}$. Значення $m_I = +\frac{1}{2}$ відповідає нижньому енергетичному рівню:

$$E_1 = -\frac{1}{2} g\mu_N \mathcal{B}. \quad (2)$$

Значення $m_I = -\frac{1}{2}$ відповідає верхньому енергетичному рівню (рис. 5.2):

$$E_2 = +\frac{1}{2} g\mu_N \mathcal{B}. \quad (3)$$

За відсутності магнітного поля кількість ядер з протилежно направленими спінами однакова й дорівнює $\frac{N}{2}$ (N – загальна кількість ядер).

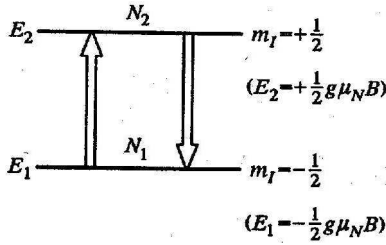


Рисунок 5.2

У магнітному полі відбувається перерозподіл ядер за енергетичними рівнями. На нижньому рівні з енергією E_1 буде знаходитися більше ядер, ніж на верхньому з енергією E_2 . Кількість ядер N_1 (заселеність даного рівня), які перебувають на нижньому енергетичному рівні E_1 , обчислимо за формулою Больцмана:

$$N_1 = \frac{N}{2} e^{-\frac{E_1}{k_B T}}, \quad \text{або} \quad N_1 = \frac{N}{2} e^{\frac{1}{2} \frac{g \mu_N \mathcal{B}}{k_B T}}.$$

Відповідно обчислимо і кількість ядер N_2 , які перебувають на верхньому енергетичному рівні:

$$N_2 = \frac{N}{2} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}, \quad \text{або} \quad N_2 = \frac{N}{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{g \mu_N \mathcal{B}}{k_B T}}.$$

Оскільки $\frac{1}{2} g \mu_N \mathcal{B} \ll k_B T$ (це буде показано нижче), скористаємося наближеними рівностями

$$e^{-x} \approx 1 - x \quad \text{і} \quad e^x \approx 1 + x,$$

якщо $x \ll 1$. Тоді

$$N_1 \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{g \mu_N \mathcal{B}}{k_B T} \right) \quad \text{і} \quad N_2 = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g \mu_N \mathcal{B}}{k_B T} \right).$$

Різницю ΔN заселеностей енергетичних рівнів визначимо, віднімаючи від першої наближеної рівності другу:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{gN\mu_N\mathcal{B}}{2k_B T}.$$

Розділивши ΔN на N , отримаємо відносну різницю заселеностей енергетичних рівнів:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2} \frac{g\mu_N\mathcal{B}}{k_B T}. \quad (4)$$

Підставляючи чисельні значення в формулу (4), отримаємо

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 3,4 \cdot 10^{-6}.$$

2. Під дією електромагнітного випромінювання, циклічна частота якого

$$\omega_0 = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad (5)$$

відбуватимуться переходи між рівнями енергії E_1 і E_2 , причому електромагнітне випромінювання викликає переходи $E_1 \rightarrow E_2$ і $E_2 \rightarrow E_1$ з рівною ймовірністю за умови однакової заселеності енергетичних рівнів. Оскільки нижній рівень має більшу заселеність, ніж верхній, то переходи з поглинанням електромагнітного випромінювання ($E_1 \rightarrow E_2$) відбуватимуться частіше, ніж з випромінюванням ($E_2 \rightarrow E_1$). Це і є резонансне поглинання електромагнітного випромінювання, зумовлене ядерним магнетизмом – ядерний магнітний резонанс (ЯМР).

Підставляючи у (5) вираз для енергій E_1 і E_2 згідно (2) і (3) і замінивши циклічну частоту ω_0 на частоту ν_0 ($\omega_0 = 2\pi\nu_0$), визначимо резонансну частоту ν_0 для зовнішнього магнітного поля B :

$$\nu_0 = \frac{g\mu_N\mathcal{B}}{2\pi\hbar} = \frac{5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} = 4,27 \cdot 10^7 \text{ Гц} = 42,7 \text{ МГц}.$$

Відповідь: $\frac{\Delta N}{N} = 3,4 \cdot 10^{-6}$; $\nu_0 = 42,7$ МГц.

Приклад 5.9. Покажіть, що магнітна сприйнятливість порошку, що складається з довільно орієнтованих кристалів, дорівнює

$$\chi = \frac{1}{3}(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3),$$

де χ_1, χ_2, χ_3 – головні сприйнятливості кристала.

Розв'язання

Для монокристалу зі сприйнятливістю χ_{ij} , що знаходиться в магнітному полі \mathbf{H} , енергія E у загальному випадку задається виразом:

$$E = -\frac{1}{2}\chi_{ij}H_iH_j,$$

де

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}.$$

В головних осях тензора сприйнятливості недиагональні компоненти дорівнюють нулю і можна записати:

$$\chi_{11} = \chi_1, \quad \chi_{22} = \chi_2, \quad \chi_{33} = \chi_3.$$

Для напрямку поля \mathbf{H} , що задається одиничним вектором з компонентами l, m, n відносно головних осей, маємо

$$\chi = \chi_1 l^2 + \chi_2 m^2 + \chi_3 n^2.$$

Якщо зразок складається з багатьох хаотично орієнтованих кристалів, то

$$\chi = \chi_1 \overline{l^2} + \chi_2 \overline{m^2} + \chi_3 \overline{n^2}.$$

Відомо, що $\overline{l^2} = \overline{m^2} = \overline{n^2} = \overline{\cos^2 \theta}$, де θ – кут, що складає напрямком поля \mathbf{H} з головними осями. Тому

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{\int_0^\pi 2\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1}{3} \frac{\cos^3 \theta \Big|_0^\pi}{\cos \theta \Big|_0^\pi} = \frac{1}{3},$$

і

$$\chi = \frac{1}{3}(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3).$$

Відповідь: $\chi = \frac{1}{3}(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3)$.

Приклад 5.10. Покажіть, що у випадку ромбічної кристалічної ґратки характеристична поверхня векторів намагніченості \mathbf{M} , що відповідають одному і тому ж значенню модуля вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} , представляє собою еліпсоїд, а для кубічної кристалічної ґратки – сферу, причому в кубічній кристалічній ґратці модуль вектора \mathbf{M} не залежить від напрямку вектора \mathbf{H} і вектори \mathbf{M} і \mathbf{H} паралельні між собою.

Розв'язання

Оберемо прямокутну систему координат, осі якої спрямовані уздовж ребер елементарної ромбічної комірки. В цій системі координат тензор магнітної сприйнятливості ромбічного кристала має ненульові компоненти χ_{11} , χ_{22} , χ_{33} , а вектори $\mathbf{H}(H_1, H_2, H_3)$ і $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$ характеризуються компонентами:

$$H_1 = H \cos \alpha; \quad H_2 = H \cos \beta; \quad H_3 = H \cos \gamma, \quad (1)$$

$$M_1 = \chi_{11} H_1; \quad M_2 = \chi_{22} H_2; \quad M_3 = \chi_{33} H_3, \quad (2)$$

де α , β , γ – кути, що утворює вектор напруженості магнітного поля \mathbf{H} з осями системи координат.

Використовуючи умову $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ і співвідношення (2), неважко отримати співвідношення

$$\frac{M_1^2}{\chi_{11}^2} + \frac{M_2^2}{\chi_{22}^2} + \frac{M_3^2}{\chi_{33}^2} = H^2,$$

з якого випливає рівняння еліпсоїда

$$\frac{M_1^2}{\chi_{11}^2 H^2} + \frac{M_2^2}{\chi_{22}^2 H^2} + \frac{M_3^2}{\chi_{33}^2 H^2} = 1. \quad (3)$$

Рівняння (3) спрощується при переході від ромбічного кристала до кубічного. Тензор магнітної сприйнятливості кубічного кристала має ненульові компоненти $\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = \chi$. Тому рівняння характеристичної поверхні (3) набуває вигляду

$$\frac{M_1^2}{\chi^2 H^2} + \frac{M_2^2}{\chi^2 H^2} + \frac{M_3^2}{\chi^2 H^2} = 1, \quad (4)$$

тобто відповідає рівнянню сфери з радіусом $\chi^2 H^2$. З урахуванням рівняння (4) модуль вектора $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$ записується так:

$$M = \chi \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2} = \chi H, \quad (5)$$

а вектори \mathbf{M} і \mathbf{H} задовольняють умові паралельності. Відмітимо, що паралельна орієнтація векторів \mathbf{M} і \mathbf{H} буде мати місце й при заміні кубічного кристала ізотропним середовищем.

Відповідь: рівняння еліпсоїда: $\frac{M_1^2}{\chi_{11}^2 H^2} + \frac{M_2^2}{\chi_{22}^2 H^2} + \frac{M_3^2}{\chi_{33}^2 H^2} = 1$; рівняння

сфери: $\frac{M_1^2}{\chi^2 H^2} + \frac{M_2^2}{\chi^2 H^2} + \frac{M_3^2}{\chi^2 H^2} = 1$; модуль вектора \mathbf{M} в

кубічній системі координат: $M = \chi H$.

Приклад 5.11. Для α -феруму, який кристалізується в структурі кубічної симетрії, константи магнітної кристалографічної анізотропії, мають наступні значення:

$$K_1 = 4,2 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}; \quad K_2 = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Покажіть, що кристалографічні напрямки типу $[100]$ є осями легкого намагнічування, а напрямки сімейства $\{111\}$ – осями важкого намагнічування. Визначте енергію магнітної кристалографічної анізотропії.

Розв'язання

Для кристалів кубічної симетрії енергія магнітної анізотропії, віднесена до одиниці об'єму феромагнетика,

$$E_k = K_0 + K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2) + K_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – косинуси кутів між напрямками вектора намагніченості і ребрами кубу.

При намагнічуванні уздовж напрямку $[100]$ напрямні косинуси приймають значення: $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0; \alpha_3 = 0$. Тому $\epsilon_{100} = K_0$.

Аналогічний результат отримаємо для будь-якого іншого напрямку сімейства $\{100\}$.

Якщо намагнічування ведеться уздовж кристалографічного напрямку $[110]$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \alpha_3 = 0$. Звідси випливає, що

$$E_{110} = K_0 + K_1 \left(\frac{1}{4} + 0 + 0 \right) + K_2 \cdot 0 = K_0 + \frac{K_1}{4}.$$

При намагнічуванні у напрямку $[111]$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тому

$$E_{111} = K_0 + K_1 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) K_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} K_2 = K_0 + \frac{1}{3} K_1 + \frac{1}{27} K_2.$$

Оскільки K_1 і K_2 додатні, то із отриманих результатів можна зробити висновок про те, що намагнічування в напрямку $[111]$ пов'язане з найбільшими енергетичними витратами. Енергію E_k , необхідну для повороту вектора намагніченості від осі легкого намагнічування в напрямку осі важкого намагнічування, тобто енергію анізотропії, можна визначити у вигляді різниці:

$$E_k = E_{111} - E_{100} = \frac{K_1}{3} + \frac{K_2}{27} = 1,456 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = 14,56 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь: $E_k = 14,56 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}$.

Приклад 5.12. У кристалі кобальту під впливом внутрішніх однорідних напружень вектор намагніченості насичення орієнтується так, що напрямний косинус відносно базисної площини дорівнює $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Пружні сталі кобальту $c_1 = 3 \cdot 10^9$ Па, $c_2 = 1,5 \cdot 10^9$ Па та $c_4 = 7,47 \cdot 10^8$ Па, а внутрішнє напруження $\sigma_{11} = 9 \cdot 10^7$ Па. Визначте об'ємну магнітострикцію кобальту.

Розв'язання

Відносна об'ємна магнітострикція

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \sum_{i=1}^3 B_{ii}.$$

Коефіцієнти магнітострикційних деформацій B_{ii} дорівнюють:

$$B_{11} = b_1 \alpha_1^2 + b_0;$$

$$B_{22} = b_2 \alpha_2^2 + b_3 \alpha_3^2 + b'_0;$$

$$B_{33} = b_3 \alpha_2^2 + b_2 \alpha_3^2 + b'_0.$$

З урахуванням того, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b_0 = b'_0 = 0, \quad b_1 = -\frac{\sigma_{11}}{c_1},$$

$$b_2 = b_3 = \frac{\sigma_{11}(c_4 - c_2)}{c_1(c_2 + c_4)},$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{\sigma_{11}}{c_1} \left[\frac{2(c_4 - c_2)}{c_2 + c_4} (1 - 2\alpha_1^2) \right] = \frac{9 \cdot 10^7}{30 \cdot 10^8} \left[\frac{2 \cdot 10^8 \cdot (7,47 - 15)}{(15 + 7,47) \cdot 10^8} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) \right] = \\ &= -6,7 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\varepsilon_V = -6,7 \cdot 10^{-3}$.

Приклад 5.13. У феромагнітному кристалі енергії обмінної та магнітної взаємодії значно перевищують інші види енергій. Розрахуйте середні розміри доменів у кристалі, якщо товщина перехідного шару дорівнює 10 між-атомним відстаням.

Розв'язання

Енергія обмінної взаємодії:

$$E_{об} = \frac{1}{2} \alpha M_s^2 S_0 \delta,$$

де $\alpha \sim 10^5$ – константа молекулярного поля; M_s – намагніченість насичення; $S_0 \sim l^2$ – площа поверхні домену; l – його довжина; $\delta = 10^{-7}$ см – товщина перехідного шару.

Енергія магнітної взаємодії між доменами:

$$E_m = -b M_s^2 V,$$

де $b \sim 1$ – чисельний коефіцієнт; $V \sim l^3$ – об'єм домену.

Повна енергія

$$E = E_{\text{об}} + E_m = M_s^2 \left(\frac{1}{2} \alpha \delta l^2 - b l^3 \right).$$

З умови мінімуму повної енергії $\frac{dE}{dl} = 0$ знаходимо:

$$\left. \frac{dE}{dl} \right|_{l=l_0} = (\alpha \delta l_0 - 3b l_0^2) M_s^2 = 0 \quad \text{і} \quad l_0 = \frac{\alpha \delta}{3b}.$$

$$l_0 = \frac{10^5 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 1} = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Відповідь: $l_0 = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$

Приклад 5.14. Один із способів одержання наднизьких температур – використання адіабатичного розмагнічування парамагнітних кристалів. Визначте кількісну характеристику цього ефекту $\left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_S$ для парамагнетика, який задовольняє закону Кюрі $M = \frac{CH}{T}$, де C – константа Кюрі.

Розв'язання

Запишемо вираз для диференціалу ентальпії W магнетика, розміщеного в магнітному полі напруженістю H :

$$dW = TdS + VdP - MdH.$$

Звідси маємо:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_{P,S} = - \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P,H}. \quad (1)$$

Перетворюючи праву частину цієї рівності за допомогою методу якобіанів, отримуємо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{P,H} &= \frac{\partial(M,H)}{\partial(S,H)} = \frac{\partial(M,H)}{\partial(T,H)} \frac{\partial(T,H)}{\partial(S,H)} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H,P} \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{P,H} = \\ &= \frac{T}{C_{H,P}} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H,P}, \end{aligned} \quad (2)$$

оскільки всі часткові похідні в цій рівності розраховуються за сталого тиску P . Тепер співвідношення (1) матиме вигляд:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P,S} = -\frac{T}{C_{H,P}} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H,P}. \quad (3)$$

Розраховуючи похідну $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H,P}$ для парамагнетика, який задовольняє закону Кюрі, знайдемо

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H,P} = -\frac{CH}{T^2}.$$

В результаті рівність (3) набуває вигляду:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P,S} = -\frac{CH}{C_{H,P}T}. \quad (4)$$

При розмагнічуванні, коли напруженість магнітного поля зменшується, температура теж зменшується ($dT < 0$). За низьких температур $C_{P,H} \sim T^3$ згідно із законом Дебая, тому $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P,S} \sim T^{-4}$.

За низьких температур зміна температури дуже значна – обернено пропорційна четвертій степені температури.

Відповідь: $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{P,S} \sim T^{-4}$.

Приклад 5.15. Для одиниці об'єму магнетика з постійною густиною знайдіть різницю $C_H - C_M$ теплоємностей од-

норідного ізотропного магнетика за сталої напруженості магнітного поля \mathbf{H} і сталого магнітного моменту \mathbf{M} .

Розв'язання

Використовуючи співвідношення

$$C_H = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_H, \quad C_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M,$$

перетворимо вираз для C_H :

$$C_H = T \frac{\partial(S, H)}{\partial(T, H)} = T \frac{\partial(S, H)}{\partial(T, M)} \frac{\partial(T, M)}{\partial(T, H)} = \chi T \frac{\partial(S, H)}{\partial(T, M)},$$

оскільки магнітний момент M пов'язаний із напруженістю магнітного поля H співвідношенням $M = \chi H$. Розкриваючи визначник, отримуємо:

$$C_H = \chi T \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M \frac{1}{\chi} - \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M \right\} = C_M - \chi T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M. \quad (1)$$

Похідну $\left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T$ розраховуємо за допомогою співвідношення, справедливого для ізотропних магнетиків:

$$dF = -SdT \pm HdM.$$

Знак „+“ відноситься до пара- та ферромагнетиків, де $\mathbf{M} \parallel \mathbf{H}$; знак „-“ – до діаманетиків, де \mathbf{M} та \mathbf{H} мають протилежні напрямки. Звідси маємо:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T = \mp \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), маємо:

$$C_H = C_M \pm \chi T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M^2.$$

Оскільки для пара- і феромагнетиків $\chi > 0$, то завжди справедливе співвідношення:

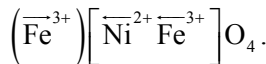
$$C_H - C_M = \pm \chi T \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_M^2 > 0.$$

Відповідь: $\left(\frac{\partial T}{\partial H} \right)_{P,S} \sim T^{-4}$.

Приклад 5.16. Визначте індукцію насичення поблизу температури 0 К для нікелевого фериту NiFe_2O_4 , що кристалізується в структурі оберненої шпінелі з періодом ґратки 0,834 нм. Магнітні моменти катіонів Fe^{3+} і Ni^{2+} прийміть рівними відповідно $5\mu_B$ і $2\mu_B$.

Розв'язання

Ферит нікелю характеризується наступним розподілом катіонів за тетра- і октаедричними кисневими міжвузловинами:



До складу елементарної кубічної комірки входить вісім структурних одиниць NiFe_2O_4 , причому магнітні моменти катіонів, що знаходяться в різних кисневих міжвузловинах, антипаралельні. Тому намагніченість насичення фериту

$$M_s = \frac{p_m}{V} = \frac{8(p_{m\text{Ni}^{2+}} + p_{m\text{Fe}^{3+}} - p_{m\text{Fe}^{3+}})}{a^3} = \frac{16\mu_B}{a^3}.$$

Звідси індукція насичення

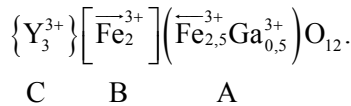
$$\mathcal{B}_s = \mu_0 M_s = \frac{16\mu_0\mu_B}{a^3} = \frac{16 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9,274 \cdot 10^{-24}}{(0,834 \cdot 10^{-9})^3} = 0,32 \text{ Тл}.$$

Відповідь: $B_s = 0,32 \text{ Тл}$.

Приклад 5.17. Обчисліть намагніченість насичення змішаного фериту складу $Y_3Fe_{4,5}Ga_{0,5}O_{12}$ поблизу абсолютного нуля, якщо відомо, що галій займає в кристалічній ґратці тетраедричні кисневі міжвузловини. Як зміниться температура Кюрі при додаванні галію до ітрієвого ферогранату?

Розв'язання

Розподіл катіонів за кисневими міжвузловинами у фериті даного складу характеризується схемою



Магнітний момент катіонів Y^{3+} і Ga^{3+} дорівнює нулю. Сумарна намагніченість проявляється як різниця намагніченостей під ґраток А і В. Магнітний момент в розрахунку на одну структурну одиницю

$$P_{ms} = P_{mA} - P_{mB} = 2,5 p_{mFe^{3+}} - 2 p_{mFe^{3+}} = 0,5 \cdot 5 \mu_B = 2,5 \mu_B.$$

Намагніченість насичення $M_{s0} = \frac{\kappa P_{ms}}{a^3}$, де κ – кратність елементарної комірки (для гранату $\kappa = 8$). Період ґратки всіх ферогранатів близько 1,24 нм. Тому

$$M_{s0} = \frac{8 \cdot 2,5 \mu_B}{a^3} = \frac{8 \cdot 2,5 \cdot 9,274 \cdot 10^{-24}}{(1,24)^3 \cdot 10^{-27}} = 0,975 \cdot 10^5 \frac{A}{m}.$$

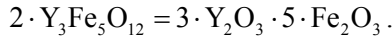
Розбавлення підґратки А немагнітними йонами призводить до ослаблення непрямої обмінної взаємодії типу А – 0 – В, що знижує стійкість магнітної упорядкованості до теплового впливу. Тому при введенні галію в ґратку ітрієвого ферогранату температура Кюрі зменшується.

Відповідь: $M_{s0} = 0,975 \cdot 10^5 \frac{A}{m}.$

Приклад 5.19. Розрахуйте, в якому масовому співвідношенні потрібно змішати оксиди ітрію і заліза, щоб при спіканні отримати ітрієвий ферогранат стехіометричного складу.

Розв'язання

Хімічний склад ферогранату можна представити у вигляді



Звідси отримаємо

$$\frac{m_{Y_2O_3}}{m_{Fe_2O_3}} = \frac{3M_{Y_2O_3}}{5M_{Fe_2O_3}},$$

де M – молярна маса відповідних оксидів ($M_{Y_2O_3} = 226 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$;

$$M_{Fe_2O_3} = 160 \frac{\text{г}}{\text{моль}}).$$

Отже,

$$\frac{m_{Y_2O_3}}{m_{Fe_2O_3}} = \frac{0,6 \cdot 226}{160} = 0,847.$$

Відповідь: $\frac{m_{Y_2O_3}}{m_{Fe_2O_3}} = 0,847.$

Приклад 5.20. Зразок фериту характеризується параметрами: $\omega_B = 10^{10} \text{ с}^{-1}$; $\nu = 10^7 \text{ с}^{-1}$; $\omega_s = 0,2\omega_B$. Визначте напівширину резонансної кривої $\mu''_{xx}(\omega)$ за рівнем 0,5 та максимальне значення $\mu''_{xx\text{max}}$.

Розв'язання

Шукана складова тензора комплексної магнітної проникності фериту в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{B} = \mathcal{B}e_z$

$$\hat{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_B \omega_s}{(\omega - iv)^2 - \omega_B^2} = 1 - \frac{\omega_B \omega_s}{\omega^2 - v^2 - \omega_B^2 - 2iv\omega}.$$

Перетворимо останній вираз до вигляду

$$\hat{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_B \omega_s (\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)}{(\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)^2 + (2v\omega)^2} - \frac{2i\omega_B \omega_s v\omega}{(\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)^2 + (2v\omega)^2}.$$

Враховуючи, що $\hat{\mu}_{xx} = \mu'_{xx} - i\mu''_{xx}$, знайдемо

$$\mu'_{xx} = 1 - \frac{\omega_B \omega_s (\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)}{(\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)^2 + (2v\omega)^2}; \quad \mu''_{xx} = \frac{2\omega_B \omega_s v\omega}{(\omega^2 - v^2 - \omega_B^2)^2 + (2v\omega)^2}.$$

Внаслідок того, що $\omega_B \gg v$, поблизу резонансу $\omega \sim \omega_B$ вираз для μ''_{xx} можна переписати у вигляді

$$\mu''_{xx} \approx \frac{2\omega_B \omega_s v\omega}{(\omega - \omega_B)^2 (\omega + \omega_B)^2 + 4v^2 \omega^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_s v}{(\omega - \omega_B)^2 + v^2}.$$

Позначаючи $\omega - \omega_B \equiv \Delta\omega$, отримуємо формулу:

$$\mu''_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega_s}{v}}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{v}\right)^2},$$

яка описує резонансну криву.

Максимальне значення

$$\mu''_{xx \max} = \frac{1}{2} \frac{\omega_s}{v} = 0,5 \cdot \frac{0,2 \cdot 10^{10}}{10^7} = 100$$

досягається при $\Delta\omega = 0$.

Напівширина резонансної кривої

$$2\Delta\omega_{0,5} = 2v = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідь: $\mu''_{xx\max} = 100$; $2\Delta\omega_{0,5} = 2 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$.

Приклад 5.21. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в зразку фериту вздовж постійного підмагнічуючого поля $\mathcal{B} = \mathcal{B}_z \mathbf{e}_z$. Виведіть формулу для визначення кута повороту площин поляризації хвилі (ефект Фарадея), вважаючи, що величини ω , ω_B та ω_s задані.

Розв'язання

Припустимо, що при $z = 0$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \mathbf{e}_x.$$

Розкладемо лінійно поляризовану хвилю на дві хвилі з круговою поляризацією, для яких

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{п}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_z); \quad \tilde{\mathcal{E}}_{\text{л}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_z),$$

де \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z – орти прямокутної декартової системи координат.

Хвиля з правою круговою поляризацією при $z \neq 0$ буде мати комплексну амплітуду напруженості електричного поля

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{п}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_z) e^{-i\beta_{\text{п}} z},$$

а хвиля з лівою круговою поляризацією напруженість

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{л}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_z) e^{-i\beta_{\text{л}} z}.$$

Їх сума – це плоска лінійно поляризована хвиля з компонентами:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_x &= \frac{\mathcal{E}_0}{2} (e^{-i\beta_{\text{п}} z} + e^{-i\beta_{\text{л}} z}) = \mathcal{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\text{п}} + \beta_{\text{л}}}{2} z} \frac{e^{-i\frac{\beta_{\text{п}} - \beta_{\text{л}}}{2} z} + e^{i\frac{\beta_{\text{п}} - \beta_{\text{л}}}{2} z}}{2} = \\ &= \mathcal{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\text{п}} + \beta_{\text{л}}}{2} z} \cos\left(\frac{\beta_{\text{п}} - \beta_{\text{л}}}{2} z\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_y &= \frac{\mathbf{E}_0}{2i} (e^{-i\beta_n z} - e^{-i\beta_l z}) = \mathbf{E}_0 e^{-i\frac{\beta_n + \beta_l}{2} z} \frac{e^{i\frac{\beta_n - \beta_l}{2} z} - e^{-i\frac{\beta_n - \beta_l}{2} z}}{2i} = \\ &= \mathbf{E}_0 e^{-i\frac{\beta_n + \beta_l}{2} z} \sin\left(\frac{\beta_n - \beta_l}{2} z\right),\end{aligned}$$

або для миттєвих значень

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x &= \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{\beta_n - \beta_l}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\beta_n - \beta_l}{2} z + \varphi_0\right), \\ \mathbf{E}_y &= \mathbf{E}_0 \sin\left(\frac{\beta_n - \beta_l}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\beta_n - \beta_l}{2} z + \varphi_0\right).\end{aligned}$$

Сумарний вектор напруженості електричного поля має постійну величину

$$\mathbf{E} = \sqrt{\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{E}_y^2} = \mathbf{E}_0.$$

Кут повороту площини поляризації

$$\varphi = \arctg \frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_x} = (\beta_n - \beta_l) \frac{z}{2}.$$

Отже, для фериту без втрат остаточно маємо

$$\varphi = \frac{\pi z_0}{2} \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_s}{\omega - \omega_H}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_s}{\omega + \omega_H}} \right).$$

Відповідь:
$$\varphi = \frac{\pi z_0}{2} \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_s}{\omega - \omega_H}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_s}{\omega + \omega_H}} \right).$$

Задачі для самостійного розв'язування

Намагніченість. Магнітна сприйнятливість

- 5.1. Визначте намагніченість M тіла при насиченні, якщо магнітний момент кожного атома дорівнює магнетону Бора μ_B , і концентрація атомів $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.
- 5.2. Магнітна сприйнятливість χ Мангану дорівнює $1,21 \cdot 10^{-4}$. Обчисліть намагніченість M , питому намагніченість $M_{\text{пит}}$ і молярну намагніченість M_μ Мангану в магнітному полі напруженістю $H = 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Густина Мангану вважати відомою.
- 5.3. Визначте магнітну сприйнятливість χ AgBr, якщо його молярна магнітна сприйнятливість $\chi_\mu = -7,5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{М}^3}{\text{моль}}$ і густина $\rho = 6,47 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.
- 5.4. Визначте магнітну сприйнятливість χ і молярну магнітну сприйнятливість χ_μ Платини, якщо питома магнітна сприйнятливість $\chi_{\text{пит}} = 1,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{М}^3}{\text{кг}}$.
- 5.5. Магнітна сприйнятливість χ Алюмінію дорівнює $2,1 \cdot 10^{-5}$. Визначте його питому магнітну $\chi_{\text{пит}}$ і молярну χ_μ сприйнятливості.
- 5.6. Вісмутова кулька радіусом $r = 1$ см поміщена в однорідне магнітне поле індукцією $B_0 = 0,5$ Тл. Визначте магнітний момент p_m , набутий кулькою, якщо магнітна сприйнятливість вісмуту дорівнює $-1,5 \cdot 10^{-4}$.
- 5.7. При напруженості магнітного поля $H = 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ магнітна індукція у вісмуті $B = 12,564$ мТл. Визначте магнітну сприйнят-

ливість χ речовини. Який висновок можна зробити про природу намагніченості?

- 5.8. Напруженість H магнітного поля в міді дорівнює $10^6 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Визначте намагніченість M міді і магнітну індукцію B , якщо відомо, що питома магнітна сприйнятливість $\chi_{\text{пит}} = -1,1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{М}^3}{\text{кг}}$.
- 5.9. Визначте намагніченість платини при внесенні в магнітне поле напруженістю $10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Магнітна сприйнятливість платини дорівнює $3 \cdot 10^{-4}$.
- 5.10. Якою індукцією характеризуватиметься магнітне поле напруженістю $5 \cdot 10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$, якщо внести у нього хлористе залізо? Хлористе залізо має магнітну сприйнятливість 0,0025.
- 5.11. Знайдіть величину і напрямок вектора магнітної індукції \mathbf{B} в прямокутній системі координат (X_1, X_2, X_3) , що виникає в кристалічному тілі площею S і товщиною d ($d \ll \sqrt{S}$) під дією зовнішнього поля H в указаному напрямку, якщо магнітна проникність кристала в цій системі координат описується тензором μ_{ij} .

№ варіанту	$H, \frac{\text{А}}{\text{м}}$	Напрямок	μ_{ij}
1.	$1,55 \cdot 10^4$	(1;1;0)	$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 9 & 1 \\ 4 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
2.	$2,24 \cdot 10^4$	(1;0;1)	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

3.	$2,36 \cdot 10^4$	$(0;1;1)$	$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -4 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$
4.	$1,84 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
5.	$2,2 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 11 & -6 & 7 \\ -6 & 12 & 0 \\ 7 & 0 & 22 \end{pmatrix}$
6.	$2,1 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
7.	$1,2 \cdot 10^4$	$(0; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
8.	$1,1 \cdot 10^4$	$(0;1;1)$	$\begin{pmatrix} 9 & -7 & 4 \\ -7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
9.	$1,3 \cdot 10^4$	$(0;1;0)$	$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 9 \\ -3 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
10.	$1,4 \cdot 10^4$	$(1;1;1)$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
11.	$1,5 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

12.	$1,6 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
13.	$1,7 \cdot 10^4$	$\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
14.	$1,8 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 11 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
15.	$1,9 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
16.	$2,9 \cdot 10^4$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$2,3 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
18.	$2,5 \cdot 10^4$	$(0; 0; 1)$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
19.	$2,7 \cdot 10^4$	$(1; 0; 0)$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
20.	$2,9 \cdot 10^4$	$(0; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21.	$2,8 \cdot 10^4$	$(1;1;0)$	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
22.	$1,0 \cdot 10^4$	$(1;0;1)$	$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
23.	$3,0 \cdot 10^4$	$(0;1;1)$	$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
24.	$3,3 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
25.	$3,1 \cdot 10^4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Діа- та парамагнетизм

- 5.12. Виходячи з формули для ларморової частоти прецесії, покажіть, що діамагнітна сприйнятливість атомарного газу визначається наближено за формулою (5.3).
- 5.13. Визначте частоту ω_L ларморової прецесії електронної орбіти в атомі, який перебуває в магнітному полі Землі індукцією $\mathcal{B} = 50$ мкТл.
- 5.14. Знайдіть молярну діамагнітну сприйнятливість ксенону, якщо при ввімкненні магнітного поля з індукцією $\mathcal{B} = 1$ Тл один моль газу набуває енергію $\varepsilon = 2,14 \cdot 10^{-4}$ Дж.
- 5.15. Атом Гідрогену перебуває в магнітному полі з індукцією $\mathcal{B} = 1$ Тл. Обчисліть магнітний момент p_{m_j} , зумовлений прецесією електронної орбіти. Прийміть, що середнє значення

квадрата відстані $\overline{r^2}$ електрона від ядра дорівнює $\frac{2}{3}a_0$ (a_0 – радіус першої борівської орбіти).

5.16. Основний внесок у діамagnetизм дають зовнішні електрони атомів. У атома Хлору 8 зовнішніх електронів, а його діамagnetітна сприйнятливість дорівнює $\chi_{\mu} = -30,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{М}^3}{\text{кмоль}}$. Оцініть радіус зовнішньої електронної оболонки атома Хлору.

5.17. У бензолі (C_6H_6) вуглецеві атоми утворюють правильні гексагони зі стороною $a = 1,4 \text{ \AA}$. Хвильова функція кожного зовнішнього електрона від вуглецевого атому простягається на все кільце атомів. Оцініть внесок цих електронів у питому діамagnetітну сприйнятливість рідкого бензолу, густина якого дорівнює $\rho = 0,88 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}$.

5.18. Обчисліть молярну діамagnetітну сприйнятливість атомарного Гідрогену в основному стані, для якого хвильова функція має вигляд

$$\psi(r) = \sqrt{\pi a_0^3} e^{-\frac{r}{a_0}},$$

де a_0 – перший борівський радіус.

5.19. Діамagnetітна сприйнятливість міді $\chi = -9,5 \cdot 10^{-6}$. Визначте намагніченість і магнітну індукцію в мідному дроті при дії на нього однорідного магнітного поля напруженістю $10^3 \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Вкажіть, як орієнтовані вектори намагніченості і магнітної індукції один відносно одного.

5.20. Молярна магнітна сприйнятливість χ_{μ} оксиду хрому Cr_2O_3 дорівнює $5,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{М}^3}{\text{моль}}$. Визначте магнітний момент p_m , молекули Cr_2O_3 (у магнетонах Бора) при температурі $T = 300 \text{ К}$.

5.21. Виведіть вираз для магнітної сприйнятливості слабкого розчину постійних диполів, магнітний момент кожного з яких

дорівнює p_m , в припущенні, що диполі орієнтовані довільно відносно напрямку слабого магнітного поля, тобто коли магнітна енергія диполя $p_m \mathcal{B} \ll k_B T$. Якою буде сприйнятливість, якщо диполі орієнтовані лише за або проти поля?

5.22. Питома парамагнітна сприйнятливість $\chi_{\text{пит}}$ триоксиду ванадію V_2O_3 при температурі $t = 17^\circ \text{C}$ дорівнює $1,89 \cdot 10^{-7} \frac{\text{M}^3}{\text{кг}}$.

Визначте магнітний момент p_{m_j} (в магнетонах Бора), який припадає на молекулу V_2O_3 .

5.23. Молекула кисню має магнітний момент $p_{m_j} = 2,8\mu_B$ (де μ_B – магнетон Бора). Визначте намагніченість M газоподібного кисню за нормальних умов в слабкому магнітному полі ($\mathcal{B}_0 = 10$ мТл) і в дуже сильному полі.

5.24. Знайдіть магнітний момент парамагнітного газу, який містить N атомів у стані ${}^2S_{\frac{1}{2}}$ при температурі T у магнітному полі \mathcal{B} , за умови $p_m \mathcal{B} \ll k_B T$.

5.25. Обчисліть парамагнітну сприйнятливість 1 см^3 газоподібного кисню, який перебуває в слабкому магнітному полі за нормальних умов. Магнітний момент молекули кисню $p_m = 2,8\mu_B$.

5.26. Парамагнітна сіль при температурі 300 K містить 10^{18} см^{-3} йонів. Магнітний момент йону дорівнює одному магнетону Бора. Розрахуйте, у скільки разів число йонів з магнітними моментами, паралельними полю, перевищує число антипаралельних полю йонів, якщо напруженість поля $12,5 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{м}}$.

Знайдіть намагніченість у цьому полі.

5.27. Визначте, за якого найбільшого значення магнітної індукції \mathcal{B} вже слід користуватися не наближеним виразом функції Ланжевена $L(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}$, а точним, щоб похибка обчислень не перевищувала 1%. Для розрахунків прийміть магнітний мо-

мент молекул рівним магнетону Бора. Температура $T = 300 \text{ К}$.

- 5.28. Визначте найбільше значення величини α , за якого похибка, викликана заміною точного виразу функції Ланжевена наближенням $L(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}$, не перевищуватиме 1%.
- 5.29. Визначте температуру T , за якої ймовірність того, що молекула має від'ємну проекцію магнітного моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля, дорівнюватиме 10^{-3} . Магнітний момент молекули вважайте рівним одному магнетону Бора, а магнітну індукцію \mathcal{B} поля – рівною 8 Тл.
- 5.30. Визначте, у скільки разів кількість молекул, які мають додатні проекції магнітного моменту на напрямок вектора магнітної індукції зовнішнього поля ($\mathcal{B} = 1 \text{ Тл}$), більша від кількості молекул, які мають від'ємну проекцію, у двох випадках: 1) $T_1 = 300 \text{ К}$; 2) $T_2 = 1 \text{ К}$. Магнітний момент молекули прийміть рівним магнетону Бора.
- 5.31. При температурі $T_1 = 300 \text{ К}$ і магнітній індукції $\mathcal{B}_1 = 0,5 \text{ Тл}$ було досягнуто певної намагніченості M парамагнетика. Визначте магнітну індукцію \mathcal{B}_2 , за якої збережеться така сама намагніченість, якщо температуру підвищити до $T_2 = 450 \text{ К}$.
- 5.32. Обчисліть роботу, необхідну для виштовхування 1 г парамагнітної речовини з питомою сприйнятливістю $\chi_{\text{шт}}$ із зони з індукцією магнітного поля \mathcal{B}_0 у зону з індукцією магнітного поля, якою можна знехтувати.

Феро- та антиферомагнетизм

- 5.33. Магнітний момент атому гадолінію $7,95\mu_{\text{В}}$. Визначте намагніченість насичення кристалу гадолінію, припускаючи, що він має гранецентровану кубічну ґратку з періодом $3,2 \text{ \AA}$.

- 5.34. Магнітна індукція насичення металевого нікелю, що має густину $8,96 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, дорівнює 0,65 Тл. Визначте магнітний момент, що припадає на один атом нікелю (у магнетонах Бора).
- 5.35. Середній магнітний момент атома феромагнетика $0,6\mu_B$, магнітна індукція насичення 51 Тл. Обчисліть період гранецентрованої кубічної ґратки.
- 5.36. За температури 477°C виміряли залежність намагніченості насичення нікелекобальтового сплаву від температури. Розрахуйте відносну намагніченість сплаву, якщо його температура Кюрі 527°C .
- 5.37. В рідкоземельному елементі Гадолінію g -фактор дорівнює 2, а магнітний момент на атом – $7,94\mu_B$. При температурі -23°C на гадоліній діють полем напруженістю $125 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Визначте намагніченість гадолінію.
- 5.38. Відомо, що зі зниженням температури феромагнетика його спонтанна намагніченість зростає. Розрахуйте відносну намагніченість заліза при температурах 10 і 100 К.
- 5.39. Хлорид нікелю має складну шарувату магнітну структуру. Температура Кюрі цієї сполуки 50 К. Визначте об'ємну сприйнятливість метамагнетика хлориду нікелю при температурах 40 і 100 К.
- 5.40. Зразок сталі внесли в магнітне поле напруженістю $H = 1600 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Визначте намагніченість M сталі.
- 5.41. Прямокутний феромагнітний брусок об'ємом $V = 10 \text{ см}^3$ набув у магнітному полі напруженістю $H = 800 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ магнітний момент $p_m = 0,8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Визначте магнітну проникність μ феромагнетика.
- 5.42. Магнітна сприйнятливість нікелю при температурах 400 і 800°C відповідно дорівнює $1,25 \cdot 10^{-3}$ і $1,14 \cdot 10^{-3}$. Визначте температуру Кюрі і магнітну сприйнятливість при 600°C .

- 5.43. Монокристал заліза намагнічений до насичення у напрямку діагоналі грані. Знайдіть значення магнітного поля, яке відповідає намагніченості насичення.
- 5.44. Оцініть величину молекулярного поля (поля Вейсса) у Ферумі, температура Кюрі якого $\Theta = 770^\circ\text{C}$.
- 5.45. Враховуючи, що у феромагнетика є обмінне поле H_{ef} , отримайте вираз для його парамагнітної сприйнятливості (закон Кюрі – Вейсса)

$$\chi \propto \frac{1}{T - \Theta}.$$

- 5.46. Оцініть енергію обмінної взаємодії (в еВ) у нікелі, в якому впорядкування електронних спінів відбувається за температури $\Theta = 358^\circ\text{C}$.
- 5.47. Обчисліть індукцію і напруженість магнітного поля, створеного однорідно намагніченим феромагнетиком ($\mathbf{M} = \text{const}$), який має форму кулі радіусу r , якщо її намагніченість дорівнює \mathbf{M} .
- 5.48. В ізохорно-адіабатичному процесі залізо та нікель намагнічуються магнітним полем напруженістю $12,5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ за температури 500 K . Зміна температури при цьому складає для кожного з металів 5 K . Розрахуйте теплоємності заліза та нікелю в ізохорно-адіабатичному процесі.
- 5.49. Обчисліть середню кількість $\langle n \rangle$ магнетонів Бора, яка припадає на один атом Феруму, якщо при насиченні намагніченість Феруму дорівнює $M = 1,84 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$.
- 5.50. Вимірювання дають наступні значення констант магнітної кристалографічної анізотропії для нікелю. Який має структуру гранецентрованого кубу: $K_1 = -5,1 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$; $K_2 = 0$. Скориставшись цими даними, визначте напрямки осей: а) легкого, б) важкого намагнічування в монокристалах нікелю.

- 5.51. На еліпсоїдальних зразках заліза, нікелю, кобальту та гадолінію довжиною 1 м виміряли видовження уздовж магнітного поля, що відповідно дорівнювало $100 \cdot 10^{-7}$, $50 \cdot 10^{-7}$, $40 \cdot 10^{-7}$, $35 \cdot 10^{-7}$ м. Визначте поперечну і поздовжню магнітострикцію у цих металах.
- 5.52. При вимірюванні магнітострикції полікристалічного феромагнетика, ізотропного за магнітострикцією, відносно видовження виявилось рівним нулю. Знайдіть умову, необхідну для отримання такого результату в феромагнетиках.
- 5.53. Монокристали деяких феромагнетиків та феритів мають магнітострикції, наведені в таблиці.

Матеріал	$\lambda_{100}, 10^6$	$\lambda_{111}, 10^6$
Залізо	25	-19
Нікель	-46	25
Кобальт	-60	16
Магнетит	-20	78
Кобальтовий ферит	-590	120
Нікелевий ферит	-36	-4

Визначте магнітострикцію полікристалічних матеріалів.

- 5.54. В сильному магнітному полі намагніченість насичення змінилася на 2 %. Визначте відносну зміну магнітострикції.
- 5.55. Відомо, що енергія обмінної взаємодії сильно спадає при збільшенні відстані між атомами. Оцініть енергію обмінної взаємодії для заліза, нікелю, кобальту, гадолінію.
- 5.56. У феромагнітних матеріалах разом з тепловою та електростатичними енергіями виявляється також енергія, обумовлена магнітною та обмінною взаємодією електронів. Оцініть внесок кожної з цих енергій.
- 5.57. В залізонікелевому сплаві, який містить 0,4 ат.% нікелю, термообробкою досягнута повна неупорядкованість. Визначте величину обмінної взаємодії між атомами Феруму та Ніколу.
- 5.58. В кристалі кубічної симетрії магнітопружною енергією та другою константою магнітної кристалографічної анізотропії

можна знехтувати. Знайдіть осі легкого намагнічування такого кристалу.

- 5.59. Сферичне тіло з „жорсткого“ феромагнетика (постійний магніт) об'ємом V перебуває в однорідному магнітному полі індукцією \mathbf{B}_0 . Обчисліть потенціальну енергію взаємодії феромагнетика із зовнішнім магнітним полем, вважаючи, що його намагніченість \mathbf{M} ($\mathbf{M} = \text{const}$) утворює з напрямком поля кут θ . Чому дорівнює енергія феромагнетика у власному деполяризованому полі?
- 5.60. Напруженість поля анізотропії одновісної пермалоевої плівки складає $150 \frac{\text{A}}{\text{м}}$. На плівку діє поздовжнє магнітне поле напруженістю $50 \frac{\text{A}}{\text{м}}$. Знайдіть величину поперечного магнітного поля, при якій відбудеться перемагнічування плівки.
- 5.61. У Гадолінію, що належить до групи рідкоземельних елементів, магнетизм обумовлений спіновим магнітним моментом $4f$ -оболонки, розташованій у „глибині“ атому. У кожного йону Gd є 12 найближчих сусідів, а середнє значення спіну $S = \frac{7}{2}$. Оцініть величину обмінного інтеграла в Gd, у якого температура Кюрі $\Theta = 293 \text{ K}$.
- 5.62. У феноменологічній теорії феромагнетизму Вейсса кожний магнітний атом зазнає дії ефективного поля H_{ef} , тоді як у квантовій теорії Гейзенберга – Френкеля енергія взаємодії атомів виражається співвідношенням $U_{\text{обм}} = -2JS_iS_j$ (S_i, S_j – спіни атомів, які взаємодіють). Враховуючи взаємодію атомів лише з k найближчими сусідами і вважаючи його з ними однаковим, знайдіть зв'язок феноменологічної константи Вейсса з обмінним інтегралом J . Об'єм V , що припадає на один атом, вважайте заданим.
- 5.63. У феромагнетиках за низьких температур помітний внесок у теплові процеси вносять коливання в системі поляризованих спінових моментів – спінові хвилі, для яких закон дисперсії має вигляд $\omega = Ak^2$, а середня кількість квантів – магнонів – у

тепловій рівновазі визначається тією ж формулою Планка, що і для фононів. З'ясуйте характер температурної залежності внеску магنونів у теплоємність феромагнетиків.

- 5.64. За відсутності полів розсіювання товщина доменів монокристалічного зразку складає 10^{-7} м. Після намагнічування зразку на його поверхні з'являється нормальна складова намагніченості, що дорівнює 0,4 від намагніченості насичення. Оцініть рівноважну товщину доменів за наявності полів розсіювання.
- 5.65. Нехай полю намагніченості замикаючих доменів відповідає струм 25 А, а замикаючі домени поширені у довжину на 0,05 м і взаємодіють з магнітним полем основних доменів, яке має перпендикулярний напрямок, індукція якого 100 Тл. Знайдіть величину та напрямок сили взаємодії між доменами.
- 5.66. В антиферомагнетик у двома еквівалентними підгратками, константа молекулярної взаємодії в яких дорівнює 10^3 , існує від'ємна магнітна взаємодія між підгратками, яка складає $-0,5 \cdot 10^{-3}$. Стала Кюри для даного антиферомагнетика 10^{-20} К. Знайдіть температуру Нееля.
- 5.67. В антиферомагнетиків (спіново впорядкованих магнетиків з антипаралельними магнітними моментами сусідніх атомів) закон дисперсії довгохвильових магنونів має вигляд $\omega = |\mathbf{k}|v$, де швидкість $v = \text{const}$. Відмінною властивістю магنونів у антиферомагнетиках є те, що для кожного значення \mathbf{k} можливі два стани поляризації. Знайдіть відношення внесків магنونів і фононів у теплоємність за низьких температур для кристала з величиною $v = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ і усередненою швидкістю звуку $s = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
- 5.68. Поляризоване світло відбивається від полірованої поверхні нікелевої пластинки, яка знаходиться у сильному магнітному полі. Визначте кут повороту площини поляризації.

Ферити та магнітний резонанс

- 5.69. Чому дорівнює намагніченість насичення за температури 0 К для ферогранату гадолінію, якщо магнітні моменти катіонів гадолінію і заліза дорівнюють відповідно $7\mu_B$ і $5\mu_B$, а період кристалічної ґратки сполуки $a = 1,244$ нм ?
- 5.70. Запишіть розподіл катіонів за кисневими міжвузловинами для нікель-цинкового фериту складу $Ni_{0,8}Zn_{0,2}Fe_2O_4$. Обчисліть для цього матеріалу індукцію насичення за температури поблизу абсолютного нуля і порівняйте отриманий результат з індукцією насичення для фериту нікелю за тих самих умов. Період кристалічної ґратки твердого розчину прийняти рівним $0,84$ нм .
- 5.71. Визначте гіромагнітне відношення γ для вільного електрона.
- 5.72. Вільний електрон перебуває в постійному магнітному полі ($B_0 = 1$ Тл). Визначте частоту ν_0 змінного магнітного поля, за якої відбувається резонансне поглинання енергії електроном (g -фактор для вільного електрона дорівнює 2).
- 5.73. Визначте відношення $\frac{\omega_{\text{ЕПР}}}{\omega_{\text{цик}}}$ резонансної частоти електронного парамагнітного резонансу до циклотронної частоти (g -фактор дорівнює 2,00232).
- 5.74. Стандартні спектрометри для спостереження електронного парамагнітного резонансу (ЕПР) мають на одному з діапазонів фіксовану частоту $\nu_0 = 9,9$ Гц. Визначте магнітну індукцію поля B_0 , за якої відбувається резонансне поглинання енергії радіочастотного поля вільного електрона (g -фактор дорівнює 2).
- 5.75. Визначте гіромагнітне відношення γ для вільного протона.
- 5.76. Вільний протон перебуває в постійному магнітному полі ($B_0 = 1$ Тл). Визначте частоту ν_0 змінного магнітного поля, за якої відбувається резонансне поглинання енергії протоном (g -фактор дорівнює 5,58).

- 5.77. У дослідах з дослідження магнітним резонансним методом магнітних властивостей атомів ^{25}Mg в основному стані виявлено резонансне поглинання енергії при магнітній індукції \mathcal{B}_0 поля, що дорівнює 0,682 Тл, і частоті ν_0 змінного магнітного поля, що дорівнює 19,9 МГц. Обчисліть ядерний g -фактор і магнітний момент p_m^n нейтрона. Відомо, що напрямки спінового механічного і магнітного моментів протилежні. Спін нейтрона $I = \frac{1}{2}$.
- 5.78. Для молекули HD, що знаходиться в основному стані, ядерний магнітний резонанс спостерігався: 1) для протонів ($I = \frac{1}{2}$) у постійному магнітному полі ($\mathcal{B}_0 = 94$ мТл) при частоті ν_0 змінного магнітного поля, що дорівнює 4 МГц; 2) для дейтонів ($I = 1$) відповідно при $\mathcal{B}_0 = 0,37$ Тл і $\nu_0 = 2,42$ МГц. Визначте за цими даними g -фактори і магнітні моменти p_m^p і p_m^d протона і дейтона (в одиницях μ_N).
- 5.79. За якої частоти ν_0 змінного магнітного поля буде спостерігатися ЯМР ядер ^{31}P ($I = \frac{1}{2}$; $p_m = 2,63\mu_N$), якщо магнітна індукція B_0 постійного поля дорівнює 2,35 Тл?
- 5.80. Ядра Li ($I = \frac{3}{2}$; $g = 2,18$) знаходяться в однорідному магнітному полі ($\mathcal{B}_0 = 2$ Тл). Температура T оточуючого середовища дорівнює 80 К. Знайдіть відношення заселеностей кожного з можливих енергетичних рівнів до заселеності рівня з мінімальною енергією.
- 5.81. Визначте магнітний момент насичення при температурі 0 К фериту $\text{Fe}(\text{NiFe})\text{O}_4$.
- 5.82. Розрахуйте магнітний момент насичення фериту $(\text{Zn}_{0,94}^{2+}\text{Fe}_{0,06}^{3+}) \cdot [\text{Zn}_{0,06}^{2+}\text{Fe}_{1,94}^{3+}]\text{O}_4$ при температурі 0 К.

- 5.83. Сполука Fe_3O_4 представляє собою ферит і кристалізується в структуру оберненої шпінелі. Визначте період ґратки Fe_3O_4 , а також магнітний момент насичення Fe_3O_4 при $T = 0 \text{ K}$ (іонний радіус O^{2-} дорівнює $0,132 \text{ nm}$).
- 5.84. Дайте визначення обмінній взаємодії. Оцініть магнітний момент насичення при $T = 0 \text{ K}$ в фериті $\text{NiO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, який кристалізується в структуру оберненої шпінелі.
- 5.85. Розгляньте природу виникнення магнітних моментів у феритах. Розгляньте магнітний момент насичення при температурі 0 K фериту $\text{Mg}_{0,1}^{2+}\text{Fe}_{0,9}^{3+}[\text{Mg}_{0,9}^{2+}\text{Fe}_{1,1}^{3+}]\text{O}_4$. Як зміниться магнітний момент насичення фериту зі збільшенням температури? Чому він дорівнюватиме за температури, вищої за температуру Нелля?
- 5.86. Оцініть дійсну μ'_{xx} та уявну μ''_{xx} частини складової μ_{xx} тензора комплексної магнітної проникності фериту на частотах $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $\omega_2 = (2\pi \cdot 10^{10} + 2\pi \cdot 10^7) \text{ c}^{-1}$ і $\omega_3 = (2\pi \cdot 10^{10} - 2\pi \cdot 10^7) \text{ c}^{-1}$, якщо $\nu = 2\pi \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$, $\omega_B = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ і $\omega_s = 0,4\omega_B$. Магнітне поле орієнтоване вздовж осі z .
- 5.87. НВЧ-ферит з параметрами $M_0 = 1,35 \cdot 10^{15} \frac{\text{A}}{\text{m}}$, $\varepsilon = 13,8$, $\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ використовується в пристрої для повороту площини поляризації плоскої електромагнітної хвилі. Визначте мінімальну довжину феритового зразку l_0 , необхідну для створення кута повороту, що дорівнює $\frac{\pi}{4}$, якщо лінійно поляризована хвиля поширюється вздовж магнітного поля $H_0 = 1,42 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, орієнтованого вздовж осі z , а частота коливань складає $2\pi \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$.

6. Оптичні властивості твердих тіл

Основні формули та визначення

Електромагнітне поле в металі описується макроскопічними рівняннями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (6.4)$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – вектор напруженості електричного поля в точці \mathbf{r} у момент часу t ; $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – вектор напруженості змінного магнітного поля; \mathbf{B} і \mathbf{D} – вектори електричної та магнітної індукції; \mathbf{j} – густина струму; ρ – некомпенсована густина заряду електронів провідності.

У немагнітних металах магнітна проникність $\mu = 1$, а магнітна сприйнятливість $\chi \sim 10^{-5}$, тому можна записати, що

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (6.5)$$

Електрична індукція \mathbf{D} , що характеризує струм зміщення, пропорційна діелектричній проникності кристалічної ґратки ϵ_L . В типових металах струм зміщення $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ набагато менший струму провідності $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ у широкій області частот, аж до оптичних. Тому за частот нижче оптичних струмом зміщення в рівнянні (6.2) можна знехтувати. З тим ступенем точності можна вважати, що індукція

\mathbf{D} дорівнює нулю і в рівнянні (6.3), де зводиться при цьому до умови електричної квазінейтральності металу

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (6.6)$$

Отже, електродинамічні рівняння для металу записуються у вигляді:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (6.8)$$

Для монохроматичної хвилі частотою ω , поле якої змінюється в часі за гармонічним законом

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \quad (6.9)$$

рівняння (6.7) – (6.8) набувають вигляду:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (6.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (6.11)$$

Замість двох рівнянь для \mathbf{E} і \mathbf{H} зручно мати одне рівняння для електричного поля. Виключаючи \mathbf{H} з рівнянь (6.10) – (6.11), отримуємо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (6.12)$$

Систему електродинамічних рівнянь необхідно доповнити матеріальним рівнянням середовища, яке встановлює зв'язок між струмом провідності \mathbf{j} та електричним полем \mathbf{E} . Конкретна форма цього зв'язку залежить від багатьох чинників – властивостей зразка, частоти і довжини хвилі, температури і постійного магнітного поля. Тому розподіл хвильового поля в металі залежить від цих чинників.

У більшості випадків електромагнітне поле не проникає вглиб металу, а локалізується в тонкому приповерхневому шарі. Це явище називають *скін-ефектом*. Воно обумовлене високою електричною провідністю металів: зовнішнє поле індукуює змінний елек-

тричний струм, що екранує метал від електромагнітного поля. Скін-ефект характеризується глибиною проникнення і законом розподілу поля в провіднику. При частотах, набагато менших за оптичні, глибина проникнення електромагнітного поля в метал набагато менша довжини збуджуючої електромагнітної хвилі. Це є наслідком того, що ефективна діелектрична проникність електронного газу дуже велика. Комплексна діелектрична проникність металу визначається співвідношенням

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \quad (6.13)$$

де ε_L – діелектрична проникність кристалічної ґратки, а σ – провідність металу. Ця формула – наслідок закону Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.14)$$

що являє собою матеріальне рівняння для електронного газу в області низьких частот. Дійсно, якщо підставити закон Ома (6.14) і відношення

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_L \mathbf{E}$$

у друге рівняння Максвелла (6.2), то його праву частину можна записати у вигляді

$$-i\omega \left(\varepsilon_L + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) \mathbf{E} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E}.$$

За низьких частот відношення $\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$, отже, і діелектрична проникність $\varepsilon(\omega)$ виявляються дуже великими. Тому глибина проникнення електромагнітного поля в метал дуже мала. Саме ця обставина надзвичайно спрощує картину проникнення електромагнітного поля у зразок. Поле в металі практично завжди поширюється по нормалі до поверхні – незалежно від кута падіння зовнішньої хвилі і того, чи є ця хвиля плоскою, сферичною або циліндричною. Через це достатньо розглянути скін-ефект на прикладі нормального падіння плоскої хвилі на плоский металевий зразок.

Введемо систему координат XYZ , в якій вісь z напрямлена уздовж внутрішньої нормалі до поверхні металу, тобто паралельно вектору поширення хвилі, а осі x та y лежать у площині розділу метал – вакуум. Нехай на поверхні металу $z=0$ падає лінійно-поляризована монохроматична хвиля, вектор електричного поля якої має напрямок уздовж осі x . Електродинамічні рівняння (6.12) для поля хвилі в металі разом із законом Ома (6.14) у цьому випадку призводять до рівнянь:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_\alpha(z)}{dz^2} = i\omega\mu_0\sigma \mathcal{E}_\alpha(z), \quad \alpha = x, y, \quad \sigma \mathcal{E}_\alpha(z) = 0. \quad (6.15)$$

З цих рівнянь та граничної умови $\mathcal{E}_y(0) = 0$, випливає, що відмінна від нуля лише компонента \mathcal{E}_x , яка експоненційно згасає з відстанню від поверхні,

$$\mathcal{E}_x(z) = \mathcal{E}_x(0) e^{-(1-i)\frac{z}{\delta_0}}, \quad (6.16)$$

де $\mathcal{E}_x(0)$ – значення електричного поля на поверхні, а

$$\delta_0 = c \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\omega\sigma}}. \quad (6.17)$$

Величина δ_0 характеризує відстань, на якій амплітуда поля спадає в e разів. Вона називається *глибиною проникнення* або *товщиною скін-шару*. Товщина скін-шару δ_0 залежить від частоти поля і температури. Зі зростанням ω вона зменшується обернено пропорційно $\sqrt{\omega}$. Зміна δ_0 з температурою обумовлена температурною залежністю провідності σ . Така залежність глибини проникнення δ_0 від частоти поля і температури, разом з експоненціальним законом розподілу поля в металі, характерна для „*нормального*“ *скін-ефекту*.

Внаслідок високої діелектричної проникності електронного газу поле всередині металу представляє собою плоску хвилю, що поширюється вздовж нормалі до поверхні. Тангенціальні складові

електричного і магнітного полів у хвилі пов'язані між собою першим рівнянням Максвелла (6.12), яке в компонентах має вигляд:

$$-\frac{d^2 \mathcal{E}_y}{dz^2} = i\omega\mu_0 H_x, \quad \frac{d^2 \mathcal{E}_x}{dz^2} = i\omega\mu_0 H_y. \quad (6.18)$$

У векторній формі цю пару рівнянь можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_t}{dz^2} = i\omega\mu_0 [H_t \times \mathbf{n}], \quad (6.19)$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор уздовж внутрішньої нормалі до поверхні, а індекс t означає тангенціальні складові електричного і магнітного полів. Якщо в рівняння (6.19) підставити вираз для електричного поля в металі за умов нормального скін-ефекту (6.16), то отримаємо простий зв'язок між електричним та магнітним полями

$$\mathcal{E}_t(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{i\sigma}} [H_t(z) \times \mathbf{n}] = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} [H_t(z) \times \mathbf{n}]. \quad (6.20)$$

Звідси видно, що амплітуда магнітного поля в металі завжди набагато більше амплітуди електричного поля, а їх відношення дорівнює $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$. Іншими словами, фазова швидкість у металі

$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ набагато менше за швидкість світла у вакуумі.

Співвідношення (6.20) між електричним та магнітним полями виконується як всередині металу, так і на його поверхні, тобто має місце рівність

$$\mathcal{E}_t(0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} [H_t(0) \times \mathbf{n}]. \quad (6.21)$$

Оскільки поле поза металом представляє собою суму полів падаючої та відбитої хвиль, а тангенціальні складові електричного і магнітного полів на поверхні неперервні, то співвідношення (6.21) можна використати як граничну умову для визначення амплітуди відбитої хвилі. Ця умова є частковим випадком більш загальної гра-

ничної умови, так званої **умови Леонтовича**, що записується у вигляді:

$$\mathbf{E}_t(0) = \zeta(\omega) [\mathbf{H}_t(0) \times \mathbf{n}]. \quad (6.22)$$

Величина $\zeta(\omega)$ називається *поверхневим імпедансом*.

Порівняння двох співвідношень між електричним та магнітним полями на поверхні, (6.21) і (6.24), показує, що в умовах нормального скін-ефекту поверхневий імпеданс дорівнює

$$\zeta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{i\sigma}}. \quad (6.23)$$

Вираз (6.23) справедливий не лише для нормального скін-ефекту, але і в усіх випадках, коли нелокальні ефекти не відіграють ролі і середовище описується діелектричною сталою $\varepsilon(\omega)$.

Безрозмірна величина $\zeta(\omega)$ представляє собою відношення довжин хвилі або фазових швидкостей електромагнітної хвилі в середовищі і вакуумі відповідно. В силу значної величини діелектричної проникності електронного газу це відношення є набагато меншим одиниці.

Поверхневий імпеданс є комплексною величиною:

$$\zeta(\omega) = R(\omega) - iX(\omega). \quad (6.24)$$

Його дійсна частина $R(\omega)$ називається *поверхневим опором*, а уявна частина $X(\omega)$ – *реактивним поверхневим опором* або *реактансом*.

Поверхневий імпеданс визначає коефіцієнт відбивання та зсув фази відбитої хвилі.

Відбивання та заломлення хвиль. Розглянемо відбивання та заломлення монохроматичної плоскої хвилі на плоскій межі розділу між однорідними середовищами. Падіння відбувається з прозорого середовища (середовище 1); для іншого середовища припущення щодо прозорості поки що робити не будемо. Величини, які відносяться до падаючої та відбитої хвиль, будемо позначати інде-

ксами 0 і 1, відповідно, а до заломленої хвилі – індексом 2 (рис. 6.1). напрямком нормалі до поверхні поділу оберемо як вісь z (з додатним напрямком вглиб середовища 2).

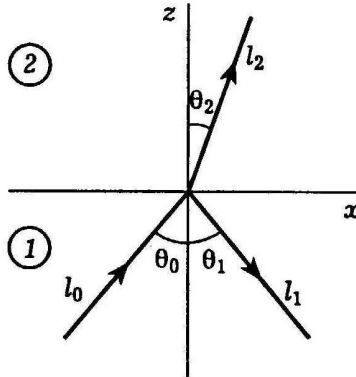


Рисунок 6.1

Через повну однорідність у площині xz , залежність розв'язку рівнянь поля від цих координат у всьому просторі має бути однакою. Це означає, що компоненти k_x , k_y хвильового вектора для усіх трьох хвиль однакові. Звідси випливає, що напрямки поширення усіх хвиль лежать в одній площині; оберемо її як площину xz .

З рівностей

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \quad (6.25)$$

випливає для z -компонент цих векторів:

$$k_{1z} = -k_{0z} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_0, \quad (6.26)$$

$$k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2^2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_0}$$

в обох середовищах вважаємо $\mu = 1$. Вектор \mathbf{k}_0 , за визначенням, дійсний. Разом з ним дійсний також \mathbf{k}_1 . Величина k_{2z} у поглинальному середовищі комплексна, причому корінь має бути взятий з

таким знаком, щоб було $\text{Im}k_{2z} > 0$ відповідно тому, що заломлена хвиля згасає вглиб середовища 2.

Якщо прозорі обидва середовища, то з рівностей (6.25) випливають відомі **закони відбивання та заломлення**:

$$\theta_0 = \theta_1, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6.27)$$

Для визначення амплітуд відбитої та заломленої хвиль потрібно звернутися до граничних умов на поверхні розділу ($z = 0$). При цьому ми розглянемо окремо два випадки – коли електричне поле \mathbf{E}_0 лежить у площині падіння або перпендикулярне до неї; тим самим ми розглянемо й загальний випадок, коли \mathbf{E}_0 може бути розкладене на дві такі компоненти.

Припустимо спочатку, що \mathbf{E}_0 перпендикулярне площині падіння; із міркувань симетрії очевидно, що те саме буде відноситися і до полів \mathbf{E}_1 і \mathbf{E}_2 у відбитій та заломленій хвилях. Вектор \mathbf{H} лежить у площині xz . Граничні умови вимагають неперервності $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}$ і H_x ; причому

$$H_x = -\frac{k_z}{\omega} \mathcal{E}_y.$$

Поле в середовищі 1 є сума полів падаючої та відбитої хвиль, так що отримуємо два рівняння:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2, \quad k_{0z} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) = k_{2z} \mathcal{E}_2.$$

Експоненціальні множники в \mathcal{E} скорочуються в обох частинах рівності через однаковість k_x (а також частоти ω) в усіх трьох хвилях; нижче під \mathbf{E} розуміють всюди комплексні амплітуди хвиль. Розв'язок написаних рівнянь призводить до **формул Френеля**:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1 &= \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}} \boldsymbol{\varepsilon}_0.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Якщо прозорі обидва середовища, то за допомогою співвідношень (6.27) можна представити ці формули у вигляді

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} \boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (6.29)$$

Аналогічно можна розглянути випадок, коли $\boldsymbol{\varepsilon}$ лежить у площині падіння; при цьому зручно проводити розрахунки для магнітного поля, перпендикулярного до площини падіння. У результаті отримують ще дві **формули Френеля**:

$$\begin{aligned}H_1 &= \frac{\varepsilon_2 k_{0z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{0z} + \varepsilon_1 k_{2z}} H_0 = \frac{\varepsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)}{\varepsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)} H_0, \\ H_1 &= \frac{2\varepsilon_2 k_{0z}}{\varepsilon_2 k_{0z} + \varepsilon_1 k_{2z}} H_0 = \frac{2\varepsilon_2 \cos \theta_0}{\varepsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)} H_0.\end{aligned}\quad (6.30)$$

Якщо прозорі обидва середовища, то формули (6.30) набувають вигляду

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (6.31)$$

Коефіцієнт відбивання R визначається як відношення середнього (за часом) відбитого від поверхні потоку енергії до падаючого потоку. Кожний з цих потоків задається середнім значенням z -компоненти *вектора Пойтінга* відповідної хвилі:

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_1 |\boldsymbol{\varepsilon}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 |\boldsymbol{\varepsilon}_1|^2} = \frac{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|^2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|^2}.$$

За нормального падіння ($\theta_0 = 0$) обидва випадки поляризації еквівалентні і коефіцієнт відбивання задається формулою

$$R = \frac{\left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2}{\quad} \quad (6.32)$$

Ця формула справедлива як для прозорого, так і для поглинального відбиваючого середовища. Якщо ввести n_2 і \varkappa_2 згідно $\sqrt{\varepsilon_2} = n_2 + i\varkappa_2$, то наприклад, при падінні з порожнечі ($\varepsilon_1 = 1$) отримаємо

$$R = \frac{(n_2 - 1)^2 + \varkappa_2^2}{(n_2 + 1)^2 + \varkappa_2^2} \quad (6.33)$$

Коефіцієнти відбивання при похилому падінні даються згідно (6.29) і (6.31) даються формулами

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)} \quad (6.34)$$

Тут і нижче індекси \perp і \parallel позначають випадки, коли поле \mathbf{E} відповідно перпендикулярно або паралельно площині падіння. Відмітимо таку симетрію: вирази (6.34) не змінюються при взаємній заміні θ_2 і θ_0 (фази відбитих хвиль при цьому змінюються, згідно з формулами (6.29) і (6.31) на π). Іншими словами, коефіцієнт відбивання для хвилі, що падає із середовища 1 під кутом θ_0 , дорівнює коефіцієнту відбивання для хвилі, що падає із середовища 2 під кутом θ_2 .

Цікаву властивість має відбивання світла під таким кутом θ_0 , при якому $\theta_0 + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ (відбитий та заломлений промені при цьому взаємно перпендикулярні). Позначимо це значення через θ_p ; напи-

савши $\sin \theta_p = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) = \cos \theta_2$ і скориставшись законом заломлення (6.27), отримаємо

$$\operatorname{tg} \theta_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.35)$$

При $\theta_0 = \theta_p$ маємо $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_p) = \infty$ і R_{\parallel} перетворюється в нуль. Тому при будь-якому напрямку поляризації світла, що падає під цим кутом, відбите світло буде поляризоване так, що електричне поле в ньому перпендикулярне до площини падіння. Таким же поляризованим буде відбите світло і при падінні природного світла; усі компоненти з іншою поляризацією при цьому взагалі не віді́ються. Кут θ_p називають *кутом повної поляризації* або *кутом Брюстера*. Відмітимо, що, в той час як відбивання може призводити до повної поляризації природного світла, в заломленому світлі повна поляризація не досягається за жодного кута падіння.

Плоска хвиля в анізотропному середовищі. При вивченні оптики анізотропних тіл – кристалів – обмежимося найбільш важливим випадком, коли середовище можна вважати (у даній області частот) немагнітним і прозорим. Відповідно до цього зв'язок між напруженостями та індукціями електричного і магнітного полів задається рівностями

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6.36)$$

причому всі компоненти діелектричного тензора ε_{ik} дійсні, а його головні значення додатні.

Рівняння Максвелла для поля монохроматичної хвилі мають вигляд:

$$\omega \mu_0 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \omega \mathbf{D} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (6.37)$$

У плоскій хвилі, що поширюється в прозорому середовищі, всі величини пропорційні e^{ikr} з дійсним хвильовим вектором \mathbf{k} . Продиференціювавши за координатами, отримаємо

$$\omega\mu_0\mathbf{H} = [\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}], \quad \omega\mathbf{D} = -\mu_0[\mathbf{k}\mathbf{H}]. \quad (6.38)$$

Звідси перш за все видно, що три вектори \mathbf{k} , \mathbf{D} і \mathbf{H} взаємно перпендикулярні. Крім того, вектор \mathbf{H} перпендикулярний до $\boldsymbol{\varepsilon}$. Оскільки вектор \mathbf{H} перпендикулярний одночасно до трьох векторів \mathbf{D} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ і \mathbf{k} , то останні лежать в одній площині. На рис. 6.2 проілюстровано взаємне розташування усіх векторів. По відношенню до напрямку хвильового вектора поперечні \mathbf{D} і \mathbf{H} , але не $\boldsymbol{\varepsilon}$. На рисунку вказаний також напрямок потоку енергії \mathbf{S} у хвилі. Він визначається векторним добутком $[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{H}]$, тобто перпендикулярний до $\boldsymbol{\varepsilon}$ і \mathbf{H} . На відміну від хвилі в ізотропному середовищі, тут напрямок потоку енергії не співпадає з напрямком хвильового вектора. Очевидно, що вектор \mathbf{S} компланарний з векторами $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{D} , \mathbf{k} і складає з вектором \mathbf{k} кут, рівний куту між $\boldsymbol{\varepsilon}$ і \mathbf{D} .

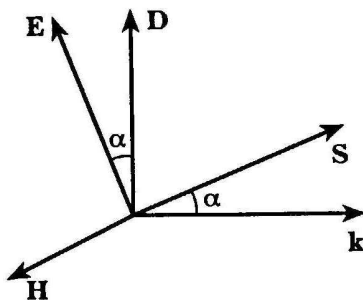


Рисунок 6.2

Виділимо з абсолютної величини вектора \mathbf{k} множник $\frac{\omega}{c}$ і запишемо

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (6.39)$$

Абсолютна величина визначеного таким чином вектора \mathbf{n} в анізотропному середовищі залежить від його напрямку, на відміну від ізотропного середовища, в якому $n = \sqrt{\varepsilon}$ залежить лише від частоти. З урахуванням (6.39), формули (6.38) переписуться у вигляді

$$\mu_0 \mathbf{H} = [\mathbf{n}\boldsymbol{\varepsilon}], \quad \mathbf{D} = -\mu_0 [\mathbf{n}\mathbf{H}]. \quad (6.40)$$

Випишемо також вираз для вектора потоку енергії в плоскій хвилі:

$$\mathbf{S} = [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{H}] = \{ \mathbf{n}\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n}) \} \quad (6.41)$$

(у цій формулі $\boldsymbol{\varepsilon}$ і \mathbf{H} дійсні).

Дотепер ми не використовували співвідношення (6.36), яке містить матеріальні константи ε_{ik} . Сумісне використання цього співвідношення і рівнянь (6.40) дозволяє визначити залежність $\omega(\mathbf{k})$.

Підставляючи першу з формул (6.40) у другу, отримаємо

$$\mathbf{D} = -[\mathbf{n}[\mathbf{n}\boldsymbol{\varepsilon}]] = n^2 \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (6.42)$$

Якщо прирівняти компоненти цього вектора виразами $\varepsilon_0 \varepsilon_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k$ згідно (6.36), то отримаємо три однорідних лінійних рівняння для трьох складових вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$n^2 \boldsymbol{\varepsilon}_i - n_i n_k \boldsymbol{\varepsilon}_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

або

$$(n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_0 \varepsilon_{ik}) \boldsymbol{\varepsilon}_k = 0. \quad (6.43)$$

Умова сумісності цих рівнянь вимагає перетворення на нуль визначника, складеного з їхніх коефіцієнтів:

$$\det | n^2 \delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} | = 0. \quad (6.44)$$

Фактичне обчислення цього визначника зручно проводити, використовуючи як декартові осі координат x , y , z головними осями тензора ε_{ik} (які називають *головними діелектричними осями*). Головні значення тензора позначимо через $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$. Просте обчислення призводить до такого рівняння:

$$n^2 \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2 \right) - \left[n_x^2 \varepsilon^{(x)} \left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)} \right) + n_y^2 \varepsilon^{(y)} \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)} \right) + n_z^2 \varepsilon^{(z)} \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)} \right) \right] + \varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)} = 0. \quad (6.45)$$

Відмітимо, що старші члени (шостого степеня за n_i) при розкриванні взаємно скорочуються; ця обставина, зрозуміло, не випадкова і пов'язана з тим, що хвиля має всього два, а не три незалежних напрямків поляризації.

Рівняння (6.45) – так зване **рівняння Френеля** – одне з основних рівнянь кристалооптики. Воно визначає в неявному вигляді закон дисперсії, тобто залежність між частотою і хвильовим вектором (функціями частоти є головні значення $\varepsilon^{(i)}$, а в деяких випадках – також і напрямки головних осей тензора ε_{ik}). Зазвичай при розгляді монохроматичних хвиль частота, а з нею і всі $\varepsilon^{(i)}$ є заданими постійними величинами, і тоді рівняння (6.45) визначає абсолютну величину хвильового вектора за його напрямком. При заданому напрямку \mathbf{n} (6.45) є квадратне рівняння для n^2 з дійсними коефіцієнтами. Тому кожному напрямку \mathbf{n} відповідає в загальному випадку два різних абсолютних значення хвильового вектора.

Рівняння (6.45) (з постійними коефіцієнтами $\varepsilon^{(i)}$) визначає в координатах n_x , n_y , n_z деяку поверхню – *поверхню хвильових векторів* (або *променевою*). У загальному випадку це поверхня четвертого порядку.

Форма променевої поверхні визначається рівнянням:

$$s^2 \left(\varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)} s_x^2 + \varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(z)} s_y^2 + \varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} s_z^2 \right) - \left[s_x^2 \left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)} \right) + s_y^2 \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)} \right) + s_z^2 \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)} \right) \right] + 1 = 0. \quad (6.46)$$

При заданому напрямку \mathbf{s} (6.46) дає квадратне рівняння для s^2 , що має в загальному випадку два різних дійсних кореня. Таким чином, вздовж кожного напрямку в кристалі можуть поширюватися два променя з різними хвильовими векторами.

Розглянемо тепер питання про характер поляризації хвиль, які поширюються в анізотропному середовищі. Рівняння (6.43), з

яких було отримано рівняння Френеля, для цього незручно, оскільки в них входить напруженість \mathbf{E} , в той час як поперечною в хвилі (по відношенню до заданого \mathbf{n}) є індукція \mathbf{D} . Для того, щоб із самого початку врахувати поперечність вектора \mathbf{D} , оберемо тимчасово нову систему координат, одна з осей якої направлена вздовж хвильового вектора хвилі. Дві ж поперечні осі будемо позначати грецькими індексами, що пробігають значення 1, 2. Поперечні складові рівності (6.42) дають $D_\alpha = n^2 \epsilon_0 \mathbf{E}_\alpha$; підставляючи сюди

$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ (де $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ – компонента тензора, оберненого тензору $\epsilon_{\alpha\beta}$), отримаємо

$$\left(n^{-2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right) D_\beta = 0. \quad (6.47)$$

Умова сумісності цих двох ($\alpha = 1, 2$) рівнянь з двома невідомими D_1, D_2 полягає в рівності нулю їх визначника:

$$\det \left| n^{-2} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_{\alpha\beta}^{-1} \right| = 0. \quad (6.48)$$

Ця умова співпадає, зрозуміло, з написаним у вихідній системі координат x, y, z рівнянням Френеля. При цьому вектори \mathbf{D} , які відповідають двом значенням n , направлені вздовж головних осей двовимірного симетричного тензора другого рангу $\epsilon_{\alpha\beta}^{-1}$. Згідно із загальними теоремами звідси випливає, що ці вектори взаємно перпендикулярні. Отже, в двох хвилях з однаковим напрямком хвильового вектора вектори електричної індукції лінійно поляризовані в двох взаємно перпендикулярних площинах.

Рівняння (6.47) допускають просту геометричну інтерпретацію. Побудуємо в системі координат x, y, z (знову повертаємось до головних діелектричних осей) тензорний еліпсоїд, що відповідає тензору ϵ_{ik}^{-1} , тобто поверхню

$$\varepsilon_{ik}^{-1} x_i x_k = \frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} = 1 \quad (6.49)$$

(рис. 6.3). Перетнемо еліпсоїд площиною, що проходить через його

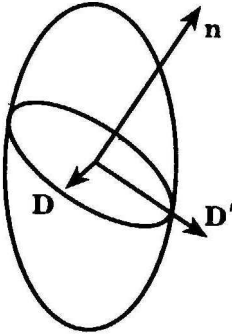


Рисунок 6.3

центр, перпендикулярно до заданого напрямку \mathbf{n} . Фигурою перерізу буде в загальному випадку еліпс; довжини його головних осей визначають значення n , а їх напрямки – відповідні напрямки коливань (вектори \mathbf{D}). З цієї побудови (у загальному випадку різних $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$) очевидно, що якщо хвильовий вектор направлений, наприклад, вздовж осі x , то напрямками поляризації

\mathbf{D} будуть осі y і z . Якщо ж вектор \mathbf{n} лежить у площині xu один із напрямків поляризації також лежить у площині xu , а другий – перпендикулярно до неї.

Аналогічними властивостями володіють поляризації двох хвиль з однаковим напрямком променевого вектора. Замість напрямків індукції \mathbf{D} тут потрібно розглядати напрямки поперечного до \mathbf{s} вектора \mathbf{E} , причому замість рівнянь (6.47) будемо мати аналогічні рівняння

$$\left(s^{-2} \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_0 \varepsilon_{\alpha\beta} \right) \mathbf{E}_\beta = 0. \quad (6.50)$$

Геометрична побудова здійснюється в цьому випадку за допомогою тензорного еліпсоїда

$$\varepsilon_{ik} x_i x_k = \varepsilon^{(x)} x^2 + \varepsilon^{(y)} y^2 + \varepsilon^{(z)} z^2 = 1, \quad (6.51)$$

який відповідає прямому тензору ε_{ik} (еліпсоїд Френеля).

Оптичні властивості одновісних кристалів. Оптичні властивості кристала залежать у першу чергу від симетрії його діелектричного тензора ε_{ik} . У цьому відношенні кристали поділяють на три категорії – кубічні, одновісні та двохвісні.

У кристалі кубічної системи $\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$, тобто три головних значення тензора співпадають, а напрямки головних осей цілком довільні. Тому по відношенню до своїх оптичних властивостей кубічні кристали не відрізняються від ізотропних тіл.

До одновісних належать кристали ромбоєдричної, тетрагональної та гексагональної систем. Одна з головних осей тензора ε_{ik} співпадає тут з віссю симетрії відповідно третього, четвертого або шостого порядку; цю вісь називають у оптиці *оптичною віссю* кристала (нижче оберемо цю вісь як вісь z , а відповідне головне значення ε_{ik} позначимо як ε_{\parallel}). Напрямки же двох інших головних осей (в площині, перпендикулярній до оптичної осі) довільні, а відповідні головні значення діелектричного тензора співпадають (нижче вони позначені як ε_{\perp}).

Якщо в рівнянні Френеля (6.45) покласти $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(y)} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon^{(z)} = \varepsilon_{\parallel}$, то вираз у його лівій частині розпадається на два квадратичних множника:

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp}) \left[\varepsilon_{\parallel} n_z^2 + \varepsilon_{\perp} (n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \right] = 0.$$

Іншими словами, рівняння четвертого порядку розпадається на два рівняння другого порядку:

$$n^2 = \varepsilon_{\perp}, \quad (6.52)$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} = 1. \quad (6.53)$$

Геометрично це означає, що поверхня хвильових векторів (у загальному випадку – поверхня четвертого порядку) розпадається на дві окремі поверхні – сферу та еліпсоїд. Тут можливі два випадки: якщо $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$, то сфера лежить поза еліпсоїдом, а якщо $\varepsilon_{\perp} < \varepsilon_{\parallel}$ – то всередині його (у першому випадку одновісний кристал називають *від'ємним*, а у другому – *додатним*; рис. 6.4). Обидві поверхні торкаються одна одну в двох точках – протилежних полюсах, що лежать на осі n_z . Інакше кажучи, напрямку оптичної осі відповідає всього одне значення хвильового вектора.

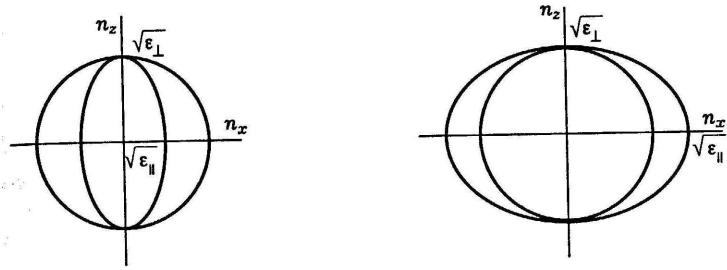


Рисунок 6.4

Аналогічний вигляд має променева поверхня. Її рівняння можуть бути отримані з (6.52) – (6.53):

$$s^2 = \frac{1}{\epsilon_{\perp}}, \quad (6.54)$$

$$\epsilon_{\perp} s_z^2 + \epsilon_{\parallel} (s_x^2 + s_y^2) = 1. \quad (6.55)$$

У додатному кристалі еліпсоїд лежить всередині сфери, а у від'ємному – навпаки.

Отже, в одновісному кристалі можуть поширюватися хвилі двох типів. По відношенню до одного з цих типів хвилі (так звані *звичайні* хвилі) кристал поводить себе як ізотропне тіло з показником заломлення $n = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$. Абсолютна величина хвильового вектора дорівнює $\frac{\omega n}{c}$ незалежно від його напрямку, а напрямок променевого вектора співпадає з напрямком \mathbf{n} .

У хвилях же другого типу (*незвичайні* хвилі) величина хвильового вектора залежить від кута θ його нахилу до оптичної осі. Згідно (6.53)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}}. \quad (6.56)$$

Щодо променевого вектора незвичайної хвилі, то його напрямок не співпадає з напрямком хвильового вектора, але лежить у тій же площині, яка проходить через оптичну вісь (цю площину називають *головним перерізом*).

Нехай ця площина співпадає з площиною xz ; продиференціювавши ліву частину рівності (6.53) по n_z та по n_x і взявши відношення цих похідних, знайдемо напрямок променевого вектора:

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{\varepsilon_{\perp} n_x}{\varepsilon_{\parallel} n_z}.$$

Іншими словами, кут θ' між променевим вектором та оптично. віссю пов'язаний з кутом θ простим співвідношенням:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta. \quad (6.57)$$

Напрямки \mathbf{n} і \mathbf{s} співпадають лише для хвиль, що поширюються вздовж оптичної осі та перпендикулярно до неї.

Питання про напрямок поляризації звичайної і незвичайної хвиль вирішується дуже просто. Для цього достатньо помітити, що чотири вектори \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{s} і \mathbf{n} у будь-якій хвилі компланарні. У незвичайній хвилі напрямки \mathbf{s} і \mathbf{n} не співпадають, але лежать в одному і тому ж головному перерізі. Тому ця хвиля поляризована так, що вектори \mathbf{E} і \mathbf{D} лежать у цьому ж перерізі. З іншого боку, вектори \mathbf{D} у звичайній і незвичайній хвилях з однаковим напрямком \mathbf{n} (або вектори \mathbf{E} при однаковому напрямку \mathbf{s}) взаємно перпендикулярні. Тому поляризація звичайної хвилі така, що \mathbf{E} і \mathbf{D} лежать у площині, перпендикулярній до головного перерізу.

Виключенням є лише хвилі, що поширюються в напрямку оптичної осі. У цьому напрямку різниця між звичайною і незвичайною хвилями зникає, їх поляризації відповідно додаються, даючи в загальному випадку еліптично поляризовану хвилю.

Явище заломлення плоскої хвилі, яка падає на поверхню кристала, істотно відрізняється від заломлення на межі двох ізотропних середовищ. Закон заломлення (і відбивання) і тут можна отримати з умови неперервності дотичної до площини поділу компоненти \mathbf{n}_{τ} хвильового вектора. Тому хвильовий вектор заломленої (як і відбитої) хвилі лежить у площині падіння. При цьому, однак, у кристалі виникає водночас дві різних заломлених хвилі (*подвійне*

заломлення) відповідно до двох можливих значень нормальної компоненти n_n , що дає рівняння Френеля при заданому \mathbf{n}_τ .

В одновісному кристалі при заломленні виникають звичайна і незвичайна заломлені хвилі. Перша повністю аналогічна звичайним заломленим хвилям у ізотропних тілах; так, її променевий вектор (який співпадає за напрямком з її хвильовим вектором) лежить у площині падіння. Напрямок же променевого вектора незвичайної хвилі лежить, взагалі кажучи, не в площині падіння.

Двоосні кристали. У двоосних кристалів усі три головних значення тензора ε_{ik} різні. Сюди відносять кристали триклинної, моноклінної й ромбічної систем. У кристалах триклинної системи положення головних діелектричних осей не пов'язано з будь-якими певними кристалографічними напрямками; зокрема, воно змінюється із зміною частоти, від якої залежать усі компоненти ε_{ik} . У кристалах моноклінної системи кристалографічно фіксована одна з головних діелектричних осей (вона співпадає з віссю симетрії другого порядку або перпендикулярна до площини симетрії); положення ж двох інших головних осей залежить від частоти. Нарешті, в кристалах ромбічної системи фіксоване положення всіх трьох головних осей – вони мають співпадати з трьома взаємно перпендикулярними осями симетрії другого порядку.

Вивчення оптичних властивостей двоосних кристалів пов'язано з дослідженням рівнянь Френеля в його загальному вигляді.

Прийmemo в подальшому для визначеності, що

$$\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)}. \quad (6.58)$$

Для з'ясування характеру форми поверхні четвертого порядку, яка визначається рівнянням (6.45), перш за все визначимо форму її перерізів координатними площинами. Поклавши в рівнянні $n_z = 0$, визначимо, що його ліва частина розпадається на два множника:

$$(n^2 - \varepsilon^{(z)}) (\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 - \varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)}) = 0.$$

Звідси бачимо, що контур перерізу в площини $xу$ складається із кола

$$n^2 = \varepsilon^{(x)} \quad (6.59)$$

і еліпса

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon^{(x)}} = 1, \quad (6.60)$$

причому за умови (6.58), еліпс лежить усередині кола.

Аналогічно знайдемо, що перерізи площинами yz і xz теж складаються із еліпса і кола, але в площині yz еліпс лежить поза колом, а в площині xz вони перетинають один одного. Отже, поверхня хвильових векторів є поверхня, яка самоперетинається, зображеного на рис. 6.5 типу (на рисунку відображена поверхня в одному октанті).

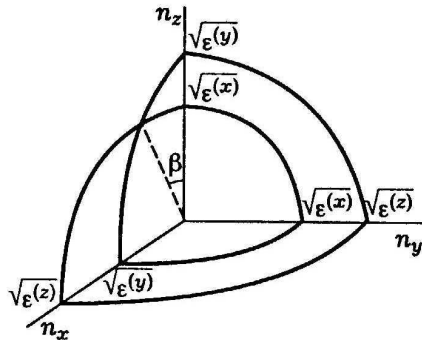


Рисунок 6.5

Ця поверхня має чотири особливі точки – чотири точки самоперетинання, які лежать по одній у кожному квадранті площини xz . Особливі точки поверхні, заданої рівнянням виду $f(n_x, n_y, n_z) = 0$, визначають рівність нулю всіх трьох перших похідних функції f . Диференціюючи вираз у лівій частині рівняння (6.45), отримаємо наступні рівняння

$$\begin{aligned}
n_x \left[\varepsilon^{(x)} \left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)} \right) - \varepsilon^{(x)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2 \right) \right] &= 0, \\
n_y \left[\varepsilon^{(y)} \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)} \right) - \varepsilon^{(y)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2 \right) \right] &= 0, \\
n_z \left[\varepsilon^{(z)} \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)} \right) - \varepsilon^{(z)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2 \right) \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{6.61}$$

причому має задовольнятися, звичайно, і саме рівняння (6.45)). Наперед знаючи, що шукані напрямки \mathbf{n} лежать у площині xz , припускаємо $n_y = 0$, а з двох інших рівнянь після простого обчислення маємо:

$$n_x^2 = \frac{\varepsilon^{(z)} \left(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)} \right)}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}, \quad n_z^2 = \frac{\varepsilon^{(x)} \left(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)} \right)}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}. \tag{6.62}$$

Напрямки цих векторів \mathbf{n} нахилені до осі z під кутом β , для якого

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm \operatorname{tg} \beta = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)} \left(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)} \right)}{\varepsilon^{(x)} \left(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)} \right)}}. \tag{6.63}$$

Цією формулою визначають дві осі (два напрямки) в площині xz , кожна з яких проходить через дві протилежні особливі точки і нахилена під кутом β до осі z . Їх називають *оптичними осями* (або *бінормальми*) кристала; на рис. 6.5 штриховою лінією показано одну з них. Напрямки оптичних осей ϵ , очевидно, єдиними напрямками, в яких хвильовий вектор може мати усього одне значення¹.

Аналогічні властивості має променева поверхня. Для отримання відповідних формул достатньо замінити \mathbf{n} на \mathbf{s} і ε на $\frac{1}{\varepsilon}$.

Зокрема, є дві *оптичні осі променів* (або *бірадіалі*), які містяться також у площині xz і нахилені до осі z під кутом γ :

¹ На тензорному еліпсоїді (6.51) бінормалі визначаються як напрямки, перпендикулярні до яких перерізи еліпсоїда є колами.

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}} \operatorname{tg} \beta. \quad (6.64)$$

Оскільки $\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(z)}$, то $\gamma < \beta$.

Напрямки \mathbf{n} і \mathbf{s} співпадають лише для хвиль, які поширюються в напрямках координатних осей (тобто головних діелектричних осей). Якщо \mathbf{n} лежить в будь-якій із координатних площин, то \mathbf{s} лежить в тій самій площині. Із цього правила є, однак, одне чудове виключення – для хвильових векторів, направлених уздовж оптичних осей.

Загальні формули, які визначають вектор \mathbf{s} по вектору \mathbf{n} із (6.62) дають невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Походження і сенс цієї невизначеності цілком зрозумілі із наступних геометричних міркувань. Поблизу особливої точки зовнішня і внутрішня порожнини поверхні хвильових векторів являють собою конуси із загальною вершиною. У цій вершині (особливій точці) напрямок нормалі до поверхні стає невизначеним; між тим вказані формули визначають напрямок \mathbf{s} саме як напрямок нормалі. Насправді хвильовому вектору, направленому вздовж оптичної осі (бінормалі), відповідає нескінченна множина променевих векторів, напрямки яких заповнюють певну конічну поверхню (конус внутрішньої конічної рефракції).

Подвійне заломлення в електричному полі. Ізотропне тіло в постійному електричному полі стає оптично анізотропним. Появу цієї анізотропії можна описати як результат зміни діелектричної проникності під впливом постійного поля. Хоча ця зміна є відносно незначною, але у даному випадку вона істотна, оскільки сприяє якісній зміні оптичних властивостей тіла.

Позначимо через \mathcal{E} напруженість постійного електричного поля в тілі та розкладемо діелектричний тензор ε_{ik} за степенями цієї величини. В ізотропному тілі в нульовому наближенні $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ik}$. Членів першого порядку по полю в ε_{ik} не може бути, оскільки в ізотропному тілі не існує ніякого постійного вектора, за допомогою якого можна було б скласти лінійний по \mathcal{E} тензор другого рангу. Тому наступні члени розкладання ε_{ik} будуть квадрати-

чними по полю. Із компонент вектора можна скласти два симетричних тензора другого рангу: $\mathcal{E}^2 \delta_{ik}$ та $\mathcal{E}_i \mathcal{E}_k$. Із них перший не змінює симетрію тензора $\varepsilon^{(0)} \delta_{ik}$, і додавання до останнього члена виду $\text{const} \cdot \mathcal{E}^2 \delta_{ik}$ зводиться до малої поправки до скалярної сталої $\varepsilon^{(0)}$; ця поправка не призводить, очевидно, до появи будь-якої оптичної анізотропії. Отже, ми приходимо до наступного виду залежного від поля діелектричного тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ik} + \alpha \mathcal{E}_i \mathcal{E}_k, \quad (6.65)$$

де α – скалярна стала.

Одна з головних осей цього тензора співпадає з напрямком електричного поля, і відповідне головне значення дорівнює

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha \mathcal{E}^2. \quad (6.66)$$

Інші два головних значення дорівнюють один одному,

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)}, \quad (6.67)$$

а положення відповідних головних осей у площині, перпендикулярній до поля, довільне. Отже, ізотропне тіло в електричному полі поводить себе в оптичному відношенні як одноосний кристал (*ефект Керра*).

Зміна оптичної симетрії в електричному полі може мати місце й у кристалах (так, оптично одноосний кристал може перетворитись у двовісний, оптично ізотропний кубічний кристал може стати оптично анізотропним). На відміну від відповідного явища в ізотропних тілах, тут ефект може бути і першого порядку по полю. Цьому лінійному ефекту відповідає діелектричний тензор виду

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} \delta_{ik} + \alpha_{ikl} \mathcal{E}_l, \quad (6.68)$$

де сукупність коефіцієнтів α_{ikl} складає тензор третього рангу, симетричний по індексам i й k . Симетрія цього тензора співпадає з симетрією п'єзоелектричного тензора. Тому ефект, який розглядається, існує у кристалів тих самих 20 класів, які допускають п'єзоелектрику.

Магнітооптичні ефекти. За наявності постійного магнітного поля \mathbf{H} тензор $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{H})$ перестає бути симетричним. Узагальнений принцип симетрії кінетичних коефіцієнтів пов'язує компоненти ε_{ik} і ε_{ki} в різних полях:

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \quad (6.69)$$

Умова відсутності поглинання вимагає лише ермітовості цього тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^* \quad (6.70)$$

а не його дійсності. Із (6.70) виходить, що дійсна та уявна частини ε_{ik} мають бути відповідно симетричною і антисиметричною:

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon'_{ki}, \quad \varepsilon''_{ik} = -\varepsilon''_{ki}. \quad (6.71)$$

Враховуючи (6.69), маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ik}(\mathbf{H}) &= \varepsilon'_{ki}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}), \\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}) &= -\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}), \end{aligned} \quad (6.72)$$

тобто в непоглинаючому середовищі величини ε'_{ik} є парними, а ε''_{ik} – непарними функціями \mathbf{H} .

Такі самі властивості симетрії має, очевидно, і зворотний тензор ε_{ik}^{-1} . Далі в обчисленнях зручніше користуватися саме цим тензором. Для запобігання численних індексів уведемо для нього спеціальне позначення¹⁾:

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = \eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}, \quad (6.73)$$

(якими ми користувались вже й раніше).

Як відомо, всякий антисиметричний тензор другого рангу еквівалентний (дуальний) деякому аксіальному вектору; для тензора η''_{ik} позначимо цей вектор через \mathbf{H} . За допомогою антисиметричного

¹⁾ Очевидно, η'_{ik} і η''_{ik} самі не є тензорами, зворотними ε'_{ik} і ε''_{ik} .

одиночного тензора e_{ikl} зв'язок між компонентами тензора η''_{ik} і вектора \mathbf{G} запишемо у вигляді

$$\eta''_{ik} = e_{ikl} G_l, \quad (6.74)$$

а в компонентах:

$$\eta''_{xy} = G_z, \quad \eta''_{zy} = G_y, \quad \eta''_{yz} = G_x. \quad (6.75)$$

Зв'язок $\mathbf{E}_i = \eta_{ik} D_k$ між електричною індукцією і напруженістю набуває при цьому вигляду:

$$\mathbf{E}_i = (\eta'_{ik} + i e_{ikl} G_l) D_k = \eta'_{ik} D_k + i [\mathbf{D}\mathbf{G}]_i. \quad (6.76)$$

Аналогічно виглядає пряма залежність \mathbf{D} від \mathbf{E} :

$$D_i = \varepsilon'_{ik} E_k + i [\mathbf{E}\mathbf{g}]_i. \quad (6.77)$$

Зв'язок між коефіцієнтами в (6.76) і (6.77) дається формулами:

$$\eta'_{ik} = \frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}'|} \left\{ \varepsilon'^{-1}_{ik} |\boldsymbol{\varepsilon}'| - g_i g_k \right\}, \quad G_i = -\frac{1}{|\boldsymbol{\varepsilon}'|} \varepsilon'_{ik} g_k, \quad (6.78)$$

де $|\boldsymbol{\varepsilon}'|$ і $|\boldsymbol{\varepsilon}'|^{-1}$ – визначники тензорів ε_{ik} і ε'_{ik} . Середовище з такою формою залежності між \mathbf{D} і \mathbf{E} називають *гіротропною*. Вектор \mathbf{g} називають *вектором гірації*, а \mathbf{G} – *вектором оптичної активності*.

Проведемо загальне дослідження характеру хвиль, які розповсюджуються в довільному гіротропному середовищі. Вважаючи при цьому середовище анізотропним і не роблячи ніяких припущень щодо величини магнітного поля.

Виберемо напрямок хвильового вектора як вісь z і запишемо рівняння (6.47):

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} \right) D_\beta = \left(\eta'_{\alpha\beta} + i \eta''_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} \right) D_\beta = 0, \quad (6.79)$$

де індекси α, β пробігають значення x, y . Напрямок осей x і y виберемо вздовж головних осей двомірного тензора $\eta'_{\alpha\beta}$, а відпові-

дні головні значення цього тензора позначимо як n_{01}^{-2} і n_{02}^{-2} ; тоді рівняння набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n^2} \right) D_x + iG_z D_y &= 0, \\ -iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^{-2}} - \frac{1}{n^2} \right) D_y &= 0. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Умова рівності нулю визначника цієї системи дає квадратне рівняння по n^2 рівняння:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^{-2}} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) = G_z^2, \quad (6.81)$$

корені якого визначають два значення n , що відносять до заданого напрямку \mathbf{n} :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} + \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right)^2 + G_z^2}. \quad (6.82)$$

Підставляючи ці значення у рівняння (6.80), знайдемо відповідні відношення:

$$\frac{D_y}{D_x} = \frac{i}{G_z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_{01}^{-2}} - \frac{1}{n_{02}^{-2}} \right)^2 + G_z^2} \right]. \quad (6.83)$$

Чисто уявне відношення $\frac{D_y}{D_x}$ означає, що хвилі еліптично поляризовані, причому головні осі еліпсів поляризації співпадають з осями x , y . Добуток двох значень цього відношення дорівнює одиниці. Іншими словами, якщо в одній хвилі

$$D_y = ipD_x$$

(де дійсне число p є відношенням довжин осей еліпса поляризації), то в другій хвилі

$$D_y = -\frac{iD_z}{\rho}.$$

Це означає, що еліпси поляризації двох хвиль мають однакове відношення осей, але повернуті відносно один одного на 90° ; напрям обертання в них протилежний (рис. 6.6).

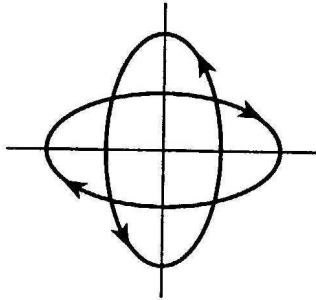


Рисунок 6.6

Якщо позначити вектори \mathbf{D} в обох хвилях як D_1 і D_2 , то отримані відношення можна записати у вигляді

$$D_1 D_2^* = D_{1x} D_{2x}^* + D_{1y} D_{2y}^* = 0.$$

Таке співвідношення є загальною властивістю власних векторів, які виникають при приведенні до головних осей ермітового тензора (у даному випадку – тензора $\eta_{\alpha\beta}$).

Компоненти вектора \mathbf{G} і тензора η'_{ik} є функціями напруженості магнітного поля. Якщо магнітне поле є слабким, то можна розкласти його за ступенями. Вектор \mathbf{G} дорівнює нулю, коли поля немає, тому в слабкому полі можна вважати

$$G_i = f_{ik} H_k, \quad (6.84)$$

де f_{ik} – тензор другого рангу, у загальному випадку є несиметричним. Така форма залежності узгоджується із загальним правилом, за яким у прозорому середовищі компоненти антисиметричного тензора η'_{ik} (як і тензора ε''_{ik}) мають бути непарними функціями \mathbf{H} . Що стосується симетричного тензора η'_{ik} , то його компоненти є

парними функціями магнітного поля. Тому перші поправочні, порівняно із значеннями за відсутності поля, члени в η'_{ik} – другого порядку по полю (нехтуючи цими членами із (6.78) маємо просто $\eta'_{ik} = \varepsilon'^{-1}_{ik}$).

У загальному випадку довільного напрямку хвильового вектора магнітне поле порівняно мало впливає на поширення світла в кристалі, викликаючи лише появу слабкої еліптичності коливань з малим (першого порядку по полю) відношенням довжин осей еліпса поляризації.

Виключенням стосовно характеру магнітооптичного ефекту є напрямки оптичних осей (і близькі до них), вздовж яких обидва значення n за відсутності поля співпадають. Корені рівняння (6.81) відрізняються тоді від цих значень на величини першого порядку малості і виникають ефекти, аналогічні ефектам в ізотропних тілах. Магнітооптичний ефект в ізотропних тілах (а також в кристалах кубічної системи) викликає особливий інтерес завдяки його своєрідному характеру і порівняно великому значенню.

Нехтуючи значеннями другого порядку малості, маємо $\eta'_{ik} = \varepsilon^{-1}\delta_{ik}$, де ε – діелектрична проникність ізотропного середовища за відсутності магнітного поля. Залежність між \mathbf{D} і \mathbf{E} дається формулами

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathbf{D} + i[\mathbf{D}\mathbf{G}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + i[\mathbf{E}\mathbf{G}], \quad (6.85)$$

причому вектори \mathbf{g} і \mathbf{G} пов'язані, у тому самому наближенні, співвідношенням

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{g}. \quad (6.86)$$

Залежність \mathbf{g} (або \mathbf{G}) від зовнішнього поля в ізотропному середовищі зводиться до простої пропорційності:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \quad (6.87)$$

скалярна стала може бути як додатною, так і від'ємною.

У рівнянні (6.81) маємо тепер $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\varepsilon}$; це – коефіцієнт заломлення за відсутності поля. Звідси

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2 \mp G_z}$$

або, з тією самою точністю,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \quad (6.88)$$

Згадуючи, що вісь z обрана вздовж вектора \mathbf{n} , можна записати цю формулу з цією самою точністю у наступному векторному вигляді:

$$\left(n \pm \frac{1}{2n_0} g \right)^2 = n_0^2. \quad (6.89)$$

Звідси бачимо, що поверхня хвильових векторів являє собою у даному випадку сукупність двох сфер радіуса $n_{01} \pm \frac{g}{2n_0}$ від початку координат.

Кожному із двох значень n відповідає своя поляризація хвилі; саме,

$$D_x = \mp i D_y, \quad (6.90)$$

де знаки відповідають знакам в (6.88). Рівність абсолютних значень

D_x і D_y при зсуві фаз між ними $\mp \frac{\pi}{2}$ означає кругову поляризацію хвилі з напрямком обертання вектора \mathbf{D} відповідно проти і за годинниковою стрілкою, якщо дивитися вздовж напрямку хвильового вектора (або, як прийнято говорити, відповідно право- і лівополяризовані хвилі).

Різниця між показниками заломлення ліво- і право поляризованих хвиль спричинює те, що при заломленні на поверхні гіротропного тіла виникають дві поляризовані по колу заломлені хвилі (так зване *подвійне кругове заломлення*).

Нехай лінійно поляризована плоска хвиля падає в нормальному напрямку на плоско паралельний шар речовини (товщиною

l). Напрямок падіння оберемо як вісь z , а напрямок вектора $\mathbf{\epsilon} = \epsilon_0 \mathbf{D}$ у падаючій хвилі – як вісь x . Лінійне коливання можна представити у виді суми двох кругових коливань з протилежними напрямками обертання, які будуть потім поширюватися в шарі речовини з різними хвильовими векторами $k_{\pm} = \frac{\omega n_{\pm}}{c}$. Поклавши амплітуду хвилі умовно рівною одиниці, матимемо

$$D_x = \frac{1}{2}(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}), \quad D_y = \frac{i}{2}(-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}),$$

або, увівши $k = \frac{k_+ + k_-}{2}$, $\alpha = \frac{k_+ - k_-}{2}$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz} (e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z}) = e^{ikz} \cos \alpha z,$$

$$D_y = \frac{i}{2}e^{ikz} (-e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z}) = e^{ikz} \sin \alpha z,$$

при виході хвилі із шару матимемо:

$$\frac{D_y}{D_x} = \operatorname{tg} \alpha l = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega g}{2cn_0} l \right). \quad (6.91)$$

Дійсність цього відношення означає, що хвиля залишається лінійно поляризованою, але з повернутим відносно початкового напрямку поляризації (*ефект Фарадея*). Кут повороту площини поляризації пропорційний пройденому хвилею шляху; на одиниці довжини вздовж напрямку хвильового вектора він складає

$$\frac{\omega g}{2cn_0} \cos \theta, \quad (6.92)$$

де θ – кут між \mathbf{n} і \mathbf{g} .

Відмітимо, що при заданому напрямку магнітного поля напрям обертання площини поляризації (відносно напрямку \mathbf{n}) зі зміною знаку \mathbf{n} змінюється на зворотний – праве обертання переходить у ліве і навпаки. Отже, якщо промінь проходить один і той самий

шлях дворазово (туди й назад), то сумарне обертання площини поляризації буде вдвічі більше, ніж після одного проходження.

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (хвильовий вектор перпендикулярний до магнітного поля) лінійний за полем ефект, який описується формулами (6.88), зникає (відповідно до вказаного вище загального правила, що із усіх компонент вектора \mathbf{g} на поширення світла впливає лише його проекція на напрям \mathbf{n}). Тому при кутах θ , близьких до $\frac{\pi}{2}$, мають враховуватись також і члени, пропорційні квадрату поля. Зокрема, мають враховуватись члени другого порядку і в тензорі η'_{ik} . В силу аксіальної симетрії навколо напрямку поля два головних значення симетричного тензора η'_{ik} будуть однакові (як у одноосного кристала). Ми вибираємо нижче ось x вздовж напрямку поля і позначаємо головні значення η'_{ik} в напрямках паралельно і перпендикулярно до магнітного поля через η_{\parallel} і η_{\perp} ; різниця $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ пропорційна H^2 .

Розглянемо квадратичний ефект, який виникає при взаємно перпендикулярних \mathbf{n} і \mathbf{g} (ефект Коттона – Мутона). У рівняннях (6.80), (6.81) маємо у цьому випадку $G_z = 0$, а n_{01}^{-2} і n_{02}^{-2} відповідно дорівнюють η_{\parallel} і η_{\perp} . Отже, в одній із хвиль

$$n^{-2} = \eta_{\parallel}, \quad D_y = 0;$$

ця хвиля лінійно поляризована з вектором \mathbf{D} , напрямленим паралельно осі x . В другій хвилі

$$n^{-2} = \eta_{\perp}, \quad D_x = 0,$$

тобто \mathbf{D} напрямлений вздовж осі y . Нехай лінійно поляризоване світло падає в нормальному напрямі на плоско паралельний шар речовини, яка перебуває в паралельному йому магнітному полі. Дві компоненти світла, яке пройшло у речовину (з векторами \mathbf{D} в площинах xz і yz), поширюються з різними значеннями n . В ре-

зультаті цього світло, яке виходить через протилежний бік шару, виявляється *еліптично поляризованим*.

Зупинимося ще на одному ефекті, який виникає в середовищі з лінійним по (постійному) магнітному поля вектором оптичної активності (6.84): намагнічення немагнітного прозорого середовища змінним електричним полем.

Будемо виходити із загальної формули

$$-\mu_0 B = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{H}},$$

причому врахуємо внесок в \tilde{U} від змінного електричного поля. Згідно теореми про малі добавки до термодинамічних величин, зміна $\delta \tilde{U}$ цього внеску при малій зміні діелектричної проникності співпадає (будучи виражене через відповідні змінні) зі зміною вільної енергії $\delta \tilde{F}$. Для останнього можна скористатися формулою

$$\delta F = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta \varepsilon,$$

узагальнивши її на анізотропні середовища. Отже, маємо

$$\delta \tilde{U} = -\delta \varepsilon_{ik} \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^*}{4} = \delta \eta_{ik} \frac{\varepsilon_0 D_i D_k^*}{4} \quad (6.93)$$

(зайвий множник $\frac{1}{2}$ враховує уявлення \mathbf{E} в комплексному вигляді); остання рівність в (6.93) – наслідок того, що в силу визначення $\varepsilon_{il} \eta_{lk} = \delta_{ik}$ маємо $\varepsilon_{il} \delta \eta_{lk} = -\eta_{lk} \delta \varepsilon_{il}$.

Розуміючи тепер варіювання діелектричної проникності як результат зміни постійного магнітного поля, запишемо

$$-\mu_0 B = \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \mathbf{H}} + \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial \mathbf{H}} \frac{\varepsilon_0 D_i D_k^*}{4},$$

де \tilde{U}_0 відноситься до середовища за відсутності електричного поля. Якщо середовище саме по собі немагнітне ($\mu=1$), то $\frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial H} = -\mu_0 H$. Тоді намагніченість $\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}$ дорівнює

$$M = -\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial H} \frac{\varepsilon_0 D_i D_k^*}{4}.$$

За відсутності зовнішнього магнітного поля значення похідної $\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial H}$ треба взяти при $H=0$. З η_{ik} із (6.74) і (6.84) отримаємо остаточно наступний вираз для намагніченості, створюваної змінним електричним полем:

$$M = -\frac{i}{4} \varepsilon_0 e_{ikm} f_{ml} D_i D_k^*; \quad (6.94)$$

вона квадратична по електричному полю. Якщо за відсутності магнітного поля середовище ізотропне, то $f_{ml} = f \delta_{ml}$ і тоді

$$M = -\frac{i \varepsilon_0 f}{4} (DD^*). \quad (6.95)$$

Для лінійно поляризованого поля вектор D може відрізнитися від дійсного лише фазовим множником; тоді D і D^* є колінеарними і вираз (6.94) або (6.95) обертається в нуль. Отже, намагніченість виникає лише під дією електричного поля, яке обертається. Цей ефект у деякому сенсі зворотний ефекту обертання площини поляризації в магнітному полі і виражається через той же тензор f_{ik} ; його й називають *зворотним ефектом Фарадея*.

Приклади розв'язування задач

- Приклад 6.1.** Показник заломлення для $\lambda_0 = 0,5$ мкм (у вакуумі) визначається виразом $\aleph = 3,47 - 1,40i$. Обчисліть:
- коефіцієнт відбивання від полірованої поверхні германію за нормального падіння;
 - фазовий зсув φ_n , який виникає внаслідок відбивання за нормального падіння;
 - глибину проникнення плоскої хвилі в германій, на якій її інтенсивність спадає до 0,001 від інтенсивності падаючого випромінювання.

Розв'язання

Показник заломлення германію в комплексній формі має вигляд:

$$\aleph = \bar{n} - i\alpha.$$

Коефіцієнт відбивання для світлової амплітуди є комплексною величиною

$$\mathfrak{R} = R_n e^{i\varphi} = \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1} = \frac{\bar{n} - i\alpha - 1}{\bar{n} - i\alpha + 1}.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт відбивання

$$R = \mathfrak{R}\mathfrak{R}^* = \frac{(\bar{n} - 1)^2 + \alpha^2}{(\bar{n} + 1)^2 + \alpha^2} = \frac{(3,47 - 1)^2 + (1,40)^2}{(3,47 + 1)^2 + (1,40)^2} = 0,37$$

і фазове випередження відбитої хвилі

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{2\alpha}{1 - \bar{n}^2 - \alpha^2} = \frac{2 \cdot 1,40}{1 - (3,47)^2 - (1,40)^2} = -0,216.$$

Зменшення інтенсивності світла як функція глибини його проникнення x описується законом Бугера – Ламберта:

$$J = J_0 e^{-\gamma x},$$

де

$$\gamma = \frac{4\pi\alpha}{\lambda_0}.$$

Звідси

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\frac{4\pi\alpha x}{\lambda_0}};$$

$$\frac{4\pi\alpha x}{\lambda_0} = \ln \frac{J_0}{J};$$

$$x = \frac{\lambda_0}{4\pi\alpha} \ln \frac{J_0}{J} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,40} \cdot \ln 10^3 \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,2 \text{ мкм}.$$

Відповідь: $R = 0,37$; $\text{tg}\varphi_n = -0,216$; $x = 0,2 \text{ мкм}$.

Приклад 6.2. Обчисліть коефіцієнт проходження T поглинаючої плівки з паралельними поверхнями при товщині плівки d і комплексному показнику заломлення \mathfrak{N} . Плівка перебуває на повітрі, і на неї падає перпендикулярно до поверхні плоска хвиля з частотою ω . Що відбувається з виразом для T , коли товщина d набагато менша, ніж довжина хвилі падаючого випромінювання?

Розв'язання

Нехай \mathbf{E}_i – комплексна амплітуда електричного поля падаючої хвилі (рис. 6.7), \mathbf{E}_r – амплітуда хвилі, відбитої від першої поверхні S , \mathbf{E}_t – амплітуда хвилі, яка пройшла в плівку, \mathbf{E}'_r – амплітуда хвилі, відбитої від другої поверхні S' , \mathbf{E}'_t – амплітуда хвилі, яка пройшла крізь плівку.

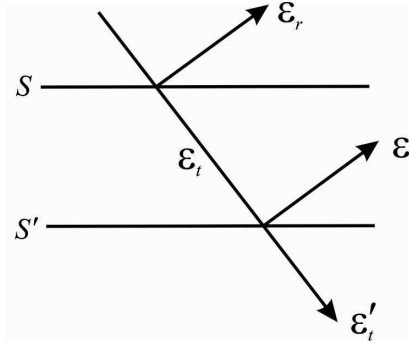


Рисунок 6.7

На поверхні S' , на якій визначаються початкові фази, умова неперервності для \mathbf{E} має вигляд

$$\mathbf{E}_t + \mathbf{E}'_r = \mathbf{E}'_t, \quad (1)$$

а для $H = \frac{n}{c\mu_0} \mathbf{E}$

$$n(\mathbf{E}_t - \mathbf{E}'_r) = \mathbf{E}_t. \quad (2)$$

Подібно до цього на поверхні S , враховуючи товщину плівки, маємо

$$\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t e^{-iknd} + \mathbf{E}'_r e^{iknd} \quad (3)$$

та

$$\mathbf{E}_t - \mathbf{E}_r = n\mathbf{E}_t e^{-iknd} - n\mathbf{E}'_r e^{iknd}. \quad (4)$$

Додаючи почленно (1) і (2), отримуємо

$$2\mathbf{E}'_t = (1+n)\mathbf{E}_t + (1-n)\mathbf{E}'_r.$$

Віднімаючи (2) з (1), маємо

$$(1-n)\mathbf{E}_t = -(1+n)\mathbf{E}'_r.$$

Додаючи (3) і (4), маємо

$$2\mathcal{E}_i = (1+n)\mathcal{E}_i e^{-iknd} + (1-n)\mathcal{E}'_r e^{iknd}.$$

Звідси

$$t = \frac{\mathcal{E}'_t}{\mathcal{E}_i} = \frac{(1+n)\mathcal{E}_i + (1-n)\mathcal{E}'_r}{(1+n)\mathcal{E}_i e^{-iknd} + (1-n)\mathcal{E}'_r e^{iknd}},$$

$$t = \frac{(1+n)^2 - (1-n)^2}{(1+n)^2 e^{-iknd} - (1-n)^2 e^{iknd}}.$$

Якщо $d \ll \lambda$, то $kd = \frac{2\pi d}{\lambda} \ll 1$. Розкладаючи експоненти в ряд і залишаючи два перших члени, маємо

$$t = \frac{4n}{4n - 2iknd(1+n^2)} = \frac{1}{1 - \frac{ikd}{2}(1+n^2)}; \quad t^* = \frac{1}{1 + \frac{ikd}{2}(1+n^{*2})}.$$

Коефіцієнт проходження визначається так:

$$T = tt^* = \frac{1}{\left[1 - \frac{ikd}{2}(1+n^2)\right] \left[1 + \frac{ikd}{2}(1+n^{*2})\right]} = \frac{1}{1 + \frac{ikd}{2}(n^{*2} - n^2)}$$

(членами з $\left(\frac{kd}{2}\right)^2$ знехтували). Величина $T = T_{\min}$, коли

$ikd(n^{*2} - n^2)$ приймає максимальне значення. Якщо

$$n^2 = n_0^2 + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2 + ig\omega} \quad \text{і} \quad k = \frac{\omega}{c},$$

то

$$ik(n^{*2} - n^2) = \frac{2gA}{c} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2\omega^2}.$$

Похідна

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \omega^2} \right] &= \\ &= \frac{2\omega \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \omega^2 \right] - 2\omega^3 \left[2(\omega^2 - \omega_0^2) + g^2 \right]}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \omega^2 \right]^2} = \\ &= 2\omega \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2)}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + g^2 \omega^2 \right]^2} = 0, \end{aligned}$$

коли $\omega = \omega_0$.

Відповідь: $T = \frac{1}{1 + \frac{ikd}{2}(n^{*2} - n^2)}$.

Приклад 6.3. Знайдіть височастотну діелектричну проникність металу.

Розв'язання

Використаємо рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right); \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

та закон Ома в диференціальній формі

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3)$$

Фізичні величини, що входять в рівняння (1) – (3), будемо вважати гармонічними функціями часу

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_\omega e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) – (4) у (1) – (2), маємо

$$\operatorname{rot}(\mathcal{B}_\omega e^{-i\omega t}) = \mu_0 (\mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t} - i\omega \varepsilon_0 \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t}), \quad \mathbf{j}_\omega e^{-i\omega t} = \sigma(\omega) \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t},$$

$$\operatorname{rot}(\mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t}) = i\omega \mathcal{B}_\omega e^{-i\omega t}.$$

Застосовуючи до останнього виразу операцію rot , отримаємо:

$$\operatorname{rot}[\operatorname{rot}(\mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t})] = i\omega \operatorname{rot}(\mathcal{B}_\omega e^{-i\omega t}),$$

або

$$\operatorname{rot}[\operatorname{rot} \mathcal{E}_\omega] = -\Delta \mathcal{E}_\omega = i\omega \operatorname{rot} \mathcal{B}_\omega;$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{B}_\omega = \mu_0 (\mathbf{j}_\omega - i\omega \varepsilon_0 \mathcal{E}_\omega) = \mu_0 (\sigma(\omega) - i\omega \varepsilon_0) \mathcal{E}_\omega;$$

$$-\Delta \mathcal{E}_\omega = i\omega \mu_0 (\sigma(\omega) - i\omega \varepsilon_0) \mathcal{E}_\omega = [i\omega \mu_0 \sigma(\omega) + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2] \mathcal{E}_\omega.$$

Внаслідок того, що $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, маємо

$$-\Delta \mathcal{E}_\omega = \left[i\mu_0 \omega \sigma(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \mathcal{E}_\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \frac{\mu_0 c^2 \sigma(\omega)}{\omega} \right] \mathcal{E}_\omega =$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \right] \mathcal{E}_\omega = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mathcal{E}_\omega.$$

Отже, ми одержали хвильове рівняння з комплексною діелектричною проникністю:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} = 1 + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega (1 - i\omega\tau)} = 1 + i \frac{e^2 n_e \tau}{\varepsilon_0 m_e \omega (1 - i\omega\tau)}$$

(τ – час релаксації).

При великих частотах ($\omega\tau \gg 1$) одержуємо:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

де введено позначення $\omega_p \equiv \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}$ – плазмова частота.

Відповідь: $\varepsilon(\omega) = 1 + i \frac{e^2 n_e \tau}{\varepsilon_0 m_e \omega (1 - i\omega\tau)}$.

Приклад 6.4. У кристалі InSb (n -типу) концентрація електронів $n_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Припустимо, що ефективна маса електрона дорівнює $0,015m_e$ і не залежить від величини енергії (тобто зона провідності має ідеальну параболічну форму). Визначте плазмову частоту та довжину хвилі, за якої у відбивальній здатності з'являється відповідний мінімум. Концентрацію електронів можна вважати постійною. Діелектрична проникність ґратки $\varepsilon_L = 16$.

Розв'язання

Плазмова частота ω_p дорівнює

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m^* \varepsilon_L \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{10^{24} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{0,015 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 16 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,15 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Мінімум у відбивальній здатності з'являється коли коефіцієнт заломлення $n = 1$, тобто

$$\varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (R=0)} \right) = 1.$$

Тому

$$\omega(R=0) = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_L}}} = \frac{1,15 \cdot 10^{14}}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}} = 1,19 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1};$$

$$\lambda(R=0) = \frac{2\pi c}{\omega(R=0)} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8}{1,19 \cdot 10^{14}} = 15,8 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 15,8 \text{ мкм}.$$

Відповідь: $\omega_p = 1,15 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$; $\lambda(R=0) = 15,8 \text{ мкм}$.

Приклад 6.5. Напівпровідник типу германію має в межі зони Бриллюена практично ізотропну оптично дозовану ширину забороненої зони ΔE_g , внаслідок чого у цього напівпровідника присутнє сильне поглинання. Діелектрична проникність у близькій інфрачервоній області матеріалу $\varepsilon_L = 12$, а параметр ґратки $a = 5,42 \text{ \AA}$. Оцініть величину ΔE_g .

Розв'язання

Довгохвильова діелектрична проникність для напівпровідника з ізотропною шириною забороненої зони приблизно дорівнює

$$\varepsilon_L = 1 + \left(\frac{E_p}{\Delta E_g} \right)^2, \quad (1)$$

де E_p – плазмова енергія валентних електронів, яка дорівнює

$$E_p = \hbar \omega_p = \hbar \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (2)$$

Тут n_e – концентрація валентних електронів. У цього матеріалу на атом припадає $z = 4$ валентні електрони, а на елементарну комірку – $n_0 = 8$ атомів, тому

$$n_e = zn = \frac{zn_0}{a^3} = \frac{4 \cdot 8}{(5,42 \cdot 10^{-9})^3} = 2,01 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

i

$$E_p = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{\frac{2,01 \cdot 10^{29} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{31}}} = 15,8 \text{ eВ};$$

$$\Delta E_g = \frac{E_p}{\sqrt{\varepsilon_L - 1}} = \frac{15,8}{\sqrt{12 - 1}} \approx 4,75 \text{ eВ}$$

Відповідь: $\Delta E_g \approx 4,75 \text{ eВ}$.

Приклад 6.6. В зразку кремнію p -типу існують дірки двох сортів.

Ефективна маса важких дірок $m_{pв}^* = 0,49m_e$ ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг), легких – $m_{pл}^* = 0,16m_e$. Кількість зіткнень за секунду важких та легких дірок з іншими частинками складає $v_{pв} = 9,2 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$ і $v_{pл} = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$, відповідно. Визначте відносну діелектричну проникність та провідність кремнію для випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,1 \text{ мм}$, якщо концентрація важких та легких дірок у кремнії дорівнює $p_в = 10^{23} \text{ м}^{-3}$ і $p_л = 1,65 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ відповідно, а діелектрична проникність ґратки кремнію $\varepsilon_L = 11,7$.

Розв'язання

Оскільки цей напівпровідник має два сорти дірок, то відносна діелектрична проникність кремнію

$$\varepsilon = \varepsilon_L \left(1 - \frac{\omega_{0pв}^2}{\omega^2 + v_{pв}^2} - \frac{\omega_{0pл}^2}{\omega^2 + v_{pл}^2} \right),$$

а провідність

$$\sigma = \frac{\omega_{0pв}^2 v_{pв} \varepsilon_0 \varepsilon_L}{\omega^2 + v_{pв}^2} + \frac{\omega_{0pл}^2 v_{pл} \varepsilon_0 \varepsilon_L}{\omega^2 + v_{pл}^2},$$

де

$$\omega_{0pB}^2 = \frac{e^2 p_B}{m_{pB}^* \varepsilon_0 \varepsilon_L} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{23}}{0,49 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7} = 5,55 \cdot 10^{25} \text{ c}^{-2};$$

$$\omega_{0pL}^2 = \frac{e^2 p_L}{m_{pL}^* \varepsilon_0 \varepsilon_L} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 1,65 \cdot 10^{22}}{0,16 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7} = 2,80 \cdot 10^{25} \text{ c}^{-2}$$

відповідно квадрат плазмової частоти важких та легких дірок;

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-4}} = 1,88 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1} - \text{частота сигналу.}$$

Отже,

$$\varepsilon = 11,7 \cdot \left(1 - \frac{5,55 \cdot 10^{25}}{(1,88 \cdot 10^{13})^2 + (9,2 \cdot 10^{12})^2} - \frac{2,80 \cdot 10^{25}}{(1,88 \cdot 10^{13})^2 + (2,6 \cdot 10^{13})^2} \right) = 9,90;$$

$$\sigma = \frac{5,55 \cdot 10^{25} \cdot 9,2 \cdot 10^{12} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7}{(1,88 \cdot 10^{13})^2 + (9,2 \cdot 10^{12})^2} + \frac{2,80 \cdot 10^{25} \cdot 2,6 \cdot 10^{13} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 11,7}{(1,88 \cdot 10^{13})^2 + (2,6 \cdot 10^{13})^2} = 194 \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 9,90$; $\sigma = 194 \frac{\text{См}}{\text{м}}$.

Приклад 6.7. Концентрація вільних електронів у напівпровіднику дорівнює N . Електрони розташовуються у долині, для якої тензор ефективних мас має головні компоненти m_x , m_y , m_z (анізотропна ефективна маса). До кристалу прикладене постійне зовнішнє поле \mathbf{V} . вичає внесок вільних носіїв заряду у діелектричну проникність кристалу (вважати, що головні осі тензора діелектричної проникності співпадають з головними осями тензора ефективних мас).

Розв'язання

Рівняння руху електрона у змінному електричному полі $\mathbf{\mathcal{E}} = \mathbf{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}$ запишеться у вигляді:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = -e\mathbf{\mathcal{E}}. \quad (1)$$

Вважаючи, що розв'язок рівняння (1) має форму $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$, отримаємо для компонент $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\omega^2 m_x x - i\omega e B y \cos \gamma + i\omega e B z \cos \beta = -e\mathcal{E}_x; \\ -\omega^2 m_y y + i\omega e B x \cos \gamma - i\omega e B z \cos \alpha = -e\mathcal{E}_y; \\ -\omega^2 m_z z + i\omega e B y \cos \alpha - i\omega e B x \cos \beta = -e\mathcal{E}_z, \end{cases} \quad (2)$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора \mathbf{B} .

Введемо позначення: $\omega_{ci} \equiv \frac{eB}{m_i}$ (де $i = x, y, z$) та перепишемо

(2) у вигляді:

$$\begin{cases} -\omega^2 x - i\omega \omega_{cx} y \cos \gamma + i\omega \omega_{cx} z \cos \beta = -e \frac{\mathcal{E}_x}{m_x}; \\ i\omega \omega_{cy} x \cos \gamma - \omega^2 y - i\omega \omega_{cy} z \cos \alpha = -e \frac{\mathcal{E}_y}{m_y}; \\ -i\omega \omega_{cz} x \cos \beta + i\omega \omega_{cz} y \cos \alpha - \omega^2 z = -e \frac{\mathcal{E}_z}{m_z}, \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язуючи систему (3) отримуємо $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{\mathcal{E}})$. Величину внеску вільних носіїв заряду в тензор діелектричної проникності знаходимо зі співвідношення:

$$\Delta \varepsilon \mathbf{\mathcal{E}} = -\frac{Ne}{\varepsilon_0} \mathbf{r}. \quad (4)$$

Визначник системи рівнянь (3) має вигляд:

$$\omega^3 \begin{vmatrix} -\omega & -i\omega_{cx} \cos \gamma & i\omega_{cx} \cos \beta \\ i\omega_{cy} \cos \gamma & -\omega & i\omega_{cy} \cos \alpha \\ -i\omega_{cz} \cos \beta & i\omega_{cz} \cos \alpha & -\omega \end{vmatrix} = -\omega^4 (\omega^2 - \omega_c^2),$$

де частота циклотронного резонансу

$$\omega_c^2 = \omega_{cy} \omega_{cz} \cos^2 \alpha + \omega_{cx} \omega_{cz} \cos^2 \beta + \omega_{cx} \omega_{cy} \cos^2 \gamma.$$

Підставляючи розв'язки рівнянь (3) в (4), отримуємо такі вирази для компонент $\Delta \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx} &= -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_x} \frac{1 - \frac{\omega_{cy} \omega_{cz}}{\omega^2} \cos^2 \alpha}{\omega^2 - \omega_c^2}; \\ \Delta \varepsilon_{xy} = \Delta \varepsilon_{yx} &= -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_x} \frac{i \frac{\omega_{cy}}{\omega} - \frac{\omega_{cy} \omega_{cz}}{\omega^2} \cos \alpha \cos \beta}{\omega^2 - \omega_c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Інші компоненти $\Delta \varepsilon$ можна отримати з рівнянь (5) циклічною перестановкою x, y, z та $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

$$\text{Відповідь: } \Delta \varepsilon_{xx} = -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_x} \frac{1 - \frac{\omega_{cy} \omega_{cz}}{\omega^2} \cos^2 \alpha}{\omega^2 - \omega_c^2};$$

$$\Delta \varepsilon_{xy} = \Delta \varepsilon_{yx} = -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_x} \frac{i \frac{\omega_{cy}}{\omega} - \frac{\omega_{cy} \omega_{cz}}{\omega^2} \cos \alpha \cos \beta}{\omega^2 - \omega_c^2}.$$

Приклад 6.8. Плоска хвиля падає з вакууму на плоску поверхню одновісного кристалу. Оптична вісь кристала нормальна до його поверхні. Знайдіть напрямки звичайного та незвичайного променів у кристалі, якщо кут падіння θ_0 .

Розв'язання

Для того, щоб граничні умови для векторів поля виконувалися в будь-якій точці поверхні поділу, необхідною умовою є рівність

дотичних до межі поділу компонент хвильового вектора в падаючій, відбитій та обох заломлених хвиль. Для звичайної хвилі це дає

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta'_2, \quad \frac{\sin \theta'_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu}.$$

Напрямок променя (вектора Пойтінга) у звичайній хвилі співпадає з напрямком хвильового вектора та складає кут θ'_2 з нормаллю до межі поділу.

У випадку незвичайної хвилі маємо:

$$k_0 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta''_2 = k_0 \sin \theta''_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta''_2 + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta''_2}}.$$

Звідси знаходимо

$$\sin^2 \theta''_2 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \sin^2 \theta_0}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu_2 + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin^2 \theta_0}.$$

Кут ϑ'' між променем та оптичною віссю (яка співпадає з нормаллю до поверхні поділу) визначається умовою:

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{tg} \theta''_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} \sin \theta_0}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} \mu - \sin^2 \theta_0)}}.$$

Кут відбивання від кристалу, як і від ізотропного середовища, дорівнює куту падіння: $\theta_1 = \theta_0$.

Відповідь: звичайна хвиля: $\sin \theta'_2 = \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu} \sin \theta_0$; незвичайна хвиля:

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp}} \sin \theta_0}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} \mu - \sin^2 \theta_0)}}.$$

Приклад 6.9. Оптичні сталі непрозорого кубічного матеріалу при деякій довжині хвилі λ можна визначити, вимірюючи коефіцієнт відбивання для кута падіння φ лінійно поляризованого світла з довжиною хвилі λ

при площинах поляризації паралельній (R_{\parallel}) та перпендикулярній (R_{\perp}) до площини падіння. Покажіть, що цей метод не можна використовувати для φ_0 , близьких до 0° , 45° і 90° .

Розв'язання

Згідно з формулами Френеля

$$R_{\parallel} = \left[\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} \right]^2, \quad R_{\perp} = \left[\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} \right]^2, \quad (1)$$

де ψ – кут заломлення.

Для $\varphi = 0^\circ$ $R_{\parallel} = R_{\perp}$ (ці поляризації не вдається розрізнити), тому вимірюється лише один параметр, а за ним неможливо визначити дві оптичні константи.

Для кута $\varphi = 90^\circ$ $R_{\parallel} = R_{\perp} = 1$ незалежно від оптичних сталей.

Для $\varphi = 45^\circ$ маємо $\sin \varphi = (n_r + in_i) \sin \psi$, де n_r та n_i – дійсна та уявна частини показника заломлення. З (1) знаходимо

$$R_{\parallel} = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi} \right]^2,$$

$$R_{\perp} = \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \psi \right)} \right]^2 = R_{\parallel}^2.$$

Тут R_{\perp} для $\varphi = 45^\circ$ визначається через R_{\parallel} (для інших кутів падіння не має місця), і якщо R_{\perp} виміряне, то вимірювання R_{\parallel} не дає нічого нового. Тому вимірювання лише однієї незалежної характеристики не дає можливості визначити n_r та n_i .

Оскільки вимірювання R_{\parallel} і R_{\perp} не є незалежними при кутах падіння 0° , 45° і 90° , внаслідок неперервності $R_{\perp}(\varphi)$ та $R_{\parallel}(\varphi)$ вважаємо, що R_{\perp} та R_{\parallel} не є „зовсім незалежними“ в області кутів падіння, близьких до цих значень. Якщо потрібні точні вимірювання n_r та n_i , то потрібно уникати цих областей.

Приклад 6.10. Користуючись хвильовим рівнянням, знайдіть поверхневий імпеданс ζ у $3D$ нормальному металі.

Розв'язання

Розглянемо напівнескінченний металевий зразок, поверхня якого є площиною $xу$, а вісь z спрямована вглиб металу. Поверхневий імпеданс ζ визначається відношенням електричного поля на поверхні зразка до повного струму крізь одиничну площадку

$$\zeta = R + iX = \frac{\mathcal{E}_x(0)}{\int_0^{\infty} j_x(z) dz}.$$

Для нормального металу струмом зміщення можна знехтувати. Тоді хвильове рівняння набуває вигляду

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_x}{dz^2} = i \frac{\mu_0 \omega \sigma}{\epsilon_0 c^2} \mathcal{E}_x.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$\mathcal{E}_x(z) = \mathcal{E}_x(0) e^{-\frac{z}{\delta}},$$

де

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2\sqrt{i}}{c \sqrt{4\epsilon_0}} = \frac{1+i}{c} \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0}},$$

δ – глибина скін-шару, а $\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e}$ – питома електропровідність нормального металу. На цій підставі

$$j_x(z) = \sigma \mathbf{E}_x(0) e^{-\frac{z}{\delta}}$$

і поверхневий імпеданс

$$\zeta = R + iX = (1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2c^2 \varepsilon_0 \sigma}} = \frac{1+i}{\sigma \delta}.$$

Відповідь: $\zeta = \frac{1+i}{\sigma \delta}.$

Приклад 6.11. Користуючись хвильовим рівнянням, знайдіть показники заломлення n і згасання α для металу, в якому поширюється монохроматична хвиля з циклічною частотою ω .

Розв'язання

Хвильове рівняння має вигляд

$$\Delta \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0,$$

де хвильовий вектор

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\mu_0 \omega^2}{c^2} \left(\varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$

описує хвилю $\mathbf{E} = \mathbf{E}(0) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$, що поширюється в середовищі з комплексним показником заломлення $\tilde{n}^2 = \mu_0 \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$. Отже,

фазова швидкість хвилі визначається як $\tilde{v} = \frac{c}{\tilde{n}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_0 \tilde{\varepsilon}}}$, дійсна n та

уявна α частини комплексного показника заломлення $\tilde{n} = n - i\alpha$ визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} n^2 - \varkappa^2 = \mu_0 \varepsilon; \\ 2n\varkappa = \frac{\mu_0 \sigma}{\varepsilon_0 \omega}, \end{cases}$$

та мають вигляд

$$n^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + \varepsilon \right\};$$

$$\varkappa^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + \varepsilon \right\}.$$

Відповідь: $n^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + \varepsilon \right\}; \quad \varkappa^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left\{ \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}} + \varepsilon \right\}.$

Приклад 6.12. Оцініть, за яких частот починає відігравати роль аномальний скін-ефект у масивному натрію, питомий опір якого дорівнює $\rho = 4,3 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, а енергія Фермі $\varepsilon_F = 3,12$ еВ.

Розв'язання

Аномальний скін-ефект починає відігравати роль тоді, коли $l > \delta$, $l = v_F \tau$ – довжина вільного пробігу носіїв заряду, v_F – швидкість Фермі.

Концентрація n електронів у металі визначається співвідношенням

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| \leq k_F} d^3 k = \frac{2m_e^3}{3} \frac{v_F \varepsilon_F}{\pi^2 \hbar^3}.$$

Отже,

$$l = \frac{3\pi \hbar^3 \sigma}{2e^2 m_e \varepsilon_F} > c \sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{\mu_0 \sigma \omega}},$$

звідки

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \geq 1,5 \cdot 10^{12} \text{ Гц}.$$

Аномальний скін-ефект починає проявлятися в Na за частот $\nu > 100$ ГГц або довжин хвиль $\lambda < 0,2$ мм.

Відповідь: $\nu > 100$ ГГц.

Приклад 6.13. Знайдіть зв'язок між поверхневим імпедансом і показником заломлення світла.

Розв'язання

Згідно із формулами Френеля коефіцієнт відбивання за нормального падіння визначається так:

$$r = \frac{|\tilde{n} - 1|^2}{|\tilde{n} + 1|^2}. \quad (1)$$

Відомо, що

$$r = \frac{|R_{\text{вак}} - \zeta|^2}{|R_{\text{вак}} + \zeta|^2} = \frac{\left| \frac{R_{\text{вак}}}{\zeta} - 1 \right|^2}{\left| \frac{R_{\text{вак}}}{\zeta} + 1 \right|^2}, \quad (2)$$

де $R_{\text{вак}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}$, $\zeta = R + iX$. Тому

$$r = \frac{\left| \frac{1}{\varepsilon_0 c \zeta} - 1 \right|^2}{\left| \frac{1}{\varepsilon_0 c \zeta} + 1 \right|^2}. \quad (3)$$

Порівнюючи формули (1) і (3), знаходимо, що

$$\tilde{n} = \frac{1}{\varepsilon_0 c \zeta} = \frac{1}{\varepsilon_0 c (R + iX)} = \frac{R - iX}{\varepsilon_0 c (R^2 + X^2)}. \quad (4)$$

Відповідь: $\tilde{n} = \frac{R - iX}{\varepsilon_0 c (R^2 + X^2)}.$

Приклад 6.14. Для спостереження ефекту Фарадея було обрано пластинки з кварцу товщиною 1 см та з нікелю і заліза товщиною 0,0015 см. Ефект Фарадея вивчався у магнітному полі напруженістю 80 кА/м для довжини хвилі 646 нм. Визначте кут повороту площини поляризації.

Розв'язання

Кут повороту площини поляризації в ефекті Фарадея визначається виразом:

$$\alpha_{\Phi} = \gamma_{\text{В}} l H,$$

де $\gamma_{\text{В}}$ – стала Верде, яка дорівнює 0,0136' для кварцу, 217° для заліза та 92° для нікелю. Звідси для кварцу:

$$\alpha_{\Phi} = 136 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = 13,6';$$

для заліза:

$$\alpha_{\Phi} = 217 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 325,5^\circ;$$

для нікелю:

$$\alpha_{\Phi} = 92 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 138^\circ.$$

Відповідь: кварц – $\alpha_{\Phi} = 13,6'$; залізо – $\alpha_{\Phi} = 325,5^\circ$; нікель – $\alpha_{\Phi} = 138^\circ$.

Приклад 6.15. Для слабких магнітних полів фарадеївське обертання в кубічних кристалах ізотропне. Використовуючи значення діелектричної проникності, отримане в попередній задачі, розрахуйте внесок вільних електронів у фарадеївське обертання кубічного кристалу за умови, що електрони знаходяться в еквівалентних параболічних долинах в околі $\mathbf{k} = 0$ (тобто, наприклад, у випадку германію та кремнію n -типу).

Розв'язання

Внесок у компоненти тензора діелектричної проникності, обумовлений електронами в еквівалентних долинах, з точністю до першого порядку по B (див. результат попередньої задачі) описується виразом:

$$\Delta\varepsilon_{xx} = -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_x \omega^2}, \quad \Delta\varepsilon_{xy} = i \frac{Ne^3 B}{\varepsilon_0 \omega^3} \frac{1}{m_x m_y} \cos \gamma, \quad (1)$$

де N – кількість електронів у долині. Вирази (1) записані у системі головних осей тензора ефективного маси. Шуканий внесок можна записати у вигляді тензора

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 \omega^2} \left[-\frac{1}{m_{ij}} + ieB \frac{1}{m_{ik}} \left(\frac{1}{m_{kl}} e_{lmj} B_m \right) \right]. \quad (2)$$

Тут e_{ijk} – повністю кососиметричний тензор третього рангу, причому $e_{ijk} = 0$, якщо рівні будь-які два індекси. Якщо всі індекси рівні, то $e_{ijk} = \pm 1$ в залежності від парності перестановки індексів.

Фарадеївське обертання ізотропне, тому внесок усіх еквівалентних долин знаходиться шляхом усереднення (2) за всіма можливими орієнтаціями еліпсоїда ефективного маси. Ця середня величина еквівалентна внеску, який можна одержати, якщо розподілити електрони за всіма трьома долинами уздовж кожної з осей куба. Якщо за напрямком \mathbf{B} взяти $[001]$, то отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{xx} &= -\frac{Ne^2}{3\varepsilon_0\omega^2} \left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y} + \frac{1}{m_z} \right) \quad (B=0), \\ \Delta\varepsilon_{xy} &= -\Delta\varepsilon_{yx} = \frac{Ne^3}{\varepsilon_0\omega^3} \frac{i}{3} \left(\frac{1}{m_x m_y} + \frac{1}{m_y m_z} + \frac{1}{m_z m_x} \right), \\ \Delta\varepsilon_{xz} &= \Delta\varepsilon_{zx} = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Це той самий тензор діелектричної проникності, що був отриманий для випадку ізотропії ефективної маси, якщо лише замінити у співвідношенні для статичної діелектричної проникності обернену ефективну масу виразом

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y} + \frac{1}{m_z} \right).$$

У недіагональних членах m^* замінюється середньої ефективною масою $\bar{\mu}$, яка знаходиться зі співвідношення:

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{m_x m_y} + \frac{1}{m_y m_z} + \frac{1}{m_z m_x} \right). \quad (4)$$

Тому величина фарадеївського обертання дорівнює

$$\theta = \frac{2\pi NBe^3 d}{n\omega^2 c^2 \bar{\mu}}.$$

Відповідь: $\theta = \frac{2\pi NBe^3 d}{n\omega^2 c^2 \bar{\mu}}.$

Приклад 6.16. У довільних ортогональних осях тензори діелектричної проникності ε для декількох кристалів при тих довжинах хвилі, за яких відсутнє поглинання, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вкажіть кристалографічні системи, до яких можуть відноситися ці кристали. Знайдіть головні осі та відповідні оптичні осі кристалів, що описуються тензорами а) – г). Для яких систем головні та оптичні осі можуть залежати від довжини?

Розв'язання

а) Кристал повинен належати до кубічної системи, тому що головні значення тензора діелектричної проникності однакові (з розгляду виключимо випадкове співпадіння цих головних значень, яке може мати місце і для нижчої симетрії). Головними осями можуть бути будь-які прямокутні декартові осі координат, а поняття оптичної осі не має ніякого сенсу, оскільки кристал є оптично ізотропним.

б) Знайдемо головні компоненти (власні значення) ε для даного кристалу. Для цього розв'яжемо рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 3-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4-\varepsilon \end{vmatrix} = 0; \quad (3-\varepsilon)^2(4-\varepsilon) - (4-\varepsilon) = 0;$$

$$(4-\varepsilon)[(3-\varepsilon)^2 - 1] = 0;$$

$$(4-\varepsilon)^2(2-\varepsilon) = 0,$$

тому $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 4$ – власні значення. Два з них рівні один одному, тому кристал повинен мати вісь симетрії третього, четвертого або шостого порядку (тригональна, тетрагональна або гексагональна система). Головні осі (власні вектори) у цьому випадку:

$[110]$, $[\bar{1}\bar{1}0]$ та $[001]$ (відмітимо, що такий вибір осей не є єдиним).

Кристал одновісний, оптичною віссю є напрямок $[\bar{1}\bar{1}0]$.

в) Власні значення ε для цього кристалу знайдемо з рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & 3-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 3-\varepsilon \end{vmatrix} = 0; \quad (3-\varepsilon)^3 - (3-\varepsilon) = 0;$$

$$(3-\varepsilon)[(3-\varepsilon)^2 - 1] = 0;$$

$$(3-\varepsilon)(2-\varepsilon)(4-\varepsilon) = 0,$$

тому $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 3$.

Кристал в) двовісний, і тому може належати лише до ромбічної, моноклінної або триклінної системи. Головні осі такі самі, як і у кристала б). Оптичні осі знаходяться у площині (001) і проходять крізь точки перетину еліпса та кола (в системі координат, осі якої співпадають з головними осями):

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{3},$$

звідки $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тому оптичні осі будуть $[100]$ та $[010]$.

Напрямки головних та оптичних осей можуть залежати від довжини хвилі і лише в тому випадку, коли вони не визначаються симетрією. Оптичні осі повністю визначаються симетрією в гексагональній, тетрагональній та тригональній системах (одновісні кристали). Положення трьох головних осей задається симетрією кристала для цих систем, а також для ромбічної системи.

г) Власні значення ε для цього кристалу знайдемо з рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 3-\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & 3-\varepsilon \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3-\varepsilon)[(3-\varepsilon)^2 - 1] + [1-(3-\varepsilon)] + [1-(3-\varepsilon)] = 0;$$

$$(3-\varepsilon)(2-\varepsilon)(4-\varepsilon) + 2(\varepsilon-2) = 0;$$

$$(2-\varepsilon)[(3-\varepsilon)(4-\varepsilon) - 2] = 0;$$

$$(2-\varepsilon)(\varepsilon^2 - 7\varepsilon + 10) = 0;$$

$$(2-\varepsilon)(\varepsilon-2)(\varepsilon-5) = 0,$$

тому $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 2$.

Кристал γ) одновісний і тому може належати до тих самих систем, що і кристал β). Головні осі (не єдині) $[111]$, $[\bar{1}\bar{1}0]$, $[\bar{1}1\bar{2}]$. Оптичною віссю є напрямок $[111]$.

Приклад 6.17. Прикладене змінне гармонічне поле з частотою ω викликає збурення густини газу вільних електронів. Обмежуючись членами першого порядку, покажіть, що реакція електронного газу на таке збурення описується діелектричною проникністю, рівною

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega}.$$

Розв'язання

Система вільних електронів описується набором хвильових функцій $\psi_{\mathbf{k}}$, які є плоскими хвилями. В системі діє потенціал $V(\mathbf{r}, t)$ самоузгодженого поля. Цей потенціал враховує прикладене зовні поле і створене електронами екранування. При цьому можна вважати, що гамільтоніан цієї системи має такий самий вигляд як і для незалежних частинок:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + V(\mathbf{r}, t),$$

$$\text{де } \hat{H}^0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e}, \quad \hat{H}^0 \Psi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}.$$

Визначимо оператор „матриці густини“ $\hat{\rho}$ співвідношенням:

$$\hat{\rho}_0 \Psi_{\mathbf{k}} = f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \Psi_{\mathbf{k}},$$

де $f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}})$ – функція розподілу Фермі – Дірака. Узагальнення цього оператора на збурені стани дає оператор $\hat{\rho}$, що задовольняє рівнянню Ліувілля:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}, \hat{\rho} \right].$$

Припустимо, що $\hat{\rho}$ відрізняється від $\hat{\rho}_0$ лише малим збуренням $\hat{\rho}_1$:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1.$$

Підставляючи $\hat{\rho}$ у рівняння Ліувілля та нехтуючи членами, що містять доданки виду $\hat{V} \hat{\rho}_1$, отримуємо ліанеризоване рівняння

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle &= \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \left[\hat{H}^0, \hat{\rho}_1 \right] | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle + \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \left[\hat{V}, \hat{\rho}_0 \right] | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle = \\ &= (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle + (f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}})) \hat{V}(\mathbf{q}, t), \end{aligned}$$

де $V(\mathbf{q}, t)$ – коефіцієнт Фур'є функції $V(\mathbf{r}, t)$ для хвильового вектора \mathbf{q} :

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}} | \hat{V} | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle = V(\mathbf{q}, t).$$

Щоб знайти діелектричну проникність, розглянемо тепер V_s , тобто ту частину V , яку створює індукований заряд з густиною en (n – концентрація частинок). Величини V_s та n самоузгоджено пов'язані рівнянням Пуассона

$$\Delta V_s = \frac{e^2 n}{\epsilon_0}.$$

Тому,

$$V_s(\mathbf{q}, t) = \frac{e^2}{\epsilon_0 q} \sum_{\mathbf{k}'} \langle \Psi_{\mathbf{k}'} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rangle.$$

Рівняння Ліувілля для V_s буде мати вигляд

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle &= (\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) \langle \Psi_{\mathbf{k}} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle + \\ &+ \frac{e^2}{\epsilon_0 q} (f_0(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f_0(\epsilon_{\mathbf{k}})) \sum_{\mathbf{k}'} \langle \Psi_{\mathbf{k}'} | \hat{\rho}_1 | \Psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rangle. \end{aligned}$$

Залежність від часу для V_s повинна бути такою ж самою, як і для прикладеного потенціалу, а саме періодичною, виду $e^{i\omega t}$.

Поляризація \mathbf{P} системи пов'язана з n співвідношенням $\nabla \cdot \mathbf{P} = en$, а з напруженістю електричного поля та діелектричною проникністю $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ співвідношенням

$$\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{q}, \omega) = [\epsilon(\mathbf{q}, \omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega).$$

Врахуємо, що

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{i}{e} \mathbf{q} V(\mathbf{q}, t).$$

Виключаючи $\mathbf{\epsilon}$ з наведених вище рівнянь, отримуємо для діелектричної проникності

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f_0(\epsilon_{\mathbf{k}})}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega}$$

Відповідь:
$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f_0(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) - f_0(\epsilon_{\mathbf{k}})}{\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \hbar\omega}.$$

Приклад 6.18. Дві плоскі лінійно поляризовані хвилі поширюються в напрямку осі x в монокристалі сапфіру (Al_2O_3), тензор діелектричної проникності якого

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Визначте різницю фаз цих хвиль, які пройшли в сапфірі відстань в 1 см, якщо перша хвиля поляризована по осі y , а друга – по осі z . Частоти коливань однакові і дорівнюють 10 ГГц. На цій частоті $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 13,2$; $\epsilon_{zz} = 11,4$.

Розв'язання

Довжина хвилі

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Хвиля з вектором напруженості електричного поля $\mathbf{\epsilon}_1 = \mathbf{\epsilon} \mathbf{j} \perp \mathbf{k}$ буде звичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{xx}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{13,2} = 7,609 \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

Хвиля з вектором напруженості електричного поля $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}\mathbf{k} \parallel \mathbf{k}$ буде незвичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{zz}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{11,4} = 7,071 \frac{\text{рад}}{\text{см}}.$$

Різниця фаз при проходженні звичайною та незвичайною хвилями відстані в 1 см складає

$$\Delta\varphi = (\beta_0 - \beta_e)z_0 = (7,609 - 7,071) \cdot 1 = 0,538 \text{ рад} = 30,8^\circ.$$

Відповідь: $\Delta\varphi = 30,8^\circ$.

Задачі для самостійного розв'язування

- 6.1. Дослідіть форму і рух хвильового пакету, отриманого накладенням плоских хвиль з однаковими амплітудами a_0 і з хвильовими векторами, що лежать у області $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}| \leq q$, (\mathbf{k}_0, q – сталі). Дійсний закон дисперсії $\omega(\mathbf{k})$ замінити наближеним співвідношенням $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \mathbf{v}_g \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$.
- 6.2. Дослідіть „розпливання“ одномірного хвильового пакету в диспергуючому середовищі. Для цього оберіть амплітудну функцію у вигляді кривої Гаусса $a(k) = a_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ і врахуйте квадратичний член у розкладенні частоти ω по k .
- 6.3. Знайдіть дисперсійну формулу, тобто залежність $n(\omega)$ для прозорого та немагнітного ($\mu = 1$) середовища, якщо відомо, що групова швидкість обернено пропорційна фазовій.
- 6.4. Знайдіть фазову v_{ph} і групову v_g швидкості поширення хвиль у середовищах, діелектричні проникності яких $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}$

(плазма), $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (неполярний діелектрик). У дру-

гому випадку обмежтеся лише розглядом випадків великих і малих (порівняно з ω_0) частот $\omega(\mu = 1)$.

- 6.5. Знайдіть дисперсійну залежність для поперечних електромагнітних хвиль поблизу однієї із резонансних частот діелектрика, молекули якого не мають сталих дипольних моментів (неполярний діелектрик). Діелектрична проникність неполярного діелектрика визначається в моделі Лоренц – Лоренца. Знайдіть область непрозорості такого діелектрика. Зобразіть дисперсійні залежності на графіках.
- 6.6. Знайдіть дисперсійну залежність для поперечних електромагнітних хвиль у йонному кристалі. Знайдіть область непрозорості йонного кристалу. Зобразіть дисперсійні залежності на графіках.
- 6.7. Визначте, для яких частот при розгляді відбивання електромагнітних хвиль від поверхні металу можна знехтувати струмами зміщення порівняно із струмами провідності.
- 6.8. Оцініть коефіцієнт відбивання електромагнітної хвилі з частотою 10 ГГц від поверхні металу в умовах аномального скін-ефекту. При нагріванні до якої температури коефіцієнт відбивання почне зменшуватися?
- 6.9. У вакуумі на безмежну плоску поверхню однорідного немагнітного діелектрика ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) падає під кутом α плоска електромагнітна хвиля, напрямком поляризації якої складає кут θ з площиною падіння. Покажіть, що при відбиванні та заломленні електромагнітної хвилі виконується закон збереження енергії.
- 6.10. У вакуумі на безмежну плоску поверхню однорідного немагнітного діелектрика ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) падає під кутом α плоска електромагнітна хвиля, напрямком поляризації якої складає кут θ з площиною падіння. Обчисліть коефіцієнти відбивання та проходження для випадку: а) падаюча хвиля не поляризована; б) падаюча хвиля еліптично поляризована.
- 6.11. Здійсніть аналіз формул Френеля для випадку прозорих діелектриків:

а) покажіть, що відбите світло буде повністю поляризоване, якщо кут падіння $\theta_0 = \theta_p$ задовольняє умові

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{кут повної поляризації Брюстера});$$

б) покажіть, що при падінні світла на оптично менш щільне середовище ($n_2 < n_1$) під кутом $\theta_0 = \theta_r$, де

$$\sin \theta_r = \frac{n_2}{n_1},$$

заломлене світло поширюється паралельно границі; при $\theta_0 > \theta_r$ відбувається повне відбивання (тобто $R = 1$ при будь-якій поляризації падаючого світла; $\sin \theta_2 > 1$, а $\cos \theta_2$ стає чисто уявною величиною);

в) покажіть, що при нормальному падінні ($\theta_0 \rightarrow 0$) коефіцієнт відбивання для обох поляризацій знаходиться за формулою:

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2.$$

г) покажіть, що хвиля зазнає повного відбивання від середовища, у якої $\varepsilon < 0$ ($\mu = 1$).

- 6.12. Поляризована по колу плоска монохромна хвиля падає під кутом на плоску межу діелектрика. Визначте характер поляризації відбитої і заломленої хвиль.
- 6.13. Пучок майже монохроматичного неполяризованого світла падає на плоску границю діелектрика. Знайти тензори поляризації $I_{ik}^{(1)}$, $I_{ik}^{(2)}$ і коефіцієнти деполаризації ρ_1 , ρ_2 відбитого і заломленого світла.
- 6.14. Неполяризований майже монохроматичний пучок світла падає на плоску межу розділу діелектриків. Знайдіть коефіцієнт відбивання R та коефіцієнти деполаризації $\rho_{1,2}$, відбитого і заломленого світла, якщо кут падіння дорівнює куту Брюстера.
- 6.15. Покажіть, що після повного відбивання від межі діелектрика лінійно поляризована хвиля матиме в загальному випадку елі-

птичну поляризацію. За яких умов поляризація буде круговою?

- 6.16. Дослідіть рух енергії при повному внутрішньому відбиванні. Знайдіть потік енергії уздовж поверхні поділу і в перпендикулярному напрямку в середовищі, від якого відбувається відбивання. Визначте лінії вектора Пойтінга \mathbf{S} .
- 6.17. Плоска монохромна хвиля падає на плоску межу поділу двох діелектриків з проникностями ϵ_1 та ϵ_2 . Який характер прийме поле по обидві сторони від межі у випадку ковзаючого падіння (кут падіння $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$)?
- 6.18. Плоска монохромна хвиля падає на плоску межу поділу прозорого середовища з вакуумом і частково відбивається від неї з коефіцієнтом відбивання $R(\theta)$. Розрахуйте тиск хвилі на межу (світловий тиск), виразивши його через густину енергії в падаючій хвилі.
- 6.19. Плоска монохромна хвиля падає із вакууму на плоску межу провідного середовища, коефіцієнт відбивання від якого $R(\theta)$ відомий. Хвиля, що пройшла у друге середовище, повністю поглинається у ньому. Розрахуйте тиск, який чинить падаюча хвиля на провідне середовище.
- 6.20. Діелектричний шар із проникністю ϵ_2 , обмежений площинами $z = 0$ і $z = a$, розділяє діелектричні середовища з проникностями ϵ_1 та ϵ_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). На цей шар нормально до його поверхні падає із області $z < 0$ електромагнітна хвиля. При якій товщині шару відбивання буде мінімальним? При якому співвідношенні між ϵ_1 , ϵ_2 та ϵ_3 відбивання не буде?
- 6.21. Нехай плоска монохромна хвиля падає із прозорого середовища з проникностями ϵ_1 , μ_1 на межу іншого прозорого середовища з ϵ_2 , μ_2 , причому $\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \gg \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$. Покажіть, що гранична умова Леонтовича застосовна до цього випадку, причому поверхневий імпеданс може бути не малим.

- 6.22. Виведіть формули Френеля для випадку, коли електромагнітна хвиля падає на плоску межу провідного середовища з малим поверхневим імпедансом ζ .
- 6.23. Доведіть формулу

$$\cos \theta_2 = -i \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2},$$

де θ_2 – кут заломлення хвилі.

- 6.24. Знайдіть коефіцієнт відбивання R від металевої поверхні з малим поверхневим імпедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. При яких кутах падіння θ_0 коефіцієнт відбивання мінімальний?
- 6.25. Лінійно поляризована плоска хвиля падає під кутом θ_0 на поверхню металу. Напрямок її поляризації складає з площиною падіння кут $\frac{\pi}{4}$. Експериментально визначено відношення поперечного і поздовжнього (відносно площини падіння) компонентів відбитої хвилі $\frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\perp 1}} = \operatorname{tg} \rho$ і зсув фаз між ними δ :

$$\frac{\mathcal{E}_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\perp 2}} = \operatorname{tg} \rho e^{i\delta}.$$

Виразіть через ρ , δ і θ_0 дійсну частину показника заломлення \bar{n}' і коефіцієнт поглинання $\bar{\alpha}$ ($\bar{n} + i\bar{\alpha} = \frac{1}{\zeta}$, ζ – поверхневий імпеданс), вважаючи $\left| \bar{n}'^2 - \bar{\alpha}^2 \right| \gg \sin^2 \theta_0$.

- 6.26. Плоска хвиля поширюється в однорідному та ізотропному недиспергуючому середовищі, в якому ε і μ не залежать від частоти і хвильового вектора. Знайдіть дисперсійні залежності для поздовжніх $\omega_l(k)$ та поперечних $\omega_t(k)$ хвиль, а також співвідношення між напруженостями електричного та магніт-

ного полів поперечних хвиль і відповідними густинами енергій.

- 6.27. Проаналізуйте глибину проникнення поля у провідне середовище при різних частотах ω , скориставшись співвідношеннями:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}, \quad \sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_{0e}^2}{\gamma - i\omega}.$$

Розгляньте різні співвідношення між параметрами середовища: а) $\varepsilon_0 \approx 1$, $\frac{\omega_{0e}^2}{\gamma^2} \gg \varepsilon_0$ (метал, плазма); б) $\varepsilon_0 \approx 10$, $\frac{\omega_{0e}^2}{\gamma^2} \ll \varepsilon_0$, (напівпровідник), $\omega \ll \gamma \ll \omega_{0e}$, $\omega_{0e} \ll \omega \ll \gamma$. Обчисліть глибину проникнення δ і поверхневий імпеданс ζ провідника.

- 6.28. Знайдіть скін-глибину в масивній міді у трьох діапазонах довжин хвиль: у НВЧ ($\lambda = 3$ см); ІЧ ($\lambda = 5$ мкм) та видимій області ($\lambda = 0,5$ мкм).
- 6.29. Як змінюється частотна залежність поверхневого опору (активної частини поверхневого імпедансу) в умовах аномального скін-ефекту?
- 6.30. Знайдіть аналітичний вираз, що описує залежність поверхневого опору від енергії Фермі.
- 6.31. Нехай у плоскій неоднорідній хвилі вектор електромагнітного поля \mathbf{E} поляризований лінійно. Визначте взаємне розташування векторів \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' , (\mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 – дійсна та уявна частини комплексної амплітуди \mathbf{H}_0 ; \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' – дійсна та уявна частини хвильового вектора \mathbf{k}). Яку криву описує кінець вектора \mathbf{H} у фіксованій точці простору?
- 6.32. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли вектор \mathbf{H} поляризований лінійно.
- 6.33. Знайдіть коефіцієнт відбивання R від плоскої межі провідника при нормальному падінні у граничному випадку малих значень провідності.
- 6.34. Плоска хвиля падає нормально із вакууму на межу діелектрика. Дослідіть вплив розмитості межі на коефіцієнт відбивання.

Для цього апроксимуйте хід діелектричної проникності функцією

$$\varepsilon(z) = \varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{\frac{z}{e^a} + 1}, \quad \varepsilon = 1 + \Delta\varepsilon,$$

де ε і $\Delta\varepsilon$ - константи. Дослідити окремі випадки великих і малих a .

Вказівка. В диференційному рівнянні для $\mathfrak{E}(z)$ зробити заміну незалежної змінної $\xi = -e^{-\frac{z}{a}}$ та підстановку $\mathfrak{E}(\xi) = \xi^{-ika} \psi(\xi)$, де $\psi(\xi)$ буде задовольняти гіпергеометричному рівнянню.

6.35. Знайдіть розв'язок рівнянь Максвелла:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial D_x}{\partial t}$$

для монохромного поля за допомогою підстановки:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{1}{U^2(z)} \frac{\partial I}{\partial z}, \quad \mathfrak{B}_y = -\frac{n_0^2}{c} \frac{\partial I}{\partial t}$$

Отримайте рівняння для нової невідомої функції $I(z, t)$ і перетворіть його шляхом іншої підстановки $I = f\sqrt{U}$ в рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = p^2 f.$$

Тут фазова координата (оптичний шлях) η визначається виразом $\eta(z) = \int_0^z U(z') dz'$ через $U(z)$, а p - стала, яка задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2 Q}{d\eta^2} = p^2 Q, \quad \text{де} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

6.36. Розрахуйте коефіцієнт відбивання від неоднорідного середовища із попередньої задачі. Плоска монохромна хвиля падає нормально із вакууму на межу $z=0$ середовища, неоднорідність якого при $z>0$ задається в функції оптичного шляху профілем $U(\eta) = \left[\cos \frac{\eta}{L} + M \sin \frac{\eta}{L} \right]^{-2}$, $L > 0$, $M > 0$ – сталі параметри. Побудуйте залежність діелектричної проникності $\varepsilon(z)$ в неоднорідному середовищі.

6.37. Шар неоднорідного діелектрика займає область $0 \leq z \leq L$. Всередині шару діелектрична проникність задається формулою $\varepsilon(z) = \frac{n_0^2}{\left(1 + \frac{z}{L}\right)^2}$. Шар знаходиться у повітрі, для якого

$\varepsilon \approx 1$. На межу шару по нормалі падає плоска монохромна хвиля. Запишіть вирази для електричного і магнітного полів у всьому просторі. Розрахуйте коефіцієнт R відбивання електромагнітної хвилі.

6.38. Знайдіть показник заломлення n і поверхневий опір $\rho_s = \operatorname{Re} \zeta$ мідного зразка, якщо його коефіцієнт відбивання на частоті електромагнітних хвиль $f = 5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ $R = 0,98$.

6.39. Поясніть, чому поверхневий опір міді на частоті $f = 1200 \text{ Гц}$ за температури $T < 80 \text{ К}$ перестав лінійно залежати від $\sigma(T)^{\frac{1}{2}}$.

6.40. Побудуйте розв'язки рівнянь Максвелла для нестационарного немагнітного середовища, в якому

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t) \mathbf{E}, \quad \varepsilon(t) = n_0^2 U^2(t), \quad U(0) = 1.$$

Вважається, що характерні періоди зміни $\varepsilon(t)$ великі порівняно з часами мікроскопічної релаксації і обумовлені зовнішнім впливом на середовище (нагрівання, іонізація, сильне зовнішнє поле). Але ці періоди можуть бути порівняні з оберненими частотами полів \mathbf{E} і \mathbf{H} , що розраховуються.

Вказівка. Слід зробити певну модифікацію та узагальнення викладених вище методів побудування розв'язків рівнянь Максвелла для просторово неоднорідних середовищ. Зокрема, слід ввести тимчасову координату $\tau = \int_0^t \frac{d\tau'}{U(\tau')}$ і отримати рівняння, які означають функції $U(t)$ або $U(\tau)$, які дозволяють спростити систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial t}; \\ -\frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial D_x}{\partial t} \end{cases}$$

і знайти її розв'язки в аналітичній формі. Розрахувати і проаналізувати коефіцієнт відбивання електромагнітної хвилі від нестационарного середовища:

- 6.41. Отримайте вираз для ефективної діелектричної проникності газу вільних електронів.
- 6.42. Нехай прикладене змінне гармонічне поле (частотою ω) викликає збурення густини газу вільних електронів, обмежуючись членами першого порядку, покажіть, що реакція електронного газу на таке збурення описується діелектричною проникністю, рівною

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - f_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0 - \hbar\omega}.$$

- 6.43. Користуючись результатами попередньої задачі, покажіть, що в границі $\omega \rightarrow 0$ і $|\mathbf{q}| \ll k_F$ статична діелектрична проникність описується таким виразом

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) \rightarrow 1 + \frac{k_0^2}{q^2},$$

де $k_0^2 \equiv \frac{e^2}{\varepsilon_0} g(\varepsilon_F)$; $g(\varepsilon_F)$ – густина станів на поверхні Фермі.

Цей результат відомий як наближення Томаса – Фермі.

- 6.44. Користуючись результатом попередньої задачі, покажіть, що при $\omega = 0$ і $T = 0$ статична діелектрична проникність описується виразом:

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1-x^2}{4x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad x \equiv \frac{q}{2k_F}.$$

- 6.45. Користуючись результатом задачі 6.36, покажіть, що при $\omega \gg \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^0$ діелектрична проникність описується виразом

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) \rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

де $\omega_p^2 \equiv \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m^*}$ – плазмова частота.

- 6.46. Випромінювання з довжиною хвилі 1 мм поширюється в напівпровіднику антимоніду індію (InSb) n -типу. Концентрація електронів у зразку $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, ефективна маса електрона $0,013 m_e$, а ефективна частота зіткнень електронів з іншими частинками $1,7 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Відносна діелектрична проникність ґратки напівпровідника $\varepsilon_L = 15,9$. Визначте відносну діелектричну проникність та провідність напівпровідника.
- 6.47. У напівпровіднику антимоніду галію (GaSb) концентрація електронів складає $7,7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, а концентрація дірок $2,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Ефективні маси електрона і дірки дорівнюють $0,05 m_e$ і $0,5 m_e$ відповідно. Ефективне число зіткнень електронів з іншими частинками дорівнює $1,7 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, а дірок $3,8 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Для випромінювання з довжиною хвилі 1 мм визначте дійсну та уявну частину комплексної діелектричної проникності напівпровідника. Відносна діелектрична проникність ґратки антимоніду галію $\varepsilon_L = 12,5$.
- 6.48. Знайдіть значення густини струму провідності в напівпровіднику арсеніду галію (GaAs) n -типу при проходженні через

нього плоскої електромагнітної хвилі, якщо $\mathcal{E}_m = 10 \frac{\text{В}}{\text{м}}$,
 $\lambda = 0,5 \text{ мм}$. Параметри напівпровідника $m_{dn}^* = 0,07 m_e$,
 $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $v_n = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

6.49. Виходячи з моделі вільних електронів, провідність металів може бути виражена

$$\sigma = \frac{\omega_0^2 v \epsilon_0}{\omega^2 + v^2}.$$

Прийнявши для деякого конкретного металу $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ і $v = 2\pi \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, визначте провідність цього металу на частотах $\nu_1 = 10^{10} \text{ Гц}$, $\nu_2 = 10^{13} \text{ Гц}$ і $\nu_3 = 5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$. Оцініть частотний діапазон, в якому можна користуватися виразом провідності на постійному струмі

$$\sigma_0 = \frac{\omega_0^2 \epsilon_0}{v} = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

6.50. Діелектрична проникність монокристала кварцу може бути описана двома головними значеннями ϵ – вздовж оптичної осі (ϵ_{zz}) та перпендикулярно до неї (ϵ_{xx}). Приймаючи $\epsilon_{zz} = 4,65$ і $\epsilon_{xx} = 4,55$, розрахуйте, на якій найменшій відстані від початку координат z_0 плоска лінійно поляризована хвиля, що поширюється перпендикулярно до оптичної осі, перетворюється в хвилю з круговою поляризацією. Розрахунок виконати для $\lambda = 8 \text{ мм}$.

6.51. Показник заломлення для λ_0 (у вакуумі) визначається виразом $\mathcal{N} = \bar{n} - i\kappa$. Обчисліть: а) коефіцієнт відбивання від полірованої поверхні матеріалу за нормального падіння; б) фазовий зсув φ_n , який виникає внаслідок відбивання за нормального падіння; в) глибину проникнення плоскої хвилі в матеріал, на якій її інтенсивність спадає до значення βJ_0 (J_0 – інтенсивність падаючого випромінювання).

№ варіанту	λ_0 , мкм	\varkappa	β
1.	0,45	$4,36 - 1,34i$	0,8
2.	0,55	$3,97 - 1,43i$	0,76
3.	0,51	$3,77 - 1,14i$	0,7
4.	0,47	$4,12 - 1,27i$	0,9
5.	0,42	$4,36 - 1,34i$	0,81
6.	0,52	$3,86 - 1,05i$	0,89
7.	0,65	$3,99 - 1,11i$	0,82
8.	0,59	$4,30 - 1,31i$	0,86
9.	0,53	$4,15 - 1,20i$	0,77
10.	0,62	$3,90 - 1,07i$	0,91
11.	0,58	$3,92 - 1,02i$	0,83
12.	0,43	$4,39 - 1,36i$	0,92
13.	0,64	$4,24 - 1,27i$	0,78
14.	0,54	$4,17 - 1,19i$	0,87
15.	0,57	$4,04 - 1,12i$	0,72
16.	0,60	$4,19 - 1,17i$	0,93
17.	0,44	$4,23 - 1,20i$	0,79
18.	0,61	$4,45 - 1,39i$	0,89
19.	0,46	$4,33 - 1,31i$	0,75
20.	0,56	$4,11 - 1,09i$	0,84
21.	0,49	$4,02 - 1,06i$	0,73
22.	0,41	$4,39 - 1,35i$	0,74
23.	0,63	$4,27 - 1,19i$	0,71
24.	0,48	$4,17 - 1,15i$	0,85
25.	0,50	$3,81 - 1,01i$	0,88

6.52. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально з вакууму на кристал сапфіру (Al_2O_3) з тензором діелектричної проникності

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Межа поділу повітря – діелектрик паралельна осі кристалу (вісь z). Знайдіть коефіцієнти відбивання звичайної та незвичайної хвиль на частоті 10 ГГц, на якій $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 13,2$; $\varepsilon_{zz} = 11,4$.

- 6.53. За допомогою рівняння Френеля знайдіть фазові швидкості хвиль, які поширюються уздовж головних осей тензора діелектричної проникності в анізотропному середовищі.
- 6.54. Середовище, в якому два головних значення тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ однакові ($\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{\parallel}$), називається одновісним.

а) покажіть, що оптична вісь співпадає з віссю 3;

б) з рівняння Френеля знайдіть фазові швидкості хвиль, які поширюються під кутом θ до оптичної осі:

$$v_{ph}^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu}}, \quad v_{ph}^{(2)} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \mu}}.$$

Перша хвиля називається звичайною, а друга – незвичайною (її швидкість залежить від напрямку поширення);

в) знайдіть поляризації звичайної та незвичайної хвиль.

- 6.55. За допомогою формул

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

$$\text{де } w = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{E}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta}}{2} + \mu_0 \frac{\mu_{\alpha\beta} \mathbf{H}_{\alpha} \mathbf{H}_{\beta}}{2} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}),$$

покажіть, що в анізотропному недиспергуючому середовищі густини електричної та магнітної енергій плоскої монохромної хвилі однакові:

$$w_e = w_m = \frac{1}{2c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n}.$$

Тут \mathbf{E} і \mathbf{H} – дійсні вектори, \mathbf{n} – вектор нормалі, c – швидкість світла у вакуумі.

6.56. За допомогою формул

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

$$\text{де } w = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta}{2} + \mu_0 \frac{H_\alpha H_\beta}{2} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B})$$

та рівнянь Максвелла знайдіть швидкість \mathbf{v}_g поширення енергії плоскої квазімонохромної хвилі в анізотропному недиспергуючому середовищі. Визначте її як відношення густини потоку енергії до густини самої енергії, $\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{Y}}{w}$, і виразіть через

електричні вектори \mathbf{E} , \mathbf{D} . Порівняйте з фазовою швидкістю

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{c \mathbf{n}}{n^2}. \text{ Зобразіть на рисунку відносне розташування векторів } \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_g \text{ і } \mathbf{v}_{ph}.$$

6.57. Незвичайна хвиля поширюється в одновісному кристалі під кутом θ до оптичної осі. Визначте кут α між хвильовим вектором \mathbf{k} і вектором \mathbf{E} , а також кут ϑ між напрямком променя (вектором Пойтінга) та оптичною віссю кристала.

6.58. Плоска електромагнітна хвиля з частотою ω поширюється в недиспергуючому діелектрику з проникностями ε , μ . Діелектрик переміщується як ціле зі сталою швидкістю \mathbf{v} . Знайдіть фазову швидкість хвилі як функцію частоти і напрямку поширення. Розрахуйте групову швидкість і визначте поляризацію хвилі. Порівняйте властивості хвиль у рухомому середовищі і в нерухомому одновісному кристалі.

Вказівка. Використати рівняння для електромагнітних потенціалів у рухомому середовищі.

6.59. Плоска монохромна хвиля падає із вакууму на плоску поверхню одновісного кристалу. Оптична вісь кристалу нормальна до його поверхні. Знайдіть напрямок звичайного і незвичайного променів у кристалі, якщо кут падіння θ_0 .

- 6.60. Плоска монохромна хвиля падає із вакууму на плоску поверхню одновісного кристалу. Оптична вісь кристалу паралельна до його поверхні і складає кут α з площиною падіння. Знайдіть напрямки звичайного і незвичайного променів у кристалі, якщо кут падіння θ_0 .
- 6.61. Плоска хвиля падає нормально на плоску ґратку, утворену тонкими паралельними нескінченно довгими провідниками. Відстань між провідниками та їхня товщина набагато менші довжини хвилі. Який вплив буде чинити ґратка на поширення хвиль із різними поляризаціями?
- 6.62. Плоска монохромна хвиля поширюється в нескінченному феритовому намагніченому до насичення середовищі під кутом θ до постійного магнітного поля. Магнітна проникність фериту – тензор:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Діелектричну проникність фериту $\varepsilon \approx 15$ можна вважати скаляром (це пояснюється тим, що в НВЧ-діапазоні вплив постійного магнітного поля на магнітні властивості фериту значно сильніший, ніж на електричні). Знайдіть фазові швидкості поширення нормальних хвиль.

- 6.63. Дослідіть хвилі, отримані у попередній задачі, для випадку поздовжнього поширення ($\theta = 0$), використавши компоненти тензора магнітної проникності

$$\mu_{\perp} = 1 + \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_{\parallel} = 1.$$

- знайдіть дисперсійні залежності $k(\omega)$ нормальних хвиль і області існування (побудуйте графіки);
- визначте поляризації нормальних хвиль та їхні поверхневі імпеданси;
- розрахуйте кут повороту на довжині z площини поляризації лінійно поляризованої хвилі (ефект Фарадея).

6.64. Зробіть те ж саме для випадку поперечного поширення $\theta = \frac{\pi}{2}$:

- а) знайдіть дисперсійні залежності $k(\omega)$ для нормальних хвиль і області існування (побудуйте графіки);
- б) визначте поляризації нормальних хвиль та їхні поверхневі імпеданси;
- в) знайдіть зміну поляризації хвилі при поперечному поширенні (ефект Коттона – Мутона).

6.65. Плоска монохромна хвиля оптичної частоти поширюється у феродіелектрику, в якого тензори електричної та магнітної проникностей мають структуру:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Для випадку поздовжнього поширення розрахуйте кут фарадєївського обертання площини поляризації на довжині l . При цьому скористайтеся компонентами тензора μ :

$$\mu_{\perp} = 1 + \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_{\parallel} = 1,$$

і наближення $\omega \gg \omega_M$, ω_0 , $\varepsilon_a \ll \varepsilon_{\perp}$.

6.66. Магнітостатичними хвилями називаються коливання намагніченості і магнітного поля, які задовольняють умові $kc \gg \omega$. У нульовому наближенні за малим параметром $\left(\frac{\omega}{kc}\right)$ їх можна описати рівняннями магнітостатики $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$. Знайдіть дисперсійне співвідношення $\omega(\mathbf{k})$ для магнітостатичних хвиль в безмежному феритовому середовищі з тензором магнітної проникності

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}$$

та його компонентами:

$$\mu_{\perp} = 1 + \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_{\parallel} = 1.$$

Знайдіть інтервал частот, в якому існують магнітостатичні хвилі та електричне поле у хвилі.

- 6.67. Немагнітний діелектрик знаходиться у зовнішньому магнітному полі. Плоска монохромна хвиля поширюється у напрямку магнітного поля (вісь Oz) і має при $z=0$ лінійну поляризацію. Використавши тензор діелектричної проникності:

$$\varepsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega \pm 2\omega_L) - \omega_0^2}, \quad \varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m},$$

визначте поляризацію хвилі при $z > 0$.

- 6.68. В однорідній плазмі з концентрацією електронів N_e і однорідним магнітним полем \mathcal{B} поширюються від одного джерела дві квазімонохроматичні хвилі, довжини хвиль яких λ_1 і λ_2 . Обидві частоти великі у порівнянні з електронною плазмовою

частотою $\omega_{0e} = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$ й електронною циклотронною частотою $\omega_{Be} = \frac{eB}{m}$.

У джерелі обидві хвилі поляризовані лінійно в одній площині. Використавши ермітів тензор діелектричної проникності:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} & \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{2} & 0 \\ -\frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{2} & \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^0 \end{pmatrix},$$

де

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + \omega(i\gamma \pm \omega_L)}, \quad \varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m},$$

$$\gamma = \frac{\eta}{m}, \quad \omega_L = -\frac{eB}{2m} > 0,$$

розрахуйте відносний поворот $\Delta\chi$ площин поляризації цих хвиль на шляху до приймача, який розташований на відстані L від джерела.

- 6.69. Плоска поляризована по колу хвиля падає із вакууму нормально на плоску межу фериту. Ферит намагнічений у напрямку падіння хвилі. Визначте характер поляризації і амплітуди відбитої хвилі і хвилі, що пройшла. Знайдіть також коефіцієнт R відбивання електромагнітної енергії від поверхні фериту, виразивши його через поверхневий імпеданс. За яких умов відбивання буде повним?
- 6.70. Плоска лінійно поляризована хвиля падає із вакууму нормально на плоску межу фериту. Ферит намагнічений у напрямку падіння хвилі. Визначте характер поляризації і амплітуди відбитої хвилі і хвилі, що пройшла. Знайдіть також коефіцієнт R відбивання електромагнітної енергії від поверхні фериту, виразивши його через поверхневий імпеданс. За яких умов відбивання буде повним?
- 6.71. Штучний діелектрик складається із тонких ідеально провідних круглих дисків, орієнтованих однаковим чином, які знаходяться у вакуумі. Перпендикулярно площинам дисків прикладене постійне магнітне поле \mathbf{H}_0 і в тому ж напрямку поширюється плоска електромагнітна хвиля. Визначте фазові

швидкості поширення, розглядаючи діелектрик як суцільне середовище.

Вказівка. Врахуйте ефект Холла, який виникає внаслідок наявності зовнішнього магнітного поля.

6.72. Знайдіть з урахуванням члена $q\Delta\mathbf{M}$ у виразі

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = -\eta[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{ef}]$$
 дисперсійне рівняння для електромагнітних хвиль, що поширюються в ізотропному, намагніченому до насичення феродіелектричному середовищі. Покажіть, що в такому середовищі можуть поширюватися три типи хвиль із різними законами дисперсії $\omega(\mathbf{k})$. Визначте явний вигляд залежності $\omega(\mathbf{k})$ для того типу хвиль, у якого може виконуватися умова $\frac{\omega^2 \varepsilon}{(ck)^2} \ll 1$. Оцініть відносну величину електричного та магнітного полів для цієї гілки коливань.

6.73. Обчисліть поверхневий імпеданс ζ феромагнітного провідника, що знаходиться в постійному магнітному полі, паралельному його поверхні. Тензор магнітної проникності має вигляд:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix},$$

де

$$\mu_{\perp} = 1 + \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_{\parallel} = 1,$$

а компоненти тензора електропровідності дорівнюють

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1, \quad \sigma_{33} = \sigma_3, \quad \sigma_{12} = -\sigma_{21} = -i\sigma_2, \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0.$$

Вказівка. Поверхневий імпеданс у даному випадку – тензор Π рангу і має бути визначений з умови

$$\mathbf{E}_{\tau i} = \zeta_{ik} (\mathbf{H}_{\tau} \times \mathbf{n})_k,$$

де $i, k = 1, 2$, \mathbf{E}_t і \mathbf{H} – дотичні складові векторів поля поблизу поверхні провідника, \mathbf{n} – орт нормалі до поверхні.

- 6.74. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли постійне магнітне поле розташоване нормально до поверхні феромагнітного провідника.
- 6.75. Знайдіть активний опір R тонкого циліндричного провідника при скін-ефекті. Довжина провідника l , радіус a , провідність σ , магнітна проникність $\mu = 1$. Дослідіть граничні випадки великих і малих частот.
- 6.76. На поверхню циліндричного провідника, в якого радіус a , питома провідність σ_1 , нанесено шар іншого металу. Товщина шару h , його провідність σ_2 , причому $h \ll a$. Знайдіть активний опір R такого провідника змінному струму, вважаючи товщину скін-шару малою порівняно з a ($\mu = 1$).
- 6.77. Всередині металічної труби на відстані l від її лінії осі протікає прямолінійний струм I . Радіус труби a , товщина стінки $h \ll a$, провідність стінки σ ($\mu = 1$). Оскільки струм I , як і відстань l залежать від часу за довільним законом, але так, що у всі моменти часу $l \ll a$. Вважаючи виконаними умови квазістаціонарності, визначте силу f на одиницю довжини, що діє на струм I з боку вихрових струмів, що індукуються у циліндричній оболонці, при слабкому скін-ефекті ($h \ll \delta$).
- 6.78. Розв'яжіть попередню задачу для випадку сильного скін-ефекту ($h \gg \delta$).
- 6.79. Визначте обертання площини поляризації хвилі, яка поширюється паралельно осі діелектричного тіла, що обертається.
- 6.80. На межу напівпростору ($x > 0$), заповненого прозорим середовищем з $\mu = 1$, падає в нормальному напрямку плоска електромагнітна хвиля з переднім фронтом, що різко обривається. Визначте структуру фронту хвилі, що пройшла всередину середовища.
- 6.81. Знайдіть напрямок незвичайного променя при нормальному падінні світла на поверхню одновісного кристалу з довільним напрямком оптичної осі.

- 6.82. Знайдіть напрямок незвичайного променя при заломленні світла (що падає з вакууму) на поверхні одновісного кристалу, перпендикулярної до його оптичної осі.
- 6.83. Доведіть, що напрямок середнього (за часом) вектора Пойнтінга у хвилі, що розповсюджується у прозорому гіротропному середовищі, співпадає з напрямком групової швидкості.
- 6.84. Визначте напрямок променів при заломленні падаючого з вакууму променя на поверхні ізотропного тіла в магнітному полі.
- 6.85. Визначте поляризацію відбитого світла при нормальному падінні лінійно поляризованої хвилі з вакууму на поверхню ізотропного тіла у магнітному полі.
- 6.86. Знайдіть закон обернення коефіцієнта відбивання поблизу кута повного відбивання.
- 6.87. Знайдіть коефіцієнт відбивання при практично ковзаючому падінні світла з вакууму на поверхню тіла з близьким до одиниці значенням ε .
- 6.88. Знайдіть коефіцієнт відбивання при падінні світла з вакууму на межу середовища з відмінними від одиниці ε та μ .
- 6.89. Знайдіть коефіцієнти відбивання та проходження при нормальному падінні світла на пластинку з дуже великою комплексною діелектричною проникністю ε .
- 6.90. Плоскопаралельний шар речовини 2 знаходиться між вакуумом (середовище 1) та довільним середовищем 3. Із вакууму на шар падає світло, поляризоване в площині падіння (або перпендикулярне до неї). Виразіть коефіцієнт відбивання від шару R через коефіцієнти відбивання при падінні світла на напівнескінченне середовище 2 або 3.
- 6.91. Струм, що виникає в металах під дією низькочастотного електричного поля $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, добре описується законом Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, де σ – статична електропровідність, а внеском зв'язаних зарядів можна знехтувати. Покажіть, що в цьому випадку

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega) = \varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \quad (\sigma \rightarrow 0, \mu = 1).$$

7. Надпровідність

Основні формули та визначення

Конфігурація магнітного поля всередині надпровідного зразка має задовольняти рівнянню

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{B} = \frac{\mathcal{B}}{\lambda_L^2}, \quad (7.1)$$

яке носить назву **рівняння Лондонів**. Для плоскої поверхні в паралельному до неї полі розв'язок має вигляд

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, \quad (7.2)$$

де \mathcal{B}_0 – значення \mathcal{B} на поверхні; x – відстань від поверхні вглиб зразка, а

$$\lambda_L^2 = \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2} \quad (7.3)$$

характерну глибину проникнення для надпровідника з концентрацією надпровідних електронів n_s (як правило вважають, що концентрація надпровідних електронних пар удвічі менша від концентрації електронів, оскільки електричний струм у надпровідній фазі переноситься парами) називають **лондонівською довжиною**.

Встановлення парних кореляцій між електронами за температури, нижчої від критичної T_c призводить до зниження їхньої енергії й утворення в спектрі електронних збуджень енергетичної щільності ΔE . За теорією Бардіна-Купера-Шріфера (БКШ)

$$2\Delta E_0 = 3,52k_B T_c, \quad (7.4)$$

де ΔE_0 – величина щільності при нульовій температурі.

Ефективна кількість електронів, які беруть участь у спаруванні, дорівнює

$$n_{ef} = \frac{\Delta E}{\varepsilon_F} n, \quad (7.5)$$

і тим самим енергія спарування (енергія електронів у надпровідному конденсаті)

$$E_c \approx \frac{\Delta E}{\varepsilon_F} n \Delta E = \frac{n \Delta E^2}{\varepsilon_F}. \quad (7.6)$$

Мікроскопічний стан надпровідника характеризують крім лондонівської довжини ще одним параметром довжини – **довжиною когерентності**

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\Delta E}, \quad (7.7)$$

де v_F – фермівська швидкість електронів. Довжина когерентності визначає характерний масштаб, на якому „заліковуюються“ порушення надпровідного впорядкування.

У магнітному полі надпровідні куперівські пари утворюватимуться до тих пір, поки енергія, отримана зразком завдяки переходу у надпровідний стан, буде перевищувати енергетичні витрати на витіснення магнітного поля $\propto \frac{\mathcal{B}^2}{2\mu_0} V$ (V – об’єм зразку).

У надпровідниках другого роду можливий змішаний стан, коли в об’ємі виникають квантовані вихрові нитки, серцевина яких перебуває в нормальному стані.

Кожний вихор несе в собі **квант магнітного потоку**

$$\Phi_0 = \frac{\pi \hbar}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}. \quad (7.8)$$

Вихори починають проникати в надпровідник при значенні магнітного поля, більшому, ніж так зване **перше критичне поле**, індукцію якого визначають за співвідношенням

$$\mathcal{B}_{c1} = \mu_0 H_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \lambda_L^2}. \quad (7.9)$$

Температурна залежність напруженості першого критичного поля має вигляд:

$$H_{c1}(T) = H_{c1}^0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (7.10)$$

де H_{c1}^0 – значення напруженості першого критичного поля при $T \approx 0$ К.

Повністю перехід надпровідників другого роду в нормальний стан відбувається в полі (**друге критичне поле**)

$$\mathcal{B}_{c2} \approx \frac{\Phi_0}{\pi \xi^2}. \quad (7.11)$$

Термодинаміка надпровідників. Нехай довгий надпровідний циліндр з надпровідника першого роду розміщений в однорідному повздовжньому полі \mathbf{H}_0 . Знайдемо таке значення цього поля, при якому відбудеться руйнування надпровідності, тобто знайдемо H_c .

Якщо $H_0 < H_c$, то виникає **ефект Мейсснера – Оксенфельда**, тобто $\mathcal{B} = 0$ і магнітний момент одиниці об'єму циліндра \mathbf{M} дорівнює

$$\mathbf{M} = -\mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (7.12)$$

При зміні зовнішнього поля \mathbf{H}_0 на величину $d\mathbf{H}_0$ джерело магнітного поля здійснює роботу над одиницею об'єму надпровідника

$$-\mathbf{M}d\mathbf{H}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 d\mathbf{H}_0. \quad (7.13)$$

Тому, при зміні поля від 0 до H_0 джерело поля здійснює роботу

$$-\int_0^{H_0} M dH_0 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2. \quad (7.14)$$

Ця робота входить у вільну енергію надпровідника, що знаходиться в магнітному полі \mathbf{H}_0 . Отже, якщо густина вільної енергії надпро-

відника за відсутності магнітного поля дорівнює F_{s_0} , то густина вільної енергії надпровідника у магнітному полі дорівнює

$$F_{sH} = F_{s_0} + \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2. \quad (7.15)$$

Перехід до нормального стану відбудеться тоді, коли густина вільної енергії F_{sH} підніметься до рівня густини вільної енергії нормального металу: $F_{sH} = F_n$ при $H_0 = H_c$. Це означає, що

$$F_n - F_{s_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2. \quad (7.16)$$

З формули (7.16) випливає, що критичне поле масивного матеріалу є мірою того, наскільки надпровідний стан є енергетично більш вигідним, ніж нормальний, тобто наскільки вільна енергія надпровідного стану менша вільної енергії нормального стану. тому поле H_c називають **критичним термодинамічним магнітним полем**.

Згідно першого закону термодинаміки

$$\delta Q = du + PdV. \quad (7.17)$$

За означенням, густина вільної енергії F дорівнює

$$F = u - Ts, \quad (7.18)$$

де s – густина ентропії. Тоді

$$dF = du - Tds - sdT.$$

Оскільки при оборотному процесі $\delta Q = Tds$, маємо

$$\begin{aligned} du &= Tds - PdV, \\ dF &= -PdV - sdT. \end{aligned} \quad (7.19)$$

З формули (7.19) випливає

$$s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V. \quad (7.20)$$

Користуючись формулами (7.16) та (7.20), розрахуємо різницю питомих ентропій надпровідного та нормального станів:

$$s_s - s_n = \mu_0 H_c \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_V. \quad (7.21)$$

Оскільки питому теплоємність речовини можна визначити за допомогою формули

$$C = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right), \quad (7.22)$$

різниця питомих теплоємностей надпровідного та нормального станів запишеться у вигляді

$$C_s - C_n = \mu_0 T \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)^2 + H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} \right]. \quad (7.23)$$

Оскільки при $T = T_c$ критичне поле $H_c = 0$, з (7.23) отримаємо **формулу Рутгерса**

$$C_s - C_n = \mu_0 T_c \left(\frac{\partial H_c}{\partial T} \right)_{T_c}^2, \quad (7.24)$$

яка дає стрибки теплоємності при $T = T_c$.

Під слабкою надпровідністю розуміють таку ситуацію, коли два надпровідника з'єднані між собою будь-яким зв'язком. Таким зв'язком може бути просто слабкий дотик двох надпровідників на малій площі та інші подібні „послаблення“ надпровідності контакту між двома надпровідниками.

Нехай в загальному випадку струм через тунельний перехід настільки великий ($I_s > I_c$), що на переході виникла різниця потенціалів U . Будемо розглядати систему надпровідних електронів (куперівських пар) як дворівневу систему, тобто припустимо, що пара може знаходитися на першому або на другому рівні. Її енергія тоді буде відповідно H_{11} або H_{22} , причому $H_{11} = eU$, $H_{22} = -eU$. Пе-

рехід пари з першого рівня на другий визначається величиною матричного елемента $H_{12} = H_{21} = K$. В такому випадку маємо

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= eUC_1(t) + KC_2(t), \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= KC_1(t) - eUC_2(t). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Тут C_1 і C_2 амплітуди стану пар на першому та другому рівнях відповідно, а $|C_1|^2$ і $|C_2|^2$ нормовані так, що $|C_1|^2 = |C_2|^2 = n_s$, де n_s густина надпровідних електронів в надпровідних обкладинках переходу. Для простоти припустимо, що обидві обкладинки зроблено із одного і того ж матеріалу. Представляючи амплітуди C_1 і C_2 у вигляді

$$C_1 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_1}, \quad C_2 = \sqrt{n_s} e^{i\theta_2}$$

і підставляючи у вираз (7.25) отримаємо після розділу дійсної та уявної частин наступні вирази:

$$\begin{aligned} \frac{dn_s}{dt} &= \frac{2Kn_s}{\hbar} \sin \varphi, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi - \frac{eU}{\hbar}, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\frac{K}{\hbar} \cos \varphi + \frac{eU}{\hbar}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

де $\varphi = \theta_2 - \theta_1$.

Струм через тунельний перехід пропорційний $\frac{dn_s}{dt}$. Дійсно, при увімкненні струму, в перший момент протікання струму, густина надпровідних електронів почне змінюватися зі швидкістю $\frac{dn_s}{dt}$ і виникне струм $I_s \sim \frac{dn_s}{dt}$. Цей вихід електронів із надпровідної обкладинки буде у той же час скомпенсований приходом нових електронів із джерела струму, оскільки перехід увімкнено в за-

мкнений електричний ланцюг, і концентрація n_s буде залишатися сталою внаслідок нейтральності всієї системи. Однак для визначення надструму достатньо прийняти, що $I_s \propto dn_s/dt$. Тоді із першої формули у виразі (7.26) відразу ж отримаємо **рівняння стаціонарного ефекту Джозефсона**:

$$I_s = I_c \sin \varphi. \quad (7.27)$$

За відсутності джозефсонівського струму уздовж контакту двох надпровідників, розділених шаром діелектрика, можуть розповсюджуватися хвилі зі швидкістю $v_{sw} = c \sqrt{\frac{d'}{\varepsilon d}}$, де c – швидкість світла у вакуумі, ε – діелектрична проникність діелектричного шару, d' – його товщина, d – товщина надпровідного шару. Вони називаються **хвилями Свіхарта**.

Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1. Знайдіть критичне магнітне поле олова за температури $T = 3$ К.

Розв'язання

Скористаємось додатком Е, згідно з яким критична температура олова та критичне магнітне поле при $T = 0$ К відповідно дорівнюють: $T_c = 3,722$ К; $H_c^0 = 3,833 \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Тому критичне поле за температури $T = 3$ К дорівнює:

$$H_{c1}(3) = H_{c1}^0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] = 3,833 \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{3,722} \right)^2 \right] = 1,343 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $H_{c1}(3) = 1,343 \frac{\text{А}}{\text{м}}$.

Приклад 7.2. Температура переходу в надпровідний стан для олова за відсутності магнітного поля дорівнює $T_c = 3,7 \text{ К}$, а критична напруженість магнітного поля при температурі $T \approx 0 \text{ К}$ складає $2,4 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Визначте максимальну припустиме значення струму при температурі $T = 2 \text{ К}$ для дроту діаметром $d = 1 \text{ мм}$, виготовленого з надпровідного олова. Визначте при цій температурі діаметр дроту, по якому може протікати струм 100 А без руйнування надпровідного стану.

Розв'язання

Для надпровідників першого роду справедливе співвідношення

$$H_{c1}(T) = H_{c1}^0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right].$$

Для олова

$$H_{c1}(2) = 2,4 \cdot 10^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{2}{3,7} \right)^2 \right] = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Граничний струм обмежується критичною напруженістю магнітного поля на поверхні зразка. Для циліндричного проводу

$$I_{\max} = \pi d H_{c1}(T) = 3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 1,7 \cdot 10^4 = 53,4 \text{ А}.$$

Діаметр проводу, по якому може протікати струм 100 А ,

$$d_{100} = \frac{100}{3,14 \cdot 1,7 \cdot 10^4} = 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,87 \text{ мм}.$$

Отже, густина граничного струму в надпровідниках першого роду зменшується зі збільшенням діаметру проводу; при цьому граничний струм пропорційний діаметру проводу, а не площі його поперечного перерізу.

Відповідь: $H_{c1}(2) = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{А}}{\text{м}}$; $I_{\text{max}} = 53,4 \text{ А}$; $d_{100} = 1,87 \text{ мм}$.

Приклад 7.3. Неперервні експериментальні спостереження за струмом, індукованим у замкнутому контурі з надпровідного матеріалу, показали, що протягом одного року струм зменшується внаслідок релаксації системи до рівноважного стану всього на 0,01 %. Вважаючи концентрацію електронів провідності $n_e = 4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, оцініть питомий електроопір матеріалу в надпровідному стані і порівняйте з питомим електроопором міді за нормальних умов.

Розв'язання

Відповідно до кінетичного рівняння Больцмана згасання струму визначають за виразом

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де τ – час релаксації. Звідси випливає, що

$$\beta = \frac{i_0 - i}{i_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^{-4}.$$

Для $t = 3,15 \cdot 10^7 \text{ с}$ (1 рік)

$$\tau = 3,15 \cdot 10^{11} \text{ с}.$$

Питома провідність матеріалу пов'язана із часом релаксації співвідношенням

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 4 \cdot 10^{28} \cdot 3,15 \cdot 10^{11}}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 3,54 \cdot 10^{32} \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Порівнюючи питомі опори надпровідника і міді ($\rho_{\text{Cu}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$), отримуємо

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{Cu}}} = \frac{1}{3,54 \cdot 10^{32} \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} = 1,66 \cdot 10^{-25}.$$

Відповідь: $\frac{\rho}{\rho_{\text{Cu}}} = 1,66 \cdot 10^{-25}$.

Приклад 7.4. Для надпровідника I-го роду розрахуйте різницю вільних енергій Гіббса для випадку нульового поля та випадку однорідної намагніченості в зовнішньому полі \mathbf{H} . Звідси через критичне поле H_c отримайте вираз для різниці ентропій та питомих теплоємностей нормальної та надпровідної фаз. Покажіть, що при критичній температурі присутній стрибок питомої теплоємності, а стрибок прихованої теплоти переходу відсутній.

Розв'язання

Різниця між вільними енергіями Гіббса (на одиницю об'єму надпровідника) за відсутності поля і в полі \mathbf{H} буде дорівнювати:

$$G_s(H) - G_s(0) = - \int_0^H \mathbf{M} d\mathbf{H}$$

для зразку з однорідною намагніченістю \mathbf{M} .

Ефект Мейсснера свідчить про те, що надпровідник є ідеальним діаманетиком, так що робота (на одиницю об'єму), яка виконується при прикладенні поля \mathbf{H} , дорівнює

$$\int_0^H \mathbf{M} d\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2.$$

Тому для одиниці об'єму маємо:

$$G_s(H) - G_s(0) = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2.$$

Коли зовнішнє поле стає рівне критичному,

$$G_s(H) - G_s(0) = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H_c^2.$$

Для нормального металу можна знехтувати також магнітною сприйнятливістю, так що різниця між вільними енергіями в нормальному стані дорівнює

$$G_n(H_c) - G_n(0) = 0.$$

Крім того, для переходу з надпровідної фази у нормальну в полі H_c потрібно, щоб виконувалося співвідношення:

$$G_s(H_c) = G_n(H_c).$$

Отже, на одиницю об'єму $G_n(0) - G_s(0) = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H_c^2$. Різниця ентропій

$$S_s(0) - S_n(0) = \mu_0 \mu H_c \frac{dH_c}{dT}. \quad (1)$$

Для питомої теплоємності (на одиницю об'єму) відповідно (з урахуванням того, що $C = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)$).

$$C_s - C_n = \mu_0 \mu T \left(H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} + \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \right). \quad (2)$$

При температурі $T = T_c$ $H_c = 0$ і тому завжди

$$C_s - C_n = \mu_0 \mu T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 > 0.$$

Отже, завжди справедливе співвідношення $C_s > C_n$. прихована теплота переходу $Q = T(S_s - S_n)$ і при $T = T_c$ згідно з (1) $Q = 0$.

Відповідь: при $T = T_c$ $Q = 0$; $C_s - C_n = \mu_0 \mu T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 > 0$.

Приклад 7.5. Визначте густину струму та індукцію магнітного поля в надпровіднику

Розв'язання

Припустимо, що всередині надпровідника виникло електричне поле. Надпровідні електрони (спарені електрони, які називають куперівськими парами) будуть прискорюватися, не передаючи свого імпульсу гратці.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}. \quad (1)$$

Внаслідок того, що $\mathbf{j} = en_s \mathbf{v} = \frac{en_s \mathbf{p}}{m_e}$, де n_s – кількість електронів, що беруть участь у надпровідності, перепишемо формулу (1) у вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = e^2 \frac{n_s}{m_e} \mathbf{E}. \quad (2)$$

Застосуємо до обох частин рівняння (2) операцію rot та скористаємось законом електромагнітної індукції Фарадея $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}$. Тоді з (2) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot } \mathbf{j} + \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B} \right) = 0.$$

Звідси випливає, що в будь-якому середовищі, яке проводить електричний струм без дисипації, вираз $\text{rot } \mathbf{j} + \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B}$ не залежить від часу. А оскільки в початковий момент часу, тобто до збудження струму в надпровіднику, $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, то у будь-який момент часу повинно бути

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \mathbf{B}. \quad (3)$$

Внаслідок того, що $\mathbf{B} = \text{rot } \mathcal{A}$ з (3) маємо

$$\text{rot} \left(\mathbf{j} + \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathcal{A} \right) = 0.$$

Одним з розв'язків цього рівняння є

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_s}{m_e} \mathcal{A}. \quad (4)$$

Ця формула пов'язує надпровідний струм з векторним потенціалом електромагнітного поля. В праву частину рівняння (4) повинен входити доданок, пропорційний градієнту довільної функції. Однак за допомогою калібрувального перетворення можна позбавитися цього доданку. Відмітимо, що співвідношення (4) отримане на базі класичного рівняння руху (1), і тому урахування квантових ефектів може його змінити.

Підставляючи (4) в рівняння $\Delta \mathcal{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$, отримаємо рівняння для векторного потенціалу в надпровіднику

$$\Delta \mathcal{A} = \mu_0 \frac{e^2 n_s}{m_e} \mathcal{A} = \lambda^2 \mathcal{A}, \quad (5)$$

де $\lambda^2 \equiv \mu_0 \frac{e^2 n_s}{m_e}$. Взявши rot від обох частин (5) і враховуючи, що $\text{rot } \mathcal{A} = \mathbf{B}$, отримаємо

$$\Delta \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{B}.$$

Якщо надпровідник має плоску межу, то це рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dz^2} = \lambda^2 \mathbf{B},$$

звідки $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-\lambda z}$.

Розподіл струму в просторі знайдемо з рівняння $\mu_0 \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathcal{B} = \frac{\lambda}{\mu_0} [\mathcal{B}_0, \mathbf{k}] e^{-\lambda z} = \mathbf{j}_0 e^{-\lambda z},$$

де \mathbf{k} – одиничний вектор осі z .

Тому магнітне поле та електричний струм розподілені в приповерхневому шарі надпровідника, товщина якого порядку $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}}$. Для типових надпровідників ця величина має порядок $1 \div 10$ нм. Внаслідок цього струм у масивних надпровідниках, розміри яких набагато більші за глибину проникнення $\frac{1}{\lambda}$ можна вважати поверхневим.

Відповідь: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 e^{-\lambda z}$; $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-\lambda z}$; $\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}}$.

Приклад 7.6. Визначте середню густину надпровідного струму у напівнескінченному надпровіднику, що знаходиться у магнітному полі $\mathcal{B}_e(0, 0, \mathcal{B}_e) = 0,01 \text{ Тл}$, паралельному до його поверхні. Концентрація куперівських пар дорівнює 10^{20} см^{-3} .

Розв'язання

І спосіб. Згідно із (7.3)

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2}} = \sqrt{\frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{26} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}} \approx 0,39 \text{ мкм}.$$

Магнітне поле затухає вздовж осі x , перпендикулярної до поверхні зразка (рис. 7.1 а)

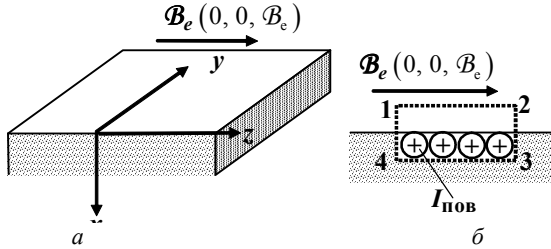


Рисунок 7.1

за законом (7.2):

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}.$$

Відповідно до цього $\mathcal{A} \left(0, -\lambda_L \mathcal{B}_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}, 0 \right)$ і

$$\langle j_{sy} \rangle = -\frac{1}{\lambda_L} \int_0^{\lambda_L} \frac{2e^2 n_s}{mc} \mathcal{A}_y(x) dx \approx \frac{1}{\mu_0 \lambda_L} \mathcal{B}_0 \approx 2 \cdot 10^8 \frac{\text{A}}{\text{M}^2}.$$

II спосіб. Виберемо контур струму так, як показано на рис. 7.1 б. За допомогою одного з рівнянь Максвелла запишемо

$$\mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

За теоремою Стокса

$$\mu_0 j = \oint_L \mathcal{B} \cdot d\ell,$$

де j – струм, що йде через площу контуру. Звідси

$$J_S = \langle j_S \rangle \ell_{12} \lambda_L = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_0 \ell_{12}.$$

Відповідь: $\langle j_{sy} \rangle = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{A}}{\text{M}^2}.$

Приклад 7.7. Визначте кількість флюксонів, що захоплюються в отворі надпровідникового зразка у магнітному полі $\mathcal{B}_e = 0,01$ Тл. Радіус отвору $r = 1,0$ мкм.

Розв'язання

Виберемо навколо отвору контур, розташований від краю отвору на відстані, більшій за глибину проникнення магнітного поля у надпровідник. Уздовж цього контуру $j_s = 0$ і $\oint \mathbf{j}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Тоді

$$\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2e}{\hbar} \oint \mathcal{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \mathcal{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi,$$

де Φ – потік вектора магнітної індукції через площу контуру. З умови однозначності хвильової функції знаходимо, що

$$\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = n2\pi.$$

Тоді

$$n = \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

де

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Вб},$$

і

$$n = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{\pi r^2}{\Phi_0} = \frac{3,14 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{2,07 \cdot 10^{-15}} = 15 \text{ флюксонів}.$$

Відповідь: $n = 15$ флюксонів.

Приклад 7.8. Оцініть, як змінюється струм стаціонарного ефекту Джозефсона у симетричному переході, якщо у ньо-

му замінити один із надпровідників першого роду надпровідником другого роду.

Розв'язання

Для однакових надпровідників

$$j_{s1} = j_{sm1} \sin \left(\varphi_{01} + \frac{2\pi \mathcal{B} z}{\Phi_0} \lambda_1 \left(2 + \frac{d}{\lambda_1} \right) \right),$$

для різних –

$$j_{s2} = j_{sm2} \sin \left(\varphi_0 + \frac{2\pi \mathcal{B} z}{\Phi_0} \lambda_1 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_1} \right) \right),$$

де $j_{smi} = \frac{\pi \Delta E_i}{2eR_i}$.

При $\frac{d}{\lambda_i} < 1$, $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$ та

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt[3]{\frac{\xi_{02}}{\xi_{01}}} \approx \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 10^{-8}}{10^{-4}}} \propto 10^{-1} \ll 1,$$

$$\frac{j_{s1}}{j_{s2}} = C \frac{\Delta E_1 R_2}{\Delta E_2 R_1},$$

де

$$C = \frac{\sin(\varphi_0 + 2A\lambda_1)}{\sin \left(\varphi_0 + A\lambda_1 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right)} \quad \text{та} \quad A = \frac{2\pi \mathcal{B} z}{\Phi_0}.$$

Таким чином, при $R_2 > R_1$ і $\Delta E_2 > \Delta E_1$

$$j_{s1} > j_{s2}.$$

Відповідь: $j_{s1} > j_{s2}$ при $R_2 > R_1$ і $\Delta E_2 > \Delta E_1$.

Приклад 7.9. Визначте частоту змінного електричного поля, за якої у надпровіднику першого роду з'являється опір при $0 < T < T_c$.

Розв'язання

Розглянемо „дворідинну“ модель, в якій при $0 < T < T_c$ існують надпровідні та нормальні електрони із концентраціями n_s і n_n ,

$$n_s + n_n = n,$$

де n – повна концентрація електронів. У надпровіднику є електричне поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$, що викликає струм нормальних електронів густиною

$$j_n = \sigma_n \mathbf{E}_0 \sin \omega t,$$

де σ_n – електропровідність нормальних електронів із рухливістю μ :

$$\sigma_n = en_n \mu_n = e \mu_n n \frac{n_n}{n} = \sigma \frac{n_n}{n},$$

Тоді

$$j_n = \frac{\sigma n_n}{n} \mathbf{E}_0 \sin \omega t.$$

Густина надпровідного струму

$$j_s = \frac{2en_s p_s}{2m_e},$$

а імпульс надпровідного електрона визначається із рівняння руху

$$\frac{dp_s}{dt} = e\mathbf{E}_0 \sin \omega t, \quad \text{тобто} \quad p_s = \frac{e\mathbf{E}_0}{\omega} \cos \omega t,$$

звідки

$$j_s = \frac{e^2 n_s}{m_e \omega} \mathbf{E}_0 \cos \omega t.$$

Знайдемо відношення середньоквадратичних нормальної й надпровідної густин струмів

$$\zeta = \frac{\sqrt{\langle j_n^2 \rangle}}{\sqrt{\langle j_s^2 \rangle}} = \frac{n_n \sigma m_e \omega}{n e^2 n_s},$$

або, використовуючи визначення лондонівської довжини (7.3):

$$\lambda_L^2 = \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2},$$

$$\zeta = \frac{\lambda_L^2 \omega \sigma n_n}{n}.$$

Оскільки

$$\lambda_L^2(T) = \frac{\lambda_{L0}^2}{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}$$

та

$$\frac{n_n}{n} = \frac{n - n_s}{n} = 1 - \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \right] = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4,$$

то

$$\zeta = \frac{\lambda_{L0}^2 \mu_0 \sigma n \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}.$$

Виберемо умову „появи опору“ як $\zeta = 1$, тоді

$$\omega = \frac{\left(\frac{T}{T_c}\right)^4 - 1}{\lambda_{L0}^2 \mu_0 \sigma n}.$$

Наприклад, для Pb $\lambda_{L0} = 4 \cdot 10^{-6}$ см, $T_c = 7,2$ К, $\sigma_n = 10^8 \frac{\text{См}}{\text{см}}$,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 54 \cdot 10^9 \text{ Гц} = 54 \text{ ГГц}; T = 3,6 \text{ К}.$$

Таким чином, до досить великих частот надпровідник залишається у надпровідному стані, й частота переходу у нормальний стан збільшується за зниження температури. Проте за ще більших частот, коли енергія $\hbar\omega$ стає більшою за енергетичну щілину у надпровіднику ($\hbar\omega > \Delta E_0$), з'являється квантова границя, за якої опір знову зростає, оскільки енергія кванта вже може розірвати куперівську пару. Ця границя при $\Delta E_0 \sim 10^{-4}$ еВ має місце за частот

$$f_{\text{гр}} = \frac{\omega}{2\pi} \geq \frac{\Delta E_0}{\hbar} \sim 10^{10} \text{ Гц}.$$

Відповідь: $f_{\text{гр}} \sim 10^{10}$ Гц.

Приклад 7.10. Знайдіть товщину d_v олов'яного вентиля кріотрона та енергію, що накопичується в ньому, при роботі на частотах $f = 10$ мГц. Керуюча шина виготовлена із Pb у вигляді смужки шириною $w_r = 20$ мкм і товщиною $d_r = 1$ мкм та розміщена над вентилям на відстані $l = 2$ мкм від Pb надпровідного екрану, розташованого під плівкою вентиля. Екран, вентиль і керуючий електрод ізольовані один від іншого тонкими шарами діелектриків. Вентильна плівка має ширину $w_v = 200$ мкм. Питомий опір Sn у нормальному стані за робочої температури становить $\rho = 2 \cdot 10^{-7}$ Ом·см.

Розв'язання

Частота роботи кріотрона зумовлюється часом його переключення, що визначається індуктивністю керуючого електроду та опором вентиля у нормальному стані.

$$\frac{1}{f} = \tau = \frac{L_r}{R_V},$$

де

$$L_r = \mu_0 \frac{l w_V}{w_r}, \quad R_V = \rho_V \frac{w_r}{w_V d_V}.$$

Тому

$$\frac{1}{f} = \tau = \frac{\mu_0}{\rho_V} \left(\frac{w_V}{w_r} \right)^2 l d_V,$$

звідки

$$\begin{aligned} d_V &= \frac{\rho_V}{\mu_0 l f} \left(\frac{w_r}{w_V} \right)^2 = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2}} \cdot \left(\frac{20}{200} \right)^2 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м} = \\ &= 0,8 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

Видно, що збільшення частоти можливе шляхом зменшення добутку $l d_V$, оскільки характерні товщини більші за глибину проникнення магнітного поля

$$\lambda_L = \frac{c}{\omega_{p,l} \sqrt{\mu}} \cong 3(10^{-6} \dots 10^{-5}) \text{ см}.$$

Кріотрон може працювати за $T = 3,2 \text{ К}$, оскільки критична температура Sn $T_{c \text{ Sn}} = 3,7 \text{ К}$. Критична температура свинцю $T_{c \text{ Pb}} = 7,175 \text{ К}$ $T_{c \text{ Pb}} = 7,175 \text{ К}$, за якої критичне магнітне поле $\mathcal{B}_c = 0,0803 \text{ Тл}$. Знайдемо критичне магнітне поле свинцю за робочої температури кріотрона $T = 3,2 \text{ К}$.

$$\frac{\mathcal{B}_{T=3,2\text{K}}}{\mathcal{B}_{c,T=7,2\text{K}}}\Big|_{\text{pb}} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{3,4}{7,175}\right)^2 = 0,78,$$

$$\mathcal{B}_{T=3,2\text{K}}\Big|_{\text{pb}} = 0,0626 \text{ Тл}.$$

Критичне магнітне поле пов'язано із величиною струму на одиницю ширини платівки співвідношенням

$$I = 2\mathcal{B}_c \operatorname{th} \frac{d_V}{\lambda} \cong 2\mathcal{B}_c = 998 \frac{\text{А}}{\text{см}},$$

тому

$$I_r = I w_r = 998 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \approx 2 \text{ А}$$

Відповідно до цього енергія, що накопичується в кріотроні при його переключенні,

$$E = \frac{1}{2} L_r I_r^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{l w_V}{w_r} 4 = 2,4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 200}{20} = 50 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}.$$

Якщо робоча частота $f \sim 10^8 \text{ с}^{-1}$, то розсіяна енергія становить $5 \cdot 10^{-11} \cdot 10^8 = 5 \text{ мВт}$.

Відповідь: $d_V = 0,8 \text{ мкм}$; $E = 50 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$.

Задачі для самостійного розв'язування

- 7.1. У 1911 р. Г. Камерлінг-Оннес, при вимірюванні опору ртуті, охолоджуваної рідким гелієм, виявив, що при відкачуванні парів гелію з кріостату опір ртуті зникає. Так було відкрито явище надпровідності. Обчисліть, до якого тиску потрібно було відкачати пари гелію, щоб при тиску $p_k = 1 \text{ атм}$ температура кипіння гелію $T_k = 4,22 \text{ К}$, теплота випаровування при

цьому тиску $q = 84 \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$, а критична температура надпровідного переходу ртуті $T_c = 4,15 \text{ К}$.

- 7.2. За якої напруги U почне текти струм через тунельний перехід метал – ізолятор – надпровідник, якщо $T_c = 92 \text{ К}$, а вимірювання проводили при температурі $T \ll T_c$?
- 7.3. З широкої надпровідної стрічки було згорнуто довгий циліндр радіусом $r = 1 \text{ см}$ і краї стрічки зварені вздовж твірної. Вимірювання показали, що електричний контакт у місці зварювання виявився не дуже добрим, оскільки за одну годину струм у кільці зменшувався на 1%. Який електроопір одиниці довжини зварного шву?
- 7.4. В 1964 р. Кріб'є зі співробітниками за допомогою пружного розсіювання нейтронів на Ніобії експериментально підтвердив, що у надпровідниках II роду в магнітному полі $B > B_{c1}$ утворюється трикутна вихрова ґратка Абрикосова. У дослідях спостерігався максимум першого порядку у відбиванні нейтронів із довжиною хвилі $\lambda = 5 \text{ \AA}$ під кутом $\theta = 20'$ по відношенню до падаючого пучку від площин, розділених відстанню h (висота рівнобічного трикутника структури). В якому магнітному полі проводився експеримент?
- 7.5. Точковий магнітний диполь з магнітним моментом $p_m = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ висить над поверхнею надпровідника I роду (температура $T \approx 0 \text{ К}$), у якого критичне магнітне поле $B_c = 0,05 \text{ Тл}$. Вісь диполя перпендикулярна площині. Яка максимально припустима маса m диполя?
- 7.6. Який максимальний струм протікає поверхнею напівпровідника I роду, якщо $B_c = 4 \cdot 10^4 \text{ Тл}$, а $\lambda_L = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$?
- 7.7. Дивер та Форбенк спостерігали квантування магнітного потоку в довгій олов'яній трубці з внутрішнім діаметром $d = 15 \text{ мкм}$. Якому магнітному полю відповідає один квант магнітного потоку через поперечний переріз такої трубки?
- 7.8. Оцініть неоднорідність магнітного поля у надпровідній плівці товщиною, набагато меншою за лондонівську довжину.

- 7.9. Індуктивністю резонансного контуру ($\nu_0 = 10$ МГц) служить довга одношарова котушка діаметром $d = 10$ мм. Наскільки зміниться резонансна частота контуру, якщо всередину котушки вставлений на усю довжину надпровідний циліндр діаметром $\frac{d}{2}$? Концентрація надпровідних електронів $n_s = 10^{28} \text{ м}^{-3}$, температура $T \ll T_c$.
- 7.10. Оцініть в електронвольтах величину енергетичної щільності (енергію спарування електронів) у Плюмбумі, в якого критична температура $T_c = 7,2$ К.
- 7.11. Оцініть в електронвольтах енергію електрона у надпровіднику в критичному магнітному полі при $T = 0$ К, якщо відомо, що $T_c = 10$ К, стала ґратки $a = 3 \text{ \AA}$.
- 7.12. Тантал кристалізується в об'ємноцентровану кубічну ґратку з ребром $a = 3 \text{ \AA}$, і є надпровідником I роду з $T_c = 4,4$ К. Вважаючи, що кожний атом Танталу віддає в зону провідності один електрон, ефективна маса якого дорівнює масі вільного електрона, оцініть з енергетичних міркувань величину індукції критичного магнітного поля B_c , при $T = 0$ К як поля, в якому руйнуються куперівські пари.
- 7.13. Виходячи зі співвідношення невизначеностей, оцініть характерний лінійний розмір (довжину когерентності ξ) електронної пари в надпровіднику з енергетичною щільною 3 меВ в електронному спектрі. Врахувати, що в утворенні пари беруть участь електрони поблизу поверхні Фермі, швидкість яких прийміть рівною $v_F = 106 \frac{\text{М}}{\text{с}}$.
- 7.14. У надпровіднику електрони утворюють пари з протилежно направленими спінами (куперівські пари). В якому магнітному полі відбудеться руйнування таких пар, яке супроводжується зміною спіну електронної системи, якщо в нульовому полі критична температура надпровідника дорівнює $T_c = 92$ К?

- 7.15. Довгий циліндр з надпровідника II роду, в якого нижнє критичне поле $\mathcal{B}_{c1} = 0,04$ Тл, поміщено в магнітне поле $\mathcal{B} = 0,05$ Тл, паралельне його твірній. При цьому його намагніченість склала половину того значення, яке було при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{c1}$. Оцініть середню відстань між вихрами магнітного потоку в цьому полі.
- 7.16. У високотемпературному надпровіднику $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ нижнє критичне поле дорівнює $\mathcal{B}_{c1} \approx 0,1$ Тл, а верхнє $\mathcal{B}_{c2} = 10^2$ Тл. Оцініть глибину проникнення λ і довжину когерентності ξ у цій сполуці при $T = 0$ К.
- 7.17. Визначте залежність швидкості надпровідних електронів від відстані до осі кванта магнітного потоку, який проникнув у надпровідник.
- 7.18. Довгий циліндр з надпровідника II роду з масою $m = 25$ г і з висотою $l = 10$ см підвішений на тонкій нитці. Вздовж осі циліндра прикладають магнітне поле $H = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{м}} \gg H_{c1}$, індукція $\mathcal{B} \approx \mu_0 H$. Спочатку, коли температура циліндра була $T < T_c$, циліндр перебував у спокої, а потім температура піднялася вище за критичну. Визначте кутову частоту обертання циліндра, яка встановилася. Глибина проникнення магнітного поля $\lambda = 10^{-7}$ м, густина надпровідних електронів $n_s = 10^{28} \text{ м}^{-3}$.
- 7.19. Плоску стрічку шириною $b = 0,5$ см з надпровідника II роду в змішаному стані поміщено в магнітне поле $B = 10$ Тл, перпендикулярне поверхні стрічки і набагато більше за величину першого критичного поля. По стрічці без дисипації тече струм $I = 10$ А. Вихрі, які утримуються дефектами надпровідника, при цьому нерухомі. Обчисліть силу F , яка діє на окремий вихор з боку дефектів кристала. Вважати, що струм розподілений по зразку однорідно, а вихрову структуру створюють інші, незалежні від I струми.

7.20. Знайдіть для індію за температури T значення напруженості критичного магнітного поля, індукцію першого критичного поля, лондонівську довжину та концентрацію надпровідних електронів, якщо T_c і H_c^0 відомі.

№ варіанту	T , К	Матеріал	T_c , К	H_c^0 , $\frac{A}{m}$
1.	0,98	Алюміній	1,175	1,318
2.	0,77	Цинк	0,85	0,679
3.	8,98	Ніобій	9,25	25,887
4.	0,84	Молібден	0,915	1,206
5.	0,60	Цирконій	0,61	0,591
6.	0,014	Вольфрам	0,0154	0,014
7.	5,30	Ванадій	5,40	17,694
8.	2,25	Талій	2,38	2,237
9.	0,29	Титан	0,40	0,704
10.	7,65	Технецій	7,8	17,719
11.	4,35	Тантал	4,47	10,418
12.	3,666	Олово	3,722	3,833
13.	0,33	Рутеній	0,41	0,867
14.	1,68	Реній	1,697	2,513
15.	7,05	Свинець	7,196	10,091
16.	1,01	Галій	1,083	0,744
17.	0,62	Осмій	0,66	0,88
18.	0,95	Лютецій	0,1	5,027
19.	5,86	Лантан (β)	6,00	13,773
20.	4,77	Лантан (α)	4,88	10,053
21.	0,1034	Іридій	0,1125	0,201
22.	3,399	Індій	3,408	3,537
23.	0,501	Гадоліній	0,517	0,352
24.	3,88	Ртуть (β)	3,949	4,26
25.	4,08	Ртуть (α)	4,154	5,165

7.21. Визначте критичну температуру переходу надпровідника в стан надпровідності, якщо розмір енергетичної щільності

$2\Delta E_0 = 2,2$ меВ. Як зміниться ця температура при впливі на неї зовнішнього магнітного поля?

- 7.22. Критична температура переходу металу в надпровідний стан дорівнює $T_c = 4,5$ К. Визначте граничну частоту змінного електромагнітного поля, вище якого при $T \approx 0$ К надпровідність руйнується.
- 7.23. Неперервні експериментальні спостереження за струмом, індукованим у замкнутому контурі з надпровідного матеріалу, показали, що протягом одного року струм зменшується внаслідок релаксації системи до рівноважного стану всього на β %. Вважаючи концентрацію електронів провідності n_e , оцініть питомий електроопір матеріалу в надпровідному стані і порівняйте з питомим електроопором золота за нормальних умов ($\rho_{Au} = 2,04 \cdot 10^{-8}$ Ом·м).

№ варіанту	β , %	n_e , м ⁻³
1	0,211	$7,85 \cdot 10^{27}$
2	0,165	$6,96 \cdot 10^{27}$
3	0,173	$7,12 \cdot 10^{27}$
4	0,157	$7,31 \cdot 10^{27}$
5	0,115	$6,92 \cdot 10^{27}$
6	0,127	$7,74 \cdot 10^{27}$
7	0,139	$7,98 \cdot 10^{27}$
8	0,141	$7,77 \cdot 10^{27}$
9	0,194	$7,24 \cdot 10^{27}$
10	0,183	$7,53 \cdot 10^{27}$
11	0,171	$7,44 \cdot 10^{27}$
12	0,169	$7,67 \cdot 10^{27}$
13	0,128	$7,19 \cdot 10^{27}$
14	0,145	$7,62 \cdot 10^{27}$
15	0,174	$7,93 \cdot 10^{27}$

16	0,111	$7,09 \cdot 10^{27}$
17	0,155	$7,28 \cdot 10^{27}$
18	0,118	$7,16 \cdot 10^{27}$
19	0,106	$7,02 \cdot 10^{27}$
20	0,187	$7,58 \cdot 10^{27}$
21	0,198	$7,49 \cdot 10^{27}$
22	0,153	$7,36 \cdot 10^{27}$
23	0,179	$7,71 \cdot 10^{27}$
24	0,203	$7,17 \cdot 10^{27}$
25	0,212	$7,81 \cdot 10^{27}$

- 7.24. Визначте глибину проникнення магнітного поля у свинцевий зразок за температури рідкого гелію. Для Pb $T_c = 7,196$ К та енергія Фермі $\varepsilon_F = 10,03$ еВ.
- 7.25. Знайдіть залежність фазової швидкості хвиль Свіхарта у джо-зефсонівському переході від температури для симетричної системи двох надпровідників першого роду, розділених діелектриком товщиною 8 \AA із діелектричною сталою $\varepsilon = 3$.
- 7.26. Проаналізуйте зсув фаз між поверхневим опором і реактансом. Який характер притаманний реактансу: індуктивності чи ємності?
- 7.27. Користуючись умовою неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} + j_{sc} \sin \varphi(t) = 0,$$

доведіть для хвиль Свіхарта рівняння:

$$v_{sw} = c \sqrt{\frac{d}{\mu \varepsilon (d + 2\lambda)}}.$$

Вказівка. Скористайтеся для різниці фаз формулою $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar}V(\mathbf{r}, t)$

і виразом для густини надпровідного струму $\mathbf{j}_s = \frac{e\hbar n_s}{m}\nabla\varphi$.

- 7.28. Як змінюється просторовий розподіл густини стаціонарного струму Джозефсона при заміні надпровідників першого роду на надпровідники другого роду?
- 7.29. Визначте, у скільки разів зменшиться часова стала кріотрона, якщо його виготовити на поверхні тонкого шару діелектрика товщиною $d = 0,1$ мкм, нанесеного на плоский надпровідний екран. Ширина плівки вентиля $w_V = 15$ мкм, довжина керуючої плівки $l_r = 1$ мм і ширина $w_r = 10$ мкм.
- 7.30. Проаналізуйте температурну та частотну залежності імпедансу ідеального надпровідника у межах дворідинної моделі.
- 7.31. Чому за високих частот не вдається отримати резонаторів із надпровідників зі значно більшою добротністю, ніж із нормальних металів?
- 7.32. Знайдіть оптичні сталі надпровідника в інфрачервоному діапазоні спектра.
- 7.33. Свинцеву трубку діаметром $2r = 20$ мкм, довжиною $L = 600$ мкм і товщиною стінки $d = 1$ мкм підвішено на пружній нитці у сталому магнітному полі \mathcal{B}_e (рис. 7.2). Після охолодження циліндра у магнітному полі до температур, менших за критичну ($T < T_c = 7,175$ К), стале магнітне поле вимикається й створюється слабке однорідне змінне магнітне поле $\tilde{B}_0 \cos \omega t$, перпендикулярне осям циліндра та пружної нитки підвісу. Циліндр починає коливатись, що можна спостерігати за допомогою відбитого світлового променя від закріпленого до нитки підвісу дзеркальця. Яка причина виникнення коливань циліндра? Знайдіть залежність максимального кута його відхилення φ від сталого магнітного поля \mathcal{B} .

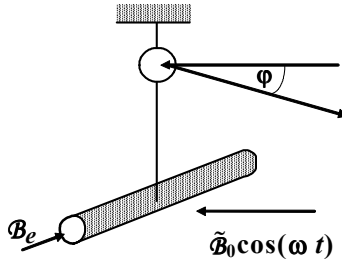


Рисунок 7.2

- 7.34. Оцініть критичне магнітне поле B_{c2} надпровідника другого роду при $T = 4,2$ К, якщо у зовнішньому магнітному полі $B_e = 0,5Tл$ при $T = 10$ К у ньому виникає резистивний стан із питомим опором $\rho_f = 3$ мкОм \cdot см, а питомий опір у нормальному стані становить $\rho_n = 30$ мкОм \cdot см.
- 7.35. Наскільки зміниться вільна енергія 1 см³ свинцю при його переході в надпровідний стан? Перехід відбувається в магнітному полі при температурі $4,2$ К.
- 7.36. Яка кількість теплоти виділиться при переході 1 см³ свинцю в надпровідний стан в умовах попередньої задачі?
- 7.37. Знайдіть температуру, за якої в свинці теплоємності нормальної та надпровідної фаз виявляються однаковими.
- 7.38. Знайдіть критичне термодинамічне поле олова за температури 3 К.
- 7.39. Знайдіть стрибок теплоємності одиниці об'єму свинцю за критичної температури.
- 7.40. В масивному надпровіднику є отвір діаметром $0,1$ мм, в якому захоплено 7 квантів магнітного потоку. Визначте напруженість магнітного поля в отворі.
- 7.41. В масивному надпровіднику є циліндричний отвір діаметром 2 см. В ньому захоплено магнітне поле з напруженістю $H = 24 \frac{\text{кА}}{\text{м}}$. Знайдіть величину векторного потенціалу \mathcal{A} та градієнт фази $\nabla\vartheta$ на відстані $R = 2$ см від центру отвору.

- 7.42. Визначте магнітний момент надпровідного диску в перпендикулярному до нього зовнішньому магнітному полі.
- 7.43. Визначте магнітний момент надпровідної кульки радіусом $R \ll \lambda_L$, що знаходиться в магнітному полі, в лондонівському випадку.
- 7.44. Визначте критичне поле для надпровідної кульки малого радіусу $R \ll \lambda_L$.
- 7.45. Напишіть рівняння для струму в ланцюзі, що складається з послідовно з'єднаних опору R та надпровідника з тунельним контактом; у ланцюзі діє електрорушійна сила V_0 .
- 7.46. Запишіть рівняння Максвелла та матеріальне рівняння, що описує статичне електромагнітне поле в надпровіднику. Виведіть рівняння, яке описує в цьому випадку розподіл струму і магнітного поля.
- 7.47. Надпровідник заповнює півпростір $x \geq 0$, при $x < 0$ вакуум. У вакуумі існує однорідне магнітне поле $\mathbf{H}_0 \parallel Oy$. Знайдіть розподіл магнітного поля і струмів у надпровіднику в статичному випадку.
- 7.48. Знайдіть силу, яка діє на одиницю поверхні надпровідника, що розглядається в попередній задачі. Який напрямок матиме ця сила?
- 7.49. Спочатку у вільному просторі (вакуумі) в області $x > 0$ розташовано систему провідників, в якій течуть струми з об'ємною густиною $\mathbf{j}(x, y, z)$, які створюють поле $\mathbf{H}(x, y, z)$, причому $j_x(x, y, z) = 0$ повсюди в просторі. Потім напівпростір $x \leq 0$ заповнюється надпровідником. Використовуючи метод зображень, розрахуйте результуюче поле $\mathbf{H}'(x, y, z)$ в області $x > 0$.
- Вказівка.* Проаналізувати рівняння для векторного потенціалу та граничну умову на поверхні надпровідника.
- 7.50. Нескінченно довгий надпровідний циліндр знаходиться в зовнішньому магнітному полі $\mathbf{H}_0 \parallel Oz$. Вісь циліндра паралельна полю. Знайдіть розподіл магнітного поля в об'ємі циліндра та середній магнітний момент одиниці об'єму.

- 7.51. Надпровідна куля радіусом a знаходиться в зовнішньому однорідному магнітному полі H_0 . Знайдіть розподіл струмів в кулі та магнітне поле у всьому просторі. Розглянути, зокрема, граничні випадки $\lambda_L \ll a$ та $\lambda_L \gg a$.
- 7.52. Знайдіть рівняння, що описує розподіл магнітного поля всередині надпровідника. Для цього запишіть вільну енергію Гельмгольца як функціонал від магнітної індукції та скористайтесь умовою мінімуму вільної енергії в рівноважному стані.
- 7.53. По нескінченно довгому надпровідному прямому провіднику кругового перерізу (радіусом a) тече струм I . Знайдіть розподіл густини струму j за перерізом провідника і магнітне поле у всьому просторі.
- 7.54. Надпровідне плоске кільце з самоіндукцією L , в якому тече струм I , вноситься повністю в однорідне магнітне поле H_0 . Знайдіть струм I' , який буде після цього протікати кільцем. Площа осевого перерізу кільця S . Нормаль до площини кільця складає із напрямком H_0 кут ϑ .
- 7.55. Провідне кільце з самоіндукцією L знаходиться в нормальному стані у зовнішньому магнітному полі (магнітний потік через контур кільця дорівнює Φ_0). Потім температура зменшується і кільце переводиться у надпровідний стан. Який струм буде текти кільцем, якщо вимкнути зовнішнє магнітне поле?
- 7.56. По надпровідному прямому провіднику радіусом a , що знаходиться у зовнішньому магнітному полі H_0 тече струм I . Яке критичне значення струму I_c , при якому провідник втрачає надпровідні властивості?
- 7.57. Зовнішнє магнітне поле H_0 прикладене перпендикулярно надпровідному прямому провіднику. Знайдіть критичне значення струму I_c , при якому в надпровіднику з'являється область існування нормальної фази.
- 7.58. Який струм тече по плоскій поверхні свинцю у стрічці шириною 1 см, якщо зразок знаходиться в критичному полі за температури 4,2 К?

- 7.59. Свинцевий циліндр знаходиться за температури $4,2 \text{ К}$ в однорідному магнітному полі, паралельному його осі. Поле на поверхні циліндру дорівнює $H_0 = 24 \frac{\text{кА}}{\text{м}}$. Знайдіть густину w магнітної енергії в свинцю на відстані $x = 300 \text{ \AA}$ від поверхні циліндру. (Діаметр циліндру набагато більший глибини проникнення слабкого магнітного поля).
- 7.60. Критична температура свинцю дорівнює $7,18 \text{ К}$. У скільки разів глибина проникнення λ_L при $T = 7,1 \text{ К}$ більша, ніж глибина проникнення при $T = 4,2 \text{ К}$? Оцініть густину надпровідних електронів при $T = 7,1 \text{ К}$.
- 7.61. Два джозефсонівські переходи з критичними струмами $I_{c1} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ А}$ і $I_{c2} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ А}$ увімкнені паралельно у надпровідний ланцюг. Повний струм крізь обидва переходи дорівнює 10^{-3} А . Чому дорівнюють струми в кожному з переходів?
- 7.62. Точковий контакт має критичний струм $I_c = 10^{-3} \text{ А}$ і опір у нормальному стані $R = 2 \text{ Ом}$. Знайдіть величину сталої напруги на контакті \bar{U} і частоту джозефсонівської генерації ν , якщо через контакт протікає струм $I = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ А}$.
- 7.63. Критичний струм джозефсонівського переходу дорівнює $I_c = 1 \cdot 10^{-4} \text{ А}$. Через перехід пропускається сталий струм $I_0 = 7 \cdot 10^{-5} \text{ А}$ і слабкий змінний струм з амплітудою $I_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ і частотою $\nu = 10 \text{ МГц}$, тобто $I = I_0 + I_1 \sin 2\pi\nu t$. Знайдіть напругу на переході.

8. Низькорозмірні системи

Основні формули та визначення

Наноструктурами прийнято називати твердотільні гетероструктури з характерними розмірами областей, зайнятих одним з компонентів (або кожним з компонентів), в діапазоні від одиниць до сотень нанометрів. Области просторової неоднорідності в наноструктурах можуть відігравати роль потенціальних ям, в яких можуть бути локалізовані різні квазічастинки твердого тіла – електрони, дірки, фонони тощо. Найбільш цікавим є випадок, коли лінійні розміри області просторової локалізації квазічастинок виявляються меншими від їхньої довжини вільного пробігу. У такому випадку виникає **ефект розмірного квантування** – зони дозволених енергій квазічастинок розщеплюються на підзони при зменшенні області локалізації в одному або двох вимірах (квантові ями і квантові нитки) і на дискретні рівні при зменшенні розмірів у трьох вимірах (квантові точки).

Гетероструктура – напівпровідникова структура, що утворюється в результаті контакту двох напівпровідників різних за хімічним складом та фізичними властивостями. Основний елемент гетероструктури – *гетероперехід*, що представляє собою контакт двох хімічно різних матеріалів, при якому кристалічна ґратка одного матеріалу без порушення періодичності іншого переходить у кристалічну ґратку іншого матеріалу. На гетеропереході відбувається стрибкоподібна зміна властивостей матеріалу: ефективної маси, ширини забороненої зони, положення країв валентної зони та зони провідності, пружних та фононних характеристик тощо. Майже з кожною з перелічених властивостей пов'язані конкретні застосування гетероструктур.

При переході до нанорозмірної шкали стрибки зон на гетеропереходах можна використовувати для обмеження руху носіїв заряду й у цьому випадку визначальну роль будуть відігравати розмірні квантові ефекти, тобто матиме місце *розмірне квантування*.

Розглянемо систематику *квантово-розмірних* гетероструктур:

- ❖ квантові ями (*quantum wells*, QWs);

- ❖ квантові дроти (*quantum wires* та *quantum well wires*, QWWs);
 - ❖ квантові точки (*quantum dots*, QDs);
 - ❖ надгратки (*superlattices*, SLs);
 - ❖ двох та трьохбар'єрні резонансно-тунельні структури (*double- and triple-barrier resonance-tunneling structures*);
 - ❖ поодинокі квантова яма (*single quantum well*, SQW);
 - ❖ подвійна квантова яма (*double quantum well*);
 - ❖ антиточки (*antidots*);
 - ❖ дельта-леговані структури (δ -*doped structures*);
 - ❖ квантові мікрорезонатори (*quantum microcavities*);
 - ❖ фотонні кристали (*photonic crystals*);
 - ❖ гетероструктури типів I та II (*type-I and type-II heterostructures*);
 - ❖ порожнисті напівпровідникові матеріали;
 - ❖ фулерени, нанокластери, нанотрубки, наноконтакти
- ...

Розрізняють такі *квантові стани* в наноструктурах:

- ❖ розмірно-квантовані стани вільних носіїв та екситонів;
- ❖ підзони та мінізони;
- ❖ розмірно-квантовані оптичні фонони, інтерфейсні фонони, акустичні фонони з „ламаним“ спектром (*folded acoustic phonons*);
- ❖ двомірний магнітний полярон; композитні ферміони та краєві стани в квантовому ефекті Холла ...

Цікавими нанооб'єктами також є кластери. **Кластер** – це система зв'язаних атомів і молекул. Наприклад, якщо ділити масивне тіло на більш дрібні частини, його властивості поступово, одне за одним, зникнуть, внаслідок чого утворюється нова фаза речовини, що відрізняється від твердих тіл, рідин і газів і називається *мікрокластером* (від англ. cluster – кетяг, група, скупчення). Мікрокластери є найдрібнішими агрегатами, що включають від двох до декількох сотень і більше атомів.

У кластерів можна виділити дві основних характеристичних риси, що відрізняють їх від масивних твердих тіл – це наявність

поверхні і квантові обмеження колективних процесів, пов'язаних з фононами, електронами, плазмонами, магнонами тощо. Поява реальної поверхні для кластера не має чітких меж, залежить від методу, що застосовується, і відповідає, очевидно, мінімальному розміру кластера приблизно 1 нм. Максимальний розмір кластера або наночастинки, за якого за допомогою сучасних методів стає помітним вплив поверхні на їх властивості, складає приблизно 100 нм. Для спостереження квантових обмежень мінімальний розмір не лімітований, а максимальний – пов'язаний із довжиною хвилі носіїв і не повинен перевищувати 100 нм.

В основу класифікації кластерів доцільно покласти методи їх одержання. Це дозволяє також провести межу між ізольованими кластерами і нанокластерами, що об'єднуються в наноструктуру зі слабкими або сильними міжкластерними взаємодіями або взаємодією кластера з матрицею.

В групу ізольованих і слабковзаємодіючих кластерів входять: молекулярні кластери, газові безлігандні¹ кластери (кластери лужних металів, алюмінію та ртуті, кластери перехідних металів, вуглецеві кластери і фулерени, вандерваальсові кластери), колоїдні кластери.

У групу нанокластерів і наноструктур включають твердотілі нанокластери та наноструктури, матричні нанокластери і супрамолекулярні наноструктури, кластерні кристали і фулерити, компактовані наносистеми та нанокompозити, наноплівки та нанотрубки.

Однією з найпростіших моделей кластерів є модель, заснована на простому принципі – найщільнішого пакування атомів. Найщільніше пакування спостерігається в металах, що і пов'язується з особливими властивостями міцності. Із довільних атомних побудов як найбільш щільно упакована структура відомий ікосаедр, утворений 13 атомами, з яких один знаходиться у центрі, а 12 утворюють дві з'єднані піраміди, що мають симетрію п'ятого порядку. Число найближчих сусідів в ікосаедрі найбільше, порівняно з аналогічного розміру шматочками кристалічної ґратки, що і є причиною його стабільності. Якщо прийняти побудову ікосаедра за основу, то мо-

¹ Ліганд (від латин. ligo — зв'язую) – атом, іон або молекула, безпосередньо пов'язана з одним або декількома центральними (комплексоутворюючими) атомами металу в комплексній сполуці.

жна написати формулу, яка дозволяє розрахувати кількість атомів у кластері з великим числом атомів і щільним пакуванням, подібним до ікосаедра:

$$N = \frac{1}{3}(10n^3 - 15n^2 + 11n - 3), \quad (8.1)$$

де n – кількість шарів навколо центрального атома. Таким чином, мінімальний кластер з щільним пакуванням містить 13 атомів, потім при зростанні кластеру маємо $N = 55, 147, 309, 561$ і далі. Кластери, що включають в себе ці магічні числа N , повинні мати підвищену стабільність як при утворенні, так і при розпаді. Вони спостерігалися для багатьох металевих кластерів, молекулярних кластерів, а також кластерів інертних газів.

Найбільш стабільними структурами при утворенні кластерів інертних газів є тример – має симетрію рівнобічного трикутника; $N = 4$ відповідає тетраедру, $N = 5$ – тригранній піраміді, $N = 7$ дає новий тип пентагональної симетрії, яка не зустрічається в масивних тілах. Починаючи з $N = 7$ всі стабільні кластери мають симетрію p 'ятого порядку.

Поляронні стани в молекулярних кластерах. Обширна область досліджень, пов'язана з проблемою електронних станів у кластерах, включає в себе питання кінетики електронів, спектральні властивості кластерів, квантову хімію кластерів тощо. У кластерах із полярних молекул однією із актуальних є проблема слабкоз'язаних, тобто надлишкових електронів у негативно заряджених кластерах.

Електронні властивості кластерів, що складаються із великої кількості полярних молекул, можна описати на основі *поляронної моделі*, в якій замість потенціалу, створеного окремими молекулами, використовується усереднений потенціал.

Вивчення електронних станів та їхніх властивостей у полярних кластерах доцільно розпочати з випадку однієї полярної молекули. Цей випадок також дуже цікавий сам по собі, оскільки дає уявлення про проблеми, які виникають у новій області що швидко розвивається – дипольній мас-спектрометрії молекул та молекулярних комплексів. Усі молекули, з яких складається речовина, мож-

на розділити на два сорти – молекули, які мають ненульовий дипольний момент, та молекули, у яких дипольний момент дорівнює нулю. Зокрема, молекули, що мають центр симетрії, мають нульовий дипольний момент.

Два однакових точкових заряди протилежних знаків $+q$ та $-q$, які знаходяться на відстані \mathbf{d} один від одного, причому вектор \mathbf{d} направлений від негативного заряду до додатного, створюють дипольний момент \mathbf{P} , що дорівнює:

$$\mathbf{P} = q\mathbf{d} . \quad (8.2)$$

Дипольний момент називається *точковим*, якщо величина заряду q прагне до нескінченності, а відстань d до нуля, так що добуток qd залишається сталим. В загальному випадку дипольний момент, що створюється N точковими зарядами, дорівнює:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i , \quad (8.3)$$

де \mathbf{r}_i – відстань до i -го заряду, q_i - величина i -го заряду. Величина дипольного моменту вимірюється в Дебаях: $1 \text{ Д} = 10^{18} \text{ СГС см}$ або $1 \text{ Д} = 0,393ea_0$, де a_0 – радіус Бора. Потенціал двох зарядів протилежних знаків у довільній точці дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} , \quad (8.4)$$

де r_1 та r_2 – радіус-вектори зарядів $+q$ та $-q$ відповідно. Якщо диполь точковий, то із (8.4) випливає, що

$$\varphi = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} , \quad (8.5)$$

де \mathbf{r} – відстань від точкового заряду до точки спостереження. На рис. 8.1 зображені силові лінії електричного поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r)$, яке створюється точковим диполем.

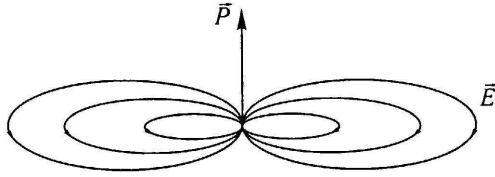


Рисунок 8.1 – Силлові лінії електричного поля точкового диполя

Питання, яке нас цікавить можна поставити так: чи утворює електрон зв'язаний стан з диполем?

Щоб зрозуміти цю проблему, розглянемо спочатку кінцевий диполь. Якщо відстань між зарядами велика, то зв'язані стани заведомо існують. При великих d електрон притягнеться до протилежного заряду та утворить із ним воднеподібний стан. Вплив негативного заряду при цьому буде чинити лише мале збурення.

Питання тепер полягає у тому, що буде відбуватися, якщо відстань між зарядами буде зменшуватися, тобто коли силлові лінії набудуть вигляду, зображеного на рис. 8.1. Для отримання якісної відповіді, зазначимо, що потенціальна енергія $-e\phi(r)$, де $\phi(r)$ ви-

значається (8.4), усюди вища, ніж $V(r) = -\frac{Pe}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Відповідне рів-

няння Шредінгера для електрона у потенціальному полі $V(r)$ представляє собою випадок падіння на центр, який розглядається при вивченні квантової механіки, тобто випадок, коли потенціальна

енергія залежить від відстані як $\frac{\gamma}{r^2}$. Відносно такого вигляду поте-

нциалу відомо, що рівняння Шредінгера має локалізований розв'язок лише в тому випадку, якщо $\gamma > \frac{1}{4}$. Величина критичного

дипольного моменту, при якому утворюється зв'язаний стан, $P_{кр} = 0,318 \text{ Д}$. При $P \geq P_{кр}$ зв'язаний стан електрона існує, а при $P < P_{кр}$ він відсутній. Зрозуміло, що для справжнього вигляду потенціалу, тобто (8.5), критичне значення $P_{кр}$ має бути більшим.

Якісна картина утворення поляронного стану виглядає так. Електричне поле, що створюється електроном, введеним у полярне

середовище, має екрануватися індукованою ним поляризацією середовища. При розміщенні електрона в середовищі найшвидше поляризуються електронні оболонки його атомів. Потенціал φ , що створюється електроном, в даному випадку має вигляд:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\infty r}, \quad (8.6)$$

де ϵ_∞ – високочастотна діелектрична проникність середовища. У більшості середовищ характерні часи поляризації електронних оболонок, тобто збільшення їхніх центрів тяжіння відносно ядер складає частки фемтосекунд.

У результаті подальшого зміщення йонів чи полярних груп середовища, потенціал приймає наступний вигляд:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (8.7)$$

де ϵ – статична діелектрична проникність середовища. Характерні часи зміщення йонів із своїх положень рівноваги на 3-4 порядки більші за час електронних оболонок і складають пікосекунди.

Якщо тепер електрон видалити із середовища настільки швидко, що йони та полярні групи ще не встигають повернутися у своє початкове положення рівноваги, а електронні оболонки повернуться в попередній стан, то нерівноважний розподіл зарядів середовища, що виникло, буде створювати електричне поле, яке притягує електрон до області, із якої його видалили. Тому електрон утворює для себе потенціальну яму з енергією, яка дорівнює:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{eff}} r}, \quad (8.8)$$

де ϵ_{eff} – ефективна діелектрична проникність середовища:

$$\frac{1}{\epsilon_{\text{eff}}} = \frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0}. \quad (8.9)$$

Оскільки характерні часи переміщень електрона на міжатомну відстань складає фемтосекунди, то при такому русі електрон

буде знаходитися в потенціальній ямі, яка створюється ним самим, тобто в *поляронному стані*. Високочастотна діелектрична проникність, що входить у вираз (8.8), пов'язана з показником заломлення n співвідношенням:

$$\varepsilon_{\infty} = n^2. \quad (8.10)$$

Зокрема, для води $n = 1,33$, і високочастотна проникність дорівнює 1,78. Як було зазначено раніше, захоплюючись у потенціальну яму (8.8), електрон утворює поляронний стан. Якісно цю ситуацію можна описати так. Нехай характеристичний розмір електронного стану в поляронному стані дорівнює R . Із співвідношення невизначеностей Гейзенберга: $\Delta p \Delta R \approx \hbar$, випливає що характерний імпульс електрону $p \approx \frac{\hbar}{R}$. Тоді характерна кінетична енергія електрону в такому стані $T_e = \frac{p^2}{2m_e}$ дорівнює:

$$T_e = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2}, \quad (8.11)$$

де m_e – маса електрону. Якщо характерна величина кінетичної енергії T_e така, що рух електрону з одного боку достатньо швидкий, для того щоб у процесі руху інерційна поляризація не встигала відслідковувати його рух, а електронна поляризація миттєво відбувалася за переміщенням електрону, то потенціальна енергія електрону, згідно (8.8), дорівнює:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}}R}. \quad (8.12)$$

Зрозуміло, що в моделі, яка розглядається, коли електронна частина поляризації ніби прив'язана до руху електрона, у вираз для T_e має входити не маса „голого“ електрону, а ефективна маса, оскільки при квантово-механічному русі електрону разом з ним переміщується і електронна поляризація, яка прямує за ним.

При вивченні електронних властивостей кластерів, які складаються із полярних молекул, ми зіштовхуємося з двома проблемами: по-перше, важливою роллю короткодійчих взаємодій; по-друге, універсальністю дальнодіючої електростатичної взаємодії на відстанях, що перевищують радіус першої координаційної сфери.

Для достатньо великих кластерів поправки, які містять внесок дальнодіючих кулонівських взаємодій грають більш важливу роль, ніж поправки від короткодійчих.

Модель полярона в кластері. Будемо розглядати кластер із молекул аміаку у вакуумі як область Ω з діелектричною проникністю ε , обмежену поверхнею S . Отже, електрон у вакуумі буде захоплюватися в область з більш високою діелектричною проникністю, утворюючи зв'язаний стан. Рівняння для електрона в полярному середовищі, що описуються діелектричною проникністю $\varepsilon(r)$, яка залежить від просторових координат, мають вигляд:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta_r \psi(r) + e\Pi(r)\psi(r) + W\psi(r) = 0, \quad (8.13)$$

$$\operatorname{div} \left[\varepsilon_{\text{eff}}(r) \nabla \Pi(r) \right] + \frac{e}{\varepsilon_0} |\psi(r)|^2 = 0, \quad (8.14)$$

де m^* і e – ефективна маса і заряд електрона відповідно; W і $\psi(r)$ – енергія і нормована хвильова функція відповідно; $\varepsilon_{\text{eff}}(r)$ – ефективна діелектрична проникність (8.9), що використовується в поляронній теорії.

У випадку, коли ефективні діелектричні проникності не залежать від координат, рівняння (8.13) – (8.14) співпадають із рівняннями Пекара для полярону в однорідному й ізотропному середовищі. Далі розглянемо випадок, коли ефективна діелектрична проникність постійна в об'ємі Ω , що займає кластер, і дорівнює нескінченності у вакуумі. Звідси випливає, що потенціал Π в (8.13) і (8.14) визначається рівнянням:

$$\begin{aligned} \Delta_r \Pi(r) + \frac{e}{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{eff}}} |\psi(r)|^2 &= 0, & r \in \Omega, \\ \Pi(r) &= 0, & r \notin \Omega. \end{aligned} \quad (8.15)$$

На поверхні кластера S потенціал перетворюється в нуль:

$$\Pi(r)\Big|_{r \in \Omega} = 0, \quad (8.16)$$

а хвильова функція електрона ψ і її перша похідна неперервні. Припущення про сферичну форму кластера є достатньо гарним наближенням для водного й аміачного кластерів у вакуумі, оскільки в цьому випадку кількість водневих зв'язків між молекулами максимальна. Отже, ми розглядаємо модель кластера, що являє собою однорідну сферу радіусом R з ефективною діелектричною проникністю ϵ_{eff} .

Електродинаміка кластерів. Електростатичне поле в діелектрику характеризується вектором напруженості електричного поля \mathbf{E} та вектором електричної індукції \mathbf{D} , які задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = 0, \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q \end{cases} \quad (8.17)$$

і рівнянню зв'язку

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \text{або} \quad D_\mu = \epsilon_0 \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{E}_\nu \quad (8.18)$$

(остання форма використовується для анізотропного діелектрика). Тут ρ_{ext} – густина зовнішніх по відношенню до діелектрика зарядів, q – повний зовнішній заряд всередині поверхні S . Густини зв'язаних макроскопічних об'ємних і поверхневих зарядів діелектрика будемо позначати через ρ , σ без будь-яких індексів. Вектори поля на межі поділу різних діелектриків задовольняють граничним умовам, які можна отримати із інтегральних рівнянь (8.17) і мають вигляд

$$\left[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \mathbf{n} \right] = 0, \quad \left[(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \right] = \sigma_{\text{ext}} \quad (8.19)$$

Для описання поля зручно користуватися скалярною величиною – електростатичним потенціалом $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_r^{r_0} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad (8.20)$$

де $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$. Потенціал задовольняє рівнянню, яке випливає з (8.17) та (8.18):

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{ext}, \quad (8.21)$$

яке в тих областях, де діелектрик однорідний, зводиться до рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} \rho_{ext}. \quad (8.22)$$

Граничні умови для електростатичного потенціалу на межі поділу середовищ із різними діелектричними властивостями випливають із (8.17), (8.18) і для ізотропних діелектриків мають вигляд

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{ext}. \quad (8.23)$$

Орт нормалі \mathbf{n} має напрямок із першого середовища у друге.

Всередині провідників вільні заряди розподіляються завжди таким чином, щоб електричне поле дорівнювало нулю. Із електростатичної теореми Гаусса випливає, що при цьому всередині провідного кластера $\rho = 0$, вільні заряди локалізуються в тонкому поверхневому шарі. Граничні умови на поверхні S провідника мають вигляд

$$\mathbf{E}_\tau|_S = 0, \quad \varphi|_S = \text{const}. \quad (8.24)$$

Поверхневу густину заряду на провідному кластері можна знайти за формулами

$$\sigma = D_n = -\epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (8.25)$$

У загальному випадку поверхневий заряд розподіляється нерівномірно, і його розподіл не можна вказати заздалегідь. Але може бути заданий повний заряд провідника q , і в цьому випадку граничні умови слід доповнити рівнянням

$$\int_S \nabla_{\mu} \varphi dS_{\mu} = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (8.26)$$

де інтегрування здійснюється по поверхні провідного кластера.

Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1. Яка гранична товщина плівки, за якої можливе спостереження квантово-розмірних явищ при кімнатній температурі, якщо ефективна маса носіїв заряду $m^* = 0,1m_e$?

Розв'язання

Квантування енергії носіїв заряду має місце в напрямку, перпендикулярному до поверхні плівки. Внаслідок того, що рух носіїв заряду у вказаному напрямку ідентичний рухові частинки в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі, то

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* l^2} n^2,$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$; l – товщина плівки.

Оцінити граничну товщину $l_{\text{гр}}$ можна з наступних міркувань: квантово-розмірні явища можливі при виконанні умови:

$$E_1 = E_{\text{min}} \approx k_B T,$$

тому

$$k_B T = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* l_{\text{гр}}^2}.$$

Звідси

$$l_{\text{гр}} = \frac{\pi \hbar}{\sqrt{2m^* k_B T}} = \frac{3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 0,1 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \approx 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 12 \text{ нм}.$$

Відповідь: $l_{\text{гр}} = 12 \text{ нм}$.

Приклад 8.2. Оцініть граничну товщину плівки, за якої можливе спостереження квантово-розмірних явищ, якщо рухливість електронів у плівці $\mu_n = 1 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$.

Розв'язання

Швидкість електронів

$$v = \mu_n \frac{\Delta\varphi}{l_{\text{гр}}},$$

де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів; $l_{\text{гр}}$ – шукана гранична товщина плівки. Спостереження квантово-розмірних явищ можливе за виконання умови:

$$E_{\text{мін}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l_{\text{гр}}^2} = \frac{m_e v^2}{2} = e\Delta\varphi,$$

тому

$$\frac{m_e v^2}{2} = e \frac{v}{\mu_n} l_{\text{гр}} \quad \text{і} \quad v = \frac{2e l_{\text{гр}}}{m_e \mu_n},$$

звідки

$$\frac{m}{2} \frac{4e^2 l_{\text{гр}}^2}{m_e^2 \mu_n^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l_{\text{гр}}^2}$$

i

$$l_{\text{гр}} = \sqrt{\frac{\pi \hbar^2 \mu_n}{2e}} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} \approx 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 32 \text{ нм}.$$

Відповідь: $l_{\text{гр}} = 32 \text{ нм}$.

Приклад 8.3. Визначте повну кількість атомів у кластері кубоектаедра, зображеному на рис. 8.2.

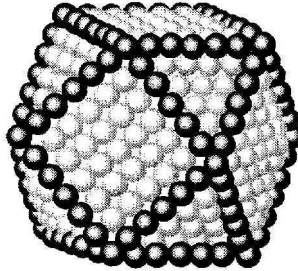


Рисунок 8.2 Кластер – кубоектаедр

Розв'язання

Поверхня кубоектаедра складається з 6 квадратів і 8 рівнобічних трикутників. Кубоектаедр має 24 ребра і 12 вершин. Нехай на ребрі кубоектаедра міститься κ атомів. Позначимо кількість вершин у кластері p ($p=12$), кількість ребер q ($q=24$), кількість квадратів r ($r=6$), кількість трикутників s ($s=8$). Тоді кількість атомів на повністю заповненій поверхні дорівнює:

$$\begin{aligned} \Delta n &= p + q(\kappa - 2) + r(\kappa - 2)^2 + \frac{s(\kappa - 2)(\kappa - 3)}{2} = 12 + 24(\kappa - 2) + \\ &+ 6(\kappa - 2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (\kappa - 2)(\kappa - 3) = 12 + 24\kappa - 48 + 6\kappa^2 - 24\kappa + \\ &+ 24 + 4\kappa^2 - 20\kappa + 24 = 10\kappa^2 - 20\kappa + 12. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що повна кількість атомів у кубоектаєдрі:

$$\begin{aligned}
 n &= 1 + \sum_{\kappa'=2}^{\kappa'=\kappa} (10\kappa'^2 - 20\kappa' + 12) = 1 + \sum_{\kappa'=1}^{\kappa'=\kappa} (10\kappa'^2 - 20\kappa' + 12) - \\
 &- 10 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 12 = 10 \sum_{\kappa'=1}^{\kappa'=\kappa} \kappa'^2 - 20 \sum_{\kappa'=1}^{\kappa'=\kappa} \kappa' + 12\kappa - 1 = \\
 &= 10 \frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6} - 20 \frac{\kappa(\kappa+1)}{2} + 12\kappa - 1 = \frac{5}{3} (2\kappa^3 + 3\kappa^2 + \kappa) - \\
 &- 10\kappa^2 - 10\kappa + 12\kappa - 1 = \frac{10}{3} \kappa^3 - 5\kappa^2 + \frac{11}{3} \kappa - 1.
 \end{aligned}$$

Для кластера, зображеного на рис. 8.1, $\kappa = 7$ і повна кількість атомів

$$n = \frac{10}{3} \cdot 7^3 - 5 \cdot 7^2 + \frac{11}{3} \cdot 7 - 1 = \frac{3430}{3} - 245 + \frac{77}{3} - 1 = 923.$$

Відповідь: $n = 923$.

Приклад 8.4. На рис. 8.3 зображений кластер – зрізаний декаєдрон. Визначте кількість атомів у такому кластері.

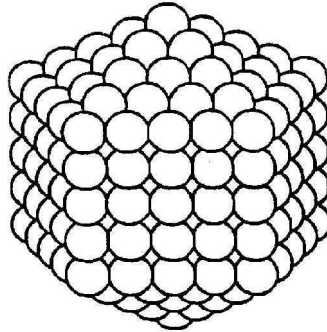


Рисунок 8.3 – Кластер - зрізаний декаєдрон

Розв'язання

На одному ребрі декаєдрона кількість атомів складає $\kappa = 5$. Тому повна кількість атомів у такому кластері

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{10}{3} \kappa^3 - 5\kappa^2 + \frac{11}{3} \kappa - 1 = \frac{10}{3} \cdot 5^3 - 5 \cdot 5^2 + \frac{11}{3} \cdot 5 - 1 = \\
 &= \frac{1250}{3} - 125 + \frac{55}{3} - 1 = 309.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $n = 309$.

Приклад 8.5. Напишіть кластерне розмірне рівняння для екситону в кластері.

Розв'язання

При фіксованому радіусі r_N кластерне розмірне рівняння отримаємо із співвідношень

$$W_N = E_N(\infty) + \frac{\pi^2 \hbar^2}{(m_e + m_N) R^2} \quad \text{і} \quad R = r_N n^{\frac{1}{3}},$$

тому

$$W_N = E_N(\infty) + A n^{-\frac{2}{3}},$$

де

$$A = \frac{\pi^2 \hbar^2}{(m_e + m_N) R_0^2} = \text{const},$$

R_0 – радіус кластера.

Значимо, що поправка на розмір кластера $\sim n^{-\frac{2}{3}}$ відрізняється від звичайної поправки $n^{-\frac{1}{3}}$ для електрона в кластері, поправка не залежить від квантового числа N і призводить до правильного значення енергії в об'ємному середовищі (масивному зразку).

Відповідь: $W_N = E_N(\infty) + A n^{-\frac{2}{3}}$, де $A = \frac{\pi^2 \hbar^2}{(m_e + m_N) R_0^2} = \text{const}$.

Приклад 8.6. Кластер містить n атомів металу. Енергія йонізації масивного металевого зразка W_∞ . Визначте максимальне зарядове число Z_{\max} , яке може мати такий кластер, якщо частота лазерного випромінювання, яке поглинається кластером ν .

Розв'язання

Енергію, необхідну для багатозарядної йонізації,

$$M_n^{+Z} \Rightarrow M_n^{+(Z+1)}$$

можна розділити на два доданки: потенціальну енергію, необхідну для йонізації масивного зразку W_∞ і електростатичну енергію, зумовлену кінцевим розміром кластера. Електростатичну енергію наближено прирівняємо до енергії провідної сфери із зарядом Z :

$$\frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

де R – радіус кластера. Відповідно потенціал однократної йонізації нейтральної металеві сфери дорівнює:

$$I_1 = W_\infty + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad R = r_s n^{\frac{1}{3}},$$

де r_s – радіус комірки Вігнера – Зейтца.

Для потенціалу йонізації I_Z металеві сфери, яка має заряд $Z-1$, отримуємо

$$I_Z = W_\infty + \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{(Z-1)^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = W_\infty + \frac{(2Z-1)e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Вважаючи $h\nu = I_{Z_{\max}}$, для Z_{\max} отримаємо

$$h\nu = W_\infty + \frac{(2Z_{\max} - 1)e^2}{8\pi\epsilon_0 r_s n^{\frac{1}{3}}};$$

$$2Z_{\max} - 1 = \frac{8\pi\epsilon_0 r_s (h\nu - W_\infty)}{e^2} n^{\frac{1}{3}};$$

$$Z_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{h\nu - 2,75}{6,92} n^{\frac{1}{3}}.$$

На рис. 8.4 наведено порівняння цього результату з експериментом.

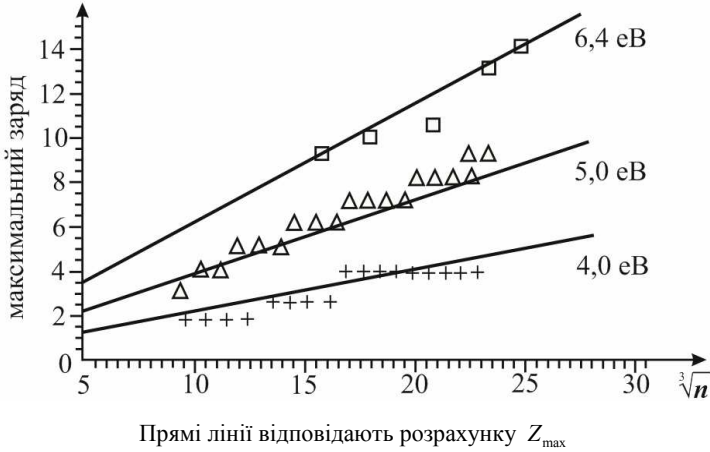


Рисунок 8.4 – Максимальний заряд як функція розміру кластера для різних значень частоти світла ν

Відповідь: $Z_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{h\nu - 2,75}{6,92} n^{\frac{1}{3}}.$

Приклад 8.7. Моделі зіткнення атомних частинок з кластером ґрунтуються на твердженні, що розмір кластера набагато перевищує радіус дії атомних сил. Тоді переріз зіткнення атома з кластером $\sigma = \pi R^2$, де R – радіус кластера. Знайдіть переріз поляризаційного захоплення кластером йона з енергією W і зарядом $q = Ze$.

Розв'язання

Поляризаційний потенціал кластера дорівнює:

$$\varphi_{cl} = -\frac{\alpha_{cl} Z^2 e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4};$$

умова захоплення йона кластером має вигляд: $W = |\varphi_{cl}|$, тобто

$$W = \frac{\alpha_{cl} Z^2 e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4}.$$

Звідси для перерізу σ_p отримаємо:

$$\sigma_p = \pi r^2 = \sqrt{\frac{\alpha_{cl} Z^2 e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 W}} = \frac{Ze}{4\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\alpha_{cl}}{2W}},$$

або, з урахуванням виразу для поляризованості кластера

$$\alpha_{cl} = \rho_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}, \quad \rho_0 = \frac{3}{4\pi r_0^3},$$

де r_0 – ефективний радіус атома.

Отже,

$$\sigma_p = \frac{Ze}{4\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\rho_0 R^3}{2W} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}}.$$

Відповідь: $\sigma_p = \frac{Ze}{4\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\rho_0 R^3}{2W} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}}.$

Приклад 8.8. У спряжених сполуках типу $\begin{pmatrix} -C & = & C- \\ | & & | \\ H & & H \end{pmatrix}_v$ (з довжи-

ною C–C зв'язку, яка дорівнює l), π -електрони атомів Карбону делокалізовані по всьому ланцюжку з $2v$ атомів Карбону.

Використовуючи модель одновимірної прямокутної потенціальної ями з нескінченно високими стінка-

ми, обчисліть довжину хвилі світла, яка відповідає першій смузі поглинання ланцюжка.

Розв'язання

У випадку, що розглядається (ланцюжок складається з 2ν атомів Карбону), кількість делокалізованих електронів у потенціальній ямі $N = 2\nu$. Енергетичні рівні в такій ямі

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_e a^2},$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$; $a = lN$ – розмір ями. За принципом Паулі на кожному рівні може перебувати не більше двох електронів. На рис. 8.5 зображено заповнення рівнів, що відповідає нашому випадку.

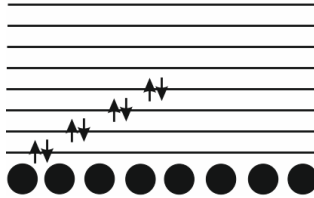


Рисунок 8.5

Енергія верхнього заповненого рівня:

$$\varepsilon_{\frac{N}{2}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e a^2} \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e} \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{1}{l^2 N^2}.$$

Відповідно енергія наступного за ним вільного рівня

$$\varepsilon_{\frac{N}{2}+1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e} \left(\frac{N}{2} + 1\right)^2 \frac{1}{l^2 N^2}.$$

Енергія кванта світла, який поглинається, відповідає переходу між зайнятим і вільним рівнем

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\frac{N}{2}+1} - \varepsilon_{\frac{N}{2}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l^2 N^2} \left\{ \left(\frac{N}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{N}{2}\right)^2 \right\} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e} \frac{N + 1}{l^2 N^2}.$$

Для довжини хвилі, яка відповідає першій довгохвильовій смузі поглинання, отримуємо

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar c}{\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_e} \frac{N+1}{l^2 N^2}} = \frac{4m_e c}{\pi\hbar} l^2 \frac{N^2}{N+1}.$$

Відповідь: $\lambda = \frac{4m_e c}{\pi\hbar} l^2 \frac{N^2}{N+1}.$

Приклад 8.9. Доведіть, що утворення поляронного стану в кластері є енергетично вигідним.

Розв'язання

Для доведення цього факту потрібно записати повну енергію та мінімізувати її. Отже,

$$E = T_e + U,$$

або підставляючи вирази для кінетичної і потенціальної енергій, отримаємо

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^* R} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}} R}.$$

Для мінімізації повної енергії продиференціюємо останній вираз за R , і прирівняємо результат до нуля:

$$\frac{dE}{dR} = -\frac{2\hbar^2}{2m^* R^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}} R^2} = -\frac{\hbar^2}{m^* R^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}} R^2} = 0,$$

або

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}}} - \frac{\hbar^2}{m^* R} = 0,$$

звідки

$$R = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{eff}}\hbar^2}{m^* e^2}.$$

Підставляючи отримане значення R у вираз для повної енергії, отримаємо

$$E = \frac{\hbar^2 m^* e^4}{32 m^* \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^4} - \frac{e^2 m^* e^2}{16 \pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}} \hbar^2 \epsilon_0 \epsilon_{\text{eff}}} = \frac{m^* e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^2} - \frac{m^* e^4}{16 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^2} = -\frac{m^* e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^2},$$

або остаточно

$$E = -\frac{m^* e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^2}.$$

Як видно з останнього виразу, повна енергія в поляронному стані від'ємна, тому самозахоплений стан електрона є енергетично вигідним.

Відповідь: $E = -\frac{m^* e^4}{32 \pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon_{\text{eff}}^2 \hbar^2}.$

Приклад 8.10. Знайдіть потенціал взаємодії електрона з кластером в середині та зовні кластера.

Розв'язання

Знайдемо спочатку енергію взаємодії електрона з окремим атомом. Для виведення виду такої взаємодії будемо виходити з того, що електричне поле, яке створюється електроном призводить до появи в атома відмінної від нуля поляризації \mathbf{P} , пропорційної напруженості поля:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}. \quad (1)$$

Величина α має назву коефіцієнта поляризації. Для атомів із сферичною симетрією α – скалярна величина, але в загальному випадку α є симетричним тензором. Енергія поляризації в одиниці об'єму дорівнює: $U = -\mathbf{P}\mathbf{E}$, а її приріст dU при зміні поля $d\mathbf{E}$ дорівнює:

$$dU = -\mathbf{P}d\mathbf{E}.$$

Вираз для енергії поляризації одиниці об'єму $U(r)$ має вигляд:

$$U = -\int \alpha \mathbf{E} d\mathbf{E} = -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2. \quad (2)$$

Врахуємо тепер, що електрон створює в оточуючому просторі поле напруженістю $\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Енергію

$$U = -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{E}^2 = -\frac{\alpha e^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} \quad (3)$$

можна прийняти за потенціальну енергію взаємодії електрона з атомом при $r \geq r_0$, де r_0 – ефективний радіус атома. Всередині атому енергію взаємодії U можна вважати постійною ($U = U_0$). Отже, в подальшому будемо вважати, що потенціал взаємодії електрона з атомом має вигляд:

$$U(r) = \begin{cases} U_0, & r < r_0; \\ -\frac{\alpha e^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}, & r > r_0. \end{cases} \quad (4)$$

Для знаходження потенціалу, що створюється кластером, необхідно підсумувати внесок від кожного з атомів, що складають кластер, тобто розрахувати величину:

$$U(r) = \sum_{i=1}^N U_i(r), \quad (5)$$

де підсумовування проводиться за всіма атомами кластера, $U_i(r)$ – потенціал i -го атому, який визначається формулою (4). Співвідношення (5) справедливе лише у випадку малих α , коли внесок від кожного атому вважається незалежним від інших атомів, тобто впливом атомів один на одного можна знехтувати.

Розглянемо спочатку внесок у суму (5), який дають $U_i(r)$ при $r > r_0$. Зрозуміло, що цей внесок визначає потенціал, який

створюється атомами зовні кластера, тобто $U(r)$ при $r > R$. Для розрахунку цього внеску, вважатимемо, що $R \gg r_0$. Тоді з достатньою точністю можна записати (5) у вигляді:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4}, \quad (6)$$

де \mathbf{r}_i визначає положення i -го атому в кластері. Для розрахунку суми в (6) перейдемо від підсумовування до інтегрування за допомогою співвідношення:

$$\sum_{i=1}^N f(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_{V_0} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}', \quad (7)$$

де інтегрування в правій частині (7) відбувається заміною дискретної змінної \mathbf{r}_i на неперервну \mathbf{r}' і проводиться за об'ємом кластера V_0 .

Зрозуміло, що співвідношення (7) вірне лише, якщо кількість атомів N у кластері достатньо велика. Отже, вираз для потенціалу має вигляд:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_{V_0} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4}. \quad (8)$$

Для розрахунку інтегралу в (8) введемо сферичні координати r' , θ , φ . Елемент об'єму в сферичних координатах дорівнює $dV' = r'^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr'$. Відповідно $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta$. Оскільки вираз під інтегралом у (8) не залежить від кутової змінної φ , інтегрування за нею виконується відразу. Отже,

$$I = \int_{V_0} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4} = 2\pi \int_0^R dr' \int_{-1}^1 \frac{r' d\eta}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^2}, \quad (9)$$

де $\eta = \cos \theta$. Інтегрування за змінною η призводить до інтегралу:

$$I = 4\pi \int_0^R \frac{r'^2 dr'}{(r^2 - r'^2)^2}. \quad (10)$$

Його розрахунок дозволяє отримати остаточний результат:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^2 \rho_0}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \left[\frac{2R}{r^2 - R^2} + \frac{1}{r} \ln \frac{r - R}{r + R} \right], \quad (11)$$

де $\rho_0 = \frac{3}{4\pi r_0^3}$.

Обговоримо ще потенціал взаємодії електрона з кластером при $r < R$, тобто всередині кластера. Формально для цього потрібно розрахувати суму (5) при $r < R$. Точно розрахувати цю суму важко. Принциповими труднощами є вибір величини r_0 при врахуванні внеску від кожного атома, що входить у кластер. При розрахунку потенціалу зовні кластера вважалось, що r_0 дорівнює радіусу Вігнера – Зейтца. При цьому похибка, що вноситься, несуттєва для відстані від поверхні кластера порядку розмірів атома. Всередині кластера правильний вибір r_0 є суттєвим. Внаслідок цих труднощів, точний розрахунок потенціалу взаємодії при $r < R$ на цей час мабуть є неможливим. З іншого боку наведене вище обговорення дозволяє зробити висновок, що для кластерів з достатньо щільним пакуванням потенціал взаємодії при $r < R$ повинен бути близьким до U_0 . Отже, можна вважати, що $U(r) = U_0$ при $r < R$.

$$\text{Відповідь: } U = \begin{cases} U_0, & r < R; \\ -\frac{\alpha e^2 \rho_0}{32\pi^2 \epsilon_0^2} \left[\frac{2R}{r^2 - R^2} + \frac{1}{r} \ln \frac{r - R}{r + R} \right], & r > R. \end{cases}$$

Приклад 8.11. Знайдіть потенціал взаємодії електрона з кластером у граничних випадках: $r \gg R$ (на великих відстанях від кластера) та $r - R \ll R$ (поблизу кластера).

Розв'язання

Потенціал взаємодії електрона з кластером при $r \gg R$ може бути записаний:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^2 \rho_0}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \left[\frac{2R}{r^2 - R^2} + \frac{1}{r} \ln \frac{r-R}{r+R} \right]. \quad (1)$$

З формули Клаузіуса – Моссотті для діелектричної проникності

$$\varepsilon = \frac{2\alpha\rho_0 + 3}{3 - \alpha\rho_0} \quad (2)$$

маємо:

$$\alpha\rho_0 = \frac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}, \quad (3)$$

і потенціал зовні кластера матиме вигляд:

$$U(r) = -\frac{3(\varepsilon - 1)e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 (\varepsilon + 2)} \left[\frac{2R}{r^2 - R^2} + \frac{1}{r} \ln \frac{r-R}{r+R} \right]. \quad (4)$$

На великих відстанях від кластера, коли $r \gg R$, потенціал (1) набуває вигляду:

$$U(r) = -\frac{e^2 \alpha_{cl}}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} \quad (5)$$

із заміною α на α_{cl} :

$$\alpha_{cl} = \rho_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \quad (6)$$

Поблизу кластера, коли $r - R \ll R$, потенціал (4) набуває вигляду:

$$U(r) = -\frac{3(\varepsilon - 1)e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 (\varepsilon + 2)} \left[\frac{1}{r - R} + \frac{1}{R} \ln \frac{r - R}{2R} \right]. \quad (7)$$

При $R \rightarrow \infty$ $U(r)$ переходить у потенціал зображення плоскої поверхні:

$$U(z) = -\frac{3(\varepsilon-1)e^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2(\varepsilon+2)}\frac{1}{z}, \quad (8)$$

де $z = r - R \ll R$. Границя $U_0 \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ відповідає випадку притягання електрона до плоскої поверхні, за яку електрон проникнути не може.

Відповідь: при $r \gg R$: $U(r) = -\frac{e^2\alpha_{cl}}{32\pi^2\varepsilon_0^2r^4}$; при $r - R \ll R$:

$$U(z) = -\frac{3(\varepsilon-1)e^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2(\varepsilon+2)}\frac{1}{z}, \text{ де } z = r - R.$$

Приклад 8.12. Провідний еліпсоїдальний кластер із зарядом q і напівосями a , b , c розміщений в однорідному діелектрику з проникністю ε . Визначте потенціал φ , ємність кластера C і поверхневу густину його заряду σ . Вважайте, що $a > b > c$.

Розв'язання

Скористаємося еліпсоїдальними координатами ξ , η , ζ , які пов'язані з декартовими координатами x , y , z наступними співвідношеннями:

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq -c^2;$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -c^2 \leq \eta \leq -b^2;$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad -b^2 \leq \zeta \leq -a^2.$$

Виразимо декартові координати x , y , z через еліпсоїдальні ξ , η , ζ :

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}};$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}};$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}.$$

Коефіцієнти Ламе:

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{2R_\xi}; \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}}{2R_\eta}; \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}}{2R_\zeta}.$$

Оператор Лапласа в довільній криволінійній ортогональній системі координат q^1, q^2, q^3

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \right).$$

Оператор Лапласа в еліпсоїдальній системі координат

$$\Delta = \frac{4}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)} \left[(\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right],$$

де

$$R_u = \sqrt{(u + a^2)(u + b^2)(u + c^2)}, \quad (u = \xi, \eta, \zeta).$$

В еліпсоїдальних координатах поверхню зарядженого еліпсоїда задають співвідношенням $\xi = 0$. Тому можна шукати потенціал поля у вигляді $\varphi = \varphi(\xi)$. Отже,

$$\frac{d}{d\xi} \left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0.$$

Граничні умови: $\varphi = \text{const}$ при $\xi = 0$ (на поверхні еліпсоїда) $\varphi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Для визначення сталої інтегрування використаємо той факт, що $\xi \rightarrow r^2$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}, \quad C = \frac{8\pi\epsilon_0\epsilon}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}.$$

Розподіл густини заряду по поверхні еліпсоїда визначають нормальною похідною потенціалу:

$$\sigma = -\epsilon_0\epsilon \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\xi=0} = -\epsilon_0\epsilon \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{\epsilon_0 q}{abc \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Густина зарядів на кінцях напівосей прямо пропорційна їх довжинам:

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c.$$

Відповідь: $\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}; \quad C = \frac{8\pi\epsilon_0\epsilon}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}}; \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 q}{abc \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$

Приклад 8.13. Провідний еліпсоїдальний кластер із зарядом q перебуває в однорідному зовнішньому електричному полі, напруженість \mathbf{E}_0 якого паралельна одній з осей еліпсоїда. Визначте потенціал φ повного електричного поля.

Розв'язання

Скористаємось еліпсоїдальними координатами. Граничні умови на поверхні еліпсоїда ($\xi = 0$) виконуватимуться у разі, якщо залежність потенціалу φ' , викликана наведеними зарядами, від η і ζ буде такою самою, як і у зовнішнього поля: $\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta)F(\xi)$.

Спочатку вважатимемо кластер незарядженим: $q = 0$. Якщо зовнішнє поле \mathbf{E}_0 паралельне осі Ox , то

$$\varphi_0 = -\mathbf{E}_0 x = \mp \mathbf{E}_0 \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}.$$

Знак „-“ відповідає $x > 0$, знак „+“ $x < 0$. Функція φ_0 і потенціал поля наведених зарядів φ' задовольняють рівнянню Лапласа. Підставимо $\varphi' = \varphi_0 F(\xi)$ у рівняння Лапласа і отримаємо рівняння для визначення невідомої функції $F(\xi)$:

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \ln \left[R_\xi (\xi + a^2) \right] = 0.$$

Розв'язок цього рівняння, що задовольняє граничним умовам, має вигляд

$$\varphi|_{q=0} = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}}{\int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}} \right\}.$$

Якщо кластер має власний заряд q , то розв'язок, який задовольняє граничним умовам $\varphi|_{\xi=0} = \text{const}$ і $\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (S – замкнена поверхня, що містить у собі кластер), отримуємо за принципом суперпозиції

$$\varphi|_q = \varphi|_{q=0} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}.$$

Відповідь: $\varphi|_q = \varphi|_{q=0} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}$, де $\varphi|_{q=0} = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_{\xi}}}{\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_{\xi}}} \right\}$.

Приклад 8.14. Виходячи з виразів для потенціалу і ємності еліпсоїдального кластера, визначте потенціали і ємності кластерів, які мають форму витягнутого ($a > b = c$) і сплюсненого ($a = b > c$) еліпсоїдів обертання. Розгляньте граничні випадки тонкого довгого стрижня і тонкого диску.

Розв'язання

Вирази для потенціалу і ємності еліпсоїдального кластера мають вигляд

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}, \quad C = \frac{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}},$$

де

$$R_{\xi} = \sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}.$$

Розглянемо випадок, коли кластер має форму сплюсненого ($a = b > c$) еліпсоїду обертання. У цьому разі можна записати:

$$R_{\xi} = (\xi+a^2)\sqrt{\xi+c^2};$$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi+a^2)\sqrt{\xi+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}} = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\sqrt{\xi + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \arccos \frac{c}{a};$$

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}; \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos \frac{c}{a}}.$$

У випадку тонкого диску $c = 0$ і

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a} \operatorname{arccctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}}; \quad C = 8\epsilon_0\epsilon a.$$

Розглянемо випадок, коли кластер має форму витягнутого еліпсоїду ($a > b = c$). У цьому разі можна записати:

$$R_{\xi} = (\xi + b^2)\sqrt{\xi + a^2};$$

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + b^2)\sqrt{\xi + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}} = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + b^2)\sqrt{\xi + a^2}} = \frac{2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}{\sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}; \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}.$$

У випадку тонкого довгого стрижня ($a \gg b$):

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon a} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + a}{\sqrt{\xi + a^2} - a}; \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon a}{\ln \frac{2a}{b}}.$$

Відповідь: сплюснений еліпсоїд:

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}; \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - c^2}}{\arccos \frac{c}{a}};$$

тонкий диск: $\varphi(\xi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a} \operatorname{arccctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}}; \quad C = 8\epsilon_0\epsilon a;$

витягнутий еліпсоїд:

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}};$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}; \quad \text{тонкий довгий стрижень:}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon a} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + a}{\sqrt{\xi + a^2} - a}; \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon a}{\ln \frac{2a}{b}}.$$

Приклад 8.15. Провідний незаряджений кластер-еліпсоїд перебуває в зовнішньому однорідному полі \mathbf{E}_0 , орієнтованому довільно відносно його осей. Визначте повну різницю потенціалів електричного поля φ . Розгляньте поле на великих відстанях від кластера, виразивши потенціал через коефіцієнти деполяризації:

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + b^2) R_\xi},$$

$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + c^2) R_\xi},$$

де $R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)}$.

Розв'язання

Потенціал повного електричного поля незарядженого еліпсоїдального кластера (див. приклад 8.13) має вигляд

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_{\xi}}}{\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_{\xi}}} \right\},$$

тому

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{abc}{2n^{(x)}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_{\xi}} \right\}.$$

Знайдемо потенціал φ на великих відстанях r від кластера. Великим r відповідають великі значення координати ξ , причому $r^2 \approx \xi$. Тому

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_{\xi}} \approx \int_{r^2}^{\infty} \frac{dr}{\xi^2} = \frac{2}{3r^3}.$$

Отже,

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{abc}{3n^{(x)} r^3} \right\} \quad \text{або} \quad \varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{V}{4\pi r^3 n^{(x)}} \right\},$$

де $V = \frac{4\pi}{3} abc$ – об'єм еліпсоїдального кластера.

Відповідь: $\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{V}{4\pi r^3 n^{(x)}} \right\}.$

Приклад 8.16. Знайдіть вирази для коефіцієнтів деполяризації у випадку кластера, який має форму витягнутого еліпсоїда обертання ($a > b = c$). Розгляньте випадки кластера, який має форму дуже витягнутого еліпсоїда (стрижня) і кластера, близького до кулі.

Розв'язання

Коефіцієнти деполяризації для кластера, який має форму витягнутого еліпсоїда обертання ($a > b = c$),

$$n^{(x)} = \frac{ab^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)^{\frac{3}{2}} (\xi + b^2)}.$$

Обчислимо окремо останній інтеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)^{\frac{3}{2}} (\xi + b^2)} = \\ & = \left\| \begin{array}{l} \xi + a^2 = t^2; \xi = t^2 - a^2; d\xi = 2tdt \\ \xi + b^2 = t^2 - a^2 + b^2 = t^2 - a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = t^2 - a^2 e^2 \\ \xi \quad 0 \quad \infty \\ t \quad a \quad \infty \end{array} \right\| = \\ & = 2 \int_a^\infty \frac{tdt}{t^3 (t^2 - a^2 e^2)} = 2 \int_a^\infty \frac{dt}{t^2 (t - ae)(t + ae)} = \\ & = 2 \int_a^\infty \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t - ae} + \frac{D}{t + ae} \right) dt. \end{aligned}$$

Зведемо в останньому інтегралі дробі до спільного знаменника і прирівняємо відповідні коефіцієнти в чисельнику:

$$\frac{At(t^2 - a^2 e^2) + B(t^2 - a^2 e^2) + Ct^2(t + ae) + Dt^2(t - ae)}{t^2(t^2 - a^2 e^2)} = \frac{1}{t^2(t^2 - a^2 e^2)}$$

або

$$\begin{cases} A + C + D = 0; \\ B + ae(C - D) = 0; \\ -a^2 e^2 A = 0; \\ -a^2 e^2 B = 1, \end{cases}$$

звідки

$$A=0, \quad B=-\frac{1}{a^2 e^2}, \quad C=\frac{1}{2a^3 e^3}, \quad D=-\frac{1}{2a^3 e^3}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти A , B , C і D в інтеграл:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{a^2 e^2} \int_a^\infty \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{a^3 e^3} \left\{ \int_a^\infty \frac{dt}{t-ae} - \int_a^\infty \frac{dt}{t+ae} \right\} = \frac{2}{a^2 e^2} \frac{1}{t} \Big|_a^\infty + \\ & + \frac{1}{a^3 e^3} \ln \left| \frac{t-ae}{t+ae} \right| \Big|_a^\infty = -\frac{2}{a^3 e^2} + \frac{1}{a^3 e^3} \ln \left| \frac{1+e}{1-e} \right|. \end{aligned}$$

Отже, остаточно маємо

$$n^{(x)} = \frac{1-e}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right);$$

$$n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{ab^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi+a^2)^{\frac{1}{2}} (\xi+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1-e}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) \right],$$

де $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ – ексцентриситет.

У випадку стрижня $e \rightarrow 1$, тому:

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}.$$

У випадку, коли кластер має форму, близьку до кулі, $e \ll 1$:

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^2 \right) \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} e^2.$$

Відповідь: для витягнутого еліпсоїда обертання:

$$n^{(x)} = \frac{1-e}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right),$$

$$n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1-e}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) \right]; \text{ для стрижня:}$$

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}; \quad \text{для кластера, що має форму,}$$

$$\text{близьку до кулі: } n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2.$$

Приклад 8.17. Знайдіть вирази для коефіцієнтів деполяризації у випадку кластера, який має форму сплюсненого еліпсоїда обертання ($a = b > c$). Розгляньте випадок кластера, який має форму диска.

Розв'язання

Маємо

$$n^{(z)} = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)(\xi + c^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Нехай $(\xi + c^2) = x^2$, тоді $d\xi = 2x dx$,

$$\xi + a^2 = x^2 + a^2 - c^2 = x^2 + c^2 \left(\frac{a^2}{c^2} - 1 \right) = x^2 + e^2 c^2,$$

де $e \equiv \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}$ – ексцентриситет.

З урахуванням вищесказаного перепишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\begin{aligned} n^{(z)} &= 2 \int_c^{\infty} \frac{dx}{x^2 (x^2 + e^2 c^2)} = 2 \int_c^{\infty} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + e^2 c^2} \right) dx = \\ &= 2 \int_c^{\infty} \frac{Ax(x^2 + e^2 c^2) + B(x^2 + e^2 c^2) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2 + e^2 c^2)} dx. \quad (2) \end{aligned}$$

Порівнюючи чисельники вихідного дробу та перетвореного, отримуємо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A , B , C і D :

$$\begin{cases} A + C = 0; \\ B + D = 0; \\ Ae^2c^2 = 0; \\ Be^2c^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = C = 0; \\ B = \frac{2}{e^2c^2}; \\ D = -\frac{2}{e^2c^2}. \end{cases}$$

Повертаючись до виразу (2), запишемо:

$$\begin{aligned} n^{(z)} &= \frac{2}{e^2c^2} \int_c^\infty \frac{dx}{x^2} - \frac{2}{e^2c^2} \int_c^\infty \frac{dx}{x^2 + e^2c^2} = -\frac{2}{e^2c^2} \frac{1}{x} \Big|_c^\infty - \frac{1}{e^3c^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{ec} \Big|_c^\infty = \\ &= \frac{1+e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{(x)} = n^{(y)} &= \frac{1}{2} (1 - n^{(z)}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} - 1 + \frac{\operatorname{arctg} e}{e^3} + \frac{\operatorname{arctg} e}{e} \right) = \\ &= \frac{e \operatorname{arctg} e - e + \operatorname{arctg} e}{2e^3} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1+e^2}{e^3} \operatorname{arctg} e. \end{aligned}$$

У випадку диска ($a = b$, $c \rightarrow 0$) маємо $e \rightarrow \infty$, тому

$$n^{(z)} = 1, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 0.$$

Відповідь: $n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e)$; $n^{(x)} = n^{(y)} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1+e^2}{e^3} \operatorname{arctg} e$;
для диску: $n^{(z)} = 1$, $n^{(x)} = n^{(y)} = 0$.

Приклад 8.18. Покажіть, що при наданні провідній рідкій сферичній краплі достатньо великого заряду, крапля втрачає стійкість. Визначте це критичне значення заряду q_c . Радіус краплі R , коефіцієнт поверхневого натягу α .

Розв'язання

Порівняємо енергію сферичної краплі з енергією деформованої краплі, яка має форму витягнутого еліпсоїда обертання. Площа поверхні такого еліпсоїду:

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \quad (a > b = c),$$

а його ємність

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}.$$

Потенціальну енергію деформованої зарядженої рідкої краплі, яка має форму еліпсоїда обертання з ексцентриситетом

$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ і об'ємом, який дорівнює об'єму кулі радіусом R , запишемо у вигляді

$$U(e) = \frac{q^2}{2C} + \alpha S = \frac{q^2 \sqrt[3]{1 - e^2}}{16\pi\epsilon_0 R \epsilon} \ln \frac{1+e}{1-e} + 2\pi R^2 \alpha \left(\sqrt[3]{1 - e^2} + \frac{\arcsin e}{e \sqrt[3]{1 - e^2}} \right).$$

Для того, щоб відповісти на питання про стійкість зарядженої сферичної краплі, потрібно з'ясувати характер залежності $U(e)$ при малих e (коли форма краплі не дуже відрізняється від сферичної). Розкладемо $U(e)$ у ряд з точністю до e^4 :

$$U(e) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + 4\pi R^2 \alpha + \frac{e^4}{45} \left(8\pi R^2 \alpha - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right).$$

Якщо енергія сферичної краплі

$$U_0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + 4\pi R^2 \alpha,$$

то

$$\Delta U = U - U_0 = \frac{e^4}{45} \left(8\pi R^2 \alpha - \frac{q^2}{8\pi \epsilon_0 R} \right);$$

для того, щоб крапля була стійкою, має виконуватися умова $\Delta U \leq 0$, тобто

$$q \leq q_c = \sqrt{64\pi^2 R^3 \alpha \epsilon_0} = 8\pi R \sqrt{\alpha \epsilon_0 R}.$$

Звідси бачимо, що при малих деформаціях крапля прагне повернутися до сферичної форми – тобто є стійкою. При $q > q_c$, оскільки деформація, що виникла, продовжує збільшуватися, – крапля нестійка. Процес закінчується розщепленням нестійкої краплі на дві або більшу кількість більш дрібних стійких крапель.

Відповідь: $q_c = 8\pi R \sqrt{\alpha \epsilon_0 R}$.

Приклад 8.19. Знайдіть розподіл заряду на кластері, що має форму стисненого сфероїду.

Розв'язання

Задачу зручно розв'язувати у відповідній сфероїдальній системі координат. Для того, щоб ввести цю систему координат, розглянемо еліпс з напівосями a і b ($a > b$) і відстанню між фокусами $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Поверхня, яку отримали в результаті обертання цього еліпса навколо малої осі, є стисненим вздовж осі симетрії сфероїдом.

Введемо безрозмірну величину $\xi = \frac{a}{c}$ ($\xi \geq 1$). При цьому рівняння стисненого сфероїду запишеться у вигляді

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2. \quad (1)$$

Разом зі сфероїдом розглянемо співфокусний однопорожнинний гіперболоїд обертання, що задається рівнянням

$$\frac{x^2 + y^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2. \quad (2)$$

Відстань між вершинами гіперболи, яка при обертанні навколо осі z утворює цей гіперboloїд, дорівнює $2c\eta$, а відстань між фокусами гіперболи дорівнює $2c$.

Якщо покласти $y = 0$, то з рівнянь (1) і (2) отримаємо систему еліпсів та гіпербол, яку можна розглядати як криволінійну ортогональну систему координат у площині $y = 0$. Еліпсу, що задається параметром ξ , і гіперболі, що задається параметром η , відповідає чотири точки перетину, які відрізняються лише знаками координат x і z . Якщо вказати ці знаки, то визначиться ще одна точка площини $y = 0$. Різним точкам цієї площини будуть відповідати різні значення параметрів ξ , η і різний вибір знаків x , z .

У просторі перетин сфероїда та гіперboloїда відбувається по двом колам у верхній ($z > 0$) та нижній ($z < 0$) частинах сфероїду. Для вибору одного з двох кіл потрібно вказати знак z ($\text{sign } z$).

Щоб на вказаному колі визначити точку, потрібно задати азимутальний кут ψ :

$$\psi = \text{arctg} \frac{y}{x}. \quad (3)$$

Отже, три величини ξ , η , ψ і $\text{sign } z$ однозначно визначають точку у просторі. Ця система координат має назву *стисненої сфероїдальної системи координат*.

З рівнянь (1) – (3) знайдемо співвідношення, які пов'язують декартові координати з ξ , η , ψ , $\text{sign } z$:

$$x = c\xi\eta \cos \psi; \quad y = c\xi\eta \sin \psi; \quad z = \pm c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (4)$$

Якщо ввести відстань від фокусів еліпса (який знаходиться в площині, що проходить крізь вісь Oz і точку з координатами x , y , z), що дорівнюють $r_{\pm} = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} \mp c)^2 + z^2}$, то зворотнє по відношенню до (4) перетворення може бути записане у вигляді

$$\xi = \frac{r_+ + r_-}{2c}; \quad \eta = \frac{r_- - r_+}{2c}; \quad \psi = \text{arctg} \frac{y}{x}. \quad (5)$$

У нашому випадку коефіцієнти Ламе зручніше визначити, виходячи з (4). При цьому отримаємо

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}; \quad (6)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}; \quad (7)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2} = c \xi \eta. \quad (8)$$

У введеної системі координат рівняння Лапласа набуває вигляду

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right\} = 0. \quad (9)$$

Множник, що знаходиться перед дужками можна скоротити.

Дуже важливою обставиною є те, що рівняння (9) допускає розв'язки у вигляді функції від однієї змінної, наприклад у вигляді $\varphi = \varphi(\xi)$. Це пов'язане з тим, що у сфероїдальній системі координат рівняння Лапласа допускає розділення змінних.

Розв'язок (9) шукатимемо у вигляді $\varphi = \varphi(\xi)$. Враховуючи (6) – (8), отримаємо з (9)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (10)$$

Розв'язок у вигляді функції однієї змінної означає, що еквіпотенціальні поверхні ззовні провідного сфероїда також є сфероїдами.

Інтегруючи (10), отримуємо

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} = \frac{A}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (11)$$

де A – константа інтегрування. Проводячи друге інтегрування, маємо

$$\varphi(\xi) = A \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + B \quad (\xi > \xi_0), \quad (12)$$

де B – друга константа інтегрування.

Визначення адитивної константи B пов'язане з нормуванням потенціалу на нескінченності ($\xi \rightarrow 0$), тому вважаємо $B = 0$. Константа A пов'язана із зарядом кластера, який за умовою задачі дорівнює q . Зв'язок між константою A і зарядом q простіше за все знайти з асимптотичної ($\xi \rightarrow \infty$) форми (12). Відповідно до (5) маємо

$c\xi = \frac{r_+ + r_-}{2} \approx r(\xi \rightarrow \infty)$, тому

$$\varphi_{\text{ac}} = \frac{A}{\xi} \approx \frac{cA}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (13)$$

звідки

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}. \quad (14)$$

Отже, потенціал у випадку зарядженого провідного кластера, який має форму стисненого сфероїду, дорівнює

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b}. \quad (15)$$

Якщо замість заряду задано потенціал кластера φ_0 , то потенціал в інших точках поза кластером дорівнює

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}}. \quad (16)$$

З формули (15) можна отримати вираз для ємності стисненого сфероїдального кластера:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 c}{\operatorname{arctg} \frac{c}{b}}. \quad (17)$$

При $\xi_0 \rightarrow 1$ сфероїд переходить у диск. При цьому для ємності диску отримаємо

$$C_{\text{д}} = 4\pi\varepsilon_0 c \frac{2}{\pi} = 8\varepsilon_0 c. \quad (18)$$

Для визначення напруженості поля потрібно розрахувати градієнт потенціалу, єдина відмінна від нуля компонента якого дорівнює

$$(\nabla\varphi(\xi))_{\xi} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{1}{c} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (19)$$

Тому напруженість поля дорівнює

$$\mathcal{E}(\xi, \eta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}. \quad (20)$$

З (20) бачимо, що на відміну від потенціалу, поле в різних точках одного і того ж самого сфероїда різне. Найбільша напруженість у випадку стисненого сфероїдального кластера „на екваторі“, де $\eta = 1$, а найменша – „на полюсах“, де $\eta = 0$.

Поверхнева густина заряду дорівнює

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathcal{E}(\xi, \eta) = \frac{q}{4\pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}. \quad (21)$$

З метою перевірки можна переконатися у тому, що інтегрування виразу (21) по поверхні сфероїдального кластера дає його заряд. Враховуючи, що $dS = h_2 h_3 d\eta d\psi$, отримаємо

$$\iint_S \sigma dS = 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} c^2 \frac{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \xi_0 \eta d\eta d\psi = q. \quad (22)$$

Вираз (21) для поверхневої густини заряду можна переписати у більш зручному для аналізу вигляді. Враховуючи, що

$$\xi_0^2 - \eta^2 = \frac{a_0^2 b_0^2}{c^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4} \right), \quad (23)$$

отримаємо

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a_0^2 b_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4}}}. \quad (24)$$

При $b_0 \rightarrow 0$, $c \rightarrow a = R$ з (24) отримаємо розподіл заряду на провідному кластері, що має форму диска. При цьому слід врахувати, що $\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} \ll \frac{z^2}{b_0^4}$ та скористатися рівнянням еліпсоїда

$$\frac{z^2}{b_0^2} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{a_0^2}.$$

В результаті отримаємо для дископодібного кластера

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}}}, \quad (25)$$

де R – радіус диска.

У центрі диска густина заряду вдвічі менша, ніж середня густина, що дорівнює $\frac{q}{2\pi R^2}$. На краях диска поверхнева густина заряду стає нескінченною, що пов'язано з припущенням про нескінченно малу товщину диску.

Отже, розподіл заряду на поверхні дископодібного кластера суттєво нерівномірний. Це пов'язано з тим, що при рівномірному

розподілі заряду на поверхні диска виникає тангенціальна складова поля поблизу поверхні диска, яка перетворюється в нуль лише для центральної точки диска.

Відповідь: для кластера у формі стисненого сфероїду:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a_0^2 b_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4}}}; \text{ для дископодібного кластера:}$$

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}}}.$$

Приклад 8.20. Знайдіть розподіл заряду на відокремленому провідному кластері у формі витягнутого сфероїду з напівосями a_0 і b_0 ($a_0 > b_0$). Визначте ємність цього кластера.

Розв'язання

Задача розв'язується аналогічно до попередньої. Введемо витягнуту сфероїдальну систему координат, що задається поверхнями витягнутого сфероїду і двопорожнинного гіперboloїда обертання. Ці поверхні можна отримати обертанням еліпса навколо великої осі і гіперболи навколо осі, що проходить через фокуси. Рівняння поверхнею будуть мати вигляд

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 - 1} + \frac{z^2}{\xi^2} = c^2 \quad (\xi \geq 1), \quad (1)$$

$$\frac{z^2}{\eta^2} - \frac{x^2 + y^2}{1 - \eta^2} = c^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1). \quad (2)$$

При цьому отримаємо

$$\begin{aligned} x &= c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \psi, \\ y &= c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \psi, \\ z &= \pm c\xi\eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Зворотнє перетворення має той же самий вигляд, що і (5) з попереднього прикладу, але тепер $r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp c)^2}$.

Коефіцієнти Ламе для витягнутої сфероїдальної системи координат дорівнюють

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (4)$$

Звідси маємо

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} = c(\xi^2 - 1). \quad (5)$$

У витягнутій сфероїдальній системі координат рівняння також має розв'язок, який залежить від однієї змінної ξ . Відповідне рівняння, яке впливає з рівняння Лапласа, має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi) \right) = 0. \quad (6)$$

Перше інтегрування дає

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{A}{\xi^2 - 1}. \quad (7)$$

Друге інтегрування дає

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} + B. \quad (8)$$

Враховуючи нормування потенціалу на нескінченності ($\varphi(\xi \rightarrow \infty) = 0$), потрібно покласти $B = 0$. Константа інтегрування A визначається зарядом провідного кластера q або його потенціалом φ_0 . Для того, щоб виразити A через заряд, розглянемо асимптотичну форму (8) при $\xi \rightarrow \infty$ і врахуємо, що $c\xi = \frac{r_+ + r_-}{2} \approx r$. При цьому отримаємо

$$\varphi_{\text{ac}}(\xi) = \frac{A}{\xi} \approx \frac{A c}{r}. \quad (9)$$

Звідси випливає, що

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}. \quad (10)$$

Остаточно для потенціалу маємо

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{a+c}{b}. \quad (11)$$

Відмітимо, що перехід від витягнутого сфероїда до стисненого можна здійснити заміною у формулі (11) $a \rightleftharpoons b$ ($a > b$). При цьому $c \rightarrow \sqrt{b^2 - a^2} = i\sqrt{a^2 - b^2} = ic$. Вираз (11) у результаті заміни $a \rightleftharpoons b$, $c \rightarrow ic$ дорівнюватиме

$$\frac{q}{8\pi\epsilon_0 ic} \ln \frac{b+ic}{b-ic} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{b}{c}, \quad (12)$$

тобто перейде у вираз для потенціалу стисненого сфероїда. З (11) видно, що еквіпотенціальними поверхнями є витягнуті сфероїди. При цьому напруженість поля в різних точках сфероїда буде різною внаслідок того, що

$$\mathcal{E} = -(\nabla\varphi)_\xi = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2} \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (13)$$

Поверхнева густина заряду дорівнює

$$\sigma = \frac{q}{4\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}}. \quad (14)$$

Для перевірки розрахуємо сумарний заряд, виходячи з виразу (14). Враховуючи, що

$$ds = h_2 h_3 d\eta d\psi = c^2 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1} d\eta d\psi,$$

отримаємо

$$\iint \sigma ds = \frac{2q}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{c^2 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}} d\eta d\psi = q,$$

як і має бути.

Вираз (14) можна перетворити до більш зручного вигляду, аналогічному (24) з попереднього прикладу. Для цього замітимо, що у випадку витягнутого сфероїда

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{a^4} \right). \quad (15)$$

Враховуючи (15), отримуємо з (14)

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a_0 b_0^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b_0^4} + \frac{z^2}{a_0^4}}}. \quad (16)$$

Для дуже витягнутого сфероїда ($a_0 \gg b_0$) можна вважати, що перший член під коренем в (16) набагато більше, ніж другий. Ці члени мають один порядок лише поблизу самих кінців сфероїда, для яких $x^2 + y^2 \sim \frac{b_0^4}{a_0^2}$. Якщо не брати до уваги ці області, які міс-

тять малу частину заряду (порядку $q \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^2$), то для іншої частини дуже витягнутого сфероїда можна покласти

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (17)$$

З (17) видно, що поверхнева густина заряду навіть для дуже витягнутого сфероїда у різних частинах різна внаслідок того, що змінюється товщина сфероїда $2\sqrt{x^2 + y^2}$. Проте для лінійної густини заряду отримуємо постійне для всієї довжини сфероїдального кластера значення

$$\gamma = 2\pi\sigma\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{q}{2a_0} \quad (a_0 \approx c). \quad (18)$$

З цієї обставини випливає, що еквіпотенціальними поверхнями рівномірно зарядженої нитки довжиною $2c$ є витягнуті сфероїди, потенціал для яких визначається формулою (11).

З формули (11) можна знайти ємність витягнутого сфероїдального провідного кластера:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 2c}{\ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c}} = \frac{8\pi\epsilon_0 c}{\ln \frac{a_0 + c}{b_0}}. \quad (19)$$

Для дуже витягнутого сфероїда залишається залежність від b ($c \rightarrow a$):

$$C_{b \rightarrow 0} = \frac{8\pi\epsilon_0 a_0}{\ln \frac{2a_0}{b_0}}. \quad (20)$$

Якщо заданий не заряд, а потенціал провідного кластера φ_0 , то зовні кластера потенціал дорівнює

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\ln \frac{a + c}{a - c}}{\ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c}}. \quad (21)$$

Відповідь: $\sigma = \frac{q}{4\pi a_0 b_0^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b_0^4} + \frac{z^2}{a_0^4}}}$; $C = \frac{8\pi\epsilon_0 c}{\ln \frac{a_0 + c}{b_0}}$.

Приклад 8.21. Знайдіть розподіл заряду на поверхні незарядженого сфероїдального кластера, внесеного в однорідне електричне поле. Розгляньте випадки, в яких поле

паралельне та перпендикулярне осі сфероїдального кластера для двох типів сфероїдів.

Розв'язання

Задачу також зручно розв'язувати у відповідній сфероїдальній системі координат. На відміну від двох попередніх прикладів, розв'язок тепер не можна шукати у вигляді функції, що залежить від однієї змінної, тому що еквіпотенціальні поверхні вже не будуть сфероїдами, за виключенням лише поверхні самого провідника. Але розв'язок рівняння Лапласа можна шукати у вигляді добутку:

$$\varphi(\xi, \eta, \psi) = \Xi(\xi)H(\eta)\Psi(\psi). \quad (1)$$

Існування розв'язку такого типу обумовлене тим, що рівняння Лапласа допускає розділення змінних у сфероїдальній системі координат.

Підставляючи шуканий розв'язок у формі (1) і поділивши обидві частини рівняння Лапласа на добуток $\Xi H \Psi$, отримаємо

$$\frac{1}{\Xi H \Psi} h_1 h_2 h_3 \Delta(\Xi H \Psi) = 0. \quad (2)$$

У розгорнутій формі рівняння (2) має вигляд

$$\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (3)$$

Коефіцієнти Ламе не залежать від ψ (аксіальна симетрія), тому має місце рівняння

$$\frac{1}{\Psi(\psi)} \frac{\partial^2 \Psi(\psi)}{\partial \psi^2} = -C_1, \quad (4)$$

де C_1 – константа. Рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) - \frac{h_1 h_2}{h_3} C_1 = 0. \quad (5)$$

Для подальшого перетворення рівняння (5) врахуємо конкретний вигляд коефіцієнтів Ламе. У стисненій сфероїдальній системі координат

$$\begin{aligned} \frac{h_2 h_3}{h_1} &= c \xi \eta \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 - \eta^2}}, & \frac{h_1 h_3}{h_2} &= c \xi \eta \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \\ \frac{h_1 h_2}{h_3} &= c \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

і рівняння (5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + C_1 \frac{1}{\xi^2} = \\ = - \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + C_1 \frac{1}{\eta^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В рівнянні (7) ліва частина залежить від ξ , а права – від η . Це означає, що і права і ліва частини дорівнюють константі, яку позначимо $-C_2$. При цьому отримаємо два рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{C_1}{\xi^2} + C_2 \right) \Xi = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) - \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left(\frac{C_1}{\eta^2} + C_2 \right) H = 0. \quad (9)$$

Отже, замість одного рівняння для функції, що залежить від трьох змінних, отримано три рівняння для трьох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної, тобто рівняння (4), (8) та (9).

Аналогічно для витягнутої сфероїдальної системи координат

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} = c(\xi^2 - 1), \quad \frac{h_1 h_3}{h_2} = c(1 - \eta^2) \quad \frac{h_1 h_2}{h_3} = \frac{c}{\xi^2 - 1} + \frac{c}{1 - \eta^2} \quad (10)$$

З урахуванням (10) з рівняння (5) отримаємо

$$\frac{1}{\Xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) - \frac{C_1}{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \frac{C_1}{1 - \eta^2}. \quad (11)$$

Внаслідок того, що ліва і права частини рівняння (11) залежать від різних змінних, воно еквівалентне двом рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + \left(C_2 - \frac{C_1}{\xi^2 - 1} \right) \Xi = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) - \left(C_2 + \frac{C_1}{1 - \eta^2} \right) H = 0. \quad (13)$$

Рівняння (4), (8), (9) або (4), (12), (13) не є повністю незалежними, оскільки вони зв'язані константами C_1 і C_2 . Наприклад, вибір розв'язку рівняння (4) визначає константу C_1 , а вибір розв'язку рівняння (9) визначає другу константу C_2 . Ці дві константи входять до рівняння (8), тобто конкретний вигляд рівняння (8) залежить від вибраних розв'язків рівнянь (4) і (9).

Рівняння (8) і (12) можна записати в стандартному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(R(\xi) \frac{\partial \Xi}{\partial \xi} \right) + Q(\xi) R(\xi) = 0. \quad (14)$$

При цьому для стисненої сфероїдальної системи координат

$$R(\xi) = \xi \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad Q(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{1}{\xi^2} C_1 + C_2 \right). \quad (15)$$

Для витягнутої сфероїдальної системи координат

$$R(\xi) = \xi^2 - 1, \quad Q(\xi) = C_2 - C_1 \frac{1}{\xi^2 - 1}. \quad (16)$$

Рівняння (14) має два незалежні розв'язки. Нехай один розв'язок відомий і дорівнює $\Xi_0(\xi)$, тоді другий розв'язок можна знайти за допомогою інтегрування. Позначимо другий розв'язок через $\Xi(\xi)$ і покажемо, що

$$\Xi(\xi) = \Xi_0(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\Xi_0^2(s) R(s)}. \quad (17)$$

Диференціюючи (17) за ξ , отримаємо

$$\frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Xi_0(\xi)}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\Xi_0^2(s) R(s)} - \frac{1}{\Xi_0(\xi) R(\xi)}. \quad (18)$$

Друге диференціювання дає

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(R(\xi) \frac{\partial \Xi(\xi)}{\partial \xi} \right) = -Q(\xi) \Xi_0(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\Xi_0^2(s) R(s)} = -Q(\xi) \Xi_0(\xi). \quad (19)$$

З (19) випливає, що (17) задовольняє рівнянню (14). В подальшому другий розв'язок будемо позначати

$$\Xi(\xi) = \Xi_0(\xi) A(\xi), \quad (20)$$

де

$$A(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\Xi_0^2(s) R(s)}. \quad (21)$$

Повернемося до поставленої задачі. Нехай напруженість незбуреного однорідного поля дорівнює \mathbf{E}_0 , а провідний кластер має форму сфероїду (стисненого або витягнутого) з напівосями $a_0 = c\xi_0$, $b_0 = c\sqrt{\xi_0^2 - 1}$. Потенціал у точці O , що співпадає з центром сфероїда і яку обираємо за початок координат, покладемо рівним нулю. Задачу розв'язуватимемо у відповідній (стисненій або витягнутій) сфероїдальній системі координат. Розглянемо два випадки, в яких зовнішнє незбурене поле має напрямок паралельний (\parallel) або перпендикулярний (\perp) осі симетрії сфероїда. Потенціал незбуреного поля буде

$$\varphi_0 = \mathbf{E}_0 z \quad (\parallel) \quad \text{або} \quad \varphi_0 = \mathbf{E}_0 x \quad (\perp). \quad (22)$$

У сфероїдальній системі координат z і x можна представити в єдиному вигляді:

$$z = c\Xi_{0\parallel}(\xi)H_{\parallel}(\eta)\Psi_{\parallel}(\psi)T_{\parallel}, \quad x = c\Xi_{0\perp}(\xi)H_{\perp}(\eta)\Psi_{\perp}(\psi)T_{\perp}. \quad (23)$$

При цьому потенціал незбуреного поля матиме вигляд

$$\Phi_0 = -\mathcal{E}_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T, \quad (24)$$

де Ξ_0 , H , Ψ , T для кожного з чотирьох випадків будуть мати свій вигляд.

У стисненій сфероїдальній системі координат

$$z = \pm c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)},$$

тому

$$\begin{aligned} \Xi_{0\parallel}(\xi) &= \sqrt{\xi^2 - 1}, & H_{\parallel}(\eta) &= \sqrt{1 - \eta^2}, \\ \Psi_{\parallel}(\psi) &= 1, & T_{\parallel} &= \text{sign } z. \end{aligned} \quad (25)$$

У цій же системі $x = c\xi\eta\cos\psi$, тому

$$\begin{aligned} \Xi_{0\perp}(\xi) &= \xi, & H_{\perp}(\eta) &= \eta, \\ \Psi_{\perp}(\psi) &= \cos\psi, & T_{\perp} &= 1. \end{aligned} \quad (26)$$

У витягнутій сфероїдальній системі координат

$$z = \pm c\xi\eta,$$

тому

$$\begin{aligned} \Xi_{0\parallel}(\xi) &= \xi, & H_{\parallel}(\eta) &= \eta, \\ \Psi_{\parallel}(\psi) &= 1, & T_{\parallel} &= \text{sign } z; \end{aligned} \quad (27)$$

$$x = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos\psi,$$

тому

$$\begin{aligned} \Xi_{0\perp}(\xi) &= \sqrt{\xi^2 - 1}, & H_{\perp}(\eta) &= \sqrt{1 - \eta^2}, \\ \Psi_{\perp}(\psi) &= \cos\psi, & T_{\perp} &= 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Зовні провідника (цю область будемо позначати індексом 2) потенціал збуреного поля будемо шукати у вигляді суперпозиції двох розв'язків рівняння Лапласа, що мають однакову залежність від змінних ψ і η , тобто у вигляді суперпозиції:

$$-\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T \quad \text{і} \quad -\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T A(\xi). \quad (29)$$

$A(\xi)$ розраховується за формулою (21) відповідно до (25), (26), (27) або (28).

Для стисненої сфероїдальної системи координат

$$A_{\parallel}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (30)$$

$$A_{\perp}(\xi) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} \right). \quad (31)$$

Для витягнутої сфероїдальної системи координат

$$A_{\parallel}(\xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{1}{\xi}, \quad (32)$$

$$A_{\perp}(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right). \quad (33)$$

Враховуючи, що при вибраному нормуванні потенціалу на поверхні сфероїда, тобто при $\xi = \xi_0$, потенціал має дорівнювати нулю, ця суперпозиція повинна мати вигляд

$$\varphi_0 = -\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T \left(1 - \frac{A(\xi)}{A(\xi_0)} \right), \quad (34)$$

тобто

$$\varphi_0 = -\varepsilon_0 z \left(1 - \frac{A(\xi)}{A(\xi_0)} \right) \quad \text{для випадку (||)}, \quad (35)$$

$$\varphi_0 = -\varepsilon_0 x \left(1 - \frac{A(\xi)}{A(\xi_0)} \right) \quad \text{для випадку } (\perp). \quad (36)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A(\xi) = -\frac{1}{\Xi_0^2(\xi) R(\xi)}, \quad (37)$$

для поверхневої густини зарядів отримаємо

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} = \varepsilon_0 \varepsilon_0 \frac{1}{h_1} \frac{c \Xi_0(\xi_0) H(\eta) \Psi(\psi) T}{\Xi_0^2(\xi_0) R(\xi_0) A(\xi_0)}. \quad (38)$$

Вираз (38) і є розв'язок поставленої задачі. При цьому, згідно з (6) та формули (4) з прикладу 8.20

$$h_1 = \frac{c \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}.$$

Згідно з (15), (16)

$$R(\xi_0)_{\text{ст}} = \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}, \quad R(\xi_0)_{\text{внт}} = \xi_0^2 - 1.$$

$\Xi_0(\xi_0)$, $H(\eta)$, $\Psi(\psi)$, T визначаються формулами (25) – (28), $A(\xi_0)$ визначається формулами (30) – (33).

Для чотирьох розглянутих випадків отримаємо

$$\sigma_{\text{ст}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \varepsilon_0 \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right)}, \quad (39)$$

$$\sigma_{\text{ст}\perp} = \varepsilon_0 \varepsilon_0 \frac{2\eta \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0^2} \frac{1}{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right) - \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0^2}}, \quad (40)$$

$$\sigma_{\text{виг}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}}, \quad (41)$$

$$\sigma_{\text{виг}\perp} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} (\xi_0^2 - 1)} \frac{1}{\frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1}}. \quad (42)$$

Відповідь: $\sigma_{\text{ст}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} - \text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right)}$;

$$\sigma_{\text{ст}\perp} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{2\eta \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0^2} \frac{1}{\text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right) - \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0^2}};$$

$$\sigma_{\text{виг}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}};$$

$$\sigma_{\text{виг}\perp} = \varepsilon_0 \mathcal{E}_0 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} (\xi_0^2 - 1)} \frac{1}{\frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1}}.$$

Приклад 8.22. Знайдіть асимптотичні вирази для поверхневої густини заряду сфероїдального кластера при $\xi_0 \rightarrow \infty$ і $\xi_0 \rightarrow 1$ для двох типів сфероїдів. Розгляньте випадки, в яких поле, що індукує заряд, паралельне та перпендикулярне осі сфероїда.

Розв'язання

Поверхнева густина заряду сфероїдального кластера визначається виразами:

$$\sigma_{\text{сг}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} - \text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right)}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\text{сг}\perp} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \frac{2\eta \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0^2} \frac{1}{\text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right) - \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0^2}}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{виг}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{виг}\perp} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{1-\eta^2} \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} (\xi_0^2 - 1)} \frac{1}{\frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1}}. \quad (4)$$

Асимптотична форма ($\xi_0 \rightarrow \infty$) для всіх чотирьох функцій $A(\xi)$ одна й та сама

$$A(\xi) \approx \frac{1}{3\xi^2} \quad (\xi \gg 1). \quad (5)$$

В асимптотичному випадку ($\xi_0 \gg 1$) $c\xi_0 = \frac{r_+ + r_-}{2} \approx R$, де R – радіус сфери при $\xi_0 \rightarrow \infty$ (при цьому для того, щоб R було обмеженим, необхідно $c \rightarrow 0$).

Для стисненого сфероїда при $\xi_0 \rightarrow \infty$ з (25), (26) прикладу 8.20 отримаємо

$$\pm \sqrt{1-\eta^2} = \frac{z}{R} = \cos \theta, \quad \eta \cos \psi = \frac{x}{R} = \cos \theta_x,$$

де θ (або θ_x) – кут, що визначає положення точки на сфері.

Для витягнутого сфероїда при $\xi_0 \rightarrow \infty$ з (27), (28) прикладу 8.20 отримаємо

$$\pm \eta = \frac{z}{R} = \cos \theta, \quad \sqrt{1 - \eta^2} = \frac{x}{R} = \cos \theta_x.$$

Отже, всі чотири вирази (1) – (4) при $\xi_0 \rightarrow \infty$ переходять у

$$\sigma = 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta. \quad (6)$$

Розглянемо тепер інший граничний перехід $\xi_0 \rightarrow 1$. Стиснений сфероїд при цьому переходить у диск радіуса $R = c$. Функції $A(\xi_0)$ переходять у граничні форми:

$$A_{\text{ст}\parallel}(\xi_0) \rightarrow \frac{a_0}{b_0}, \quad A_{\text{ст}\perp}(\xi_0) \rightarrow \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

При цьому, враховуючи (26) з прикладу 8.19, отримаємо при $\xi_0 \rightarrow 1$

$$\eta \cos \psi \rightarrow \frac{x}{R}. \quad (8)$$

Витягнутий сфероїд при $\xi_0 \rightarrow 1$ переходить у сфероїдальну паличку. При цьому

$$A_{\text{вит}\parallel}(\xi_0) \rightarrow \ln \frac{2a_0}{b_0}, \quad A_{\text{вит}\perp}(\xi_0) \rightarrow \frac{a_0^2}{2b_0^2}, \quad (9)$$

$$\eta \rightarrow \pm \frac{z}{a_0}. \quad (10)$$

З урахуванням (7) – (10) для граничного випадку $\xi_0 \rightarrow 1$ отримаємо:

$$\sigma_{\text{диск}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathbf{E}_0; \quad (11)$$

$$\sigma_{\text{диск}\perp} = \frac{4\varepsilon_0}{\pi} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{E}_0; \quad (12)$$

$$\sigma_{\text{пал.}\parallel} = \varepsilon_0 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\ln \frac{2a_0}{b_0}} \mathbf{E}_0; \quad (13)$$

$$\sigma_{\text{пал.}\perp} = 2\varepsilon_0 \cos \psi \mathbf{E}_0; \quad (14)$$

Розглянемо розподіл заряду на поверхні сфероїдальної палички у випадку повздовжнього поля, що задається формулою (13). Ці поверхневі заряди створюють всередині сфероїдального кластера однорідне електричне поле $-\mathbf{E}_0$, яке компенсує зовнішнє однорідне поле \mathbf{E}_0 . Аналогічно поверхневі заряди створюють електричне поле всередині неідеального провідника, коли по ньому проходить електричний струм і поверхня провідника вже не є екіпотенціальною.

Відповідь: при $\xi_0 \rightarrow \infty$ $\sigma = 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta$; при $\xi_0 \rightarrow 1$: $\sigma_{\text{диск}\parallel} = \pm \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$;

$$\sigma_{\text{диск}\perp} = \frac{4\varepsilon_0}{\pi} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \mathbf{E}_0;$$

$$\sigma_{\text{пал.}\parallel} = \varepsilon_0 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\ln \frac{2a_0}{b_0}} \mathbf{E}_0; \quad \sigma_{\text{пал.}\perp} = 2\varepsilon_0 \cos \psi \mathbf{E}_0.$$

Приклад 8.23. Знайдіть дипольний момент провідного незарядженого сфероїдального кластера, внесеного у зовнішнє електричне поле.

Розв'язання

На великих відстанях поле, обумовлене зарядами, розподіленими на поверхні напівпровідника, можна розглядати як поле диполя:

$$\mathbf{E}_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5} (3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2), \quad (1)$$

де дипольний момент \mathbf{p} визначається формулами

$$p_z = \iint_S \sigma z dS, \quad p_y = \iint_S \sigma y dS, \quad p_x = \iint_S \sigma x dS. \quad (2)$$

Розглянемо випадок, в якому зовнішнє поле \mathbf{E}_0 паралельне осі кластера, тобто осі Oz . У цьому випадку $\text{sign } \sigma = \text{sign } z$, тому $p_x = 0$, $p_y = 0$. Якщо вектор \mathbf{E}_0 паралельний осі Ox , то $p_z = 0$, $p_y = 0$. Якщо вектор \mathbf{E}_0 перпендикулярний осі Oy (що завжди буде вважатися), то $p_y = 0$. Якщо вектор \mathbf{E}_0 складає з віссю Oz кут θ (і перпендикулярний осі Oy), то

$$p_z = \iint_S \sigma_{\parallel} z \cos \theta dS, \quad p_x = \iint_S \sigma_{\perp} x \sin \theta dS, \quad p_y = 0. \quad (3)$$

Враховуючи (23) і (38) з прикладу 8.20 для поздовжньої та поперечної складових поля ($\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}_0 \cos \theta$, $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_0 \sin \theta$), отримаємо

$$\sigma_{\parallel} z \cos \theta dS = \mathbf{E}_0 c^2 \cos \theta H_{\parallel}^2(\eta) \Psi_{\parallel}^2(\psi) \frac{1}{A_{\parallel}(\xi_0)} \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} d\eta d\psi, \quad (4)$$

$$\sigma_{\perp} x \sin \theta dS = \mathbf{E}_0 c^2 \sin \theta H_{\perp}^2(\eta) \Psi_{\perp}^2(\psi) \frac{1}{A_{\perp}(\xi_0)} \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} d\eta d\psi. \quad (5)$$

Для стисненої сфероїдальної системи координат

$$H_{\parallel}(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \Psi_{\parallel}(\psi) = 1, \quad \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} = \frac{c\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

$$H_{\perp}(\eta) = \eta, \quad \Psi_{\perp}(\psi) = \cos \psi. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (4) і (5), отримуємо:

$$p_z = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{2\pi c^3}{A_{\parallel}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \eta \sqrt{1 - \eta^2} d\eta = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{c^3}{3A_{\parallel}(\xi_0)}, \quad (7)$$

$$p_x = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \sin \theta \frac{c^3}{A_{\perp}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \frac{\eta^3 d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \sin \theta \frac{c^3}{3A_{\perp}(\xi_0)}. \quad (8)$$

У випадку витягнутої сфероїдальної системи координат

$$H_{\parallel}(\eta) = \eta, \quad \Psi_{\parallel}(\psi) = 1, \quad \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} = c, \quad (9)$$

$$H_{\perp}(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}, \quad \Psi_{\perp}(\psi) = \cos \psi.$$

Підставляючи (9) в (4) і (5), отримуємо:

$$p_z = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{2\pi c^3}{A_{\parallel}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \eta^2 d\eta = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{c^3}{3A_{\parallel}(\xi_0)}, \quad (10)$$

$$p_x = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \sin \theta \frac{c^3}{A_{\perp}(\xi_0)} 2 \int_0^1 (1-\eta^2) d\eta \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \sin \theta \frac{c^3}{3A_{\perp}(\xi_0)}. \quad (11)$$

З (7) – (10) видно, що для стисненої і витягнутої систем координат формули для p_x , p_z мають однаковий вигляд і відрізняються лише

конкретним значенням множників $\frac{1}{A_{\parallel}(\xi_0)}$ і $\frac{1}{A_{\perp}(\xi_0)}$.

Якщо зовнішнє поле \mathbf{E}_0 не співпадає за напрямком з віссю сфероїда і не перпендикулярне до цієї осі, то напрямком дипольного моменту $\mathbf{p} = \{p_x, 0, p_z\}$ не співпадає з напрямком поля, оскільки $A_{\parallel} \neq A_{\perp}$ (якщо сфероїд не сфера).

Відповідь: $p_z = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \frac{c^3}{3A_{\parallel}(\xi_0)}$; $p_x = 4\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \sin \theta \frac{c^3}{3A_{\perp}(\xi_0)}$.

Приклад 8.24. Знайдіть поле зовні та всередині однорідного діелектричного кластера сфероїдальної форми, внесеного в однорідне електростатичне поле.

Розв'язання

Розглянемо два окремих випадки, в яких зовнішнє незбурене поле має напрямок паралельний (\parallel) або перпендикулярний (\perp) осі симетрії сфероїдального кластера. Потенціал незбуреного поля при цьому буде описуватися виразом виду (24) з прикладу 8.20, тобто

$$\varphi_0 = -\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T. \quad (1)$$

Зовні діелектрика (в області 2) потенціал збуреного поля (тобто поля в присутності діелектрика) шукатимемо у вигляді суперпозиції двох відповідних розв'язків рівняння Лапласа, тобто у вигляді

$$\varphi_2 = -\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T \left(1 - \frac{C_2 A(\xi)}{A(\xi_0)} \right), \quad (2)$$

де C_2 – деяка константа, яка визначається з граничних умов (у випадку провідника $C_2 = 1$).

У внутрішній області діелектрика, яку позначимо індексом 1, другий розв'язок непридатний, тому що він розбігається у фокальних точках. Тому всередині діелектрика розв'язок шукаємо у вигляді

$$\varphi_1 = -\varepsilon_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T C_1. \quad (3)$$

Умова неперервності потенціальних складових електричного поля має вигляд

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \Big|_S = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_S, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} \Big|_S = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} \Big|_S. \quad (4)$$

Умова неперервності потенціалу

$$\varphi_1 \Big|_S = \varphi_2 \Big|_S. \quad (5)$$

Із співвідношень (4) – (5) впливає одне й те саме рівняння для визначення констант C_1 і C_2 :

$$1 - C_2 = C_1. \quad (6)$$

Умова неперервності нормальних складових вектора електростатичної індукції \mathbf{D} має вигляд

$$\varepsilon \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \Big|_s = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} \Big|_s. \quad (7)$$

З цієї умови випливає друге рівняння для визначення C_1 і C_2 :

$$\frac{\partial \Xi_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} (1 - C_2) + \Xi_0(\xi_0) C_2 \frac{1}{\Xi_0^2(\xi_0) R A(\xi_0)} = \varepsilon \frac{\partial \Xi_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} C_1. \quad (8)$$

Рівняння (8) можна записати у вигляді

$$1 - C_2 + \frac{1}{n} C_2 = \varepsilon C_1, \quad (9)$$

де

$$n \equiv A(\xi_0) \Xi_0(\xi_0) \Xi_0'(\xi_0) R(\xi_0) \left(\Xi_0'(\xi_0) = \frac{\partial \Xi_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \right). \quad (10)$$

Розв'язуючи рівняння (6) і (9), отримуємо

$$C_1 = \frac{1}{1 + n(\varepsilon - 1)}, \quad C_2 = \frac{n(\varepsilon - 1)}{1 + n(\varepsilon - 1)}. \quad (11)$$

Поле всередині діелектричного кластера дорівнює

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + n(\varepsilon - 1)}, \quad (12)$$

тобто поле всередині діелектричного кластера однорідне, а напруженість його менша напруженості зовнішнього незбуреного поля \mathcal{E}_0 .

Зовні поле неоднорідне. Його потенціал має вигляд:

$$\Phi_2 = -\frac{\varepsilon_0 c n (\varepsilon - 1)}{1 + n (\varepsilon - 1)} \Xi_0 (\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T. \quad (13)$$

Із співвідношення (11) бачимо, що поле всередині та зовні сфероїдального кластера залежить не лише від значення відносної діелектричної проникності ε , а і від форми сфероїдального кластера, що визначається коефіцієнтами деполяризації $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$.

Сфероїдальний кластер характеризується двома „поперечними“ коефіцієнтами деполяризації $n^{(x)} = n^{(y)} = n_{\perp}$ та одним повздовжнім $n^{(z)} = n_{\parallel}$.

Доведемо, що

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1,$$

тобто

$$2n_{\perp} + n_{\parallel} = 1. \quad (14)$$

Для стисненої сфероїдальної системи координат

$$\Xi_{0\parallel}(\xi_0) \Xi'_{0\parallel}(\xi_0) R(\xi_0) = \frac{a_0^2 b_0}{c^3}, \quad (15)$$

$$\Xi_{0\perp}(\xi_0) \Xi'_{0\perp}(\xi_0) R(\xi_0) = \frac{a_0^2 b_0}{c^3}, \quad (16)$$

тобто ці множники рівні. При цьому, враховуючи (30) і (31) з прикладу 8.20, отримаємо

$$n_{\parallel} = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left(\frac{c}{b_0} - \operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} \right), \quad (17)$$

$$n_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} - \frac{c b_0}{a_0^2} \right). \quad (18)$$

Для витягнутої сфероїдальної системи координат

$$\Xi_{0\parallel}(\xi_0) \Xi'_{0\parallel}(\xi_0) R(\xi_0) = \frac{a_0 b_0^2}{c^3}, \quad (19)$$

$$\Xi_{0\perp}(\xi_0)\Xi'_{0\perp}(\xi_0)R(\xi_0) = \frac{a_0 b_0^2}{c^3}, \quad (20)$$

При цьому, враховуючи (32) і (33) з прикладу 2.10, отримаємо

$$n_{\parallel} = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} - \frac{c}{a_0} \right), \quad (21)$$

$$n_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{a_0 b_0^2}{c^3} \left(\frac{c a_0}{b_0^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} \right). \quad (22)$$

За допомогою (17) і (20) легко довести (з урахуванням $a_0^2 = b_0^2 - c^2$) співвідношення (14).

У граничних випадках отримуємо з (17) і (20)

$$n_{\text{кул}} = \frac{1}{3}, \quad n_{\text{диск}\parallel} = 1, \quad n_{\text{диск}\perp} = 0, \quad n_{\text{пал}\parallel} = 0, \quad n_{\text{пал}\perp} = \frac{1}{2}. \quad (23)$$

Поле всередині діелектрика в цьому випадку дорівнює

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0}{1 + n(\varepsilon - 1)}. \quad (24)$$

Якщо поле $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ складає кут θ з віссю Oz (вісь сфероїда) і перпендикулярне осі Oy , тобто $\boldsymbol{\varepsilon}_{0z} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cos \theta$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{0x} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \sin \theta$, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cos \theta}{1 + n(\varepsilon - 1)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \sin \theta}{1 + n(\varepsilon - 1)}. \quad (25)$$

Всередині діелектричного сфероїдального кластера поле знову однорідне, але напрямком цього поля не співпадає з напрямком зовнішнього незбуреного поля $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, оскільки $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$.

Відповідь: $\varphi_2 = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 c n(\varepsilon - 1)}{1 + n(\varepsilon - 1)} \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T$; $\boldsymbol{\varepsilon}_z = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \cos \theta}{1 + n(\varepsilon - 1)}$;
 $\boldsymbol{\varepsilon}_y = 0$; $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_0 \sin \theta}{1 + n(\varepsilon - 1)}$.

Приклад 8.25. Знайдіть силу, що діє на незаряджений провідний сфероїдальний кластер у слабкому неоднорідному електростатичному полі.

Розв'язання

Якщо в полі точкового заряду знаходиться незаряджений провідний сфероїдальний кластер, розміри якого малі порівняно з відстанню до точкового заряду, тобто $a_0 \ll 1$, то силу F , яка діє на сфероїдальний кластер, можна визначити, знайшовши силу, що діє з боку провідника на точковий заряд. Поле провідника можна розглядати як поле диполя, а для визначення дипольного моменту у випадку слабкої неоднорідності можна скористатися наближенням однорідного поля.

При цьому

$$F' = q\mathcal{E}_{\text{дип}} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 l^3} q = -p \left. \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} \right|_l, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}. \quad (1)$$

Для двох окремих випадків

$$F_{\parallel} = -F' = p \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z}, \quad F_{\perp} = -F' = p \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial x}. \quad (2)$$

Враховуючи вираз (2) та формулу для енергії незарядженого сфероїда в полі \mathcal{E}_0

$$\delta W = -2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \frac{c^3}{3A(\xi)} = -\frac{1}{2} p \mathcal{E}_0, \quad (3)$$

де p – дипольний момент, у наближенні слабкої неоднорідності зовнішнього поля сила, що діє на провідний сфероїдальний кластер (для двох типів орієнтації)

$$F_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial z} \delta W = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} p \mathcal{E}_0 \right), \quad F_{\perp} = -\frac{\partial}{\partial x} \delta W = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} p \mathcal{E}_0 \right), \quad (4)$$

де δW розраховується в наближенні однорідного поля, що дорівнює значенню незбуреного поля в точці O , тобто в точці, в яку потрапляє центр сфероїдального кластера.

З урахуванням (3), формули (4) запишуться у вигляді

$$F_{\parallel} = \frac{2\pi\varepsilon_0 c^3}{3A_{\parallel}(\xi)} \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_0^2), \quad F_{\perp} = \frac{2\pi\varepsilon_0 c^3}{3A_{\perp}(\xi)} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_0^2), \quad (5)$$

Наприклад, для дископодібного кластера ($R = c$) отримаємо

$$F_{\perp} = \frac{8}{3} \varepsilon_0 R^3 \frac{\partial \mathcal{E}_0^2}{\partial x}. \quad (6)$$

Для сферичного кластера ($R = c\xi_0$) отримаємо

$$F = 2\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\partial \mathcal{E}_0^2}{\partial z} \Big|_l. \quad (7)$$

Відповідь: $F_{\parallel} = \frac{2\pi\varepsilon_0 c^3}{3A_{\parallel}(\xi)} \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{E}_0^2); F_{\perp} = \frac{2\pi\varepsilon_0 c^3}{3A_{\perp}(\xi)} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{E}_0^2).$

Приклад 8.26. Яку роботу потрібно виконати, щоб видалити з електричного поля провідний незаряджений або заряджений сферичний кластер? Радіус кластера малий порівняно з розмірами області, в якій напруженість поля суттєво змінюється.

Розв'язання

Нехай провідний сферичний кластер радіусом R вносять у зовнішнє однорідне (в деякій області) поле \mathcal{E}_0 . Розглянемо незаряджений сферичний кластер. Нехай точка, в яку потрапляє центр кластера, до його внесення мала потенціал φ_{00} . Потенціал незбуреного поля в тій області, де поле вважається однорідним, можна записати у вигляді

$$\varphi_0 = \varphi_{00} - \mathcal{E}_0 z = \varphi_{00} - \mathcal{E}_0 r \cos \theta. \quad (1)$$

Після внесення сферичного кластеру потенціал набуває вигляду

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi_{00} - \epsilon_0 z \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = \varphi_{00} - \epsilon_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta, & r > R \\ \varphi_{00}, & r \leq R. \end{cases} \quad (2)$$

Доданий у вираз (2) член є потенціалом диполя, тобто задовольняє рівнянню Лапласа. Крім того, (2) задовольняє умові $\varphi|_{r=R} = \text{const}$. Отже, (2) дійсно описує поле за наявності провідного незарядженого сферичного кластера.

Поверхнева густина зарядів на провідному кластері визначається формулою:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_S = 3\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta. \quad (3)$$

Для енергії сферичного кластера в полі \mathbf{E}_0 отримаємо, виходячи з (1) і (2) вираз

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \iint_S \varphi_0 \sigma dS = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \epsilon_0 R^3 \cos \theta 3\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= -3\pi \epsilon_0 \mathbf{E}_0^2 R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -2\pi \epsilon_0 \mathbf{E}_0^2 R^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Робота зовнішніх сил, необхідна для внесення незарядженого провідника в поле, завжди від'ємна. При видаленні незарядженого провідника з поля зовнішні сили повинні виконати додатну роботу. У випадку сферичного провідного кластера ця робота

$$A = -\delta W = 2\pi \epsilon_0 \mathbf{E}_0^2 R^3. \quad (5)$$

Якщо кластер має заряд q , то робота, пов'язана з внесенням його в поле, визначається не лише напруженістю цього поля, але залежить також і від потенціалу тієї області, куди вноситься кластер.

Потенціал при цьому описується виразом:

$$\varphi = \varphi_{00} - \mathcal{E}_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (6)$$

що переходить у φ_0 при $r \rightarrow \infty$.

Поверхнева густина зарядів на кластері

$$\sigma = 3\epsilon_0 \mathcal{E}_0 \cos \theta + \frac{q}{4\pi R^2}. \quad (7)$$

Енергія сферичного кластера

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} q \left(\varphi_{00} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) + \frac{1}{2} \varphi_{00} q - 2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 R^3 = \\ &= \varphi_{00} q - 2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 R^3, \end{aligned} \quad (8)$$

тому робота

$$A = -\delta W = 2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 R^3 - \varphi_{00} q. \quad (9)$$

Відповідь: $A = 2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 R^3$ ($q = 0$); $A = 2\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 R^3 - \varphi_{00} q$ ($q \neq 0$).

Приклад 8.27. Знайдіть енергію діелектричного сфероїдального кластера, вміщеного в однорідне електричне поле.

Розв'язання

Нехай в однорідне поле \mathcal{E}_0 вноситься сфероїдальний кластер. Тоді, якщо вісь сфероїда паралельна або перпендикулярна зовнішньому незбуреному полю, отримаємо

$$\delta W = -\frac{\epsilon_0}{2} (\epsilon - 1) \mathbf{E} \mathbf{E}_0 V = -\frac{\epsilon_0}{2} (\epsilon - 1) \frac{\mathcal{E}_0^2 V}{1 + n(\epsilon - 1)} = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \mathcal{E}_0, \quad (1)$$

де n – відповідний фактор форми (коефіцієнт деполяризації); \mathbf{p} – дипольний момент сфероїдального кластера.

Якщо однорідне поле направлене під кутом θ до осі симетрії, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{0\parallel} \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} + \varepsilon_{0\perp} \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} = \varepsilon_0^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel}(\varepsilon - 1)} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp}(\varepsilon - 1)} \right). \quad (2)$$

Енергія сфероїдального кластера в полі дорівнює

$$\delta W = -\frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1) \varepsilon_0^2 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel}(\varepsilon - 1)} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp}(\varepsilon - 1)} \right\} V. \quad (3)$$

Відповідь: $\delta W = -\frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1) \varepsilon_0^2 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel}(\varepsilon - 1)} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp}(\varepsilon - 1)} \right\} V.$

Приклад 8.28. Визначте момент сил, які діють на діелектричний кластер-сфероїд у зовнішньому однорідному електричному полі. Розгляньте граничні форми (диск і сфероїдальний стрижень).

Розв'язання

Енергія у формулі (3) з прикладу 8.27 залежить від кута, оскільки на сфероїдальний кластер з боку поля діє момент сил:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\partial}{\partial \theta}(\delta W) = -\frac{\varepsilon_0}{2}(\varepsilon - 1) \varepsilon_0^2 \sin 2\theta \left\{ \frac{1}{1 + n_{\parallel}(\varepsilon - 1)} - \frac{1}{1 + n_{\perp}(\varepsilon - 1)} \right\} V = \\ &= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)^2 (n_{\perp} - n_{\parallel}) \varepsilon_0^2 \sin 2\theta}{(1 + n_{\parallel}(\varepsilon - 1))(1 + n_{\perp}(\varepsilon - 1))} V. \end{aligned} \quad (1)$$

Момент сил визначається коефіцієнтами деполаризації. Для стисненого сфероїда $n = A \Xi_0 \Xi'_0 R = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} A$, при цьому

$$n_{\perp} - n_{\parallel} = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} (A_{\perp} - A_{\parallel}) < 0,$$

тобто стійке положення рівноваги відповідає куту $\theta = \frac{\pi}{2}$. Для витя-

гнутого сфероїда $n = A \Xi_0 \Xi'_0 R = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} A$, при цьому

$$n_{\perp} - n_{\parallel} = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} (A_{\perp} - A_{\parallel}) > 0,$$

тобто стійке положення рівноваги відповідає куту $\theta = 0$.

Для перевірки отриманих формул можна скористатися граничним переходом $\varepsilon \rightarrow \infty$. У цьому випадку поле поблизу діелектрика перпендикулярне до поверхні діелектрика, а всередині діелектрика за кінцевого значення поляризації $\mathbf{E} = 0$. Тому енергія діелектрика при $\varepsilon \rightarrow \infty$ повинна дорівнювати енергії незарядженого провідника тих самих розмірів та форми. Враховуючи, що $\frac{V}{n} = \frac{4 \pi c^3}{3 A}$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ отримуємо з формул (1) і (3) попереднього прикладу та (1) вирази:

$$\delta W = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}_0; \quad (2)$$

$$\delta W = -2\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2 \frac{c^3}{3} \left(\frac{\cos^2 \theta}{A_{\parallel}} + \frac{\sin^2 \theta}{A_{\perp}} \right); \quad (3)$$

$$M = -2\pi \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^2 \frac{c^3}{3} \sin 2\theta \left(\frac{1}{A_{\parallel}} - \frac{1}{A_{\perp}} \right). \quad (4)$$

У граничних випадках $\xi_0 \rightarrow 0$ формула (1) дає значення моменту сил, що діють на диск або сфероїдальну паличку.

Для диска $n_{\parallel} = 1$, $n_{\perp} = 0$, звідки

$$M_{\text{диск}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}_0^2 \sin 2\theta \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) V. \quad (5)$$

Для сфероїдальної палички $n_{\parallel} = 0$, $n_{\perp} = 1$, звідки

$$M_{\text{пал}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathcal{E}_0^2 \sin 2\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{2}} \right) V. \quad (6)$$

Відповідь: $M = -2\pi\varepsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \frac{c^3}{3} \sin 2\theta \left(\frac{1}{A_{\parallel}} - \frac{1}{A_{\perp}} \right);$

$$M_{\text{диск}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathcal{E}_0^2 \sin 2\theta \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) V;$$

$$M_{\text{пал}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathcal{E}_0^2 \sin 2\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon - 1}{2}} \right) V.$$

Приклад 8.29. Знайдіть поле та намагніченість всередині однорідного магнітного кластера сфероїдальної форми, вміщеного в однорідне магнітне поле.

Розв'язання

Вводячи скалярний потенціал φ_m , отримаємо рівняння

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} (-\mu_0 \nabla \varphi_m + \mu_0 \mathbf{M}) = 0. \quad (1)$$

Щоб не обмежувати розгляд випадком лінійної залежності між намагніченістю та полем, який повністю аналогічний відповідній задачі з діелектричним кластером, будемо вважати, що лише намагніченість однорідна ($\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$). При цьому отримаємо рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (2)$$

з відповідними граничними умовами на межі магнітного кластера. Розв'язок будемо шукати за аналогією з відповідною задачею про діелектричний кластер (приклад 8.24):

$$\Phi_{m2} = -H_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T \left(1 - \frac{C_2 A(\xi)}{A(\xi_0)} \right) \quad (3)$$

(зовні магнетика)

$$\Phi_{m1} = -H_0 c \Xi_0(\xi) H(\eta) \Psi(\psi) T C_1 \quad (4)$$

(всередині магнетика)

Умова неперервності тангенціальних складових вектора **H** дає рівняння

$$1 - C_2 = C_1. \quad (5)$$

Умова неперервності нормальних складових вектора **B** призводить до рівняння (для випадку \parallel)

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} H_0 \left\{ 1 - C_2 + \frac{1}{n} C_1 \right\} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} H_0 C_1 + M \cos \theta, \quad (6)$$

де θ – кут між напрямком намагніченості та нормаллю до поверхні сферіодального кластера.

У випадку (\perp) замість $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ виникає множник $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ і тому

$$\cos \theta \approx \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (\text{або} \quad \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0}). \quad (7)$$

З (4) видно, що

$$H_1 = C_1 H_0. \quad (8)$$

Виключаючи з (6) за допомогою (5) C_2 та враховуючи (7) і (8), отримаємо

$$H_1 = H_0 - nM. \quad (9)$$

Щоб знайти M , введемо магнітну сприйнятливість χ та магнітну проникність $\mu = 1 + \chi$:

$$\chi = \frac{M}{H_1} = \frac{M}{C_1 H_0}. \quad (10)$$

В (10) χ може бути функцією поля, тобто $\chi = \chi(H_1)$. Використовуючи (8) і (10), з (5) отримаємо:

$$C_1 = \frac{1}{1 + n\chi(H_1)}, \quad (11)$$

звідки

$$H_1 = \frac{H_0}{1 + n\chi(H_1)}. \quad (12)$$

Для намагніченості та магнітної індукції отримаємо

$$M = \frac{\chi H_0}{1 + n\chi}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu H_0}{1 + n\chi}. \quad (13)$$

З (12), (13) видно, що для сильних магнетиків ($\chi \gg 1$)

$$H_1 \ll H_0, \quad M = \frac{H_0}{n}, \quad B = \mu_0 \frac{H_0}{n}. \quad (14)$$

З (14) видно, що для сильних магнетиків (в тому числі і для феромагнетиків, коли $\chi = \chi(H_1) \gg 1$) намагніченість та індукція магнітного сфероїдального кластера визначаються лише зовнішнім полем H_0 і фактором форми n , залежність від χ та μ при цьому зникає.

Якщо зовнішнє поле H_0 складає кут θ з віссю сфероїдального кластера, то

$$M_z = \frac{\chi_{\parallel} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad M_x = \frac{\chi_{\perp} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}}, \quad (15)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\parallel}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad B_x = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\perp}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}}, \quad (16)$$

де $\chi_{\parallel} = \chi_{\parallel}(M_x, M_z)$, $\chi_{\perp} = \chi_{\perp}(M_x, M_z)$.

$$\text{Відповідь: } M_z = \frac{\chi_{\parallel} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad M_x = \frac{\chi_{\perp} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}};$$

$$B_z = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\parallel}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad B_x = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\perp}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}}.$$

Приклад 8.30. Знайдіть енергію однорідного кластера-сфероїда в однорідному магнітному полі.

Розв'язання

Нехай в об'єм V_1 вноситься магнетик. Спочатку в об'ємі V_1 $\mu = 1$. В іншій частині μ не змінюється. Зміна енергії при внесенні в об'єм V_1 магнетика дорівнює

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} \mathbf{H} dV - \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B}_0 \mathbf{H}_0 dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B}_0 (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{B} \mathbf{H}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{H}) dV. \quad (1)$$

У перетворенні (1) враховано, що в області 2

$$\mathbf{B} \mathbf{H}_0 = \mu_0 \mu \mathbf{H} \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{H}.$$

Для перетворення (1) врахуємо співвідношення

$$\iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} \mathbf{H}_0 dV = \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{j}_0 \mathbf{A} dV + \iint_S \mathbf{j}_{0\text{повн}} \mathbf{A} dS. \quad (2)$$

Враховуючи, що $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_0$ і $\mathbf{j}_{\text{повн}} \equiv \mathbf{j}_{0\text{повн}}$ та (2), отримаємо, що перші два інтеграли в (1) дорівнюють нулю. Враховуючи надалі, що в області 1 $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$, отримаємо

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} (\mathbf{B} \mathbf{H}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{H}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{M} \mathbf{B}_0 dV. \quad (3)$$

Розглянемо випадок, коли зовнішнє поле однорідне і магнітний сфероїдальний кластер також однорідний. Враховуючи (15), (16) з попереднього прикладу, отримаємо

$$\delta W = \frac{1}{2} \chi B_0 H_0 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel} \chi} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp} \chi} \right\} V, \quad (4)$$

де $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$ або $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$ – об'єм кластера-сфероїда.

Відповідь:
$$\delta W = \frac{1}{2} \chi B_0 H_0 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel} \chi} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp} \chi} \right\} V.$$

Приклад 8.31. Знайдіть силу, що діє на однорідний кластер-сфероїд у слабкому неоднорідному магнітному полі.

Розв'язання

Нехай зовнішнє поле створюється кільцем зі струмом, а центр сфероїдального кластера розташований у площині кільця на великій відстані від нього. При цьому обмежимося розглядом двох окремих випадків орієнтації сфероїдального кластера: випадком (\parallel), в якому вісь сфероїда перпендикулярна площині кільця (тобто паралельна зовнішньому полю), і випадком (\perp), в якому вісь сфероїдального кластера з'єднує його центр та центр кільця (тобто зовнішнє поле перпендикулярне осі сфероїда).

Сила, яка діє на магнітний кластер, дорівнює за величиною та протилежна за напрямком силі, яка діє на кільце зі струмом.

Введемо систему координат з початком у центрі сфероїдального кластера.

Поле магнетика визначається його намагніченістю і в площині $z = 0$ дорівнює

$$\mathbf{B}_1(x, y, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{M}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (1)$$

де $\mathbf{r} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$.

Позначимо координату центра кільця через x_0 . Для точок, що лежать у площині кільця (всередині нього), $x \approx x_0$, $|y| \ll x_0$.

Для точок сфероїдального кластера $|x_1| \ll x_0$, $|y_1| \ll x_0$, $|z_1| \ll x_0$. Враховуючи, що всі координати малі порівняно з x , отримуємо

$$\left. \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ M_z=\text{const}}} = \frac{3\mu_0}{4\pi x_0^4} \iiint_V M_z dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{3\mu_0 p_{m1}}{4\pi x_0^4}, \quad (2)$$

де

$$p_{m1} \equiv \iiint_V M_z dx_1 dy_1 dz_1. \quad (3)$$

Сила, що діє на кільце зі струмом, дорівнює

$$F = IS \left. \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ M_z=\text{const}}} = \frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{4\pi x_0^4}, \quad (4)$$

де $p_{m2} = IS$.

Формулу (4) можна переписати у вигляді

$$F = p_{m1} \left. \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ y_1=0 \\ z_1=0}}, \quad (5)$$

де

$$\mathbf{B}_0(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_{m2} \mathbf{r}_{01}) \mathbf{r}_{01} - \mathbf{p}_{m2} |\mathbf{r}_{01}|^2}{|\mathbf{r}_{01}|^5}, \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_{01} = \{x_1 - x_0, y_1, z_1\}.$$

При цьому

$$\left. \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=0 \\ y_1=0 \\ z_1=0}} = \frac{3\mu_0}{x_0^4} p_{m2}. \quad (7)$$

У випадку слабкої неоднорідності при розрахунку магнітного моменту \mathbf{p}_{m1} можна вважати, що поле \mathbf{B}_0 однорідне і дорівнює його значенню в центрі сфероїдального кластера. При цьому

$$p_{m1} = \frac{\chi B_0}{\mu_0 (1 + n\chi)} V_1. \quad (8)$$

Для сили, що діє на сфероїдальний кластер, отримаємо вираз

$$F = \frac{\chi B_0 V_1}{\mu_0 (1 + n_{\parallel} \chi)} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\chi V_1}{1 + n_{\parallel} \chi} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta W_{\parallel}) \Big|_{x_1=0}, \quad (9)$$

де δW_{\parallel} розраховується у наближенні однорідного поля, яке дорівнює значенню поля \mathbf{B}_0 у центрі сфероїдального кластера.

За аналогією розглянемо випадок (\perp). При цьому отримаємо

$$F = \frac{\chi B_0 V_1}{\mu_0 (1 + n_{\perp} \chi)} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\chi V_1}{1 + n_{\perp} \chi} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta W_{\perp}) \Big|_{x_1=0}. \quad (10)$$

Якщо $n\chi \gg 1$, то з (9) і (10) маємо

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \frac{V_1}{n} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0}. \quad (11)$$

Для сферичного кластера радіусом R і кільця зі струмом радіусом a отримуємо силу взаємодії

$$F = \frac{3\chi}{3 + \chi} \frac{\mu_0 \pi}{4} I^2 \frac{a^4 R^3}{x_0^7}. \quad (12)$$

Якщо $\chi \gg 1$, то

$$F = \frac{3\mu_0 \pi}{4} I^2 \frac{a^4 R^3}{x_0^7}. \quad (13)$$

$$\text{Відповідь: } F = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\chi V_1}{1+n_{||}\chi} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0} ; F = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\chi V_1}{1+n_{\perp}\chi} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0} .$$

Задачі для самостійного розв'язування

- 8.1. Обчисліть, за якої граничної товщини плівки можна спостерігати квантово-розмірні явища, якщо відомо, що рухливість електронів у плівці μ_n

№ варіанту	$\mu_n, \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$	№ варіанту	$\mu_n, \frac{\text{М}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$
1.	0,1	14.	0,75
2.	0,15	15.	0,8
3.	0,2	16.	0,85
4.	0,25	17.	0,9
5.	0,3	18.	0,95
6.	0,35	19.	1,05
7.	0,4	20.	1,1
8.	0,45	21.	1,15
9.	0,5	22.	1,2
10.	0,55	23.	1,25
11.	0,6	24.	1,3
12.	0,65	25.	1,35
13.	0,7		

- 8.2. Визначте максимальне зарядове число Z_{max} , яке може мати кластер з n атомів металу, який опромінюється лазерним випромінюванням із довжиною хвилі λ . Енергія йонізації масивного металевого зразка дорівнює W_{∞} .

№ варіанту	Елемент	$r_s, \text{Å}$	W_∞, eV	n	$\lambda, \text{нм}$
1.	Na	2,08	5,139	780	400
2.	Na	2,08	5,139	760	405
3.	Na	2,08	5,139	740	410
4.	Na	2,08	5,139	800	415
5.	Na	2,08	5,139	730	420
6.	Cu	1,41	7,726	770	425
7.	Cu	1,41	7,726	710	430
8.	Cu	1,41	7,726	750	435
9.	Cu	1,41	7,726	800	440
10.	Cu	1,41	7,726	830	430
11.	Au	1,59	7,576	790	408
12.	Au	1,59	7,576	740	415
13.	Au	1,59	7,576	750	450
14.	Au	1,59	7,576	800	405
15.	Au	1,59	7,576	770	428
16.	Cs	2,98	3,894	800	414
17.	Cs	2,98	3,894	1000	442
18.	Cs	2,98	3,894	850	437
19.	Cs	2,98	3,894	920	447
20.	Cs	2,98	3,894	635	412
21.	Al	1,10	5,986	775	455
22.	Al	1,10	5,986	860	460
23.	Al	1,10	5,986	840	408
24.	Al	1,10	5,986	910	418
25.	Al	1,10	5,986	970	433

8.3. Визначте потенціали і ємності кластерів, які мають форму витягнутого ($a > b = c$) і сплюсненого ($a = b > c$) еліпсоїдів обертання. Розгляньте випадки тонкого довгого стрижня ($b \ll a$) і тонкого диску ($c = 0$). Вважайте, що кластер із зарядом q розміщений у діелектрику з проникністю ϵ .

№ варіанту	ϵ	q , пКл	a , нм	b , нм	c , нм
1.	2,0	1,0	100	90	80
2.	2,0	1,1	110	90	80
3.	2,0	1,2	90	85	75
4.	2,0	1,3	100	95	85
5.	2,0	1,4	105	90	75
6.	2,0	1,5	95	90	85
7.	2,0	1,6	115	110	100
8.	2,0	1,7	110	105	95
9.	2,0	1,8	120	110	100
10.	2,5	1,8	100	90	80
11.	2,5	1,7	110	90	80
12.	2,5	1,6	90	85	75
13.	2,5	1,5	100	95	85
14.	2,5	1,4	105	90	75
15.	2,5	1,3	95	90	85
16.	2,5	1,2	115	110	100
17.	2,5	1,1	110	105	95
18.	3,0	1,0	120	110	100
19.	3,0	1,1	100	90	80
20.	3,0	1,2	110	90	80
21.	3,0	1,3	90	85	75
22.	3,0	1,4	100	95	85
23.	3,0	1,5	105	90	75
24.	3,0	1,6	95	90	85
25.	3,0	1,7	115	110	100

Вказівка. Розрахунки виконати шляхом інтегрування рівняння Лапласа.

- 8.4. Провідний сферичний кластер радіусом R із зарядом q вміщений в однорідному діелектрику проникністю ϵ . Визначте потенціал φ і ємність C сферичного кластера

№ варіанту	q , пКл	R , нм	ε
1.	4,5	100	2,0
2.	4,4	120	2,1
3.	4,3	115	2,2
4.	4,2	110	2,3
5.	4,1	105	2,4
6.	4,0	125	2,5
7.	3,9	95	2,6
8.	3,8	90	2,7
9.	3,7	85	2,8
10.	3,6	80	2,9
11.	3,5	85	3,0
12.	3,4	90	3,1
13.	3,3	95	3,2
14.	3,2	100	3,3
15.	3,1	105	3,4
16.	3,0	110	3,5
17.	2,9	115	3,6
18.	2,8	120	3,7
19.	2,7	125	3,8
20.	2,6	130	3,9
21.	2,5	135	4,0
22.	2,4	140	4,1
23.	2,3	145	4,2
24.	2,2	150	4,3
25.	2,1	100	4,4

- 8.5. Знайдіть розподіл заряду по поверхні незарядженого сфероїдального кластера, внесеного в однорідне електричне поле, у випадку, коли напрямок незбуреного поля та вісь сфероїда складають деякий кут.
- 8.6. Знайдіть розподіл заряду на поверхні зарядженого сфероїдального кластера, внесеного в однорідне електричне поле.
- 8.7. Знайдіть дипольний момент провідного незарядженого сфероїдального кластера, внесеного у зовнішнє електричне поле.

- 8.8. Знайдіть поле поза та всередині однорідного діелектричного сфероїдального кластера, внесеного в однорідне електростатичне поле.
- 8.9. Визначте дипольний момент діелектричного сфероїдального кластера, внесеного у зовнішнє поле.
- 8.10. Знайдіть енергію незарядженого провідного кластера-сфероїда в однорідному електростатичному полі у випадку, коли поле
- а) паралельне осі сфероїда;
 - б) перпендикулярне до осі сфероїда.
- 8.11. Знайдіть енергію незарядженого провідного кластера-сфероїда в однорідному електростатичному полі у випадку, коли поле складає кут θ з віссю сфероїда.
- 8.12. Знайдіть момент сил, що діють на незаряджений провідний кластер-сфероїд в однорідному електростатичному полі. Розгляньте граничні форми (диск і сфероїдальний стрижень).
- 8.13. Знайдіть енергію зарядженого провідного кластера-сфероїда у зовнішньому однорідному електростатичному полі.
- 8.14. Визначте енергію провідного сферичного кластера в полі точкового заряду.
- 8.15. Знайдіть силу, що діє на незаряджений провідний сфероїдальний кластер у слабкому неоднорідному електростатичному полі.
- 8.16. Визначте силу, що діє на діелектричний сфероїдальний кластер у слабкому неоднорідному електростатичному полі.
- 8.17. З'ясуйте аналітичний вигляд залежності залишкової намагніченості в кластері-сфероїді від його форми.
- 8.18. Знайдіть момент сил, що діють на однорідний сфероїдальний кластер в однорідному магнітному полі.
- 8.19. Використовуючи квазікласичну модель Томаса – Фермі, знайдіть розподіл заряду та потенціалу навколо домішкового йону з зарядом Ze у металі. Скористайтесь найпростішою моделлю металу у вигляді виродженого ($T \rightarrow 0$) електронного газу з середньою концентрацією n_0 , заряд якого нейтралізовано нерухомими позитивними йонами.
- 8.20. Еліпсоїдальний кластер із магнітного матеріалу з проникністю μ внесено до однорідного магнітного поля з напруженістю

- \mathbf{H}_0 . Розрахуйте внутрішнє поле та магнітний момент еліпсоїдального кластеру. Розгляньте випадки тонкого диску, тонкого довгого стрижня та сфери.
- 8.21. Еліпсоїдальний кластер з анізотропного матеріалу з магнітною проникністю μ_{ik} внесено до зовнішнього однорідного магнітного поля з напруженістю \mathbf{H}_0 . Розрахуйте внутрішнє поле \mathbf{H}_1 еліпсоїдального кластеру.
- 8.22. Штучний діелектрик складається з однакових ідеально провідних металічних сферичних кластерів радіусом a , хаотично розподілених у вакуумі. Середня кількість кластерів в одиниці об'єму N . У цьому середовищі поширюється електромагнітна хвиля. Нехтуючи відмінністю поля, діючого на кожний кластер, від середнього поля, визначте електричну ϵ і магнітну μ проникності такого штучного діелектрика. За яких умов його можна розглядати як суцільне середовище?
- 8.23. Знайдіть без урахування втрат, частоту ларморової прецесії ω_k , в обмеженому феромагнітному зразку, який має форму еліпсоїдального кластера. Зразок знаходиться у зовнішньому однорідному полі \mathbf{H}_0 , прикладеному уздовж однієї із осей еліпсоїдального кластера. Вважайте відхилення вектора намагніченості \mathbf{M} від рівноважного положення малим.
- Вказівка.* У рівнянні Ландау – Лівшиця увійде тепер внутрішнє поле \mathbf{H}_1 , яке буде відрізнятися від зовнішнього поля \mathbf{H}_0 внаслідок розмагнічуючої дії форми тіла:
- $$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}', \quad H'_k = \mu_0 N_{kl} M_l,$$
- де N_{kl} – тензор розмагнічуючої дії форми.
- 8.24. Розв'яжіть попередню задачу з урахуванням втрат. (Враховувати лише члени, лінійні відносно ω_r).
- 8.25. Розгляньте вимушені коливання за наявності втрат у малому кластері еліпсоїдальної форми. Визначте компоненти тензора магнітної сприйнятливості χ_{ik} для високочастотного поля, вважаючи його амплітуду h малою порівняно з постійним полем H_0 .

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Задачи по физике твердого тела [Текст] / под ред. Г. Дж. Голдсмида. Пер. с англ. под ред. А. А. Гусева и М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. **Варикаш, В. М.** Избранные задачи по физике твердого тела [Текст] / В. М. Варикаш, Ю. М. Хачатрян. – Минск: Высшая школа, 1969. – 272 с.
3. **Жметко, Д. М.** Посібник для розв'язування задач з фізики твердого тіла [Текст] / Д. М. Жметко. – Запоріжжя: ЗДУ, 1999. – 52 с.
4. **Антипов, Б. Л.** Материалы электронной техники: Задачи и вопросы [Текст] / Б. Л. Антипов, В. С. Сорокин, В. А. Терехов. – СПб.: Лань, 2001. – 208 с.
5. **Ашкрофт, Н.** Физика твердого тела [Текст]: в 2 т. / Н. Ашкрофт, Н. Мермин; т. 1. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
6. **Ашкрофт, Н.** Физика твердого тела [Текст]: в 2 т. / Н. Ашкрофт, Н. Мермин; т. 2. – М.: Мир, 1979. – 424 с.
7. **Киттель, Ч.** Введение в физику твердого тела [Текст] / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
8. **Блейкмор, Дж.** Физика твердого тела [Текст] / Дж. Блейкмор. – М.: Мир, 1988. – 608 с.
9. **Уэрт, Ч.** Физика твердого тела [Текст] / Ч. Уэрт, Р. Томсон. – М.: Мир, 1969. – 560 с.
10. **Анималу, А.** Квантовая теория кристаллических твердых тел [Текст] / А. Анималу. – М.: Мир, 1981. – 576 с.
11. **Киттель, Ч.** Квантовая теория твердых тел [Текст] / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1967. – 492 с.
12. **Харрисон, У.** Теория твердого тела [Текст] / У. Харрисон. – М.: Мир, 1972. – 616 с.
13. **Хакен, Х.** Квантовополевая теория твердого тела [Текст] / Х. Хакен. – М.: Наука, 1980. – 341 с.
14. **Зиненко, В. И.** Основы физики твердого тела [Текст] / В. И. Зиненко, Б. П. Сорокин, П. П. Турчин. – М.: Физматлит, 2001. – 336 с.
15. **Перлин, Е. Ю.** Физика твердого тела. Оптика полупроводников, диэлектриков, металлов [Текст] / Е. Ю. Перлин,

- Т. А. Вартамян, А. В. Федоров. – СПб: СПбГУ ИТОМО, 2008. – 216 с.
16. **Винтайкин, Б. Е.** Физика твердого тела [Текст] / Б. Е. Винтайкин. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 360 с.
 17. **Елманов, Г. Н.** Физика твердого тела [Текст] / Е. Н. Елманов, А. Г. Залужный, В. И. Скрытный, Е. А. Смирнов, В. Н. Яльцев. – М.: МИФИ, 2007. – 636 с. – (Физическое материаловедение: в 6 т. / Под общей ред. Б. А. Калина; т. 1)
 18. **Горбачев, В. В.** Физика полупроводников и металлов [Текст] / В. В. Горбачев, Л. Г. Спицына. – М.: Металлургия, 1976. – 368 с.
 19. **Най, Дж.** Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц [Текст] / Дж. Най. – М.: ИЛ, 1960. – 386 с.
 20. **Белонучкин, В. Е.** Задачи по общей физике [Текст] / В. Е. Белонучкин, Д. А. Заикин, А. С. Кингсеп, Г. Р. Локшин, Ю. М. Ципенюк. – М.: Физматлит, 2001. – 336 с.
 21. **Чертов, А. Г.** Задачник по физике [Текст] / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М.: Физматлит, 2007. – 640 с.
 22. **Иродов, И. Е.** Задачи по квантовой физике [Текст] / И. Е. Иродов. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 216 с.
 23. **Новиков, С. М.** Сборник заданий по общей физике [Текст] / С. М. Новиков. – М.: Оникс: Мир и образование, 2006. – 512 с.
 24. **Переломова, Н. В.** Задачник по кристаллофизике [Текст] / Н. В. Переломова, М. М. Тагиева. – М. Наука, 1972. – 192 с.
 25. **Лифшиц, Е. М.** Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния [Текст] / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с. – (Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; т. 9).
 26. **Кубо, Р.** Статистическая механика [Текст] / Р. Кубо. – М.: Мир, 1967. – 452 с.
 27. **Шиллинг, Г.** Статистическая физика в примерах [Текст] / Г. Шиллинг. – М.: Мир, 1976. – 431 с.
 28. Задачи по термодинамике и статистической физике [Текст] / под ред. П. Ландсберга. – М.: Мир, 1974. – 640 с.
 29. **Кондратьев, А. С.** Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории [Текст] / А. С. Кондратьев, П. А. Райгородский. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с.

30. **Ландау, Л. Д.** Электродинамика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2001. – 656 с. – (Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; т. 8).
31. **Ландау, Л. Д.** Физическая кинетика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2001. – 536 с. – (Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; т. 10).
32. **Батыгин, В. В.** Сборник задач по электродинамике [Текст] / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М.: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2002. – 640 с.
33. **Топтыгин, И. Н.** Теория электромагнитных явлений в веществе [Текст] / И. Н. Топтыгин. – М.-Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2005. – 848 с. – (Современная электродинамика: в 2 ч. / И. Н. Топтыгин; ч. 2).
34. **Находкін, М. Г.** Фізичні основи мікро- та наноелектроніки / М. Г. Находкін, Д. І. Шека. – К.: КНУ ім. Т. Г. Шевченка, 2005. – 431 с.
35. **Шмидт, В. В.** Введение в физику сверхпроводников [Текст] / В. В. Шмидт. – М.: МЦНМО, 2000. – XIV+402 с.
36. **Лахно, В. Д.** Кластеры в физике, химии, биологии [Текст] / В. Д. Лахно. – Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001. – 256 с.
37. **Шик, А. Я.** Физика низкоразмерных систем [Текст] / А. Я. Шик, Л. Г. Бакуева, С. Ф. Мусихин, С. А. Рыков. – СПб: Наука, 2001. – 160 с.
38. **Жукарев, А. С.** Задачи повышенной сложности в курсе общей физике [Текст] / А. С. Жукарев, А. Н. Матвеев, В. К. Петерсен; Под общей ред. А. Н. Матвеева. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 192 с.
39. **Суздалев, И. П.** Нанотехнология: физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов [Текст] / И. П. Суздалев. – М.: КомКнига, 2006. – 592 с.

ДОДАТОК А
Кристалічні ґратки твердих тіл

Таблиця А.1 – Характеристики кубічних ґраток

Характеристика	Тип ґратки		
	Проста	ОЦК	ГЦК
Об'єм елементарної комірки	a^3	a^3	a^3
Кількість точок ґратки на одну комірку	1	2	4
Об'єм примітивної комірки	a^3	$\frac{a^3}{2}$	$\frac{a^3}{4}$
Кількість точок ґратки на одиницю об'єму	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{2}{a^3}$	$\frac{4}{a^3}$
Кількість найближчих сусідів	6	8	12
Відстань між найближчими сусідами	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 0,866a$	$\frac{a}{\sqrt{2}} = 0,707a$
Кількість сусідів, які сліду- ють за найближчими	12	6	6
Відстань до сусідів, які слі- дують за найближчими	$a\sqrt{2}$	a	a

Таблиця А.2 – Тип кристалічної ґратки і густина ρ деяких металів при $T = 293 \text{ K}$

Метал	Тип кристалічної ґратки	ρ ,	Метал	Тип кристалічної ґратки	ρ ,
		$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$			$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
Алюміній Al	ГЦК	2 698	Молібден Mo	ОЦК	10 220
Барій Ba	ОЦК	3 594	Нагрій α -Na	ГЦУ	971
Берилій α -Be	ГЦУ	1 848	Нікол Ni	ГЦК	8 902
Ванадій V	ОЦК	6 110	Ніобій Nb	ОЦК	8 570
Вольфрам W	ОЦК	19 300	Станум α -Sn	ПК	5 750
Гадоліній α -Gd	ГЦУ	7 900	Осмій Os	ГЦУ	22 590
Гафній α -Hf	ГЦУ	13 310	Паладій Pd	ГЦК	12 020
Гольмій α -Ho	ГЦУ	8 795	Платина Pt	ГЦК	21 450
Германій Ge	ПК	5 323	Реній Re	ГЦУ	21 020
Європій Eu	ОЦК	5 243	Родій Rh	ГЦК	12 410
Ферум α -Fe	ОЦК	7 874	Рубідій Rb	ОЦК	1 532
Аурум Au	ГЦК	19 320	Іплюмбум Pb	ГЦК	11 350
Іридій Ir	ГЦК	22 560	Аргентум Ag	ГЦК	10 500
Ітрій α -Y	ГЦУ	4 465	Скандій α -Sc	ГЦУ	2 989
Кадмій α -Cd	ГЦУ	8 650	Стронцій α -Sr	ГЦК	2 540
Калій K	ОЦК	862	Талій α -Tl	ГЦУ	11 850
Кальцій α -Ca	ГЦК	1 550	Тантал Ta	ОЦК	16 654
Кобальт α -Co	ГЦК	8 900	Тітан α -Ti	ГЦУ	4 540
Лантан α -La	ГЦУ	6 145	Хром Cr	ОЦК	7 190
Літій β -Li	ГЦК	534	Цезій Cs	ОЦК	1 873
Магній Mg	ГЦУ	1 738	Цинк Zn	ГЦУ	7 133
Манган α -Mn	ОЦК	7 440	Цирконій α -Zr	ГЦУ	6 506
Купрум Cu	ГЦК	8 960	Ербій α -Er	ГЦУ	9 066

ДОДАТОК Б

Теплові властивості твердих тіл

Таблиця Б.1 – Температури Дебая та температури плавлення деяких речовин

Матеріал	Температура плавлення $T_{пл}$, К	Температура Дебая Θ_D , К
Літій	454	344
Натрій	371	158
Алюміній	933	428
Калій	336	91
Титан	1941	420
Ванадій	2163	380
Хром	2176	630
Залізо	1808	470
Кобальт	1765	445
Вольфрам	3683	400
Мідь	1356	343
Реній	3453	430
Ніобій	2760	275
Молібден	2898	450
Родій	2233	480
Паладій	1825	274
Срібло	1234	225
Іридій	2716	420
Платина	2042	240
Гафній	2500	252
Цирконій	2128	291
Золото	1336	165
Свинець	600	105
Тантал	3269	240
Нікель	1726	450

ДОДАТОК В
Електричні властивості твердих тіл

Таблиця В.1 – Електронні густини деяких металічних елементів згідно моделі вільних електронів

Елемент	Z	$n, 10^{22} \text{ см}^{-3}$	$r_s, \text{ \AA}$	$\frac{r_s}{a_0}$
Li (78 K)	1	4,70	1,72	3,25
Na (5 K)	1	2,65	2,08	3,93
K (5 K)	1	1,40	2,57	4,86
Rb (5 K)	1	1,15	2,75	5,20
Cs (5 K)	1	0,91	2,98	5,62
Cu	1	8,47	1,41	2,67
Ag	1	5,86	1,60	3,02
Au	1	5,90	1,59	3,01
Be	2	24,7	0,99	1,87
Mg	2	8,61	1,41	2,66
Ca	2	4,61	1,73	3,27
Sr	2	3,55	1,89	3,57
Ba	2	3,15	1,96	3,71
Nb	1	5,56	1,63	3,07
Fe	2	17,0	1,12	2,12
Mn (α)	2	16,5	1,13	2,14
Zn	2	13,2	1,22	2,30
Cd	2	9,27	1,37	2,59
Hg (78 K)	2	8,65	1,40	2,65
Al	3	18,1	1,10	2,07
Ga	3	15,4	1,16	2,19
In	3	11,5	1,27	2,41
Tl	3	10,5	1,37	2,48
Sn	4	14,8	1,17	2,22
Pb	4	13,2	1,22	2,3
Bi	5	14,1	1,19	2,25
Sb	5	16,5	1,13	2,14

Таблиця В.2 – Питомі електричні опори та час релаксації деяких елементів (при $T = 273 \text{ K}$)

Елемент	ρ , мкОм·см	τ , 10^{-14} с
Li	8,55	0,88
Na	4,2	3,2
K	6,1	4,1
Rb	11,0	2,8
Cs	18,8	2,1
Cu	1,56	2,7
Ag	1,51	4,0
Au	2,04	3,0
Be	2,8	0,51
Mg	3,9	1,1
Ca	3,43	2,2
Sr	23	0,44
Ba	60	0,19
Nb	15,2	0,42
Fe	8,9	0,24
Zn	5,5	0,49
Cd	6,8	0,56
Hg	Плавиться	—
Al	2,45	0,80
Ga	13,6	0,17
In	8,0	0,38
Tl	15	0,22
Sn	10,6	0,23
Pb	19,0	0,14
Bi	107	0,23
Sb	39	0,55

Таблиця В.3 – Експериментальні значення коефіцієнта теплопровідності та числа Лоренца деяких металів (при $T = 273 \text{ K}$)

Елемент	$\kappa, \frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}}$	$\frac{\kappa}{\sigma T}, 10^{-8} \frac{\text{Вт} \cdot \text{Ом}}{\text{К}^2}$
Li	0,71	2,22
Na	1,38	2,12
K	1,0	2,23
Rb	0,6	2,42
Cu	3,85	2,20
Ag	4,18	2,31
Au	3,1	2,32
Be	2,3	2,36
Mg	1,5	2,14
Nb	0,52	2,90
Fe	0,80	2,61
Zn	1,13	2,28
Cd	1,0	2,49
Al	2,38	2,14
In	0,88	2,58
Tl	0,5	2,75
Sn	0,64	2,48
Pb	0,38	2,64
Bi	0,09	3,53
Sb	0,18	2,57

Таблиця В.4 – Ширина забороненої зони у деяких напівпровідників

Речовина	E_g , еВ ($T = 300$ К)	E_g , еВ ($T = 0$ К)
Si	1,12	1,17
Ge	0,67	0,75
PbS	0,37	0,29
PbSe	0,26	0,17
PbTe	0,29	0,19
InSb	0,16	0,23
GaSb	0,69	0,79
AlSb	1,5	1,6
InAs	0,35	0,43
InP	1,3	—
GaAs	1,4	—
GaP	2,2	—
Sn (сіре олово)	0,1	—
Se (сірий)	1,8	—
Te	0,35	—
B	1,5	—
C (алмаз)	5,5	—

ДОДАТОК Г

Емісійні властивості матеріалів

Таблиця Г.1 – Робота виходу електрона

Елемент	ϕ , eВ	Елемент	ϕ , eВ	Елемент	ϕ , eВ
Li	2,38	Ge	4,76	Sm	2,7
Be	3,92	As	5,11	Gd	3,1
B	4,5	Se	4,72	Tb	3,15
C	4,7	Rb	2,35	Dy	3,25
Na	2,35	Y	3,3	Ho	3,22
Mg	3,64	Zr	3,9	Er	3,25
Al	4,25	Nb	3,99	Tm	3,1
Si	4,8	Mo	4,3	Hf	3,53
S	6,0	Ru	4,6	Ta	4,12
K	2,22	Pd	4,8	W	4,54
Ca	2,8	Ag	4,3	Re	5,0
Sc	3,3	Cd	4,1	Os	4,7
Ti	3,92	In	3,8	Ir	4,7
V	4,12	Sn	4,38	Pt	5,32
Cr	4,58	Sb	4,08	Au	4,3
Mn	3,83	Te	4,73	Hg	4,52
Fe	4,31	Cs	1,81	Tl	3,7
Co	4,41	Ba	2,49	Pb	4,0
Ni	4,5	La	3,3	Bi	4,4
Cu	4,4	Ce	2,7	Th	3,3
Zn	4,24	Pr	2,7	U	3,3
Ga	3,96	Nd	3,2		

ДОДАТОК Д

Магнітні характеристики твердих тіл

Таблиця Д.1 – Критична температура T_c та намагніченість насичення M_{s0} деяких феромагнетиків

Речовина	T_c , К	M_{s0} , Гс ¹
Fe	1043	1752
Co	1388	1446
Ni	627	510
Gd	293	1980
Dy	85	3000
CrBr ₃	37	270
Au ₂ MnAl	200	323
Cu ₂ MnAl	630	726
Cu ₂ MnIn	500	613
EuO	77	1910
EuS	16,5	1184
MnAs	318	870
MnBi	670	675
GdCl ₃	2,2	550

¹ При $T = 0$ К

ДОДАТОК Е

Оптичні характеристики твердих тіл

Таблиця Е.1 – Статична діелектрична проникність, оптична діелектрична проникність та частота поперечного оптичного фону для лужно-галоїдних кристалів.

Сполука	ε_0	ε_∞	$\frac{\hbar\omega_T}{k_B}, \text{K}^1$
LiF	9,01	1,96	442
NaF	5,05	1,74	354
KF	5,46	1,85	274
RbF	6,48	1,96	224
CsF	—	2,16	125
LiCl	11,95	2,78	276
NaCl	5,90	2,34	245
KCl	4,84	2,19	215
RbCl	4,92	2,19	183
CsCl	7,20	2,62	151
LiBr	13,25	3,17	229
NaBr	6,28	2,59	195
KBr	4,90	2,34	166
RbBr	4,86	2,34	139
CsBr	6,67	2,42	114
LiI	16,85	3,80	—
NaI	7,28	2,93	167
KI	5,10	2,62	156
RbI	4,91	2,59	117,5
CsI	6,59	2,62	94,6

¹ Визначено за максимумом інтенсивності залишкових променів

Таблиця Е.2 – Статичні діелектричні проникності ряду ковалентних та ковалентно-йонних кристалів зі структурами алмазу (а), цинкової обманки (ц) та вюрциту (в)

Кристал	Структура	ϵ_0
C	а	5,7
Si	а	12,0
Ge	а	16,0
Sn	а	23,8
SiC	ц	6,7
GaP	ц	8,4
GaAs	ц	10,9
Ga Sb	ц	14,4
InP	ц	9,6
InAs	ц	12,2
InSb	ц	15,7
ZnO	в	4,6
ZnS	в	5,1
ZnSe	ц	5,8
ZnTe	ц	8,3
CdS	в	5,2
CdSe	в	7,0
CdTe	ц	7,1
BeO	в	3,0
MgO	ц	3,0

ДОДАТОК Ж

Критичні параметри надпровідників

Таблиця Ж.1 – Критичні температури і критичні магнітні поля елементів-надпровідників

Елемент	T_c , К	H_c , $\frac{A}{M}$	Елемент	T_c , К	H_c , $\frac{A}{M}$
Al	1,175	1,318	Pa	1,4	
Be	0,026		Pb	7,196	10,091
Cd	0,517	0,352	Re	1,697	2,513
Ga	1,083	0,744	Ru	0,49	0,867
Hf	0,128		Sn	3,722	3,833
Hg (α)	4,154	5,165	Ta	4,47	10,418
Hg (β)	3,949	4,26	Tc	7,8	17,719
In	3,408	3,537	Th	1,38	2,011
Ir	0,1125	0,201	Ti	0,40	0,704
La (α)	4,88	10,053	Tl	2,38	2,237
La (β)	6,00	13,773	V	5,40	17,694
Lu	0,1	5,027	W	0,0154	0,014
Mo	0,915	1,206	Zn	0,850	0,679
Nb	9,25	25,887	Zr	0,61	0,591
Os	0,66	0,88			

Навчальне видання

КОРОТУН Андрій Віталійович
ТИТОВ Ігор Миколайович
КУНИЦЬКИЙ Юрій Анатолійович
ПОГОСОВ Валентин Вальтерович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ФІЗИКИ КОНДЕНСОВАНОГО СТАНУ
В двох томах

Том 2
ЕЛЕКТРОННІ ВЛАСТИВОСТІ

Технічний редактор *Рибіна Ю. А.*
Комп'ютерне верстання *Коротун А. В., Титов І. М.*
Коректор *Куницький Ю. А.*
Графіка *Коротун А. В.*
Обкладинка *Погосов В. В.*

Підписано до друку 21.03.2011. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 27,3.
Тираж 300 прим. Зам. № 554.

Запорізький національний технічний університет
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769-82-96, 220-12-14

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
від 27.12.2005 р., серія ДК № 2394